ALICIA AVILA

CONOCIMIENTOS EN CONSTRUCCIÓN SOBRE LOS NÚMEROS DECIMALES: LOS RESULTADOS DE UN ACERCAMIENTO CONCEPTUAL

Résumé. Construction de connaissances sur les nombres décimaux : résultats d'une approche conceptuelle. Il est bien connu que les nombres décimaux sont difficiles à comprendre, comme le montrent les résultats de multiples recherches. En général, ce sujet est signalé comme l'un des plus complexes pour les élèves de 10 à 12 ans. C'est à cet âge qu'est attendue la maîtrise de ces nombres, au vu des programmes d'enseignement de nombreux pays. Le cas mexicain ne fait pas exception, eu égard au taux très bas de succès dans les examens nationaux de mathématiques. Dans cet article, nous présentons un cas, dans un certain sens, hors du commun : les connaissances en construction sur les nombres décimaux dans une classe de la dernière année de l'école primaire au Mexique, dont l'institutrice a appliqué une approche conceptuelle du sujet. Nous constatons que les élèves sont en train de construire des connaissances assez importantes sur ces nombres, notamment celles qui leur permettent d'établir des équivalences, d'ordonner des nombres décimaux ou d'en mettre d'autres entre deux *nombres faussement consécutifs*. Ceci pourrait être la marque d'une première approche de la propriété de densité des décimaux. Même si l'on observe aussi des traitements syntactiques, on perçoit l'influence des approches conceptuelles promues par l'institutrice. Ceci montre qu'à condition que l'enseignement s'écarte de l'idée que les décimaux ne sont qu'une simple écriture, il est possible d'amener les élèves à une compréhension des décimaux à l'âge proposé par le curriculum officiel.
Mots – clés *:* école primaire, processus cognitifs, registres de représentation, nombres décimaux, relation d'ordre, équivalence, densité, droite numérique.

Abstract. Knowledge under construction about decimal numbers: Results from a conceptual approach. According to results from many research reports, it is difficult to understand decimals; in general, it is reported that this subject is very difficult for children from 10 to 12 years of age, when they have to learn it as established in the curriculum for elementary education of many countries. Mexico is not the exception: results in national exams of mathematics show that this is one of the themes in which students exhibit the lowest scores. This paper reports on findings of a case that, to a certain point, differs from that situation. We present the under-construction knowledge about decimals of a sixth-grade group of students from elementary school (11-12 years of age) whose teacher—with a special training in mathematics—tried an instructional practice based on a conceptual perspective to this topic. It was evidenced that very important knowledge about decimals was under construction, outstanding that which allows establishing equivalences, ordering decimals, or interpolating decimals between two falsely consecutive decimals—this last one seemed to reveal an incipient understanding of the density property of decimals. Although syntactical treatments were observed as well, the influence of the conceptual perspective promoted by the teacher was noticeable. It is shown that if teaching practices move away from the idea that decimals are just a way of writing numbers, then it is

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 29 - 60.

possible to set students on the right road to understanding decimals at the age proposed in the official curriculum.

Resumen. De acuerdo con resultados de múltiples investigaciones, los números decimales son difíciles de comprender. En general, se reporta que el tema es muy complejo para niños de 10 a 12 años de edad, que es cuando deben estudiarlo según se establece en el currículum de la educación elemental de muchos países. México no es la excepción, éste es uno de los temas en los que los estudiantes muestran más bajo desempeño en los exámenes nacionales de matemáticas. En este artículo se presenta un caso que discrepa, hasta cierto punto, de esa situación. Se exponen los conocimientos en construcción sobre los números decimales de un grupo de niños que cursaban el sexto grado de educación primaria (11-12 años), y cuya maestra —con una formación especial en matemáticas— intentó un acercamiento conceptual al tema. Se constata que estaban en construcción conocimientos importantes sobre estos números, destacando los que permiten establecer equivalencias, ordenar decimales, o insertar otros entre dos falsos consecutivos; esto último parece reflejar una incipiente comprensión de la propiedad de densidad de los decimales. Aunque se observaron también tratamientos sintácticos, se percibió la influencia del acercamiento conceptual promovido por la profesora. Se muestra que es posible encaminar a los alumnos hacia la comprensión de los decimales en la edad en que el currículum oficial lo propone, si la enseñanza se aleja de la idea de que los decimales son sólo una escritura.

1. Problemática

Guy Brousseau señaló hace ya bastante tiempo que algunos conocimientos sobre los números naturales constituyen luego un obstáculo para comprender los decimales (cf. Brousseau; 1981 y 1983). Una amplia cantidad de indagaciones realizadas después de los trabajos de este investigador, han constatado el hecho una y otra vez: lo más común es que se traslade la lógica de los números naturales al interpretar los decimales y al operar con ellos (Perrin-Glorian; s/f; Brown 1981; Resnik et.al, 1989; Roditi; 2007). La idea planteada por Brousseau en los años ochenta es apoyo fundamental de este escrito, tanto porque las indagaciones posteriores constatan sus afirmaciones, como porque la traslación – errónea - de la *lógica natural* al ámbito de los decimales, no siempre se resuelve con el paso del tiempo, según lo reportan algunas investigaciones más recientes (p.ej. Alatorre y cols; 2002; Roditi; 2007).

Brousseau señaló, en el contexto de las reformas conocidas como "matemáticas modernas", que en ese entonces las dificultades sobre los decimales no habían sido identificadas o eran consideradas como menores: "Si hay en matemáticas una enseñanza que no se presta a ninguna discusión y no presenta ninguna dificultad, es la de los decimales" (Brousseau; (1980; 175). Pero esa creencia – que las investigaciones del propio Brousseau pronto permitirían rebatir - persiste en muchas latitudes. En México, por ejemplo, las dificultades de niños y jóvenes para desprenderse de la lógica de los naturales al interpretar los decimales han sido documentadas a través de los exámenes nacionales conocidos como EXCALE[1] (cf. Backhoff, 2006; Avila y García, 2008; INEE, 2009) así como en los llamados ENLACE[2] (cf. SEP; 2006, o SEP, 2011a). Y estas dificultades parecen relacionadas con la manera en que los decimales se enseñan.

1.1. Los decimales en las pruebas nacionales

En la primera edición de los Excale, se reportó que al concluir la primaria sólo entre un 25 y un 30% de los niños daba respuestas correctas en las tareas de comparación y ordenación de decimales, porcentaje que se repitió en tareas de identificación de decimales equivalentes, estando éstos representados mediante escrituras con punto (Backhoff, 2006). En general, entre los conocimientos y habilidades matemáticas que fueron evaluados ese año y que más del 50% de los estudiantes tenía probabilidades de resolver con éxito, no hubo ninguno relacionado con el tema de los números decimales (Avila y García, 2008, 87).
En la edición de los Excale 2009, los resultados son muy similares. Destaco de esta edición los bajos porcentajes de respuestas correctas alcanzados en ítems que implicaban:

Identificar la escritura de un número decimal hasta milésimos (45%)
Convertir, a decimales, números fraccionarios con denominador distinto a una potencia de 10 (44%)
Identificar la representación con letra (en lenguaje natural) de un número decimal hasta centésimos (43%)
Identificar la equivalencia entre números decimales hasta milésimos (42%)
Comparar números decimales no enteros hasta milésimos (34%) (cf. INEE, 2009).

En estas pruebas no se incluyeron ítems para evaluar el conocimiento de la propiedad de densidad de los decimales en el sexto grado. Sobre dicha propiedad, sólo se tiene como referente un reactivo aplicado en el año 2006 en tercero de secundaria (Backhoff, 2006) consistente en “Usar la propiedad de densidad de los decimales”, en la que se obtuvo un 53% de aciertos.

La representación de los decimales sobre la recta numérica – tema incluido en los EXCALE con una única pregunta - también se muestra problemática en ese examen y en los más recientes de ENLACE (SEP, 2011a), que reportan un 38 y un 44% de aciertos en las preguntas correspondientes.

---

[1] EXCALE: Exámenes de la calidad y el logro educativo, elaborados y aplicados a muestras nacionales de estudiantes de educación básica por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
[2] ENLACE: Exámenes Nacionales del Logro Educativo, elaborados y aplicados anualmente por la Secretaría de Educación Pública a todos los estudiantes de educación básica.

Los exámenes ENLACE tienen un menor grado de confiabilidad que los Excale, sin embargo, los consideré también como referente por ser los de aplicación más reciente; por supuesto sin olvidar que son sólo un indicador del aprendizaje logrado en matemáticas al finalizar la primaria. De estos exámenes, me interesa señalar los porcentajes de aciertos en las tareas de conversión de números decimales (expresados con punto) a fracciones con denominador 2, 4, 5 y 8 y viceversa: 46% (cf. SEP; 2011a).

Por último, comento que en una pregunta que solicitó "resolver problemas que impliquen el uso del valor posicional de una cifra ubicada a la derecha del punto hasta el orden de los milésimos" se obtuvo 34% de aciertos (cf. SEP, 2011a).

Como se habrá observado, en general, lo porcentajes de aciertos en cuestiones vinculadas con los decimales no alcanzan el 50% en ninguna de las pruebas referidas. Estos porcentajes de aciertos servirán de referencia para ponderar los conocimientos del grupo participante en la investigación.

1.2. Los decimales en los programas de educación primaria

Conforme a los programas de educación primaria vigentes, los niños que concluyen este nivel educativo (generalmente a la edad de 12 años) deberían lograr un conocimiento adecuado de estos números y algunas de sus propiedades. Deberían saber ordenarlos, entender que entre dos decimales siempre hay otro decimal; también convertir fracciones decimales a escrituras decimales, encontrar equivalencias entre distintos decimales, ubicar estos números en la recta numérica y resolver problemas aditivos y multiplicativos que los impliquen (cf. SEP: 2006a; SEP; 2011b). ¿Hasta dónde una enseñanza que enfatice los aspectos conceptuales de estos números podrá producir mejores aprendizajes que los que reportan los exámenes nacionales?, o ¿La dificultad conceptual propia de los decimales marca límites infranqueables, de ahí que reiteradamente las investigaciones y exámenes nacionales arrojen malos resultados en el tema?

1.3. Supuestos de la investigación

Lo hasta aquí expuesto permite considerar los conocimientos sobre los decimales como un objeto de investigación relevante. Pero no es mi interés repetir resultados y dificultades conocidas sobre estos números. Lo que pretendo en este escrito va en otra dirección. Consiste en analizar los conocimientos en construcción sobre los números decimales de un grupo de niños que cursan el último grado de la educación primaria (11-12 años) y cuya docente – con una preparación especial en enseñanza de las matemáticas - ha intentado un *acercamiento conceptual* a estos números. También interesa saber si existe alguna relación entre la comprensión de los distintos aspectos y propiedades de los decimales, así como entre las diversas formas de representarlos.

Para el desarrollo de la indagación asumimos varios supuestos:

A. El concepto de número decimal es complejo; su comprensión no resulta fácil a los alumnos, aun cuando sus profesores crean lo contrario (cf. Avila; 2008).

B. Conforme a los principios del socio-constructivismo, el aprendizaje matemático escolar está mediado por la acción del maestro y los intercambios entre compañeros. El rol del profesor y las experiencias que éste ofrezca a sus alumnos, son fundamentales en los aprendizajes.

C. También asumo, siguiendo a Duval (1993), que la comprensión de un objeto matemático requiere necesariamente aprehender y producir representaciones diversas, y transitar entre esas distintas representaciones, puesto que: "Un lenguaje no ofrece las mismas posibilidades de representación que una figura o que un diagrama […] y de un registro de representación a otro no son los mismos aspectos del contenido los que son representados" (Duval; 1993; 127), ni las mismas propiedades las que se destacan. (cf. Duval, 1993 y 1995).

D. El conocimiento del número decimal, como ha señalado R. Adjiage para el conjunto de los racionales (Adjiage; 2003 y 2005), supone poder movilizarlo en diferentes situaciones de referencia, y utilizarlo en diferentes registros de representación, articulando las situaciones y las representaciones.

En otras palabras, y en acuerdo con los autores mencionados, nuestro punto de partida es que los decimales implican a la vez la pluralidad de sus representaciones y referentes y la unicidad del concepto que subyace en ellas. Por ejemplo, el número que en lenguaje natural llamamos *veinte centésimos* – expresión que es en sí un registro de representación - puede representarse al menos en los siguientes modos:

20/100, **.**2000 1/5

|___|___|___|____|____|

0 **.**20 **1**

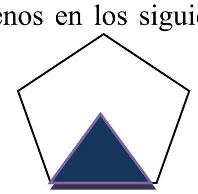


Figura 1. Algunos modos de representación de veinte centésimos

Es un reto para la enseñanza hacer comprender a los alumnos que estos diversos registros representan el mismo número, o dicho más formalmente, hacerlos comprender la unicidad del concepto decimal subyacente en esta pluralidad de representaciones.

Ahora bien, la comprensión, tratamiento y coordinación de registros implica dificultades particulares en el caso de los decimales; las razones son diversas:

a) La tendencia a la confusión entre número y representación del número que afecta a todos los conjuntos numéricos pero que se agudiza en el caso de los decimales (cf. Centeno; 1997; Sáiz et. al; 2011);
b) La amplia diversidad de registros en que estos números pueden representarse;
c) La interferencia de algunos conocimientos sobre los números naturales que hacen obstáculo para la comprensión de los decimales.

1.4. Objetivos de la investigación

La complejidad conceptual y representacional de los decimales me obligó a enfocarme sólo en algunos de sus aspectos: orden, equivalencia y densidad, y a algunas de sus representaciones: escrituras decimales (con punto), representación en la recta numérica y mediante superficies fraccionadas. Incorporé también al análisis los tratamientos de que se valen los niños para realizar las tareas propuestas. Es importante hacer aquí una acotación metodológica. Entiendo los tratamientos no en el sentido de R. Duval, sino simplemente como la actividad cognitiva que despliega el alumno sobre la situación planteada para obtener la respuesta solicitada. En términos de E. Roditi (2007), indagué si se trata de tratamientos sintácticos o de tratamientos semánticos, diferencia que considero indicador del nivel de comprensión de los números que en la cultura escolar mexicana son llamados *números con punto*. En menor medida analicé el tránsito entre los distintos registros de representación de los decimales.

Con base en lo antes expuesto, mi interés fue identificar los conocimientos sobre los números decimales que pueden construir los niños si se les ofrece un *acercamiento conceptual* al tema. Con el término *conceptual* me refiero a un acercamiento que destaca la naturaleza de los decimales: la relación de orden, la de equivalencia, la propiedad de densidad, los significados que subyacen a su representación decimal.

Específicamente, indagamos:

a) Qué conocimientos respecto de los números decimales muestran los niños de un grupo de sexto grado con desempeño académico destacado y cuya maestra ha favorecido un acercamiento conceptual a estos números;
b) Si estos conocimientos son distintos de los reportados en las pruebas nacionales que ponderan el logro académico de los estudiantes;
c) Qué tratamientos utilizan estos niños para construir las respuestas que se les solicitan;
d) Qué huellas de la enseñanza se identifican en esos tratamientos y qué papel juegan en ellos los procedimientos aprendidos en la escuela.

2. Estrategia de indagación

2.1. La maestra y el grupo participante

2.1.1. El grupo

El grupo participante en la investigación (en adelante el grupo), de sexto grado de educación primaria, está compuesto por 28 niños de 11 años (excepto uno de 10 y uno de 12) y pertenece a una escuela pública de jornada ampliada[3] ubicada en la ciudad de México. Son niños de nivel socio-económico medio y medio-bajo, pero la escuela se considera de desempeño destacado en matemáticas con base en los parámetros que se explican a continuación.

En México, los exámenes de *Evaluación Nacional del Logro Académico* conocidos como "Prueba ENLACE" se aplican anualmente en todas las escuelas primarias. El puntaje máximo de estos exámenes es de 800 puntos, pero se considera un reto que los grupos escolares alcancen 600 como promedio. En la última aplicación de ENLACE (2011), el grupo rebasó con amplitud esta meta, alcanzando 680 puntos en matemáticas. Estos datos permiten considerar que el grupo - comparativamente y en esos términos - tiene un desempeño sobresaliente en matemáticas.

La elección del grupo fue intencional, se escogió bajo el interés ya señalado de identificar los conocimientos que se generan sobre los números decimales cuando éstos se enseñan con un enfoque que acerca a sus propiedades y su estructura y que, con el afán de sintetizar he llamado *enfoque conceptual*.

2.1.2. La profesora del grupo

Los logros académicos del grupo están muy probablemente asociados al perfil de la profesora y su acción docente en matemáticas. Ella tiene 20 años de servicio y se ha interesado especialmente en la enseñanza de esta disciplina, motivo por el que ha buscado prepararse más en esta temática. Es graduada en una maestría con especialidad en educación matemática, donde estudió textos sobre los números decimales y su enseñanza. "Siempre he andado con lo de matemáticas, pero lo de decimales lo aprendí cuando leí el librito aquél en la maestría" (se refiere al libro *Los decimales más que una escritura*, cuya ficha aparece en la bibliografía). "En ese libro… aprendí lo que es un decimal. Porque aquí [en las escuelas], nos vamos con la idea de que los decimales son los números con punto, les enseñamos la *tabla de posiciones* y ya pasamos a las operaciones".

La maestra atendió al grupo también en el quinto grado, por lo que - conforme a los programas vigentes en educación primaria - la enseñanza de los decimales a estos niños ha estado a su cargo.

---

[3] Escuelas donde los niños permanecen para comer, hacer tareas y actividades co-curriculares una vez concluido el horario normal de clases.

2.2. El *acercamiento conceptual* a los decimales y su contraste con las tradiciones de la escuela mexicana

2.2.1. La secuencia

La secuencia trabajada en el grupo para enseñar y aprender los decimales fue reconstruida a partir de las dos entrevistas realizadas a la profesora; de las páginas de libros de texto utilizadas y de las libretas de los niños que la profesora me permitió revisar. La secuencia es la siguiente:

1. Representación, mediante el *cuadrado-unidad*, de décimos, centésimos y milésimos (ver anexo 1)
2. Introducción a la comparación de decimales mediante su representación en el *cuadrado-unidad* (comparación con apoyo visual).
3. Repaso del valor posicional en la *tabla numérica*, la cual se anota en el pizarrón cada vez que se utiliza; la maestra enfatiza sobre la tabla: *"hacia la derecha la cifra representada tienen un valor 10 veces menor que la cifra de la izquierda y, al revés, hacia la izquierda, el valor es 10 veces mayor"*.
4. Equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos y uso del cero para establecer dichas equivalencias; la maestra enfatiza: "un décimo equivale a diez centésimos, y equivale a cien milésimos…"
5. Ubicación de decimales en la recta numérica y expresión, mediante escrituras decimales, de puntos señalados en la recta;
6. Noción de densidad de los decimales en los decimales, a partir de subdivisiones decimales sobre la recta[4];
7. Conversión de fracciones a decimales*
8. Integración de diversos registros de representación*

La profesora considera que todos los aspectos de los decimales trabajados en el grupo son importantes.

> "Antes, cuando no sabía yo gran cosa, me centraba en la escritura, que fuera correcta, y nos íbamos a las operaciones, pero ya con las nuevas lecciones que empezaron a traer los libros, las empecé a resolver yo para ver qué dificultades irían a tener los niños, como la representación en la recta numérica, la conversión de fracciones a decimales, de hecho todo lo que nos va demandando el currículum pienso que es importante".

La dinámica de las clases en el grupo, se da alrededor de la resolución de situaciones y ejercicios - generalmente los que vienen en los libros de texto

[4] En el inciso 3.7 se explica por qué se habla de densidad de los decimales en los decimales.

* Las tareas marcadas con asterisco no había sido trabajada cuando se aplicó el cuestionario y se realizaron las entrevistas a los niños.

gratuitos, u otros que la profesora incorpora, - pero en medio de un ambiente de libertad intelectual:

> Investigadora: ¿Cómo das las clases, les explicas, les planteas problemas, les pones ejemplos, situaciones que los hagan pensar…?
>
> Maestra: Yo pienso que ellos son los que me hacen pensar… porque lo que sí, es que se da apertura a todo tipo de respuestas y de preguntas […]. Hay algunos que se quedan '*un poquito cortos'*, pero hay otros que piensan cosas que no se les han enseñado.

El aspecto de los decimales que a la profesora se le ha hecho más difícil enseñar: "es esta parte de la densidad. Yo digo que porque los alumnos insisten en darle el mismo tratamiento de los números naturales a los decimales, o a los fraccionarios, entonces esta parte de "seguir dividiendo" sí les ha costado trabajo 'verla'".

También considera necesario reiterar que los décimos son la décima parte de la unidad, que los centésimos son la centésima parte y que los milésimos son la milésima parte de la unidad, pues "[…] en los niños hay el problema de que [piensan que] si son 10, son más chicos, y si son mil son más grandes, por eso los vamos representando, y en el libro de quinto, el de la reforma de 1993 [SEP, 2000], viene un ejercicio muy claro para eso (se refiere al *cuadrado-unidad* y a una lección que se desarrolla utilizándolo).

2.2.2. El enfoque propio de la tradición mexicana[5]

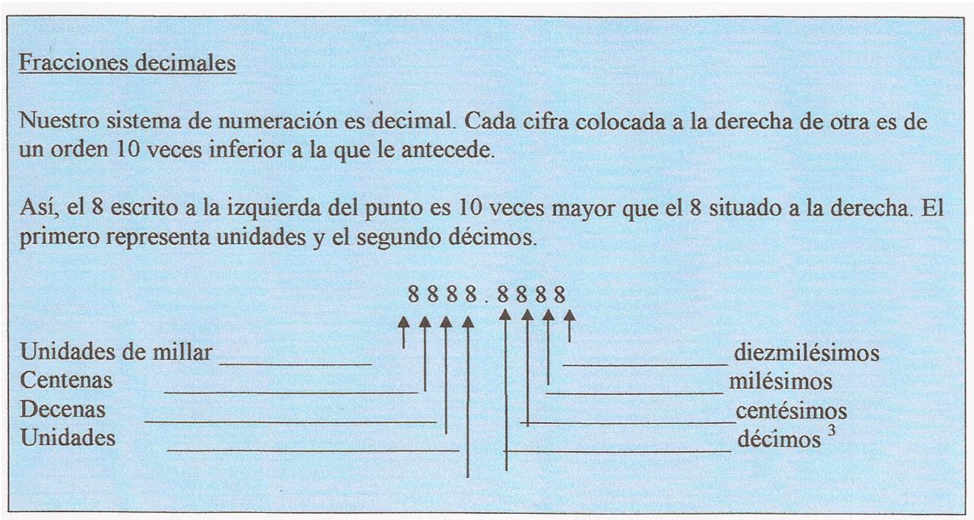
Conforme a las ideas imperantes en las escuelas primarias mexicanas, la enseñanza de las fracciones ocupa muchísimo más tiempo que la de los decimales. Una de las tareas típicas en esta cultura escolar es relacionar expresiones de la forma a/b con fracciones representadas a través de superficies fraccionadas. No obstante que las reformas curriculares de 1993 enfatizaron la diversidad de significados que pueden asociarse a una fracción (cf. SEP; 1993 y SEP; 2006b), en las aulas se sigue privilegiando esa forma de representación y de tratamiento de las fracciones (cf. Izquierdo; 2006), aunque no de los decimales que, comúnmente se trabajan como simple extensión de la escritura decimal de los naturales.

En efecto, lo primero que se aprende sobre los decimales en la escuela es su representación mediante el sistema decimal de numeración. Pero lo más común es que la enseñanza tome una orientación "nominalista", es decir, que se interese más

[5] Mis afirmaciones sobre la enseñanza común de los decimales, se basan en observaciones de clase en varias escuelas, el análisis de los currículos de educación primaria de los últimos 50 años, los resultados de una investigación previa (Avila; 2008) y la tesis doctoral, en proceso, de Isidro González Molina.

en hacer aprender los nombres de las *posiciones* y menos por el valor de los agrupamientos que cada cifra representa conforme a su posición (Avila; 2008). Y es que en general, los maestros consideran muy simple la tarea de enseñar los decimales, por lo que pronto pasan a las operaciones, principalmente a la multiplicación y a la división, que – en opinión de muchos - "son las que sí cuestan trabajo" (cf. Avila; 2008).

El acercamiento anterior ha sido promovido desde hace muchas décadas, por la forma en que estos números se presentaban en el currículum y en los libros de texto que se distribuyen gratuitamente a los niños en las escuelas. Aunque el currículum se ha modificado y en parte ha incorporado los resultados de la investigación educativa sobre el tema, la tabla que se incluyó en los libros gratuitos de 1960 para iniciar la enseñanza de estos números (figura 1) parece seguir articulando la enseñanza de los decimales.


Fracciones decimales

Nuestro sistema de numeración es decimal. Cada cifra colocada a la derecha de otra es de un orden 10 veces inferior a la que le antecede.

Así, el 8 escrito a la izquierda del punto es 10 veces mayor que el 8 situado a la derecha. El primero representa unidades y el segundo décimos.

8888.8888

Unidades de millar — diezmilésimos
Centenas — milésimos
Decenas — centésimos
Unidades — décimos [3]

Figura 2. Lección con la que iniciaba la enseñanza de los decimales en los primeros libros de texto gratuitos distribuidos por la SEP (1960).

Este enfoque prevalece a pesar de los cambios operados en el currículum, entre los que destacan los introducidos en el año 2000. La mayoría de los profesores así lo declaran (Avila; 2008). Declaran también que las lecciones dedicadas a los decimales (SEP, 2000) son muy difíciles o incluso les son incomprensibles, por lo que no las trabajan.[6]

[6] Aquí vale señalar que las innovaciones sobre los decimales se introdujeron sin que mediara alguna capacitación de los decentes para instrumentarlas.

En coherencia con ese enfoque, un procedimiento muy utilizado para comparar los decimales, que se presta a no escudriñar en sus propiedades, y que puede considerarse "sintáctico", fue claramente expresado por un niño participante en la etapa preliminar de esta investigación:

> "[Es que] dice el maestro que hay que fijarse en el que está más cercano al punto, el más cerca del punto es el que vale, no importa si [el número] tiene 10 o más cifras, lo que cuenta es el número más cerca del punto" (Edwin, alumno de 6° grado, escuela pública vespertina de la Cd. De México)

Otra constatación de la enseñanza de los decimales alejada de sus propiedades y su naturaleza, se obtiene de las libretas de los alumnos de cuatro grupos de sexto grado de primaria del estado de Puebla (cf. González Molina, en preparación). Se ve en ellas que sólo en un grupo se trabaja la densidad de los decimales; a la comparación y orden se dedica una o dos actividades; a las operaciones con decimales se dedican bastantes más actividades (7 u 8); en un caso, la división ocupa 21 de las 25 actividades sobre los decimales anotadas en la libreta.

2.3. Recolección de la información

La información se recogió mediante un cuestionario escrito que se aplicó a fines del mes de septiembre de 2011 (dos meses después de haber iniciado las clases en el sexto grado) (véase anexo 2). El cuestionario constó de dos tipos de preguntas: las que pueden clasificarse como de respuesta correcta-incorrecta (21 preguntas) y siete cuyas respuestas no implicaban la clasificación *correcto – incorrecto* pues estaban dedicadas a obtener información sobre las ideas amplias construidas alrededor de los decimales, su ámbito de uso y utilidad (preguntas 1 a la 5 y 21 y 22). Algunas de las preguntas solicitaban más de una respuesta, por lo que el total de éstas fue 28. Se elaboraron dos versiones del cuestionario, cambiando el orden de las preguntas, con el fin de controlar los efectos de una eventual fatiga. Los aspectos incluidos en el cuestionario son los siguientes:

- Naturaleza y utilidad de los números decimales (qué son, en dónde se usan, cuál es su utilidad)
- Posición y valor posicional de las cifras correspondientes a la representación decimal de números decimales
- Orden y equivalencia entre decimales de distinto orden
- Noción de densidad de los decimales en los decimales

- Distintos registros de representación de números decimales: escritura decimal (con punto), escritura fraccionaria (forma a/b), sombreado de superficies fraccionadas, puntos en la recta numérica.[7]

En el cuestionario se adaptaron preguntas típicas sobre los decimales utilizadas en otras investigaciones (p.ej Brown, 1981; Perrin-Glorian s.f; Resnick et. al, 1989; Roditi, 2007) y se incluyeron otras diseñadas para fines de esta investigación, utilizándose en su redacción el lenguaje que es común en la cultura escolar mexicana. En las preguntas evaluadas con las categorías *correcto- incorrecto* se pidió a los niños argumentar sus respuestas por escrito. Este dispositivo resultó de gran utilidad puesto que, en su mayoría, las explicaciones de los niños nos permitieron identificar los tratamientos que les permitieron obtener las respuestas.

Antes de aplicarse en el grupo, el cuestionario se aplicó sucesivamente en otros y en función de los resultados obtenidos - en cuanto a tiempo de resolución, claridad, complementariedad o pertinencia de las cuestiones incluidas - se fue ajustando hasta obtener la versión utilizada durante la investigación.

3. Resultados: conocimientos en construcción sobre los números decimales

Los resultados se exponen de la manera siguiente: las preguntas planteadas, se insertan en cuadros o viñetas a lo largo del escrito y entre paréntesis se anota el número de respuestas correctas. Cuando la tasa de éxito se compara con la correspondiente a las pruebas nacionales, en vez de las respuestas correctas aparece el porcentaje respectivo. Para no fatigar al lector se omiten estos elementos en el cuerpo del texto, donde sólo se incluye la interpretación de los datos.

3.1. ¿Qué son los números decimales?

Algunos de los niños del grupo consideran decimales a las fracciones con denominador potencia de 10 o señalan que los decimales (escrituras decimales) pueden expresar fracciones. Pero la idea más recurrente en el grupo es que los decimales son los números con punto, lo cual es natural considerando que conforme a la tradición escolar es así como se introducen y como los entienden en gran medida los profesores (cf. Avila; 2008; Saiz et.al. 2011). No obstante las reformas educativas que han tratado de revertir este estado de cosas resaltando el carácter racional de los decimales, la reducción de estos números a *casi una escritura* continúa prevaleciendo en las escuelas.

[7] Siguiendo a Adjiage (1999) y a Roditi (2007), he considerado la representación de decimales mediante puntos en la recta como otro registro de representación, aun cuando en este trabajo sólo se hayan incluido dos tareas similares utilizando este recurso.

Pregunta 22. - ¿Qué son los números decimales?

Noción subyacente en las respuestas	*Números con punto como rasgo exclusivo de identificación*	*Fracciones con denominador 10, 100, 1000… también pueden escribirse con punto*	*El punto como rasgo necesario pero no único*		
			Resultado de una división, llevan punto	*Números compuestos (de un entero y un decimal), el punto los separa*	*Otros*
Número de respuestas correctas (sobre 28)	*10*	*7*	*4*	*5*	*2*

Pocos alumnos han retenido la noción que la profesora buscaba favorecer: "Los decimales son los números que pueden representarse mediante una fracción con denominador potencia de 10" (entrevista a la profesora del grupo).

3.2. ¿Dónde se usan los decimales y cuál es su utilidad? (preguntas 1, 2, 4 y 5)

Los decimales son números útiles en diversidad de situaciones y prácticas sociales vinculadas a distintos ámbitos: las finanzas, el comercio, la ingeniería, la política y la medicina, entre otros (cf. p.ej. Centeno; 1997). Los niños del grupo también vinculan los decimales con diferentes dominios de actividad, orientando su atención en proporciones más o menos iguales hacia:

a) el ámbito escolar, porque estos números sirven para "hacer operaciones" y para "responder lo que te piden";
b) en la casa o el trabajo al hacer cuentas; y
c) el comercio y el manejo del dinero.

Hay además otras ideas que muchos de ellos comparten, como señalar que los decimales sirven para hacer ciertas divisiones, o cálculos más exactos, o sacar porcentajes. Los que parecen saber más, afirman que estos números son útiles para ganar en exactitud (en los precios, en las monedas, en *los cambios*, en los repartos…). Los argumentos son del tipo siguiente:

> *"[Los decimales son importantes] porque no se puede ir en el mundo con puros enteros"*

> *"[Si no hubiera decimales] yo creo que no se podría dar cambio y todo sería un desastre"*

Llama la atención las escasas referencias a los decimales como números que expresan el resultado de una medición, a pesar de que éste es el ámbito al que se vincula con más frecuencia la enseñanza del tema en las escuelas. Es que en su enfoque de enseñanza la maestra no ha trabajado esto suficientemente: "*Me imagino que no hacen referencia a ella porque no hemos trabajado lo suficiente* *con esta relación"* (entrevista a la maestra del grupo). Pero aun con esta ausencia, los niños tienen ideas sobre el uso y la utilidad de los decimales que darán sustento a sus aprendizajes sobre estos números.

3.3. La posición y el valor de las cifras

Como es bien sabido, un número está representado en el sistema decimal de numeración cuando constituye una sucesión de símbolos y es interpretado como la suma de los términos que resultan de multiplicar el valor de cada símbolo por la potencia de diez correspondiente a la *posición* o *el lugar* que ocupa el símbolo con relación al punto decimal.

Comprender la escritura decimal de los números no es tan fácil como los maestros creen, implica tanto el conocimiento de un "bagaje simbólico" y un "vocabulario técnico", como el sentido que tienen esas escrituras, lo que se vincula con el valor de los agrupamientos que cada cifra representa, es decir, su valor posicional (cf. Bernardz y Janvier; 1984, cit. por Tempier; 2010). Pero en México ocurre lo que Liping Ma (1999) señaló hace tiempo respecto de profesores estadounidenses:

> "[Lo que esos profesores] querían decir con valor posicional, era solamente la primera mitad de la expresión: "lugar" – la posición de los números […] Cuando los profesores […] hablaban de la "columna de las decenas" (columna de los dieces) o de la columna de las centenas, no se concentraban en el valor de las cifras en esas columnas. Utilizaban los términos decenas y centenas como etiquetas para las columnas (Liping Ma, 1999, 29; cit. por Tempier 2010).

Para averiguar si en el grupo se había rebasado el enfoque "nominalista", en el cuestionario se abordó: a) la "mitad más simple" del concepto valor posicional: identificar y dar nombres a las *posiciones* antes y después del punto (preguntas 9a, 9b y 13); b) la "segunda mitad" del concepto: el valor de los agrupamientos que representan las cifras según su posición, y las relaciones de equivalencia entre esos agrupamientos (preguntas 12 y 17).

Pregunta 9a.- Encierra en un círculo la cifra que representa 4 centésimos (444.444) (53% de ciertos)

Pregunta 9b.- Encierra en un círculo la cifra que representa 4 centenas (444.444) (42% de aciertos)

Pregunta 13.- En el número 0.32 el tres representa 3 décimos, en el número 0.023, ¿cuánto representa el 3?(57% de aciertos)

Se ve en los puntajes obtenidos, que una tarea típica de la tradición escolar – aprender los nombres de las posiciones - no corresponde al mejor desempeño en el grupo. ¿Por qué ocurre esto? Una primera apreciación de las respuestas muestra errores difíciles de comprender o clasificar. Pero un análisis más detenido muestra cierta lógica en algunas respuestas. Por ejemplo, ante la solicitud de señalar los centésimos y las centenas en el número 444.444 aparecen respuestas e ideas como las siguientes:

Respuesta	*Comentario sobre la respuesta*	*Razonamiento que sustenta la respuesta*
444. 444 | | *centésimos centenas*	Inversión de los lugares que ocupan las cifras: las centenas son centésimos y los centésimos son centenas	Lectura en espejo y confusión sobre el lugar (respecto del punto) correspondiente a la parte entera y la fraccionaria del número

Es probable que algunos niños (en general los que obtuvieron puntajes bajo la media) hagan una lectura en espejo de las cifras antes y después del punto. En general, la confusión respecto de las posiciones y sus nombres es alta en el grupo (aproximadamente un 50% de errores). Identificar la representación de un número decimal hasta centésimos, o hasta milésimos – cuestión que obtiene un 48% de aciertos en los EXCALE 2009 - sirve de referente para observar que en este aspecto los niños del grupo no han avanzado como sí lo han hecho en otros rubros.

Pregunta 12. - En 6 décimos cuántos milésimos hay? (14% de aciertos)

Pregunta 17.- Si al número 8 449 le agregas 14 centenas, ¿qué número obtienes? (35% de aciertos)

En conjunto, las respuestas reflejan también poca claridad sobre los valores representados en las distintas posiciones y la relación de equivalencia entre ellos, observándose dificultades a la derecha y a la izquierda del punto. Así, establecer en unidades el equivalente a 14 centenas tuvo un bajísimo número de aciertos; conforme a nuestra solicitud (véase viñeta), la mayoría sumó 140 unidades al número 8449 en vez de las 1400 correspondientes a las 14 centenas.

Estos resultados están incluso por debajo de los obtenidos en el nivel nacional al "resolver problemas que impliquen el uso del valor posicional de una cifra ubicada a la derecha del punto hasta el orden de los milésimos" (34%) (ENLACE, 2011).

Las respuestas colectadas hacen pensar que la introducción de la escritura decimal de los números decimales perturba los conocimientos asociados a la escritura de los naturales. Quizás porque el significado expresado en tal registro no ha sido bien comprendido. Pero, ¿La fragilidad de un conocimiento esencial en el aprendizaje de estos números socavará la construcción del resto del edificio conceptual? En los siguientes incisos se ofrecen elementos de respuesta a esta pregunta.

3.4. Orden y equivalencia entre decimales

3.4.1. El orden y el tratamiento que lo sustenta

Comparar decimales ha sido una tarea recurrente en las indagaciones sobre el aprendizaje de estos números (cf. por ejemplo Brown; 1981; Resnick et.al, 1989; Alatorre y cols, 2002; Roditi; 2007). También ha sido indicador del grado de comprensión que los estudiantes tienen sobre ellos. Así, en México, los exámenes nacionales incluyen comparación de decimales, tema en el que se reporta un bajísimo desempeño ya señalado al inicio del artículo (entre 25 y 30% en el año 2006 y 34% en 2009).

*Pregunta 7.- De los dos números siguientes, subraya el que es mayor: 25**.**08 o 25**.**6 (20 respuestas correctas)*

Pregunta 6.- Anota sobre la línea **mayor que***,* **igual** *o* **menor que***, para que la expresión sea correcta: 19**.**60 _______ 19**.**6000 (21 respuestas correctas)*

Si ordenar decimales implica comprender el valor de décimos, centésimos y milésimos…, parecía válido suponer un igual o más bajo desempeño en las tareas de comparación que el mostrado en aquellas cuestiones. Empero, la mayoría de los niños del grupo ordena correctamente dos decimales y da argumentaciones que reflejan un tratamiento semántico de la comparación, por ejemplo al comparar 25.6 y 25.08:

> *"Los décimos son más grandes que los centésimos, este ocho representa centésimos [por lo tanto], aunque el 6 es menor, el 25.6 es mayor porque son décimos".*
>
> *"Porque el cero convierte los décimos en centésimos y eso hace más chico el número, porque los décimos son más grandes que los centésimos".*

La gran mayoría de los argumentos colectados se sustenta en la idea de que "los décimos valen más que los centésimos", aunque sin especificar cuánto más. Es decir, como base de las respuestas se expresa una comparación cualitativa - y no una relación de equivalencia - de los décimos, centésimos y milésimos. Sin duda es la facilidad la que está detrás de este argumento pero, para complementar la información al respecto, solicité a nueve de los 28 niños participantes representar un décimo, un centésimo y un milésimo en un *cuadrado-unidad* fraccionado en 100 partes iguales. Hubo dos representaciones correctas pero la mayoría como las que se muestran en la figura 2.

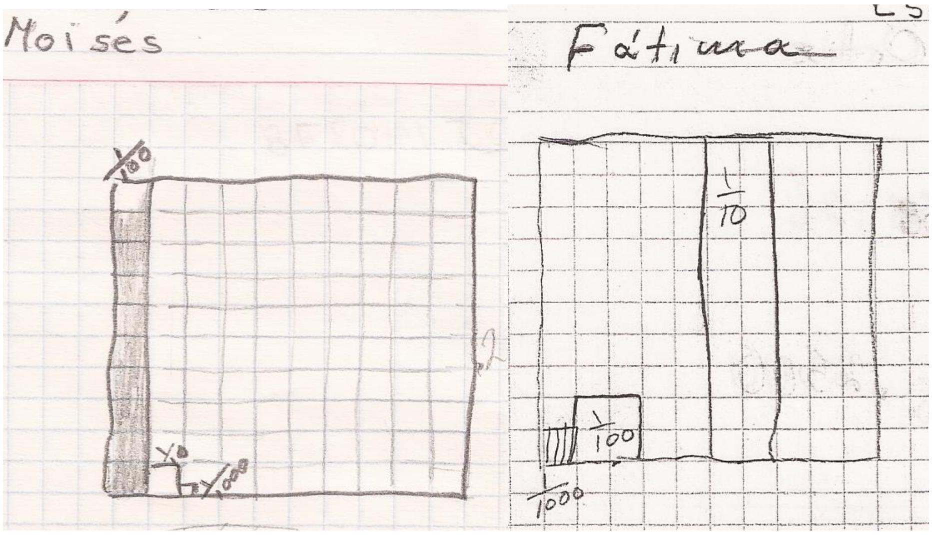


Figura 3. Respuestas de Moisés (11 años, desempeño bajo) y Fátima (11 años, desempeño alto) a la tarea de representar un décimo, un centésimo y un milésimo en una unidad cuadrada."

Estos dibujos fueron producidos por niños con distinto grado de desempeño en el cuestionario y reflejan, o bien el poco manejo de este registro de representación, o un desconocimiento real del valor del décimo, el centésimo y el milésimo y de las relaciones de equivalencia entre ellos. Es posible considerar esto último con base en la baja tasa de éxito en las preguntas 12 y 17 (14 y 35% de aciertos, respectivamente).

Igual que Fátima, muchos niños muestran, a través de la representación gráfica, conocimiento de la relación de orden, pero no de equivalencia entre unidad, décimos, centésimos y milésimos. Esto es, algunos – entre los que no se encuentra Moisés - muestran conocer la relación siguiente:

unidad > décimo > centésimo > milésimo,

Pero no necesariamente la relación:

1 = 10 décimos = 100 centésimos = 1000 milésimos.

¿Cómo es que la mayoría es competente al comparar decimales y no lo es al reconocer los nombres de las posiciones o al establecer equivalencias entre los valores en ellas representados? Se ve aquí que no es indispensable manejar los nombres de las posiciones para determinar el orden entre los decimales, aun utilizando un tratamiento semántico; tampoco parece necesaria la equivalencia, un ordenamiento cualitativo (basado en la relación mayor que, menor que) es suficiente. Y considero que es un ordenamiento cualitativo, porque los argumentos expresados por la mayoría de los niños refieren a que "los décimos son más grandes que los centésimos", cuestión muy diferente que argumentar "primero te fijas en el número que está junto al punto decimal…", procedimiento sintáctico aprendido mediante un enfoque que no profundiza en los significados.

Cabe comentar que Fátima respondió correctamente todas las preguntas referentes a identificación de posiciones y equivalencia entre ellas, pero respondió que en 6 décimos hay cero milésimos, lo cual puede ser muestra de una menor comprensión de los milésimos. Moisés, por su parte, respondió que en 6 décimos hay 6000 milésimos).

3.4.2. Los ceros como recurso para comparar

Resulta llamativo que los niños se valen recurrentemente de los ceros para tener éxito en algunas tareas de comparación y equivalencia. Lo hacen produciendo *escrituras ostensiblemente comparables*, como se explica a continuación.

Cuando los números tienen cifras iguales antes del punto y distinto número de ellas después de éste – se producen escrituras con igual número de cifras para hacer las comparaciones. Estas escrituras - *ostensiblemente comparables* - se elaboran (por escrito o mentalmente) agregando o quitando ceros a la derecha de las cantidades originales hasta igualar el número de cifras después del punto. Tal transformación en la representación facilita la comparación y el análisis:

> *19.60 = 19.600, porque es como si le pones 2 ceros al 19.60, sería 19.600… son iguales.*
>
> *Los* emparejas *a milésimos [agregando ceros] y ya los puedes comparar*

En la producción de *escrituras ostensiblemente comparables* se utiliza el conocimiento siguiente: tratándose de números con punto, "los ceros a la extrema derecha, no valen". Este conocimiento permite establecer correctamente el orden y la equivalencia entre dos o más decimales, aun sin saber los nombres de los lugares o la equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.

3.5. El tránsito entre registros

3.5.1. ***Decimales, fracciones y superficies fraccionadas***

Señalé antes que una de las tareas típicas en la cultura escolar mexicana es relacionar expresiones de la forma a/b con fracciones representadas a través de superficies fraccionadas. En cambio, no es frecuente el trabajo que vincula las superficies fraccionadas y los decimales en su representación decimal.

En el grupo se observa una limitada capacidad de convertir a escrituras decimales, fracciones decimales representadas mediante superficies fraccionadas (preguntas 20 a, c y e). Las tareas que vinculan estos dos registros de representación se ubican entre las de más baja tasa de respuestas correctas (véase viñeta siguiente). Sin duda, está el problema de que la conversión de las representaciones y el cambio de registro – como ha señalado Duval (1995) – no es simple. En el caso de las representaciones gráficas presentadas, resulta difícil percibir que, a partir de 8 rectángulos - 3 de los cuales están sombreados – la representación correspondiente en el registro decimal será **.**375; la conversión no es congruente. Es más congruente la conversión de esta misma representación gráfica a la fracción 3/8 que resultaría en el registro fraccionario. Esto ayuda a explicar la tasa más alta de respuestas correctas. Un análisis similar puede hacerse en relación con el pentágono y la quinta parte sombreada. Convertir dicha representación a **.**2 implica pasar por la fracción 1/5 y tratarla en su significado de cociente, la conversión tampoco es congruente. Por otra parte, los alumnos no contaban con calculadora para realizar los cálculos.

Pregunta 20.- Escribe el número decimal y la fracción que indica la parte sombreada de cada figura[8]:

a) b) c) d) e) f)

Pregunta	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Respuestas correctas	1	17	6	16	4	17
Porcentajes globales según tipo de tarea	Representación mediante forma a/b: 59%			Representación mediante escritura decimal: 13%		

Además de lo anterior, otros factores vinculados a la enseñanza pudieron haber influido en el bajo índice de respuestas correctas: en la secuencia no se incluyó la

[8] Como mencioné al inicio, en todas las preguntas del cuestionario se usó el vocabulario sobre los números racionales y decimales utilizado en el contexto escolar mexicano, donde decimales refiere a los números expresados con punto y fracciones a los expresados en la forma a/b. En el mismo sentido, respecto de las figuras mostradas, en todos los casos la unidad es "la gran figura": los rectángulos y el pentágono. Los niños así lo entienden.

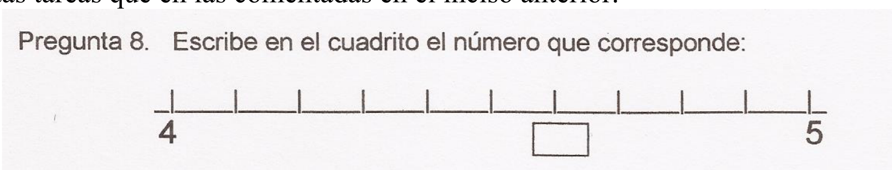
representación de decimales mediante áreas de figuras fraccionadas, sí se vinculó a las fracciones en su forma a/b, tarea que muestra un número mucho más alto de respuestas correctas. En entrevista la profesora comenta:

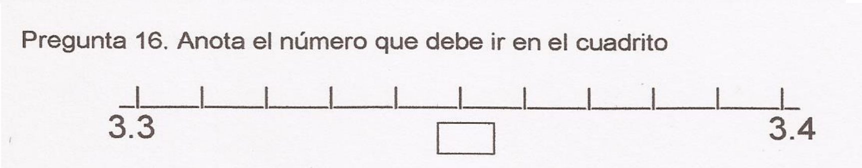
> Esto prácticamente lo hemos visto más cuando son fracciones, no con decimales, pero ahorita sí ya estoy tratando de englobar todo; cuando es un medio, también es igual a cero-punto-cinco […], no sé qué tan funcional sea, porque hace ratito me di cuenta que me perdí en mi clase, por querer estar metiendo todo.

Se ve en lo anterior una debilidad en la secuencia de enseñanza. En cambio, la profesora ha trabajado otras formas de representar los decimales, como por ejemplo mediante puntos en la recta numérica, lo que se traduce en un mejor desempeño en las tareas vinculadas con este recurso.

3.5.2. Los decimales y su representación en la recta numérica

Representar decimales en la recta hace necesario transitar entre dos registros: el numérico y el geométrico lineal. Presentamos al grupo dos tareas de este tipo. Como puede verse en la viñeta siguiente, los niños tienen más respuestas correctas en estas tareas que en las comentadas en el inciso anterior.





Pregunta 8. Respuestas correctas: (64%)	*Pregunta 16.- Respuestas correctas: (64%)*

En las explicaciones anotadas por los niños en la pregunta 8, identificamos un tratamiento muy frecuente para obtener las respuestas:

Agregar un cero a la derecha del 3.3 (3.30) y del 3.4 (3.40), para luego asociar un decimal - con dos cifras después del punto - con cada uno de los puntos señalados en la recta: 3.31, 3.32, 3.33… hasta 3.35. Los niños explican claramente lo que hacen:

> *Porque después del 3.30 sigue el 3.31, el 3.32… hasta 3.35*, o
> *3.31, 3.32,…3.39 entran en esa recta.*

Se ve otra vez la producción de escrituras ostensiblemente comparables, como herramienta para agregar claridad a la situación y estar así en mejores condiciones de anotar sin error el decimal correspondiente al punto indicado.

Aunque quizás en la escuela mexicana la recta numérica no ha sido suficientemente valorada como recurso para el aprendizaje de los decimales, la profesora la ha incorporado en su secuencia de enseñanza y los niños obtienen un porcentaje de aciertos bastante más alto en las tareas que la implican (64%) que el nacional de primaria (ubicado en 38 y 44% de aciertos, según los datos de ENLACE 2011, y de 53%, según los de EXCALE 2009).

3.6. Intercalar un decimal entre otros dos: una aproximación a la *densidad de los decimales en los decimales*

Las investigaciones realizadas con niños y jóvenes han reportado la propiedad de densidad como uno de los aspectos de los decimales que resultan más difíciles de entender a los estudiantes (cf. por ejemplo Brown; 1981; Perrin-Glorian, s/f; Adgiaje; 1999).

Brousseau señaló hace décadas que las formas en que estos números se enseñan, son en parte responsables de las dificultades para entender sus propiedades, y que las consecuencias a veces se arrastran hasta la universidad:

> "[…] el niño no encontrará decimales entre 3.25 y 3.26 pero, por el contrario encontrará un antecesor en D [los decimales] para 3.15: éste será 3.14, etcétera. Aún si corrige su respuesta sobre tal o tal punto, los razonamientos intuitivos se guiarán por este modelo erróneo" (Brousseau; 1998; 132).

En el grupo se obtuvo un resultado relativamente diferente de los previamente reportados: la tasa de aciertos fue comparativamente alto en la tarea de intercalar un decimal entre otros dos (pregunta 10) ¿Qué tratamientos permitieron esto?

Pregunta 10.- Escribe un número que vaya entre 0.25 y 0.26 (19 respuestas correctas) (67% de aciertos)

Pregunta 19.- Un alumno respondió que entre 1.70 y 1.80 se pueden escribir sólo nueve números ¿crees que tenía razón o que estaba equivocado? (4 aciertos)

Pregunta 15. ¿Cuántos números se pueden ir entre 0.42 y 0.43? (un acierto)

La mayoría de los niños da respuestas sobre la base de una concepción que he llamado "*densidad restringida*", la cual permite intercalar correctamente nueve decimales entre dos "*falsos consecutivos"* - números que me he permitido denominar así porque son consecutivos si se les mira con la lógica de los naturales, obviando los efectos del punto decimal - . El procedimiento utilizado para intercalar consiste en agregar un dígito a la derecha del decimal menor, iniciando con el 1 y siguiendo el orden de los naturales hasta el 9 (.251, .252… .259 en nuestro ejemplo). La concepción puesta en acto lleva a insertar correctamente nueve decimales entre los dos *falsos consecutivos*, pero no permite insertar ninguno más, de ahí el nombre de "densidad restringida". Dicen varios niños que:

> *"Son sólo nueve los que puedes poner, porque no puedes llegar al 10"*

Hasta niños que tuvieron un bajo desempeño en el cuestionario intercalaron decimales utilizando este procedimiento. Esto es posible gracias a las enseñanzas de la profesora, quien señala:

"Se creó la necesidad de ver que entre dos números decimales podemos encontrar *n* número de decimales más, porque vienen en el libro de quinto, entonces, de acuerdo a las situaciones que vienen, empezamos, por ejemplo, ¿qué números están entre 1.5 y 1.6?, entonces empiezan a dividir los décimos en centésimos, en milésimos, para ver que sí cabe otro número entre 1.5 y 1.6".

Por este acercamiento basado en subdivisiones decimales considero que la que se trabaja es la *densidad de los decimales en los decimales*. Su enseñanza, tal como fue instrumentada, no ha redituado en una comprensión amplia de la propiedad que permite la intercalación. Unos pocos niños muestran dudas sobre el límite de los nueve números. Sin embargo, sólo uno rompe francamente el límite y agrega muchos números más. Su respuesta - para mí sorpresiva - es la siguiente:

> *Podría ser 0.251080043100 [...] Porque mientras el cinco no se pase a [.]26, será un número* en-medio [de los otros dos] (Daniel; 11 años).

Las restricciones que Daniel pondría a un número – para estar seguro de que va entre 0.25 y 0.26 – son: que las dos primeras cifras después del punto sean 2 y 5, en ese orden, y que a partir de la tercera cifra, al menos una sea diferente de cero. En términos más generales, para asegurarse de que un decimal puede intercalarse, las dos cifras después del punto deberán ser iguales que las del primer falso consecutivo y al menos una cifra después de la segunda no debe ser cero.

Quien dio estas explicaciones obtuvo el mayor puntaje en el cuestionario y en entrevista aporta evidencias de una cierta comprensión de la *densidad* de *los decimales en los decimales* (o quizás más allá de los decimales). Veamos si no, un fragmento del diálogo sostenido con él:

> *Inv. Puedes decirme cuántos números pueden ir entre .42 y .43? (los anota)*
>
> *Daniel. Infinitos*
>
> *Inv. ¿Puede ir infinito, qué quiere decir eso?*

Daniel. Porque pueden ir, por ejemplo… no sé… punto-425 *y sería más chica [que .43] la cantidad, porque éste [el número 0.425] vale menos que el tres [de 0.43], porque este tres está más cerca del cuatro*

Inv. ¿Y otro número que pudiera ir en medio del .42 y .43?

Daniel. No sé. Le puedo poner muchos dos, y es imposible que llegue a la cantidad [a 0.43], pero entre más números le pongas más se aproxima a la cantidad (anota .4222222)

Inv. A ver si te entendí, si tienes aquí el .42 y el .43, ¿puedes poner muchos otros y no llega al .43?

Daniel. Sí

Inv. ¿Y cómo sabes que no llega al .43?

Daniel. Por eso mismo, porque ésta [señala el 4 y el 2] es 42 y estos [señala los otros 2's] son los números que se aproximan [al .43], y acá está el .43.

Las respuestas de Daniel sorprenden porque reflejan un acercamiento semántico a la propiedad de densidad de los decimales que involucra incluso dos nociones importantes: la de infinito (como proceso) y la de aproximación. Pero no todos los niños están en este caso, la mayoría se atiene a un tratamiento sintáctico asociado a "la densidad restringida".

Por otra parte, resultado de una comprensión incompleta, no siempre el tratamiento utilizado lleva a respuestas correctas, por ejemplo, una niña considera que 1.250 se ubica entre 1.25 y 1.26 porque se obtuvo aplicando el procedimiento "Agregar una dígito a la derecha del decimal menor…" Se ve aquí un tratamiento sintáctico con una base conceptual endeble. Esto, sin embargo, no quita lo llamativo al hecho de que un 67% de los alumnos haya dado una buena respuesta en la tarea de insertar un decimal entre dos falsos consecutivos.

No tengo parámetro de comparación en los exámenes nacionales de primaria, donde no se incluye el tema, pero en los de tercero de secundaria (15 años), el porcentaje de éxito es apenas de 53% según los datos disponibles (cf. Bakhoff; 2006).

Las respuestas a las otras preguntas relacionadas con la propiedad de densidad llaman a limitar el entusiasmo. En efecto, a partir de una comprensión limitada, se acepta que "entre *.45 y .46* se pueden intercalar sólo nueve números", y se reitera tal afirmación ante la pregunta *¿Cuántos números pueden ir entre* .70 y .80?

Se trata, como ya dije, de un tratamiento sintáctico. Y sus límites se ponen de manifiesto cuando en las entrevistas casi todos los niños definen el .449 como "el que va antes" de .45 y el .461 como "el que va después de .46".

Unos cuantos comienzan a visualizar realmente la propiedad de densidad de los decimales en los decimales y aceptan, por ejemplo, que podrían ponerse no sólo nueve, sino muchos números de muchas cifras en medio" de dos falsos consecutivos, y eso sería correcto, porque, por ejemplo, al **.**45 y **.**46 "podrían ponerles muchos ceros y así tendrían el mismo número de cifras" que los decimales intercalados.

Ante estas preguntas, nuevamente las ideas de Daniel parecen mucho más avanzadas que las del resto de sus compañeros:

> *Inv. Y cuando me dijiste que había infinito de números, ¿qué querías decir?*
>
> *Daniel. Que son muchos, muchos, muchos y nunca se van a acabar*
>
> *Inv. Hubo niños que dijeron que entre* **.***42 y* **.***43, sólo hay nueve números…*
>
> *Daniel. Están mal, por eso que dije, que podría haber infinidad de números*
>
> *Al. ¿Habrá un número que vaya antes del* **.***42, que esté pegadito al* **.***42?*
>
> *Da. No sé… podría ser que aquí tuviera muchos ceros (anota .420000001)*
>
> *Al. Ese va pegadito al* **.***42, ¿pero adelante o atrás?*
>
> *Da. Un tantitito adelante*
>
> *Al. ¿Y un número que vaya tantitito atrás?*
>
> *Da. (anota* **.***41999999999) éste va tantitito atrás*

Daniel refiere al infinito como a un conjunto que no se termina, también incorpora la idea de aproximación en su razonamiento, ambos son elementos importantes en la comprensión de los decimales y de una propiedad que los diferencia de los naturales. Probablemente este conocimiento, - por el momento individual - contribuya a que sus compañeros avancen en su entendimiento de los decimales.

4. Conclusiones

En este artículo analizamos las respuestas a un cuestionario sobre números decimales, aplicado a un grupo de niños de sexto grado con desempeño destacado en matemáticas y cuya maestra, con una formación especial en enseñanza de esta disciplina, instrumentó un acercamiento conceptual al tema.

La profesora se apartó del enfoque nominalista – muy común en las escuelas mexicanas - e introdujo como aspectos a estudiar, no sólo la escritura de decimales, los nombres de las posiciones o el valor posicional. Si bien incorporó estos aspectos, incluyó también en su secuencia de enseñanza: el orden, la equivalencia, la densidad (de los decimales en los decimales), y la representación en la recta numérica.

Ordenar decimales, intercalar otros entre dos falsos consecutivos, o representar decimales como puntos en la recta, son los aspectos donde parece haber dado mejores frutos el acercamiento instrumentado. En todos estos aspectos, hay avances considerables. La tasa de éxito en el grupo oscila entre el 60 y 70%, mientras que, en general, en los exámenes nacionales las tareas vinculadas a los decimales no alcanzan el 50% de aciertos.

Por otra parte, los tratamientos observados dejan ver que la acción docente se orientó a los significados y no sólo a los procedimientos. Por ejemplo, la mayoría de los niños compara correctamente dos decimales dando un tratamiento semántico a la comparación, esto es, tomando como base una apreciación del valor relativo de las cifras. Tal forma de comparar constituye un rasgo distintivo del grupo pues, en los niños de otras escuelas, identificamos la prevalencia de una ordenación de tipo sintáctico.

Otro rasgo que caracteriza al grupo es lo que parece un conocimiento incipiente de la propiedad de densidad (de los decimales en los decimales), prevaleciendo en el grupo la noción de *densidad restringida*, asociada a los procedimientos enseñados por la profesora.

Llama también la atención una herramienta de probada utilidad en el grupo: el uso de ceros para producir escrituras ostensiblemente comparables y facilitar con ello las tareas de comparación.

Se ve en todo lo anterior la impronta de la enseñanza y cómo ésta puede moldear los trayectos hacia la comprensión de los decimales. La aproximación *conceptual*– posible por la preparación de la docente del grupo - favoreció el acercamiento a la estructura de estos números, así sea de manera incipiente o procedimental. También dejó puntos débiles, por ejemplo: a) en la conversión de figuras bidimensionales a escrituras decimales; b) en la denominación de las posiciones o lugares; c) en el valor de las cifras que ahí se representan, y d) en la equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.

Hay en el conjunto de los resultados una cuestión llamativa: algunas propiedades, como el orden y la densidad, o el tratamiento de los decimales en ciertos registros, presentan aprendizajes más importantes que los alcanzados respecto de los nombres de las posiciones, los valores ahí representados y las relaciones de equivalencia entre ellos. La diferencia en los puntajes obtenidos en esos aspectos es tal que unos aprendizajes parecen independientes de los otros. De ahí que sea válido afirmar: es posible comprender el orden y la densidad sin haber establecido el valor preciso de los décimos, centésimos y milésimos y sus relaciones de equivalencia, incluso sin saber los nombres de todas las posiciones o lugares antes y después del punto.

En pocas palabras, la secuencia de enseñanza planeada e instrumentada por la profesora del grupo, produjo mejores aprendizajes sobre los decimales que los identificados mediante las pruebas nacionales. No obstante esta afirmación, hay dificultades que se deben considerar: los alumnos no transitan con facilidad entre distintos registros de representación, y organizar una enseñanza que favorezca este tránsito, no resulta simple. Así mismo, las dificultades para establecer el valor de décimos, centésimos, milésimos… y su relación con la unidad, llama a revisar la forma en que este tema se aborda en el currículum y la utilidad que proporciona el cuadrado-unidad, recurso que parece bien valorado - tanto por la profesora del grupo, como por otros profesores.

Una reflexión final:

La profesora ha trabajado con la recta numérica más que con superficies fraccionadas, pero ha enfrentado las limitaciones inherentes al trabajo con lápiz y papel, como lo constatamos al solicitar en las entrevistas explicaciones sobre la densidad de los decimales en los decimales a sus alumnos. Adjiage ha experimentado con éxito un acercamiento informático a los racionales, teniendo como registro básico la recta graduada. A partir de los datos recogidos en este trabajo, nos parece que será productivo experimentar en tal sentido para facilitar y potenciar las comprensiones que sobre los decimales deben alcanzar los niños.

REFERENCIAS

ADJIAGE, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial***.** Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université Louis Pasteur de Strasbourg.

ADJIAGE, R. (2003). Registres, grandeurs, proportions et fractions. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **8**, 127-150

ADJIAGE, R. (2005). Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **10,** 95 – 129.

ALATORRE, S., DE BENGOECHEA, N. & MENDIOLA, E. (2002). Aspectos matemáticos del efecto remanente de las matemáticas escolares, en *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. (Compilador José Antonio de la Peña), Siglo XXI-UNAM, 51-112. México.

AVILA, A.(2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática.* **20.2,** 5 – 34.

AVILA, A. & GARCÍA, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, México.

BACKHOFF, E. (2006). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la Educación Básica en México: sexto de primaria y tercero de secundaria*. INEE, México.

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des mathématiques*, **2.3,** 37-127.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématique*s, **4.2,** 164 – 197.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée Sauvage, Grenoble.

BROWN, M. (1981). Place value and decimals, en K. M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics* (p. 11 – 16). John Murray Eds, Londres.

CENTENO, J. (1997). *Números decimales ¿Por qué?, ¿Para qué?* Ed. Síntesis, España.

DUVAL, R. (1993). Semiosis y noesis. Conférence A.P.M.E.P, I.R.E.M. Francia. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.). *Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela Francesa.* México. DME-CINVESTAV, 118 – 144.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berna.

GONZÁLEZ-MOLINA I. *Significados y usos de las fracciones y los decimales en aulas de 6° grado de educación primaria y 1° de secundaria.* Tesis de doctorado en Educación. Universidad pedagógica Nacional, México (en preparación)

IZQUIERDO, G. (2006). Representaciones de los profesores en torno a las fracciones y su enseñanza. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo. Universidad Pedagógica Nacional, México.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (s/f). *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du College*. Cahier de didactique des mathématiques, Núm. 24, IREM-Universidad de Paris VII , París.

RESNICK, L., NESHER, P., LEONARD, F., MAGONA, M., OMANSON, S. & PELED, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20.1,** 8 – 27

RODITI, É. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol. 12*, 55 – 81.

SAIZ, I., GOROSTEGUI, E. & VILOTTA, D., (2011). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación Matemátic,.* **23.1**, 123 – 152.

SEP (1993). *Plan y programas de estudio para la educación básica primaria*. México, Secretaría de Educación Pública.

SEP (2006). *Plan y programas de estudio para la educación básica. Primaria.* Secretaría de Educación Pública, México.

SEP (2006). ENLACE. *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros escolares. Características generales e información de los reactivos aplicados para su uso pedagógico*. Secretaría de Educación Pública, México.

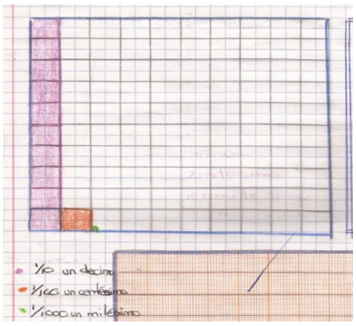
SEP (2011a). ENLACE. *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros escolares. Características generales e información de los reactivos aplicados para su uso pedagógico. Sexto grado de primaria*. Secretaría de Educación Pública, México

SEP (2011b). *Plan y programas de estudio para la educación básica. Primaria*. Secretaría de Educación Pública, México.

TEMPIER, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, ***86,*** 59 – 90.

ALICIA AVILA
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
ÁREA ACADEMICA DIVERSIDAD E INTERCULTURALIDAD
CARRETERA AL AJUSCO NUM. 24
COL. HEROES DE PADIERNA
C.P. 14000
MÉXICO D.F.

Anexo 1. Cuadrado-unidad (tomado de la libreta de Daniel)



Anexo 2. Cuestionario aplicado durante la investigación (versión *a*).

Te pedimos que respondas lo mejor posible, y de manera individual, las siguientes preguntas. El objetivo del cuestionario es saber cuáles son los temas de matemáticas que causan más dificultad a los alumnos y poder ayudar a los maestros a enseñarlos mejor. De antemano, gracias por tu cooperación

Fecha: ______________ Escuela:_________________ Grado: ________Edad : _________

Nombre (si no quieres no pongas tus apellidos): ____________________________

Calificación que sacas con más frecuencia en matemáticas ___________________

En el grado que cursas, ¿Cuáles temas de matemáticas se te han hecho más difíciles? ____

¿Cuáles se te han hecho más fáciles? _____________________________________

En tu opinión, ¿los números decimales son un tema fácil, un tema difícil o un tema regular? ______________ ¿Por qué? _____________________________________

Responde las preguntas siguientes, explica tu respuesta cuando se te pida.

1. Anota falso o verdadero sobre la línea:

Si no tiene punto no es decimal _________________

¿Por qué? ____

2. Además de en la escuela, ¿en qué se utilizan los números decimales? Pon al menos dos ejemplos:
____

3. De la lista siguiente, subraya los que son números decimales

2 0.7 ½ 4/10 1/1000 4.3333 3.0

Explica tu respuesta: ____

4. ¿Para qué crees que sirven los números decimales? _____________________

____

5. ¿Qué crees que pasaría si no hubiera números decimales? ________________

____

6. Anota sobre la línea ***mayor que*****,** ***igual*** **o** ***menor que**,* para que la expresión sea correcta:
19.60 es __________ que 19.6000

Explica tu respuesta: ____

7. Subraya el número que es mayor:

25.08 25.6

Explica tu respuesta: ____

____

8. Escribe en el cuadrito el número que corresponde:

_|____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|_
4 $\boxed{}$ 5

9. Haz lo que se te indica:

a) encierra en un círculo la cifra que representa 4 centésimos

4 4 4 . 4 4 4

b) subraya la cifra que representa 4 centenas:

4 4 4 . 4 4 4

10. Escribe un número que vaya entre 0.25 y 0.26 ________________________

Explica tu respuesta: ____

11. Encierra el número más cercano a 0.18

a) 0.1 b) 20 c) 0.01 d) 0.2

Explica tu respuesta: ____

12. ¿En 6 décimos cuántos milésimos hay? ___________________________

13. En el número 0.32 el tres representa 3 décimos, ¿en el número 0.023 cuánto representa el 3? _________________________________

14. Tengo un listón de 0.600 metros de largo. Deseo hacer moños de 0.6 metros de largo, ¿cuántos moños puedo hacer con el listón? ____________________

Explica tu respuesta ____

15. ¿Cuántos números pueden ir entre 0.42 y 0.43? ______________________

Explica tu respuesta ____

____

16.- Anota el número que debe ir en el cuadrito

_|____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|_

3.3 3.4

$\boxed{}$

Explica tu respuesta: ____

17. Si al número 8 449 le agregas 14 centenas, ¿qué número obtienes? ________

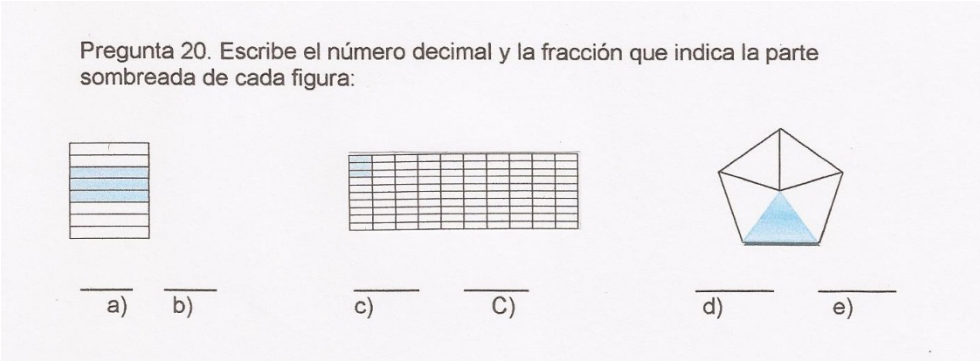
18. Si al número 75. 67 le agregas 15 centésimos, ¿qué número obtienes?

____

19. Un alumno respondió que entre 1.70 y 1.80 se podían escribir únicamente nueve números, ¿crees que tenía razón o que estaba equivocado? ____________

¿Por qué? ____

____


Pregunta 20. Escribe el número decimal y la fracción que indica la parte sombreada de cada figura:

21. Anota, con tus propias palabras qué es una fracción ______________________

____

22. Anota, con tus propias palabras lo que es un número decimal

____

____

MUCHAS GRACIAS