CHARLES CHANDLER

DES OUTILS SEMIOTIQUES POUR UNE EVALUATION DE LA COMPLEXITE DES EXPRESSIONS MATHEMATIQUES

Abstract. Semiotic tools for measuring the complexity of mathematical expressions. We shall try to identify the difficulties of complexity attached to mathematical concept or notion in a text, through the examination of the mathematical expressions which are associated with them. We refer to Hjelmslev, who defines the complexity as being an articulation between level of expression, signs of a language, and the fictitious plan of the contents, which develop by the meanings that the text gives. For this linguist, this interaction carries the complexity of a text. We will build a measure of this complexity by estimating the complexity of the structure of formulae and demonstrations. We apply this method on two Schwartz's textbooks, the one may be considered easy and the second more complex. These initiatives succeeded to build an evaluation of the level of complexity of mathematical texts. This is what we are trying to present here.
Keywords: Semiotics, mathematical demonstrations, mathematical texts, formulae.

Résumé Nous tenterons de cerner les difficultés de complexité relatives au concept ou à la notion mathématique, dans un texte, par l'examen des expressions mathématiques qui leur sont associées. Nous nous référons à Hjelmslev qui définit la complexité comme étant une articulation entre le plan de l'expression, les signes d'un langage, et le plan fictif des contenus, contenus qui s'élaborent par les significations que donne le texte. Pour ce linguiste, cette interaction est porteuse de la complexité d'un texte. Nous allons construire sur cette interaction des évaluations de complexité entre les expressions mathématiques. Nous pouvons construire cette méthode d'évaluation de la complexité en évaluant la complexité de la structure des formules et des démonstrations. Méthode que nous avons testée sur deux traités de L. Schwartz, l'un jugé facile et un autre plus complexe. Ces démarches ont-elles abouti à construire une évaluation du niveau de complexité des textes mathématiques? C'est ce que tente de présenter cet article.

Mots-clés : sémiotique, démonstrations mathématiques, textes mathématiques, formules

---

1-Préambule

La sémiologie peut-elle aider à mettre en place des critères d'évaluation des difficultés de la complexité des textes mathématiques ?

Nous nous sommes écarté des démarches de logiciens au profit des démarches de la sémiologie pour les deux raisons suivantes : d'une part, il aurait fallu commencer nos analyses par la transcription de textes mathématiques en langage formel, transcription qui n'assure pas une plus grande lisibilité à ces textes eu égard à l'insuccès de l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement ; et

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 173 - 213.
© 2013, IREM de STRASBOURG.

d'autre part, rien dans les références théoriques de la logique, ne donne des outils pour déterminer la démarche de complexité des expressions mathématiques.

En nous appuyant sur les méthodes de la sémiologie, nous pouvons construire une réflexion qui peut conduire à matérialiser une méthode d'évaluation de la complexité. Méthode que nous avons testée sur deux traités de L. Schwartz, l'un jugé facile et l'autre plus difficile. Les démarches de construction de la méthode ont-elles abouti à construire un outil pertinent, au regard du but poursuivi ? C'est ce que tente de présenter cet article.

« *Toutes les sciences se donnent des moyens pour décrire les objets en se construisant un langage* » écrit Louis Hjelmslev (L.Hjelmslev, 1966, p23) On peut établir que pour les mathématiques, le langage formel peut se rapprocher de ce que les linguistes appellent la « métalangue », langue qui sert à décrire les expressions d'une autre langue. Historiquement, certains mathématiciens ont usé de la logique comme « métalangue » pour décrire et expliquer les constructions et les développements de leur science. L'utilisation de la logique comme métalangage a permis d'expliquer la signification et la construction des objets mathématiques, sachant que la langue naturelle est d'usage premier pour les décrire. Ce que nous ferons, pour notre part, c'est remettre la langue naturelle en situation d'expliquer les textes mathématiques. Notre point de vue s'appuie sur une caractéristique que R. Barthes reconnaît à la langue naturelle : celle-ci peut aussi, dit-il, jouer le rôle de métalangue en prenant en charge un système d'objets signifiants ; « *…la notion de métalangue ne doit pas être réservée aux langages scientifiques ; lorsque le langage articulé dans son état dénoté prend en charge un système d'objets signifiants, il se constitue en ''opération'' c'est-à-dire en métalangue…* » (R.Barthes, 1967).

2- Problématique

Notre analyse du texte mathématique - pour rester dans la perspective de R. Barthes - sera reliée aux plus ou moins grandes difficultés à donner au texte une signification. Nous tenterons de cerner les difficultés de compréhension relatives au concept ou à la notion mathématique, lors du passage à leurs significations, par l'analyse de la complexité des éléments essentiels, les expressions (formules, démonstrations) mathématiques qui leur sont associées. Ce qui nous intéresse, c'est la détermination des formes expressives ou expressions mathématiques du contenu de « l'introduction aux distributions » qui se manifestent dans les traités de Laurent Schwartz. Nous envisageons de classer ces traités relativement à leur difficulté de complexité, en évaluant la diversité et la complexité des formes expressives que nous nommons plus loin, objets- expressions, et leur nombre.

La question pour nous, est donc de savoir dans quelle mesure les formes d'expressions visibles peuvent rendre compte de la complexité. Pour répondre à cette question, nous avons pris pour référence le sémioticien Hjelmslev pour qui ce sujet a fait l'objet d'un long questionnement (L.Hjelmslev, 1971). Nous pouvons alors, avec une certaine assurance, construire des relations pertinentes entre expression, contenu et complexité. Qu'en est-il lorsque nous voulons établir ce type de relations entre les expressions mathématiques, leur contenu et leur complexité ? Est-on encore assuré du lien entre l'expression et le contenu ? Nous avons levé ces dernières objections en examinant la démarche entreprise par Herreman (A.Herreman, 2000 p.17-42) sur la topologie des signes. Herreman analyse les objets-expressions pour identifier l'évolution de la topologie algébrique dans les écrits de R. Poincaré. Ce sont les objets-expressions mathématiques qui concrétisent les concepts ou les objets mathématiques, en rappelant que Hjelmslev, auquel nous nous référons, définit cette concrétisation comme une articulation, dans un langage, entre le plan de l'expression (leur signifiant) les signes d'un langage, et le plan fictif de contenus des concepts. Ce dernier plan se construit par les relations de sens commun de signification que les différentes expressions entretiennent sur les concepts. Rappelons que l'ensemble des différentes remarques ou déviations sémiologiques, que nous avons mis en œuvre - de purs linguistes les considéreront comme des digressions sémiologiques - a été élaboré en prenant pour référence le livre de Louis Hjelmslev, (L.Hjelmslev, 1971).

3-Complexité du texte mathématique

Nous précisons que l'expression « texte mathématique » recouvre les formules et les autres parties du texte dont les démonstrations.

Dans le champ des mathématiques, la compréhension que nous avons liée à la complexité des textes mathématiques a été abordée par Frege qui est certainement un des grands logiciens des mathématiques modernes. Il a permis un abord moderne de la logique pour la complexité - compréhension des notions mathématiques en définissant les notions de « sens » et de « dénotation ». Ces deux éléments ont été déterminants dans sa recherche pour la construction du domaine de la sémantique formelle. Ce dernier domaine prépare des outils possibles pour déterminer rigoureusement la valeur d'un jugement ou de la véracité d'une proposition mathématique. Toutefois, si les positions de Frege s'orientent en effet sur la détermination du «sens» d'une expression mathématique, ces positions ne semblent pas prendre en compte, ou peu, les difficultés de compréhensions liées à la complexité d'expressions des concepts mathématiques énoncés en textes de langue naturelle ou en langage semi-formel. Pour éviter les passages à l'écriture logique de ces textes, nous avons donc envisagé le passage à la sémiotique, comme nous l'avons déjà précisé dans notre introduction.

La langue mathématique est constituée de signes qui sont assemblés selon des règles syntaxiques et sémantiques. Ces signes désignent des objets mathématiques qui représentent des concepts mathématiques. Les objets mathématiques seront indifféremment désignés par concept, signifié ou représentation. Ces signes représentent les concepts mathématiques dits encore objets mathématiques ; ces signes tiennent lieu et place pour des objets ou des concepts dans cet article, sans confondre les représentations et ce qu'ils représentent, car il ne faut pas confondre les propriétés des représentés et celles de leurs représentants ; et pourtant dans les mathématiques, c'est par le jeu des expressions (représentants) que l'on découvre ou crée les concepts et les propriétés. Nous n'accédons pas aux concepts ou aux objets mathématiques, mais à leurs représentations ; ceux-ci sont en effet évoqués par des ensembles de signes et c'est par les manipulations de ces signes que nous accédons à leurs propriétés, les découvrons voire les construisons (H.Freudenthal, 1980 pp 338-384). Ce langage spécifique est à acquérir de façon précise si on veut comprendre et ensuite donner une signification aux formules et aux démonstrations. Nous devons apporter une précision en définissant ce que nous entendons par « complexité » et « signification ». Le lecteur donne un sens (signification) aux expressions, ensuite il s'attache à comprendre (la complexité du texte). Exemple : *« …. On utilise la convergence uniforme sur K pour définir la convergence des φ_n vers φ… »*. Nous savons lire ce texte, il est correctement écrit, il a un sens (une signification) car il respecte les normes d'écriture, on peut le comprendre (compréhension) si on possède les connaissances mathématiques nécessaires compte tenu de sa complexité inexistante. La signification porte sur le texte et la compréhension sur le concept. La signification est effective quand le texte ou les expressions mathématiques sont conformes aux règles d'écriture, eu égard à sa complexité ; et la compréhension (la fonction sémiotique) se place dans les relations que l'on peut établir entre les expressions (les textes) et les contenus conceptuels ; nous suivons en cela les définitions données par Hjelmslev (L.Hjelmslev, 1971).

Dans le langage mathématique, les expressions s'inscrivent complètement dans une structure ; ces formes syntaxico- sémantiques sont conformes aux normes qui se sont imposées au cours de l'histoire des mathématiques et dont la complexité et la signification se sont élaborées conjointement, et c'est par le calcul et la lecture de ces signes que nous accédons à leurs propriétés, les découvrons, voire les construisons.

Nous nous sommes orienté vers un outil d'analyse qui permet d'évaluer la complexité d'un texte mathématique. Cette analyse reprend pour l'essentiel les hypothèses linguistiques de L. Hjelmslev sur les signes expressions mathématiques. Nous rappelons que dans les distributions, mais aussi dans tous les textes mathématiques d'un certain niveau, les signes ne tiennent pas la place des objets qu'ils évoquent, mais remplacent d'autres signes, ce qui demande un effet de transfert de recodage pour retrouver les objets véritablement évoqués. Nous allons utiliser deux moyens pour déterminer le niveau de complexité d'un texte :

Nous nous appuyons sur Frege qui passe du concept à l'écriture d'objet représentant ce concept dans un ensemble de symboles ; l'objet mathématique sera identifié par une formulation et ses propriétés le plus souvent circonscrites par des formules ou dans un ensemble de normes logiques de propositions, déductives en l'occurrence ; par exemple, l'objet fonction existe dans un texte quand le symbole représentant cet objet, le plus souvent un prédicat, correspond à la définition « conceptuelle » de fonction. « *Sans les signes, nous nous élèverions difficilement à la pensée conceptuelle. En donnant le même signe à des choses différentes quoique semblables, on ne désigne plus à proprement parler la chose singulière mais ce qui est commun : le concept. Et c'est en le désignant qu'on prend possession du concept ; puisqu'il ne peut être objet d'intuition, il a besoin d'un représentant intuitif qui nous le manifeste. Ainsi le sensible ouvre-t-il le monde de ce qui échappe au sens* » nous dit-il (G.Frege, 1971). Dans ce même ouvrage, Gottlob Frege (G.Frege, 1971) relève les aspects applicatifs et fonctionnels du langage mathématique. Ces deux références nous ont conduit à postuler, eu égard à notre pratique de textes mathématiques, qu'une partie des difficultés d'un texte se situe sur le niveau de complexité de la structure écrite du langage mathématique et plus particulièrement des formules et des démonstrations.

4-Démarche méthodologique.

Nous avons pris le parti d'estimer que les éléments de surface du texte mathématique, à savoir les expressions-formules (plus simplement formules) et les démonstrations- sans nous occuper des interactions qu'elles entretiennent entre elles- constituent en partie le sens du texte. Nous avons fait porter nos observations exclusivement sur les traces écrites, en laissant de côté les traitements mathématiques, traces que l'on peut nommer « caractéristiques visuelles ». Dans les caractéristiques visuelles, nous nous limitons à la construction des textes en leurs constituants, et leurs expressions (formules et démonstrations). En pratique, il n'est pas possible d'exclure les interactions entre les éléments mathématiques sans perdre une partie de leurs significations, néanmoins nous suivrons la démarche d'estimation précitée des éléments de surface. Nous avons pris pour modèle la démarche entreprise dans l'observation du champ des données, adoptée par Janvier, Sabatier, Baillé, Maury dans « Essai de typologie des graphiques dans les manuels d'histoire-géographie et biologie-géologie des collèges »

(M. Janvier, 1993) pour classer les graphiques des manuels au niveau de leur difficulté de lecture : méthode consistant à comptabiliser le nombre d'apparitions de certains éléments graphiques. Nous convenons que cette démarche est insuffisante pour saisir la complexité, mais nous avons encore suffisamment d'éléments d'estimation des difficultés de complexité si nous comptabilisons la composition des textes en formules, en démonstrations et en parties qui ne sont pas des formules ou des démonstrations.

Nous nous attacherons donc à évaluer ce degré de complexité, en faisant par analogie la même démarche que les linguistes. Nous n'allons pas prendre pour référence le sens mathématique d'une formule ou d'une expression, mais le nombre d'arrangements et la place des symboles élémentaires qui sont représentés dans leur construction comme unité significative de base porteuse d'une partie de la complexité, suivant en cela ce que propose

Roland Barthes (R.Barthes, 1967) dans sa recherche des unités significatives d'un texte. Notre démarche s'apparente aussi à celle de linguistes comme A. Martinet lors de la construction d'un mot (monème) par des combinaisons avec des éléments plus simples, les lexèmes et les morphèmes.

1-Nous avons complété cette première analyse qui porte sur les formules, par l'analyse sémiotique qui porte sur la complexité des démonstrations et les différents niveaux de difficulté des textes (R.Barthes, 1967). L'analyse sémiotique aborde la complexité par la décomposition fictive des textes en plans de contenus (concepts ou signifiés) et en plans d'expressions (signifiants) puis par la mise en relation de ces deux plans qu'elle appelle fonction sémiotique, comme nous l'avons déjà dit précédemment.

2-Nous avons identifié pour les distributions les symboles primitifs. La liste de ces symboles primitifs est développée à partir de la table de caractères informatiques UNICODE/ U 2200, la liste des notations de fonctions mathématiques, la liste des opérateurs, et la table des symboles de la norme ISO.Nous avons ensuite extrait la liste des symboles primitifs, ceux qui sont communs et présents dans les deux leçons de L. Schwartz. Ces symboles différemment utilisés dans les formules et les expressions sont les points d'achoppement dans la lecture de ces deux leçons, à savoir:

Les opérations.
Le symbolisme algébrique.
Les parenthèses.
Les relations entre objets.
Les constantes et les lettres dites variables.
Les fonctions.
Les symboles trigonométriques.
Les notations liées aux calculs avec les fonctions : dx, D_x etc…
Les ensembles des espaces fonctionnels.
Les notations ensemblistes et logiques. $f(\ )$

Et plus précisément les notations suivantes des objets mathématiques primitifs dans les chapitres de définition et des propriétés générales des distributions, à savoir : les expressions algébriques, $f(\ )$, les fonctions trigonométriques, les signes opératoires, les signes de la théorie des ensembles et de la logique, les notations des espaces fonctionnels, dx, $\min(\ ,\ ), \rightarrow$ *tend vers*, $\langle T_f ,\ \rangle, \langle\ , D_\varphi \rangle$

$|\ |$, Δ *laplacien*, δ *Dirac*, $\partial, \in, \lim\limits_{\delta x \to 0}, \dfrac{\delta y}{\delta x}$, ∃, ∀, $\langle [\ \ ] \rangle$, ≥

$\int\limits_a^b$ int*égrale bornée*, $\sum\ , \int\ , \iiint\ , \Pi, \partial^{(\ )}\ D^p\ \dfrac{1}{(\ )}$.

Finalement, nous déterminerons la complexité en considérant :

- La complexité des formules, à l'aide de deux aspects spécifiques : la complexité1 et la complexité 2 ; la complexité 1 portant sur la construction syntagmatique linéaire (longueur de la formule) et la complexité 2 sur la structure de la formule.

- La complexité des démonstrations et des autres parties du texte en nous appuyant sur l'analyse sémiotique.

5- Complexité des formules ou des expressions mathématiques.

Nous avons évalué la complexité des formules mathématiques suivant deux critères : d'abord un critère de lisibilité, qui selon nous permet de rendre compte d'une certaine difficulté de complexité de la formule. Ce premier critère, critère de complexité 1, est lié plus spécifiquement à la longueur de la formule et aux statuts (fonctions) linguistiques des symboles. Le second, que nous désignons par critère de complexité 2, est lié à l'organisation interne de la formule, à savoir l'intrication des symboles entre eux. Cette dernière est analysée par une technique dite de l'emboîtement, qui est issue des langages formels informatiques comme Math Tex, lequel est également utilisé par des logiciels d'affichage des formules mathématiques (L.Rideau, 2002).

5.1 Complexité 1 des formules ou expressions mathématiques.

Le degré de complexité 1 des formules, expressions et résultats de calculs, a été déterminé en incrémentant le nombre de symboles primitifs qui interviennent dans leur écriture et leur statut. Cette complexité se traduit en une formule constituée d'un nombre de quatre chiffres indicateurs du statut et du nombre de symboles primitifs présents et de la longueur de la formule.

5-1.1 Complexité 1 ayant pour critère le statut des concepts des formules :

Lorsque nous lisons un texte, nous en saisissons le sens et ensuite la complexité grâce à certains mots, le verbe, le pronom ou les marques de ponctuation. Les statuts de ces mots sont des facilitateurs de lisibilité des expressions, comme l'ont observé certains sémanticiens (A.Guha, 1955). Nous pensons qu'il en sera de même pour la complexité des formules et des expressions mathématiques. Nous attachons plus d'importance à certains symboles qu'à d'autres dans une formule complexe, en prenant en considération le statut du symbole ; par exemple dans une formule, le symbole *intégrale* est prioritaire par rapport à d'autres symboles, ce statut est fortement lié à la fonction du symbole, et à sa signification. Cette complexité s'appuie sur le fait que les symboles qui interviennent dans la constitution d'une formule ont différentes statuts. Notre catégorisation prend donc en compte le fait des différents statuts des symboles liés à leur emploi en lieu et place de leur stricte signification mathématique académique: exemple le symbole ou le signe +, le signe intégration $\int$ etc.…, qui interviennent dans la complexité de la formule. Nous avons distingué plus spécifiquement pour les deux traités de L. Schwartz les catégories ou statuts (pour signes) suivants :

- statut constant ou d'objet.
- statut de désignation d'opération.
- statut analytique - fonction.
- statut d'intégration et de différentiation.

Notre méthode d'analyse pour le statut s'appuie sur les méthodes des linguistes : pour nous, ces symboles sont des syntagmes élémentaires que l'on peut concaténer pour former des formules plus complexes, comme des mots constitués de syntagmes élémentaires. La formule prendra pour qualificatif le nom de la catégorie « statut » la plus fortement représentée dans la formule.

Tableau 1 : catégorisation des statuts des symboles.

statuts des symboles	notations de la catégorie	symboles
-objets -résultats d'un calcul ou d'une définition	u	Les constantes sans signe. Les lettres muettes. f(x), exp(x) , { / },
opérations	O	Σ, Π, norme | |, Lim , dx , dμ
analytiques	φ	f( ), φ( ), Δ, δ, norme ‖ ‖
intégration, différentiation	I	$\int \ ,\iint \ ,\partial,D^{()},\langle \quad \rangle$

5-1.2 Complexité 1 sur la longueur des formules :

Nous avons fait un rapprochement avec la linguistique en assimilant les symboles des objets mathématiques primitifs aux unités minimales, et la construction de formules plus complexes est calquée sur le principe des règles morphosyntaxiques des linguistes pour représenter des formules qui se définissent à l'aide des ces symboles primitifs ou de formules déjà constituées.

Ce critère a trait, manifestement, au développement horizontal de la formule donc à sa longueur. Nous avons ainsi introduit ce critère d'évaluation de lecture portant sur des difficultés de complexité des formules, qui se rattachait à leur longueur.

Tableau 2 : Indice de complexité (1) sur la longueur

Notations des objets mathématiques dans les traités de L. Schwartz.	indices de complexité
constantes (sans signe), lettres algébriques	0
Expressions algébriques, f(x), <=>, $\prod$, $\sum$, ∂, Δ, $\int$, { }, $D^{()}$, $\mid \ \mid$, [ ] , notations ensemblistes $\cap$; $\cup$;$\subset$; …, signes opératoires + - x …. ; Ln, ; Sin …, symboles logiques $\forall$;$\exists$; $\Rightarrow$;…dx ou dy…, = ; Δ	1
$\int_a^b$ intégrale bornée, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\iiint_{\Re}$ (intégrale multiple), exp( ), $\frac{1}{(\ )}$, $\langle T_f , \ \rangle$, $\langle \ , D_\varphi \rangle$, f(expr. algébrique)	2

En regroupant les deux critères de complexité 1 nous avons une formule qui est représentée par un couple (indice du statut / indice de la longueur). Pour exemple $\int_a^b f(x)dx$, nous avons $\overset{I}{\int} \underset{2}{\overset{u}{a}\overset{u}{b}} f\underset{1}{\overset{u}{(x)}}\underset{1}{\overset{u}{dx}}$, en exposant les indices des statuts et en exposant la valeur de la longueur, de formule (statut $\underset{I}{1}\underset{\varphi}{0}\underset{O}{0}\underset{u}{4}$/ *longueur* 4).

Nous avons pour la complexité 1 la structure de la formule suivante :

Intégro-différentiel $_I$ – fonction $_\varphi$ – opération $_O$ – objet $_u$ / longueur

Suivant la convention que nous avons adoptée pour le statut, cette dernière formule sera désignée comme « objet» (4 $_u$) de longueur 4.

Nous nous sommes orienté sur les difficultés de signification et de compréhension qui se perçoivent de la complexité des formules, car ce sont elles qui présentent ou élaborent les résultats et les conclusions des démonstrations et des constructions des objets mathématiques.

Selon R. Duval « *Ces symboles ainsi repérés permettent de composer des désignations d'objets et de symboles neutres en des syntagmes qui désignent des nouveaux objets plus complexes. Ces opérations : catégorisation et nombres de symboles, ne sont que partiellement liées aux définitions mathématiques mais à quelque chose de plus général qui renvoie aux distinctions entre objet, opération et modélisation. Opérations que l'on retrouve dans tous les types de langages, naturels et formels* » (R.Duval, Oct. 2009).

5-1.3 Signification de la complexité 1 des expressions mathématiques ou formules.

Nous rappelons ce que nous avons énoncé sur la distinction que nous entretenons entre compréhension et signification, à savoir que la complexité renvoie à ce que le texte dénote sur le concept et la signification renvoie à la conformité de ce texte à des règles d'écriture ou de construction pour les expressions mathématiques ou formules.

Allons-nous identifier par nos analyses une matérialisation de l'écart de difficulté que tout lecteur un peu mathématicien constate entre ces deux traités ? Selon Schwartz, la présentation *Méthodes Mathématiques* convient mieux aux physiciens et la *Théorie des Distributions* est plus adaptée aux mathématiciens. Nous ne pouvons pas bien entendu faire abstraction des conditions d'utilisation ni du niveau de connaissances mathématiques du lecteur. Nous postulons néanmoins que de toutes choses égales par ailleurs, il y a une différence entre ces deux traités que nos analyses peuvent identifier. Un écart de difficulté que Laurent Schwartz signale dans son livre autobiographique : « Un mathématicien aux prises avec son siècle » (L.Schwartz, 1977 pp 253-254). Nous allons nous attacher à déterminer si cette différence, entre les deux traités, porte sur les formules. Dans notre cas, les formules mathématiques sont des expressions algébriques constituées de symboles reliés entre eux par des règles d'écriture. Ces formules, nous l'avons déjà précisé, mais plus sommairement, sont des représentations d'objets mathématiques pouvant de surcroît avoir des statuts différents - intégro-différentiel, fonction, opération, objet - induits par leurs symboles. Les tableaux qui suivent indiquent les valeurs prises par les formules pour la complexité 1 selon la légende : nombres à 4 chiffres pour la catégorisation / la longueur et ensuite les statuts : φ = fonction, O = objet, I = intégro-différentielle. Nous retenons longueur et statut, critères les plus judicieux pour expliquer la différence de complexité entre les deux traités (surlignage dans les tableaux).

Tableau 3 : degrés de complexité 1 des formules dans Méthodes Mathématiques.

Emplacements des formules	Complexité 1	Emplacements des formules	Complexité 1
I I, 1 ;1 p1	0311/1 φ	II,2 ;4 p11	1321/20 φ
I I,1 ;2	0311/6 φ	II,2 ;5-2 ;6 p11	1332/7 I 2321/7 I
I I ,1 ;3 p2	0220/5 φ	II,2 ;7 p11	6624/11 I
I I ,1 ;4 p2	1202/6 φ	II,2 ;8 p12	0202/3 φ
I I,1 ;5 p2	3300/15 I	II,2 ;9 p12	3422/8 I
I I,1 ;6 p2	1008/11 O	II,2 ;10 p12	0300/5 φ
I I ,1 ;7 p3	0031/6 O	II,2 ;11 p12	0320/6 φ
I I,1 ;8 et 1 ;9 p3	0130/13 O	II,2 ;12 p13	2410/8 φ
II, 1 ;10 p4	3220/8 I	II,2 ;13 p13	2410/8 φ
I I, 1 ;11 p4	4330/11 I	II,2 ;14 p13	2520/7 φ
I I, 1 ;12 P4	2011/6 I	II,2 ;15 p13	3513/19 φ
I I,1 ;13 p5	3131/13 I	II,2 ;16 p13	0120/3 O
I I ,1 ;14 p5	3131/11 I	II ,2 ;17 p13	2311/9 φ
II,1 ;15-1 ;16-1 ;17 ; p5	1110/6-8-6 O	II,2 ;18 p13	1211/9 φ
II,1 ;18 p6	1100/10 I	II,2 ;19 p 14	2434/22 φ
II,1 ;19 p6	2131/10 O	II,2 ;20 p14	0063/25 O
I I,1 ;20	3210/10 I	II,2 ;21 p14	0045/17 O
II, ;21 p7	3310/11 I	II,2 ;22 p14	1210/13 φ
II,1 ;22 ;23 ;24 p7	1210/3 φ	II,2 ;23 p14	0201/6 φ
II,1 ;25 p8	1033/13 φ	II,2 ;24 p14	0208/10 φ
II,1 ;26 p8	1201/3 φ	II,2 ;25 p14	0208/9 φ
II,1 ;27 p8	1201/5 φ	II,2 ;26 p14	3220/11 I
II,1 ;28 p8	1310/7 φ	II,2 ;27 p15	1045/22 O
II,1 ;29 p9	1210/7 φ	II,2 ;28 p15	0154/9 O
II,1 ;30 p9	1134/10 O	II,2 ;29 p 15	1072/7 O
II,1 ;31 p9	1011/8 I	II ,2 ;30 p15	3220/10 I
II,2 ;1 p10	1312/9 φ	II, 2 ;31 p15	0455/12 φ

II,2 ;2 p10	2211/9 φ	II,2 ;32 p16	5435/26 I
II,2 :3 p11	1121/11 O	II,2 ;33 – 35 p16	0245/12 O
		II,2 ;36 p16	01450/23 O
		II,2 ;37 p16	1110/6 φ

Tableau 4 : degrés de complexité 1 des formules dans théorie des distributions

Emplacements des formules	Complexité 1	Emplacement des formules	Complexité1
I,1 ;1 p1	0400/7 I	I,2 ;9 p10	0300/3 φ
I,1 ;2 p2	0123/7 O	I,2 ;10 p10	0400/7 φ
I,1 ;3 p2	1400/5 φ	I,2 ;11 p11	005/10 O
I,1 ;4 p3	0012/4 O	I,2 ;12 p13	1330/6 I
I,1 ;5 p3	0053/9 O	I,3 ;1 p14	0200/3 φ
I,1 ;6 p5	2310/11 φ	I,3 ;2 p14	0320/6 φ
I,1 ;7 p5	2310/9 φ	I,3 ;3 p14	0430/9 φ
I,1 ;8 p5	1410/7 φ	II,1,1 p16	4300/17 φ
I,1 ;9 p6	0202/3 φ	II,1 ;2 p16	4230/16 I
I,1 ;10 p6	0302/4 φ	II, 1 ;4 p17	2100/8 φ
I,2 ;1 p8	0303/7 φ	II ,1,5 p17	1300/5 φ
I,2 ;2 p8	0301/3 φ	II,1 ;6 p17	2100/8 φ
I,2 ;3 p8	1011/6 I	II ,1 ;7 p17	2001/7 I
I,2 ;4 p8	1120/6 O	II,2 ;1 p18	1202/6 φ
I,2 ;5 p8	1100/8 I	II,2 ;2 p18	3112/13 φ
I,2 ;6 p9	1100/15 I	II ,2 ;3 p18	0100/1 φ
I,2 ;7 p9	3400/10 φ	II,2 ;4 p19	3222/6 φ
I,2 ;8 p9	0030/4 O	II,1 ;3 p16	4300/16 I
		II,2 ;5 p19	2010/4 I

5-1.4 Répartition en pourcentages des formules sur les différentes composantes de la complexité 1.

Nous avons traité un aspect de la difficulté du texte mathématique, en relevant ce que nous avons relié à la lisibilité donc à la complexité : le statut des formules et leur longueur. Nous avons regroupé les différentes formules de la complexité 1 suivant les critères de cette complexité 1 à savoir :

- catégorisation (statut) des formules : **I** = intégro-différentiel ; **φ** =fonction ; O =opération ;

u = objet.

Le statut u = objet n'ayant pas été attribué à une formule, elle n'apparaîtra pas dans nos récapitulatifs.

Tableau 5 : complexité 1 des formules du traité Méthodes Mathématiques, *répartitions en pourcentages sur les statuts.*

statut	**I** intégro-différentiel	**φ** fonction	**O** opération
longue	16	17	16
courte	4	38	9

Tableau 6 : complexité 1 des formules du traité Théorie des Distributions, *répartition en pourcentages sur les statuts.*

statut	**I** intégro-différentiel	**φ** fonction	**O** opération
longue	13	11	6
courte	8	47	15

Il nous semble que le traité *Méthodes Mathématiques* expose les distributions en usant de formules « longues » qui ont un statut « opération » ; dans le traité *Théorie des Distributions,* les formules sont « courtes » avec également le statut « opération ». Ce type de formules désigne des opérations : somme, produit, norme, limite et résultat du calcul intégral. Des formules courtes, effectivement moins complexes, possèdent une construction elliptique marquée par l'absence de certaines opérations ; en dépit de leur clarté leur lecture induit une compréhension difficile du fait des implicites. On peut noter que dans le traité *Théorie des Distributions* les fonctions (47%) appartiennent aux mesures et aux espaces fonctionnels ; pour *Méthodes Mathématiques* on remarque l'espace des fonctions complexes.

5-2 Construction du critère de complexité 2

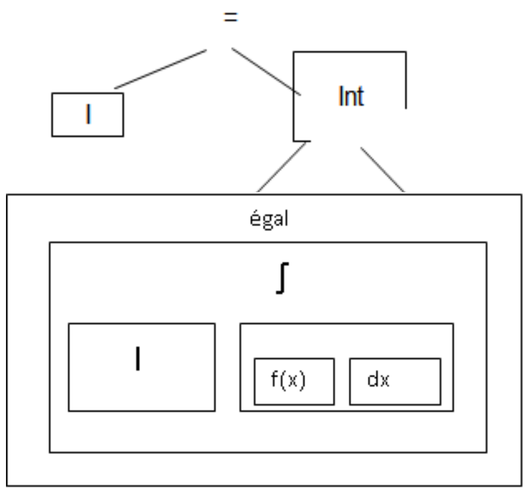
Nous avons intégré pour identifier la difficulté de complexité d'une formule la décomposition dite en « boîte ». Nous identifierons le rapport qui se dessine dans une formule entre les différents concepts, en faisant apparaître les constructions qui se tissent entre leurs symboles respectifs. Ces liaisons entre symboles doivent traduire une certaine organisation des concepts initiaux qui participent à la construction du concept ou de la notion représentés par la formule. Nous avons remarqué que le symbole $\frac{\partial}{\partial x}$, de valeur de d° 1 dans la complexité 1, représente la différentiation. Cette notation, rattachée épistémologiquement au concept de vitesse, est facilement compréhensible. La notation du laplacien Δ (L'opérateur laplacien, ou simplement le laplacien, est un opérateur différentiel égal à la somme de toutes les deuxièmes dérivées partielles), qui est aussi évaluée de d°1 dans le critère de complexité 1, n'a pas le même niveau de difficulté de complexité que $\frac{\partial}{\partial x}$. La technique de l'emboîtement, utilisée dans les langages informatiques formels, identifie les relations de construction qui existent entre les différents symboles qui constituent une formule. Nous allons donc utiliser cette méthode de décomposition pour identifier, les liaisons qui s'écrivent entre les symboles représentés. Nous nous sommes appuyé sur le fait que les symboles les plus récents représentent les concepts mathématiques les plus modernes donc de degré de difficulté de complexité le plus élevé selon Jean Dhombres (J.Dhombres, 2006-2007).

5-2.1 Structure de boîtes

Cette structure « boîte » est mise en place sur une formule en s'appuyant au départ sur le signe égal et ensuite sur la lecture des symboles qui se trouvent de part et d'autre de ce signe. Condidérons par exemple : $I = \int f(x)dx$.

Représentation structurée :

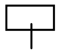
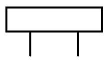
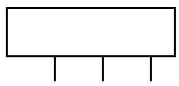
Représentation en boîtes :



Dans cette dernière formule, le signe « égal » domine, il constitue la boîte enveloppante ou le départ de l'arbre. Nous avons choisi la représentation arborescente car elle fait apparaître plus aisément les liaisons possibles entre les symboles (comme pour les combinaisons chimiques entre les atomes).

Tableau des liaisons des symboles mathématiques : Les boîtes portent également des embranchements qui représentent les relations possibles que les symboles peuvent entretenir avec d'autres symboles.

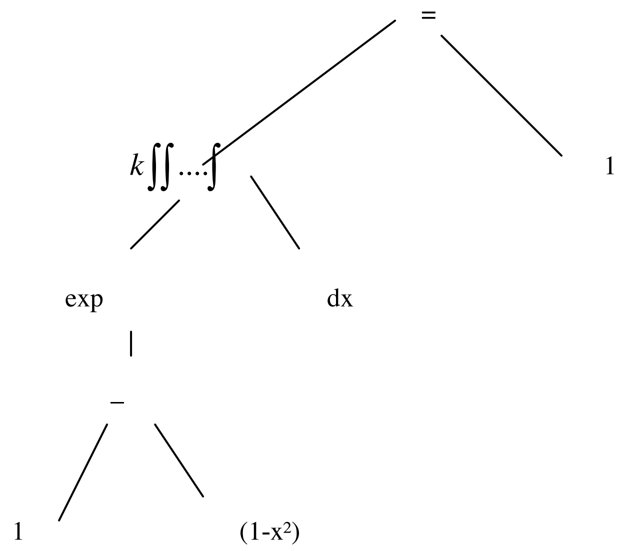
Tableau 7 : degré de liaison des boîtes

Liste des symboles	Degrés des liaisons	embranchements
« les variables » ; « les nombres » ; dx, expressions algébriques ; e^x ; ln x ; les radicaux $\sqrt[()]{\ }$	zéro-unaire	0
f( ) ; $e^{( )}$; ln ( ) ; sup ( ) ; Min ( ) ; inf ( ) ; sup ( )	unitaire 	1
signes arithmétiques ; barre de fraction ; = ; symboles avec des indices X_x^x ; < , > ; (,) ; symboles des ensembles ; Π ; ∑ ; ǁ formule-formuleǁ ; |formule-formule|	binaire 	2
$\iiint_{\Re} f(x)d\mu$; $\int_a^b f(x)dx$	tertiaire 	3

Pour exemple la formule I, 2 :5 p 8 de la théorie des distributions :

$$k\iint ....\int_{r\leq 1} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)dx = 1$$

Nous avons l'arborescence suivante :



En conclusion, plus l'arborescence est profonde, plus, nous semble-t-il, nous avons une compréhension élevée conjointement accompagnée d'un indice de complexité élevé exprimant une difficulté liée à la mise en interaction de concepts de plus en plus nombreux. Cette profondeur sera traduite par le degré « le nombre d'embranchements ». Nous avons donné un poids aux symboles, nous appuyant sur l'épistémologie de la mise en mathématiques de Jean Dhombres, en donnant un poids élevé aux concepts les plus récents des mathématiques. C'est ce poids qui sera aussi un évaluateur de la complexité de la formule relative à l'intrication des symboles. Dans la formule, on ne compte qu'une fois le poids du symbole quelque soit le nombre d'occurrences qui le représentent.

Poids des symboles relativement à leur date d'apparitions dans les textes mathématiques.

dates	1700	1800	1900	
poids	1	2	3	4

Tableau 8 : indice de complexité en relation avec l'histoire des symboles

symboles	Dates d'apparition dans les textes mathématiques	Poids de la complexité
Nombres et signes arithmétiques		0
exp( ) ; ln ( ) ; i	1600	1
$\lvert\ \rvert$ valeur absolue	1631	1
$\langle , \rangle$ fonctionnelle	1920	4
$\sqrt{\ }$	1525	1
=	1557	1
[ ] ; ( )	1510	1
notations algébriques x^n… expr. algébriques	1600	1
f' ; f '' ; $f^{(n)}$; dx	1675	1
notation des fonct. trigo	1626	1
f(x)	1734	2
$\leq$	1734	2
$\sum$	1755	2
Δ laplacien, ∇ nabla	1780	2
$\neq$	1750	2
$\int$ *et* $\iiint$ (dxdy)… Intégration de Riemann	1822	3
$\frac{\partial}{\partial x}$ diff partielle	1890	3
opérateur différentiel d..	1850	3
$\prod$	1812	3
trait de fraction —	1890	3
combinaison arrangement	1826	3
notations ensemblistes	1890	3

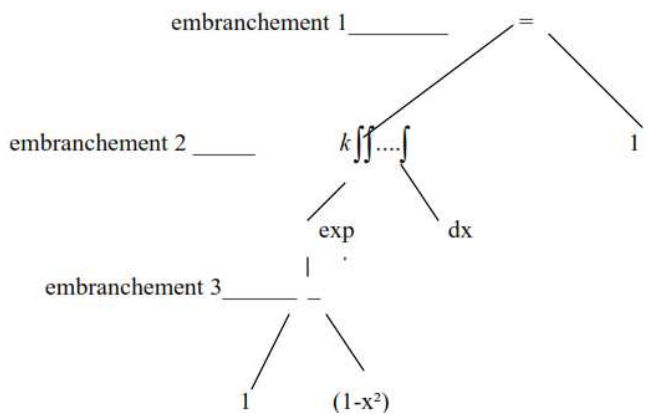
symboles	Dates d'apparition dans les textes mathématiques	Poids de la complexité
$\lim_{j\to\infty}$	1840	3
hypercube dxdydt…	1850	3
fonction Γ d'Euler	1820	3
notations de convergences	1830	3
Max ; min ; Sup ; inf	1930	4
e.v.t ; espaces fonctionnels $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}^*$; $\mathcal{L}^\infty$; $\mathcal{C}_0^\infty$…..	1920	4
Fonct. spé, δ , H	1930	4
→ tend vers	1910	4
Topologie $\mathcal{O}$; $\bar{E}$; K ; μ (mesure)	1913	4
notation des fonctions mesurables $\int$ $et \iiint_\Omega d\mu$, μ une mesure sur Ω. intégrale de Lebesgue	1907	4
$\Vert\ \Vert$ norme	1910	4
Intégrale de Lebesgue	1920	4
T notation des distributions	1954	4

Référence : *notations mathématiques et approche historique*, <http://www.math93.com>

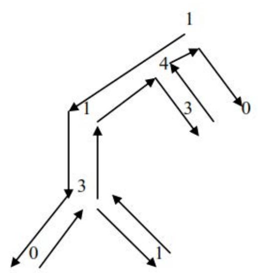
Nous avons désigné les mathématiques du XIX^e^ siècle par « analyse » ou « mathématiques » de l'ingénieur et celles du XX^e^ siècle par « topologie » ou « analyse fonctionnelle ». Généralement, les concepts récents sont plus difficiles à comprendre que les concepts plus anciens ; nous en avons déduit que la difficulté de complexité croît des mathématiques du XIX^e^ aux mathématiques du XX^e^.

Le poids de la formule et l'arborescence constitueront l'indice de complexité 2 que nous allons prendre comme indice de difficulté de complexité de la formule :

Par exemple la formule que nous avons présentée s'analyse de la façon représentée :



Les embranchements : 3 (trois embranchements)



Son poids total : 13 que l'on fera apparaître en suivant l'arborescence (1,4,1,3,0,1,3,0) ; l'évaluation se faisant de haut en bas et à partir de la droite des embranchements jusqu'au plus bas ; et ensuite, en remontant, on réitère cette opération sur l'autre branche, jusqu'à l'embranchement primaire et on recommence sur les embranchements non évalués.

La complexité (2) de cette formule (embranchement) (déroulement de l'arborescence) (poids total) se décline comme suit : (3) (1,4,1,3,0,1 ,3,0)(13).

Peut-on réduire ces informations ? La forme réduite (embranchement, poids) nous semble appropriée pour indiquer la complexité 2 de la formule. La forme réduite (3,13) prise par l'exemple indique le nombre d'embranchements donc le niveau de profondeur de la formule et par ailleurs le poids total nous indique que la formule est constituée d'objets mathématiques récents donc de complexité difficile.

5-2.2 Identification et classement de la complexité 2 des formules.

De la lecture des chapitres d'introduction et de définitions des distributions des deux traités de L. Schwartz, nous avons déduit des estimateurs de la complexité de lecture des formules, de leur signification par le biais des efforts de compréhension que nous avons fournis pour effectuer les calculs qu'elles réclament et identifier les propriétés des concepts sollicités. En reliant nos difficultés de complexité des formules à la complexité de leur structure, nous avons constaté que les formules ayant des embranchements et constituées de concepts récents sont difficiles à comprendre. Nous avons assigné les qualificatifs de « fort » er de « faible » selon le nombre d'embranchements et la valeur du poids. Le qualificatif « faible » est attaché aux nombres d'embranchements inférieurs ou égaux à 3 et pour le poids, lorsque ce poids sera inférieur ou égal à 8. Les formules ayant un nombre d'embranchements « faible » et un poids de concepts « faible » sont de complexité aisée, ces formules étant faiblement structurées et constituées de formules de concepts non récents. Nous avons, de ce fait, identifié le poids au statut des symboles présents dans les formules.

Tableau 9 : catégorisation des embranchements et des poids

	embranchement		Poids	
	faible	fort	faible	fort
complexité 2	≤ 3	> 3	≤ 8	> 8
notations	1	2	1	2

Tableau 10 : exemples de catégorisations de formules.

$(1,5)$	(f, f)	$\langle T,\varphi\rangle = \iint_S \rho(x)\varphi(x)dx$
(4,8)	(F, f)	$\langle \delta',\varphi\rangle = \langle \delta\ ,\varphi'\rangle = -\varphi'(0)$
(3,10)	(f, F)	$\langle \Delta T,\varphi\rangle = \langle T,\Delta\varphi\rangle$
(9,16)	(F, F)	$\langle Y',\varphi\rangle = -\langle Y\ ,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx$ $= \varphi(0) = \langle \delta,\varphi\rangle$

En référence à notre démarche de lecture et de la complexité des formules telle que nous l'avons précisée précédemment, nous avons dressé le tableau suivant pour mettre en relation structure des formules (embranchements), modernité des concepts (poids) et complexité pour les deux traités de L. Schwartz.

Tableau 11 : rapprochement entre des enseignements des mathématiques et les critères, « faible », « fort » des formules.

formules	embranchements	poids
complexité (compréhension difficile)	fort	fort Topologie-analyse fonctionnel
peu de complexité (compréhension accessible)	faible	faible Mathématiques de l'ingénieur

5-2.3 Résultat de l'évaluation de la complexité 2 sur les formules (embranchements, poids)

Tableau 12 : degré de complexité 2 des formules dans Méthodes mathématiques

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
II, 1 ;1 p1	1,1	II,2 ;4 p10	1,2
II,1 ;2	1,1	II,2 ;5-2 ;6 p10	1,1 -1,1
II,1 ;3 p2	1,1	II,2 ;7	1,2
II,1 ;4 p2	1,1	II,2 ;8 p12	1,2
II,1 ;5 p2	1,2	II,2 ;9 p12	1,1
II,1 ;6 p2	2,2	II,2 ;10 p12	1,1
II,1 ;7 p3	1,2	II,2 ;11 p12	1,1
II1 ;8 et 1 ;9 p3	1,1 -1,1	II,2 ;12 p13	1,2
II, 1 ;10 p4	2,2	II,2 ;13 p13	1,2
II, 1 ;11 p4	2,1	II,2 ;14 p13	1,2
II, 1 ;12 P4	1,1	II,2 ;15 p13	2,2
II,1 ;13 p5	2,2	II,2 ;16 p13	1,1
II,1 ;14 p5	2,2	II ,2 ;17 p13	1,1
II,1 ;15-1 ;16-1 ;17 ; p5	1,1-1,1	II,2 ;18 p13	1,1
II,1 ;18 p6	1,1	II,2 ;19 p 14	2,2

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
II,1 ;19 p6	2,2	II,2 ;20 p14	2,2
II,1 ;20	2,1	II,2 ;21 p14	2,2
II, ;21 p7	2,2	II,2 ;22 p14	2,2
II,1 ;25 p8	2,1	II,2 ;23 p14	2,2
II,1 ;26 p8	1,1	II,2 ;24 p14	1,1
II,1 ;27 p8	1,1	II,2 ;25 p14	1,1
II,1 ;28 p8	1,2	II,2 ;26 p14	1,1
II,1 ;29 p9	1,2	II,2 ;27 p15	1,1
II,1 ;30 p9	1,2	II,2 ;28 p15	1,1
II,1 ;31 p9	2,2	II,2 ;29 p 15	1,2
II,2 ;1 p10	1,2	II ,2 ;30 p15	1,1
II,2 ;2 p10	1,2	II, 2 ;31 p15	1,1
II,2 :3 p10	1,1	II,2 ;32 p16	1,2
		II,2 ;33 – 35 p16	1,2
		II,2 ;36 p16	1,2
		II,2 ;37 p16	1,1

Tableau 13 : degrés de complexité 2 des formules dans théorie des distributions

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
I,1 ;1 p1	1,1	I,2 ;9 p10	1,1
I,1 ;2 p2	1,1	I,2 ;10 p10	1,1
I,1 ;3 p2	1,1	I,2 ;11 p11	1,1
I,1 ;4 p3	1,1	I,2 ;12 p13	1,1
I,1 ;5 p3	1,1	I,3 ;1 p14	1,1
I,1 ;6 p5	2,2	I,3 ;2 p14	1,1
I,1 ;7 p5	2,2	I,3 ;3 p14	1,1
I,1 ;8 p5	1,1	II,1,1 p16	1,2
I,1 ;9 p6	1,1	II,1 ;2 p16	1,1
I,1 ;10 p6	2,2	II, 1 ;4 p17	1,1
I,2 ;1 p8	2,2	II ,1,5 p17	1,1

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
I,2 ;2 p8	2,2	II,1 ;6 p17	1,1
I,2 ;3 p8	1,1	II ,1 ;7 p17	1,1
I,2 ;4 p8	1,2	II,2 ;1 p18	1,1
I,2 ;5 p8	1,2	II,2 ;2 p18	2,2
I,2 ;6 p9	1,2	II ,2 ;3 p18	1,1
I,2 ;7 p9	1,2	II,2 ;4 p19	1,1
I,2 ;8 p9	1,1	II,1 ;3 p16	1,1

Nous avons constaté que pour les formules dont les couples ont peu d'embranchements et sont constitués de concepts de poids fort (embranchements faible, poids fort) et relavant des mathématiques du XXe siècle - espaces fonctionnels, espaces topologiques sont de complexité difficile. Ces formules requièrent, pour leur compréhension, une bonne connaissance en topologie et sur l'intégrale de Lebesgue. D'autres formules de couples de type (embranchement fort, poids faible) concernant les formules des mathématiques de l'ingénieur du XIX[e] siècle. Ces formules présentent de nombreux embranchements et des symboles du calcul intégral et différentiel. Ces formules sont de compréhension plus facile.

Tableau 14 : répartitions des formules en pourcentages selon la complexité 2.

en %	embranchement faible		embranchement fort	
	poids faible	poids fort	poids faible	poids fort
Méthodes mathématiques	40	30	8	*22*
Théorie des distributions	*70*	14		16

L'écart entre les deux traités porte sur le niveau d'embranchement des formules et le poids des concepts représentés. Le couple (faible, fort) pour la *Théorie des Distributions* indique des formules courtes, peu développées, relatives à des concepts des mathématiques de l'ingénieur. En ce qui concerne *Méthodes Mathématiques*, les formules sont lisibles et compréhensibles par leur structure développée. Le poids ne renvoie pas aux mêmes concepts dans les deux manuels, plus compréhensibles dans les méthodes mathématiques et plus difficiles pour la théorie des distributions. Ces résultats expliqueraient la différence de niveau des difficultés de complexité entre les deux traités.

La perception locale ou globale d’un texte dépend non seulement des connaissances du lecteur mais aussi de la façon dont la construction et le balisage des éléments du document permettent de reconnaître la façon dont les éléments sont hiérarchisés et s’articulent entre eux. Néanmoins les expériences des psycholinguistes montrent que la connaissance d’un texte se fait d’une façon globale sur quelques éléments, les plus fréquents et connus et ensuite par des séries de fixations oculaires, une reconnaissance plus précise se met en place ; ce qui ne correspond pas à notre hypothèse d’emboîtement des formules.

6- Nature et classement des parties de texte qui ne sont pas des formules.

En identifiant au mieux l’interaction entre les formules et les différents segments du texte, nous avons constaté que les deux traités de Laurent Schwartz comportent trois types de textes. La séparation du texte mathématique en ces trois types nous semble la plus fréquente et répond aux exigences d’écrits mathématiques d’enseignement. Ces textes se distinguent par les spécificités suivantes :

- type 1(explicatif) : Ce sont des textes porteurs d’indications, de remarques ou des justifications sur les formules et les démonstrations.

- type 2 (démonstratif): Les textes qui sont recensés dans ce type (démonstrations de base) sont constitués de démonstrations directes où les conclusions sont établies par des suites d’axiomes ou de théorèmes.

- type 3 (constructif): les textes de ce dernier regroupement (type conceptuel) sont des démonstrations constructives, c'est-à-dire que l’élément à démontrer est à construire pour répondre aux exigences des hypothèses afin que l’on puisse appliquer, par la suite, les théorèmes et conclure.

C’est donc l’absence de démonstrations qui caractérise les textes du type 1, textes donc sans démonstration ; type 2, textes de démonstrations de base, type 3, textes de démonstrations conceptuelles.

6-1 Étiquetage des formules

L’étiquetage regroupe les résultats des propriétés 1 et 2 effectuées et rapporte leur place dans les différents types de textes.

Tableau 15 : structure de l’étiquetage de regroupement des valeurs des complexités.

Traités de mathématiques	Nature de la formule	Types de texte	Complexité1	Complexité 2	
MM ou TM	1, 2, 3 ou4	1, 2 ou 3	1 ou 2	embran-chement	poids

Les formules sont de nature:
1- Intégro-différentiel (I).
2-analyse (φ).
3-opératoire (O.

Les textes sont :
1-explicatifs.
2-démonstratifs.
3-constructifs.

La complexité 1 est :
1-faible ; symbolisée par – dans les tableaux.
2 –forte ; symbolisée par + dans les tableaux.

La complexité 2 est :
1-d'embranchements : 1 (peu nombreux), 2 (nombreux).
1-de poids : M (analyse), TP (topologie, analyse fonctionnelle).

6-2 Regroupement des diverses identifications des formules : complexités 1 et 2, embranchements et leurs situations dans les différents types de texte

Nous avons, à la suite de l'étiquetage précédent des formules, analysé leurs répartition dans les différents types de texte. Nous constatons que certains types de formules sont diversement représentés dans les deux traités. Ces différences renvoient, nous l'avons vu précédemment, à des difficultés de compréhension qui se traduisent par la plus ou moins grande difficulté à effectuer les calculs présentés, ou renvoient à des propriétés spécifiques des concepts représentés, et parfois à des difficultés à déterminer les liens conceptuels qui les relient à la seule lecture de la configuration des formules. Dans les tableaux, les mathématiques de l'ingénieur prennent la notation M (poids faible =1), et topologie et analyse fonctionnelle la notation TP (Poids fort = 2). La structure des formules prend les notations : embranchement peu nombreux (-), embranchements nombreux (+).

Les mathématiques de l'ingénieur sont plus anciennes que les mathématiques de la topologie et de l'analyse fonctionnelle, c'est pour cette raison, que nous avons qualifié de poids faible = 1, les formules des mathématiques de l'ingénieur et de poids fort = 2, les formules des mathématiques de la topologie et de l'analyse fonctionnelle.

Les tableaux des trois pages suivantes, disposés horizontalement, indiquent les pourcentages de formules correspondant aux caractéristiques indiquées, pourcentages obtenus respectivement pour le traité *Méthodes Mathématiques* (premier tableau) et le traité *Théorie des Distributions* (deuxième tableau). Ils sont suivis d'un troisième tableau disposé horizontalement lui aussi, qui présente une comparaison des deux traités considérés.

Pourcentages de formules du traité *Méthodes Mathématiques* ayant les caractéristiques suivantes																									
	Place des formules dans le texte	Textes explicatifs								Textes démonstratifs								Textes constructifs							
	Longueur de formules	Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues			
	Embranchements	--		+		--		+		--		+		--		+		--		+		--		+	
Nature des formules	Poids des formules M (Math-Ing) TP (Topologie/ Analyse fonction-nelle)	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP
Intégro-différentiel			5				6			3								6					1 1		
fonction		15	9							6					1			6				1	1		1
objet		4				3				4								4				9	5		

Pourcentages de formules dans le traité *Théorie des Distributions* ayant les caractéristiques suivantes :																									
	Place des formules dans le texte	Textes explicatifs								Textes démonstratifs								Textes constructifs							
	Longueur des formules	Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues			
	Embranchements	--		+		--		+		--		+		--		+		--		+		--		+	
Nature des formules	Poids des formules -M (Math-Ing) -TP (Topologie/ Analyse Fonctionnelle)	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP
intégro-différentiel		10																2	10			2	8		
fonction		20				2	2				8							20				2			
objet		10				2												2							

Comparaison des formules des deux traités																									
	Places des formules dans le texte	Textes explicatifs								Textes démonstratifs								Textes constructifs							
	longueur des formules	Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues			
	Embranchements	-		+		-		+		-		+		-		+		-		+		-		+	
Natures des formules	Poids des formules -M (Math-Ing) -TP (Topologie/ Analyse fonctionnelle)	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP
intégro-différentielle																									
fonction																									
objet																									

type de formules présent majoritairement dans *Théorie des Distributions*.

type de formules présent majoritairement dans *Méthodes Mathématiques*.

La présente analyse s'intéresse donc aux différents types de texte où interviennent les formules et les expressions. Dans les textes explicatifs, la *Théorie des Distributions* présente les formules des distributions dans le cadre de l'analyse fonctionnelle et des espaces topologiques ; tandis que pour présenter les distributions, le traité *Méthodes Mathématiques* fait usage des formules de l'analyse. Dans les textes démonstratifs, la *Théorie des Distributions* utilise des symboles de l'analyse et *Méthodes Mathématiques* utilise des symboles de la topologie et de l'analyse fonctionnelle. Dans les textes constructifs de notions, le traité *Méthodes Mathématiques* s'appuie sur des exemples (le statut objet des formules) pour présenter les propriétés à définir. Ces présentations évitent la construction de topologies sur les ensembles de fonctions et facilitent en cela la compréhension des distributions. On peut conclure que la différence entre ces deux traités porte sur les démarches de présentation des distributions : d'une part, une démarche où les prémisses causales appellent directement les résultats des distributions pour les *Méthodes Mathématiques* ; et d'autre part, pour la *Théorie des Distributions*, une démarche s'appuyant sur des conclusions intermédiaires issues d'axiomes de base rendant la démarche très déductive, comme nous le montrerons, par la suite dans l'analyse sémiotique des démonstrations.

7- Analyse sémiotique.

Nous allons faire référence à Hjelmslev pour identifier l'articulation qui se place entre les concepts et leurs représentations. Hjelmslev considère le plan des contenus ou des significations et le plan d'expressions. L'articulation entre ces deux plans du langage mathématique s'est construite historiquement à travers la compréhension des concepts. Cette articulation, Hjelmslev la nomme aussi la fonction sémiotique ; cette fonction s'élabore en effet à l'aide de la compréhension du texte (L.Hjelmslev, 1971). Selon ce linguiste, le contenu des expressions se confond avec le sens courant que peut lui donner la langue mathématique dans laquelle sont écrites les expressions (L.Hjelmslev, 1971). Pour resituer ce postulat linguistique, la substance du contenu serait « la pensée du concept » et la substance de l'expression « la chaîne phonique ou écrite ». Nous disons que le contenu a été introduit pour rendre compte de l'attribution d'une signification au texte, le contenu étant par définition indissociable de l'expression dont il est le contenu. C'est cette relation entre expression et contenu qui est indispensable pour la compréhension que nous déterminons, comme le précise le tableau ci-dessous. Nous utilisons cette fonction sémiotique pour lier le plan de contenu constitué des registres - espaces fonctionnels – EVT – analyse - différentiel – intégration - et le plan d'expression des différents types de langages mathématiques.

Tableau 16 : structure de la sémiotique de Hjelmslev

concept (signifié)	signe saussurien	plan conceptuel
représentations du concept (signifiant)		plan des significations ou des contenus Objets de base – objets à construire – objets à définir dans les cadres <u>espaces fonctionnels</u> - <u>EVT</u> - <u>analyse</u> - <u>différentiel</u> <u>– intégral</u>
		Plan de lecture ou d'expression fonction sémiotique

7.1 - Analyse sémiotique de la complexité des démonstrations

Nous avons caractérisé les démonstrations avec les critères que nous mettons en œuvre quand nous essayons de comprendre ce qui est démontré, à savoir si nous avons une démonstration qui s'appuie sur des objets déjà définis (démonstrations de base) ou qui vise des objets à construire (démonstrations constructives), et ce en considérant le mode d'écriture de la démonstration : le langage naturel (L.N) ou le langage formel. Concernant ce dernier, il est à noter qu'on ne trouve plus dans les démonstrations, comme il y a une trentaine d'années, l'utilisation des symboles de la logique pour les écrire ; ces symboles sont transcrits aujourd'hui en langage naturel, mais la rigueur de la logique formelle est respectée ; ce langage se nomme langage mathématique (LM) (C.Laborde, 1975). Nous avons été également attentif aux cadres des concepts : fonctionnel ou analyse.

Cadre fonctionnel : c'est l'étude des espaces vectoriels topologiques dont les éléments sont des fonctions.

Cadre de l'analyse : c'est le prolongement du calcul infinitésimal, où on privilégie l'utilisation de la notion de limite, des fonctions continues et l'intégrale de Lebesgue.

Cadre des EVT : c'est l'étude des espaces topologiques non- fonctionnels.

Tableau 17 : caractéristiques des démonstrations dans Méthodes Mathématiques.

N° démonstrations	type de démonstrations		langage des démonstrations		cadres mathématiques des démonstrations	
	base	Construc-tive	L.F	L.M	fonc-tionnel	Analyse
1		+		+		+
2	+			+		+
3	+		+			+
4		+		+		+
5		+		+		+
6		+		+		+
7		+		+	+	
8		+		+		+
9		+		+		+
10		+		+		+
11		+		+		+

Tableau 18 : caractéristiques des démonstrations dans Théorie des Distributions.

N° démonstrations	type de démonstrations		langage des démonstrations		cadres mathématiques des démonstrations	
	base	concep-tuel	L.F	L.N	fonc-tionnel	analyse
1		+	+			+
2	+		+			+
3		+	+		+	
4		+	+		+	
5		+	+		+	
6		+	+			+
7		+	+		+	
8		+	+		+	
9		+	+		+	
10		+	+		+	
11		+		+	+	
12		+	+		+	
13		+		+	+	

Si on regroupe les relevés effectués sur ces indices facilitateurs de la compréhension, nous obtenons les tableaux suivants :

Tableau 19 : récapitulatif des spécificités des démonstrations des Méthodes Mathématiques*.*

Démonstrations de base				Démonstrations constructives			
L.M		L.N		L.M		L.N	
fonct-ionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse
	1		*1*			*1*	*8*

Tableau 20 : récapitulatif des spécificités des démonstrations de la Théorie des Distributions

Démonstrations de base				Démonstrations constructives			
L.M		L.N		L.M		L.N	
fonct-ionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse
			1	8	3	1	

Si on relie le type de démonstrations et le langage utilisé, on obtient le regroupement suivant :

Tableau 21 : relation entre langage de la démonstration et cadres mathématiques

Types de démonstration	LM	L.N	Fonc-tionnel	analyse
base			*1* *1* 1	
constructif			*8* *1* 3 8 1	

LM langage mathématique LN langage naturel

_ _ _ _*n*_ _ _ _ _ _ *n* nombre de démonstrations *Méthodes Mathématiques*

_____n_____ n nombre de démonstrations *Théorie des Distributions*

de différents langages des cadres, fonctionnel ou analyse.

Ce que nous pouvons constater, en reliant les langages des démonstrations et leur registre, *La théorie des distributions* expose et construit les distributions en s'appuyant sur 9 démonstrations conceptuelles écrites en langage formel, sur 13 démonstrations dans le registre fonctionnel des espaces vectoriels. Cette approche est plus difficile et surtout plus nouvelle que la présentation prise par *les Méthodes Mathématiques* dont 8 démonstrations s'appuient sur la théorie de l'intégration et le calcul différentiel sur 12 démonstrations Ces derniers objets mathématiques, différentielles et intégrales, rendent plus facile l'accès aux distributions dans la mesure où elles font partie depuis très longtemps des connaissances des ingénieurs.

Nous avons relevé les notions-concepts, qui figurent dans les deux traités, pour déterminer leur répartition dans les différents types de texte, afin d'établir, par la suite, le lien de compréhension entre ces notions-concepts (plan de contenu) avec les types de texte (plan d'expression). Les notions-concepts du traité *Méthodes Mathématiques* sont : sous-espace vectoriel- mesurabilité- ∞ dérivable- support borné- ensembles algébriques- voisinage- espaces fonctionnels- le localement sommable ou mesurable- dérivées partielles de d°n- fonctionnelles linéaires continues- suites convergentes- distributions- opérateur différentiel transposé- fonction continûment différentiable- fonction sur R- la norme euclidienne $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ sur R- dérivabilité de d°n- - support d'une distribution- recollement par morceaux- uniformément continue- topologie faible ou forte- voisinage- espaces fonctionnels- espaces vectoriels. Pour le traité *Théorie des distributions*, nous avons noté les notions-concepts : espace vectoriel de dimension n- hypervolume – mesure – fonction sommable - fonctionnel – espace topologique – absolument continu – densité – compact – partition de l'unité – voisinage – espace de Banach – support – dérivation – mesure de Lebesgue – fonction de Dirac – fonction de Heaviside – forme linéaire.

Nous avons défini la notion-concept comme une proposition première, posée et non déduite, dont les propriétés conduisent les démonstrations, au contraire du lemme qui est un résultat intermédiaire. Nous avons relevé la place des textes qui soutiennent les démonstrations

Tableau 22 : répartitions en pourcentages des types de texte.

Textes	explicatifs	démonstratifs	constructifs
Méthodes mathématiques	40%	20%	40%
Théorie des distributions	40%		60%

Il est à remarquer que les textes explicatifs du traité *Théorie des distributions* s'appliquent sur les éléments de démonstrations des textes constructifs des distributions, tandis que dans le traité *Méthodes mathématiques*, les textes explicatifs répartissent leurs explications aux lecteurs sur les deux autres textes : démonstratifs, constructifs. Les textes explicatifs sont des aides à la compréhension et viennent compléter les informations que portent les formules et les démonstrations.

Nous présentons dans le tableau qui suit les démarches de présentation des distributions, à gauche celle de *Théorie des Distributions* à droite celle de *Méthodes Mathématiques*.

Théorie des distributions	*Méthodes Mathématiques*
Mesure sur un espace borélien. L'espace des fonctions à sup compact (C_K) $\varphi \in C_K$ mesure de φ $\mu(\varphi) = \iint_{\mathbb{R}^n} \ldots \int \varphi d\mu$ -topologie induite par la conv. unif (C.U) sur C_K - C_K espace de Banach. Théorème de Riesz pour définir une mesure comme forme linéaire continue sur C . A une mesure μ « absolument continue correspond une densité f sommable pour la mesure de Lebesgue et réciproquement. particularités de la mesure δ(φ) généralisation de la notion de mesure la dérivation. -théorème D dense dans C. démontré La même démarche que celle de *Méthodes Mathématiques* mais les propriétés sont démontrées ; en remarquant que la topologie sur D_K plus fine que celle de C_K	Définition de (D) E.V fonctions ∞ dérivables à support borné. Exemple : $\varphi(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right)$; démonstration φ φ∈ D. Théorème d'approximation. f∈ C_K C.U pour la nome définie par l'intégrale de Lebesgue. D dense dans C_K Définition des distributions. Fonctionnelle continue sur D Exemple : $\langle T_f, \varphi\rangle = \iiint_{\mathbb{R}^n} \ldots \int f(x)\varphi(x)dx$ F sommable φ∈ D. Notion de p.p Dérivation des distributions. Définition sur f ∞ différentiable. $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \iiint_{\mathbb{R}^n} \ldots \int \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \varphi(x)dx$ Du théorème de Fubini et de l'intégration par parties en démontrant que $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle$ et $\left\langle f, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ sont des distributions, on obtient : .\.

Théorie des distributions	*Méthodes Mathématiques*
l'espace D -L'espace des fonctions ∞ dérivables à support compact K (C_K) -topologie limite par C.U sur les dérivées de tout ordre (topologie faible) - Les distributions, fonction linéaire élément dual de (D) définition – une distribution T est une forme linéaire sur D dont la restriction à D_K est continue. $\varphi \to T$ ou < T,φ > Théorème démontré : pour qu'une distribution T puisse être définie par une mesure μ, il faut et il suffit Qu'elle soit continue sur chaque D_K muni de la Topologie induite par C_K Définition de la dérivation Si T est une fonction à dérivées partielles continues on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi) = \iiint \ldots \int \frac{\partial f}{\partial x}\varphi dx$ et on obtient par intégration par parties. $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi) = -f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ Pour une distribution T, on obtient $\frac{\partial T}{\partial x}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ il est démontré que Les résultats sont des distributions. La généralisation par récurrence et les propriétés de l'intégrale de Lebesgue donne une formule générale. $\left\langle D^p T, \varphi \right\rangle = -(-1)^{\lvert p \rvert} \left\langle T, D^p \varphi \right\rangle$	$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ On en déduit pour la distribution T : $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ On admet par récurrence la généralisation de la dérivation : $\left\langle D^p T, \varphi \right\rangle = -(-1)^{\lvert p \rvert} \left\langle T, D^p \varphi \right\rangle$

À partir du rapprochement des démarches de présentation des distributions des deux traités, on peut déduire que lorsqu'on développe les propriétés des objets mathématiques- les distributions- en se rapprochant des axiomes de base- la mesure et la topologie- comme le propose le traité *Théorie des Distributions*, la difficulté s'accroît. Pour démontrer des théorèmes nouveaux ou construire des objets nouveaux, on emploie des formules condensées, et des démonstrations plus longues et écrites en langage mathématique proche du langage formel.

Sans perdre de la rigueur, en précisant les propriétés admises, linéarité et continuité, mais en mentionnant les démarches de validité des nouveaux objets et théorèmes, en présentant des exemples, le traité *Méthodes Mathématiques* a des formules plus renseignées en symboles qui remplacent les démonstrations ; les termes des démonstrations présentes sont les traductions en langage naturel des formulations de la logique du langage mathématique pour présenter les distributions. C'est ce qui marque la différence entre ces deux traités.

Plus on fixe les axiomes sur des notions premières, plus la construction de théorèmes et d'objets nouveaux exige une démarche de formalisation plus complexe en assemblant en des constructions logiques ces notions premières. Il nous paraît donc évident que si, au départ, la construction d'objets ou de théorèmes nouveaux repose sur une théorie ayant de nombreux résultats, la construction et les démonstrations en seront simplifiées, et leur démarche sera de lecture plus compréhensible.

7.2- Analyse sémiotique de la complexité du texte.

Comme nous l'avons vu, nous avons découpé le texte des deux traités, en trois types :
- type explicatif
- type démonstratif
- type constructif

Ce classement, nous l'avons déjà présenté pour situer les démonstrations, sans prendre en compte les liens d'énonciation entre les types de texte, les formules et les démonstrations. Ces liens ont une implication dans la compréhension des formules et des démonstrations par leurs ajouts qui appartiennent à la topologie et aux ensembles fonctionnels, et remplacent les cadres mathématiques qui ne sont pas représentés dans les formules ; il n'en va pas de même pour le cadre de l'analyse.

Nous avons repris ces liens pour appréhender la raison de la difficulté croissante que présentent les deux traités, quand sur le plan d'expression on passe de l'analyse mathématique de l'ingénieur (analyse) à l'intégrale de Lebesgue pour déboucher sur les espaces fonctionnels topologiques. La présence de plus en plus nombreuse de démonstrations et formules de la topologie demande une maîtrise d'axiomes et d'espaces fonctionnels pour aboutir aux propriétés et usages des distributions. Pour dégager cette croissance de la difficulté de complexité, nous avons placé dans le plan de contenu les termes ou terminologies attachés aux concepts mathématiques, et dans le plan d'expression les types de texte. Nous avons relevé en pourcentages pour les deux traités, dans chaque type de texte, les termes ou terminologies présents dans les trois cadres mathématiques (analyse, topologie, espaces fonctionnels).

Tableau 23 : termes et terminologies attachées aux cadres mathématiques :

cadre de l'analyse	
méthodes mathématiques	$\propto$ dérivable - l'ensemble d'intégration est borné- dérivées de tout ordre- conv.uniforme- fonct. localement sommable- p.p égal- densité volumique – mesurable bornée- conv p.p – dérivée partielle- fonct. continûment différentiable- théorème de Fubini-intégration par parties.
théorie des distributions	Fonct. À n variables- hypervolume- dérivée partielle- D.L Mac Laurin- mesure de Lebesgue- fonct..sommable- définie p.p-fonct.continue ou convexe ou harmonique- $\propto$ dérivable sous le signe intégrale
Cadre de la topologie	
méthodes mathématiques	esp/s.esp vectoriel- fonct..continue à supp. borné- voisinage-famille d'ouverts- complémentaire
théorie des distributions	esp/s.esp vectoriel- mesure- ensemble borélien- recouvrement d'ouverts- partition de l'unité.
cadre d'ensemble fonctionnel	
méthodes mathématiques	Fonct..linéaire continue- distributions nulles dans un ouvert-support de T- fonct fondamentale du calcul symbolique.
théorie des distributions	Ensemble de fonctions- toplogie sur $\mathcal{C}$- th. de Riesz- forme linéaire continue- support d'une mesure- forme linéaire- espace vectoriel de fonctions- dense- correspondances biunivoque-point de vue local- recollement des morceaux- support d'une distribution- distributions dérivable- distributions dérivées partielles.

Tableau 24 : répartitions des termes des notions mathématiques dans les différents types de textes.

textes	texte explicatif		texte démonstratif		texte constructif	
traités	MM	TD	MM	TD	MM	TD
analyse	*28*	7	12	2	*20*	7
topologie	8	<u>22</u>	0	5	8	<u>22</u>
ensemble fonctionnel	8	<u>16</u>	12	7	4	<u>12</u>

Nous pouvons constater que les citations des termes de l'analyse sont plus nombreuses *(28 et 20)* dans le traité des *Méthodes Mathématiques* que dans le traité *Théorie des Distributions* ; par contre ce dernier cite en plus grand nombre les termes de la topologie et de l'ensemble fonctionnel (<u>22</u>, <u>22</u>, <u>16</u> et <u>12</u>). Ce constat souligne que la présentation des distributions dans le traité *Méthodes Mathématiques* s'appuie sur l'analyse mathématique de l'ingénieur (l'intégration) et la théorie des distributions sur les mathématiques du XXe siècle (topologie, ensembles fonctionnels). Cette répartition des termes de l'analyse, de la topologie et de l'ensemble fonctionnel met en lumière les raisons de l'écart de difficultés de compréhension entre les deux traités.

8- Récapitulation des méthodes de détermination de la complexité des deux traités de L. Schwartz.

- L'outil complexité 1 s'est construit sur la longueur des formules en utilisant le nombre de symboles et leur statut. Cet outil pointe faiblement les raisons des difficultés de complexité entre les deux traités.

- L'outil complexité 2 s'est construit sur la structure de la formule et le poids des symboles qui les constituent.

- Le croisement des informations apportées par les outils de complexité 1 et 2 ont permis de déterminer que les formules-expressions de la *Théorie des Distributions* sont constituées de symboles récents, ce qui les rend plus difficiles à comprendre que les formules-expressions des *Méthodes Mathématiques* qui appartiennent aux mathématiques moins récentes.

- L'analyse sémiologique sur les démonstrations et les textes montre que la divergence des démarches est à prendre en compte pour expliquer la différence des difficultés de compréhension que nous constatons entre les deux traités.

9- Conclusion :

Notre étude s'est limitée aux aspects sémantiques et plus spécifiquement aux difficultés de complexité des formules et des démonstrations. Ces aspects

sémantiques du texte renvoient aux informations sur les préalables mathématiques des formules et des démonstrations. Si l'accès à la signification et à la compréhension s'amorce par la perception visuelle des symboles et des formules, cette première perception donne des informations que nous ne pouvons pas appréhender directement. De ce constat, nous avons construit des outils : la complexité 1 et 2 de la formule et la complexité de la démonstration ; ces outils nous ont permis de mesurer certains éléments de l'écriture mathématiques qui interviennent dans leur compréhension, à savoir la longueur et la structure des formules et la déductibilité de la démonstration. Les complexités 1et 2 et la complexité structure de la formule n'ont fait ressortir que peu d'éléments susceptibles d'expliquer la différence de complexité entre les deux traités. Il n'en va pas de même pour l'analyse sémiotique : nous avons constaté que le traité *Méthodes Mathématiques* développe une démarche qui s'appuie sur les mathématiques de l'ingénieur en usant de théorèmes « forts » qui exposent directement les propriétés des distributions ; alors que le traité *Théorie des Distributions* construit les distributions sur des théorèmes qui font appel à d'autres théorèmes généralement des lemmes. Les textes démonstratifs d'enchaînement de lemmes réclament de la part du lecteur une bonne connaissance de la topologie des espaces fonctionnels. A notre avis, c'est l'ensemble de ces déductions sans l'appel à des théorèmes « forts » qui constitue l'obstacle- à un accès rapide aux distributions, et rend donc la compréhension plus difficile. L'absence de signes ostensibles des concepts ou résultats intermédiaires ne rend pas le texte moins rigoureux sur le plan de la logique comme en témoigne le traité *Méthodes Mathématiques*. Nous avons déduit de cette dernière analyse, que la différence entre les deux traités, sur le plan de la compréhension, porte sur :
-la mise en évidence ou non de liens entre les objets mathématiques.
-la présentation ou l'absence des propriétés.
-la traduction d'une propriété sous une autre forme par le traitement des règles de la logique.
-l'appel à la preuve dans la démonstration par les théorèmes et les lemmes.

Nous pouvons également constater qu'un texte mathématique est d'autant plus compréhensible qu'il développe une démarche de présentation des concepts proche des mathématiques de l'ingénieur, avec des démonstrations écrites dans un langage mathématique simple, où les symboles logiques sont traduits en des expressions de conditions nécessaires et suffisantes, et que ces mêmes démonstrations font appel à des théorèmes « forts » en donnant directement les propriétés, permettant de conclure rapidement la chose à démontrer. Si nous faisons référence à R. Barthes (R.Barthes, 1985, p.79), le traité *Méthodes mathématiques* est plus proche d'une démarche qui reprend des notions communément admises en restant dans la connotation, ce que ne le fait pas le traité *Théorie des distributions* dont le discours est dans le plan de la dénotation.

Nous pensons que la sémiotique peut, en évaluant les modes d'articulations entre les différents éléments d'un texte mathématique : formules, démonstrations, comme nous l'avons fait dans cet article, donner des évaluateurs des difficultés de complexité d'un texte. Notre article fait remarquer l'importance des formules pour présenter les définitions et les propriétés des concepts et celle des démonstrations, même en faible nombre, dans la recherche des propriétés. Il est préférable pour diminuer la complexité de compréhension, de remplacer les démonstrations par des formules, lorsque ce remplacement est possible. Il n'est pas nécessaire de prendre, comme point de départ d'une présentation de concepts, des suites de lemmes, si par la suite l'utilisation de ce concept, ne met pas en lumière l'absence de ces lemmes. La sémiotique des textes suggère qu'un « gros » théorème puissant qui réduit la longueur des démonstrations est préférable à la construction pas à pas de propriétés à l'aide de lemmes intermédiaires, et que des formules de structure peu utilisatrices de symboles sont plus compréhensibles à condition que ceux-ci ne renvoient pas à des concepts de classe d'objets abstrus.

L'article se rattache à la psychologie et à la didactique dans la mesure où il est fait référence à l'organisation des éléments primitifs et des symboles de base dans l'organisation sémiotique des textes mathématiques et poursuit la coopération entre les didacticiens et les psycholinguistes.

OUVRAGES DE REFERENCE

Traité (a) *: Méthodes Mathématiques pour les sciences Physique* de L. Schwartz *p 76-98*.

Traité (b) : *Théorie des distributions* de L. Schwartz *p12-62*.

Dans les tableaux, la numérotation des formules renvoie à leur page et place dans les traités.

BIBLIOGRAPHIE

BARTHES, R. (1967). *Eléments de sémiologie*. Paris: Edition Seuil.

BARTHES, R. (1985). *L'aventure sémiotique*. Paris: Edition Seuil, p.79.

DHOMBRES, J. (2006-2007). *Epistémologie de la mise en mathématiques*. Paper presented at the séminaire Koyré.

DUVAL, R. (Oct. 2009). *note manuscrite*.Unpublished manuscript.

FREGE, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris: Edition du Seuil.

FREUDENTHAL, H. (Ed.) (1980) Encyclopédia Universalis. Paris. P. 338-384

GUHA, A. (1955). *Complexité de textes:Une analyse du modèle de Kintsch*. Université de Paris-Sud, Orsay.

HERREMAN, A. (2000). *La topologie et ses signes*. Paris: L'Harmattan. P. 17-42

HJELMSLEV, L. (1966). *Le langage* (t. f. d. J.Greimas, Trans.). Paris: édition de Minuit, p. 23

HJELMSLEV, L. (1971). *Prolégomène à la théorie du langage*. Paris: Edition de Minuit.

JANVIER, M., BAILLE, J., MAURY, S. (1993). Essai de typologie des graphiques dans les manuels d'histoire-géogaphie et biologie-géologie des collèges. *Les SCIENCES DE L'EDUCATION, 1-3,* P.221-244.

LABORDE, C. (1975). Un langage de prononcé de formules mathématiques. *la revue française de pédagogie, n°23.*

MATH93. Notations mathématiques et approche historique. Retrieved from http//www.math93.com

RIDEAU, L. (2002). Affichage et manipulation interactive des formules. *Arima*.

SCHWARTZ, L. (1977). *Un mathématicien aux prises avec son siècle*. Paris: édition Jacob pp 253-254

Charles Chandler
10 av du maréchal Davout
91800 Brunoy
Chandler.boksztejn@gmail.com

Doctorat sciences de l'éducation : option enseignement des mathématiques, laboratoire EDA (Education Didactique Apprentissage), laboratoire du département sciences humaines de l'Université Paris-Descartes.