ZAHID ELM'HAMEDI

EFFETS D'UN APPRENTISSAGE EMPIRIQUE SUR LA COMPREHENSION DU CONCEPT DE MOYENNE ARITHMETIQUE

Abstract. Effects of empirical learning on the understanding of the concept of arithmetic mean. The goal of this research is to evaluate the effects of empirical learning on understanding of the concept of arithmetic mean, at the Moroccan students in 3rd year of college (14-17 years old). This empirical learning is materialized by some practical activities allowing the apprehension of usual properties of this concept. These practical activities are established before traditional and official courses introducing this statistical notion, usually focused on application of the formula $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$. We chose a random sample constituted of 144 students (74 boys and 70 girls) under above school level. We have applied randomization principle in order to form two equal groups: Experimental group and Control group. The experimental design adopted is formed by four steps composed with tasks to be achieved by the students. The first task, addressed to the Experimental group only, involves implementation of the above practical activities. The results of this research, deducted by application of Factorial Analysis, show that empirical learning have positive effect on understanding of arithmetic mean at students in 3rd year of college. Thus, this study suggests not only that the arithmetic average concept is more complex than the direct application of the above computational algorithm, but also implies that the average concept should be taught beyond this famous rule.

Résumé. L'objectif de cette recherche est d'évaluer les effets d'un apprentissage empirique sur la compréhension du concept de moyenne arithmétique, des élèves de la 3ème année du collège (âgés entre 14 et 17 ans). Cet apprentissage empirique est concrétisé par un ensemble d'activités pratiques permettant l'appréhension de propriétés usuelles relatives à ce concept. Ces activités pratiques sont mises en place avant tout cours traditionnel et officiel introduisant cette notion statistique, habituellement axé sur l'application de la formule $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Nous avons choisi un échantillon aléatoire de 144 sujets (74 garçons et 70 filles), dans lequel nous avons constitué un Groupe expérimental et un Groupe de contrôle, d'effectifs égaux. Notre plan expérimental a comporté quatre étapes composées de tâches à réaliser par les sujets, dont la première, qui a été proposée au Groupe expérimental seul, implique la mise en œuvre des activités pratiques. Les résultats, qui ont été étudiés à l'aide de l'analyse factorielle des correspondances multiples, montrent que cet apprentissage empirique a impliqué un effet positif sur la compréhension de la moyenne arithmétique. Nous annonçons ainsi que la compréhension de ce concept est plus compliquée que l'application directe et aveugle de l'algorithme de calcul présenté ci-dessus, mais qu'il devrait-être enseigné au-delà de cette fameuse règle.

Mots clés: Moyenne arithmétique – Apprentissage empirique – Apprentissage coopératif – Compréhension conceptuelle – Compréhension instrumentale – Conceptions erronées.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 129 - 169.

1. Introduction

La statistique est une partie des mathématiques utilisée dans de nombreux domaines tels que l'économie, les sciences naturelles, l'histoire et la géographie. Dès l'école primaire, on enseigne aux élèves des activités de recueil et d'organisation des données liées à des phénomènes naturels (quantité de pluie, température, …). Coutanson a abordé cette question de l'éducation statistique à l'école primaire en France (Coutanson, 2010). Au niveau de l'enseignement secondaire, ce n'est qu'à partir de 1983, année du début des réformes coïncidant avec l'arabisation des matières scientifiques, que la statistique est intégrée dans les programmes des mathématiques du système éducatif marocain.

A l'ère de la communication et de la technologie, les sociétés ont besoin d'analyser des données pour prendre des décisions d'ordre économique. Cela suggère qu'il soit important que les élèves développent la compréhension des concepts et des processus utilisés dans ce domaine (Zaki et Elm'hamedi, 2009). La moyenne arithmétique est l'un des concepts de base les plus importants dans cette entreprise. Les données rapportées et utilisées dans la vie quotidienne, les journaux scientifiques et les médias publics, utilisent fréquemment la notion de moyenne. Il ne faudrait donc pas nous étonner si dans un système éducatif donné, on a choisi d'introduire une notion telle que la moyenne. En outre, cette notion est la plus présente dans la plupart des curricula de l'éducation générale à travers le monde (Goodchild, 1988; Waston et Moritz, 1999). Elle est aussi usuelle dans le vocabulaire de la plupart des enfants, même avant de recevoir des connaissances statistiques formelles à l'école. En effet, les termes comme « taille moyenne », « âge moyen », « score moyen », sont fréquemment utilisés par les enseignants et par les ouvrages même avant que les élèves puissent comprendre les significations sous-jacentes.

Malheureusement, bien que l'enseignement de la statistique soit souvent justifié en se référant à la nécessité de préparer les élèves aux demandes d'une société d'information, plusieurs enseignants ne fournissent pas beaucoup d'effort pour satisfaire à de telles demandes (Elm'hamedi, 2010). Ils introduisent souvent dans leurs instructions des tâches obligeant les élèves à effectuer seulement des calculs sur la moyenne. Ceci peut ne pas être suffisant pour développer les habiletés de savoir-faire statistique des élèves. De même, on ne peut pas être sûr qu'ils peuvent interpréter, d'une façon raisonnable, les arguments statistiques rencontrés dans des articles de journaux, dans des informations à la télévision, dans des annonces ou dans le milieu de travail.

L'importance du concept «moyenne arithmétique» vient du fait qu'il prend en considération toutes les valeurs de la distribution et entre dans le calcul des autres caractéristiques telles que les indices de dispersion et de corrélation. La moyenne arithmétique est le paramètre le plus généralement utilisé pour mesurer la tendance centrale. De même, c'est un paramètre fréquemment utilisé dans la vie de tous les jours, et fournit une information essentielle à propos de la valeur typique d'une série de données.

En statistique inférentielle, on compare souvent des moyennes ou des différences de moyennes de plusieurs séries de données. Pareillement, des théories dans plusieurs disciplines incluent des concepts exprimés en termes de moyennes ou sommes de moyennes. Dans plusieurs contextes, les moyennes sont seulement calculées après pondération des quantités; en mathématiques et en physique, par exemple, l'intégrale est une somme pondérée, tandis que le centre de gravité est une moyenne pondérée. La notion de moyenne peut aussi jouer un rôle en politique: l'idée d'intervalles de confiance est la base des outils statistiques sous-jacents aux opinions concernant un scrutin donné.

Bien que le concept «moyenne» semble être simple tel que l'algorithme de calcul le suggère, des recherches antérieures (Pollatsek, Lima et Well, 1981; Mevarech, 1983; Strauss et Bichler, 1988) indiquent que les élèves ont plusieurs conceptions erronées concernant cette notion. Elles ne sont pas dues au manque de connaissances procédurales de calcul de la moyenne, mais au manque de la compréhension conceptuelle du concept. Ce qui est interprété par l'absence d'une pensée statistique chez les élèves (Pfannkuch et Wild, 2003; Chatzivasileiou, Michalis et Tsaliki, 2010).

La moyenne arithmétique est définie par addition des valeurs puis division de la somme trouvée par le nombre de valeurs qui ont été additionnées. Strauss et Bichler (1988) ont argumenté que la simplicité des aspects de calcul du concept «moyenne» pourrait le faire apparaître plus facile. De même, Mokros et Russell (1995) ont annoncé que ce concept est un objet mathématique d'une complexité inappréciée. En fait, plusieurs compréhensions des élèves relatives au concept ne sont que l'algorithme : «Ajouter Puis Diviser». Aussi des études ont-elles examiné les conceptions des élèves à propos de cette notion (Pollatsek, Lima et Well, 1981; Mevarech, 1983; Strauss et Bichler, 1988; Chatzivasileiou, Michalis et Tsaliki, 2010) et ont exploré les approches instructionnelles possibles (Mevarech, 1983; Hardiman, Well et Pollatsek, 1984) pour promouvoir sa compréhension. Plus récemment, les travaux de Vladimir Andrade (Andrade, 2013) ont porté sur les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion en portant, dans un premier temps, l'attention sur leurs places dans les manuels scolaires en France et au Brésil.

Quant aux stratégies adoptées par les élèves face à la réalisation d'une tâche impliquant le concept de la moyenne arithmétique, Cai (1995) a pu remarquer qu'elles sont au nombre de trois, et sont les suivantes:

- *Mise A Niveau (MAN)*, dans laquelle l'élève utilise une suite de «retranchement puis ajout» afin d'arriver à la solution adéquate du problème.
- *Ajouter Puis Diviser (APD)*, se basant sur l'application de la formule algorithmique: $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.
- *Tâtonnement Puis Erreur (TPE)*, dans laquelle l'élève choisit premièrement une valeur donnée pour la solution, puis il contrôle si elle est en concordance avec les données du problème. Si ce n'est pas le cas, il choisit une autre valeur, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il tombe sur la valeur adéquate.

Par ailleurs, malgré la place prépondérante qu'occupe cette notion en statistique, en feuilletant, brièvement, les manuels scolaires de notre système éducatif, nous sommes déçus de voir d'une part qu'ils se sont focalisés seulement sur la fameuse règle $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$ et d'autre part qu'une large quantité de situations a été prise avec des exemples numériques, basés sur des exercices de calcul seulement.

De ce fait, on pourrait attendre, par exemple, l'émergence de confusions quand les problèmes rencontrés sont tels que les nombres qui doivent être inclus dans la somme relative au calcul de la moyenne arithmétique ne sont pas complètement clairs. L'élève, quant à lui, pouvant facilement résoudre les exercices proposés et pouvant équilibrer à première vue n'importe quelle série de données, sans tenir compte de leur origine ou de leur nature, se trompe en croyant qu'il a bien compris ce concept, qu'il ne rencontrera jamais de difficultés en résolvant des problèmes impliquant cette notion et que réussir le calcul formel constitue une compréhension complète de ce concept.

Par exemple, Carpenter et al. (1981) ont rapporté que les élèves ont des difficultés avec des problèmes qui vont au-delà de l'application de l'algorithme calculatoire de la moyenne. La majorité des élèves ne peut pas déterminer la valeur d'une donnée manquante connaissant la moyenne et les valeurs des autres données. Ceci illustre que les connaissances conceptuelles de la moyenne sont limitées. Ces élèves sont incapables de modifier l'algorithme familier de calcul de la moyenne d'une façon qui leur permette de l'adapter pour utilisation dans des situations non standard. Cependant, la moyenne arithmétique est un concept fondamental en statistique. Elle est largement utilisée dans de nombreux contextes scolaires. Jusqu'à présent, il est rare que nous rencontrions une discussion approfondie des buts éducatifs concernant l'enseignement de ce concept. Cela implique, sans doute, un manque de clarté à propos de la méthode d'évaluation des connaissances des élèves relatives à la moyenne arithmétique.

Par ailleurs, des recherches ont suggéré que certains aspects de connaissances conceptuelles à propos de la moyenne sont absents. Ceci nous a conduit à une recherche qui commence par le processus d'identification des aspects spécifiques de la connaissance conceptuelle (e.g. propriétés de la moyenne et interprétations variées de la moyenne), et de détermination du point jusque auquel on a besoin de connaissances relatives à ces différents aspects conceptuels. Evaluer la nature de la compréhension conceptuelle des élèves relative à la moyenne peut amener non seulement à informer les éducateurs sur les connaissances des élèves relatives à la moyenne, mais aussi à suggérer des directions de pratiques de classe qui peuvent incorporer tout à la fois les aspects calculatoires et conceptuels de la moyenne.

Par conséquent, une investigation à propos de l'acquisition d'un niveau de compréhension satisfaisant de la moyenne arithmétique est, sans doute, le meilleur point de départ pour explorer les structures cognitives dont les élèves de l'enseignement au collège ont besoin pour manipuler les autres concepts statistiques, afin de pouvoir poursuivre leurs études secondaires et supérieures avec succès.

Ainsi, le travail que nous exposons dans cet article s'inscrit dans la continuité des réflexions et recherches menées sur la question de mise en place d'ingénieries didactiques permettant d'atteindre un niveau de compréhension satisfaisant du concept de la moyenne arithmétique. Plus particulièrement, nous essayons de traiter et de mettre à l'épreuve l'hypothèse de recherche suivante:

«*Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en place avant tout cours axé sur la formule* $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$*, introduisant ce concept avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3*^{ème} *année du collège*».

L'idée de primauté de ces activités pratiques indiquées dans notre hypothèse de recherche avant que les élèves reçoivent de cours officiel sur la moyenne arithmétique, est basée sur le fait que nous sommes très conscients que dès son enfance, l'élève se trouve déjà familiarisé avec l'utilisation de ce concept ainsi qu'avec ses propriétés caractéristiques; il l'utilise fréquemment dans sa vie quotidienne, comme nous l'avons déjà signalé. De plus de telles activités pratiques seront instaurées de manière assez simple et usuelle, et n'exigeant pas des élèves qu'ils reçoivent un tel cours, ou qu'ils maitrisent des connaissances très particulières relatives à ce concept.

Il est aussi intéressant d'insister sur le fait que, *selon notre estimation*, la compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique n'est satisfaite par un élève, que si, se trouvant face à la réalisation d'une tâche impliquant ce concept, il peut préférer utiliser l'une des deux stratégies MAN ou TPE plutôt que la stratégie usuelle APD. Toute propriété caractéristique de la notion de moyenne lui apparaît aussi évidente et allant de soi, pour pouvoir la vérifier, la démontrer ou la mettre en exergue, sans qu'il pense à recourir à la stratégie APD, qui est basée (rappelons-le) sur l'application de la formule $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$. En revanche, une telle application de cette fameuse formule constitue, *selon notre estimation*, ce qu'on appelle la compréhension instrumentale du concept de la moyenne arithmétique.

Mais avant de procéder ainsi, nous allons tout d'abord passer en revue les principales recherches déjà menées sur les difficultés et modèles de compréhension relatives à cette notion statistique la plus habituellement utilisée.

2. Revue de la litterature

Les différentes recherches, déjà établies, que nous avons pu consulter et qui sont en relation directe avec notre problématique sont très nombreuses et sont, malheureusement, toutes réalisées dans des contextes autres que celui relatif au système éducatif marocain. Leur dénominateur commun est que *la connaissance de la formule* $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$*, seule, ne suffit pas à l'élève pour acquérir une compréhension satisfaisante du concept de la moyenne arithmétique*.

Nous nous sommes limités ici à la présentation et la discussion des résultats de quelques recherches seulement, sachant que la liste n'est pas exhaustive et que la plupart d'entre elles sont déjà signalées dans la partie introductive de cet article. Ainsi, nous avons divisé ces recherches en deux catégories principales. Chaque catégorie est identifiée par les articles ou ouvrages qui ont fait l'objet de traitement de ce concept. La première est relative à *quelques éléments d'exploration sur l'appréhension de ce concept par les élèves*. La deuxième présente *un ensemble de modèles préconisés de compréhension,* à prendre en considération lors d'un enseignement sur ce concept. L'adoption de ces modèles permet, sans doute, aux élèves d'acquérir une compréhension conceptuelle adéquate de ce concept statistique.

2.1. Quelques éléments d'exploration

o***Pollatsek, Lima et Well (1981):***

Deux résultats essentiels sont tirés de l'étude menée dans Pollatsek, Lima et Well (1981). Le premier est qu'une forte majorité d'élèves sont incapables de pondérer et combiner correctement deux moyennes en une seule. Pour eux, la méthode de non-pondération est la seule qu'ils connaissent pour traiter les problèmes relatifs à la moyenne. Ainsi, les difficultés rencontrées à propos du concept « moyenne », ne sont pas restreintes aux habiletés de pondérer et combiner deux moyennes. Mais, la difficulté de base imprévue est comment manipuler la notion de moyenne dans un problème donné. Les réactions des sujets ont indiqué que les difficultés qu'ils ont trouvées ne sont pas dues à la non-connaissance de la formule algorithmique : $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Une façon de résumer le manque d'habiletés, chez plusieurs élèves, à résoudre des problèmes relatifs à la moyenne pondérée est qu'ils se comportent comme si la moyenne était un concept purement formel, défini seulement en termes de calculs basés sur des nombres abstraits.

Le deuxième résultat est que le degré d'abstraction des données du problème nécessitant la détermination de la moyenne arithmétique a un effet sur la capacité de sa résolution par les élèves. Très précisément, plus les x_i sont abstraits, plus les élèves trouvent des difficultés pour résoudre des problèmes impliquant le concept de moyenne arithmétique.

o***Cai (1995):***

A partir d'une tâche ouverte, impliquant une situation concrète, nécessitant la détermination d'une donnée inconnue x_{i_o}, étant donné : la moyenne arithmétique, $\overline{x}$, la taille des données, n, et les autres données x_i ($i \neq i_o$), Cai (1995) a pu identifier trois stratégies de solution chez les élèves, comme nous l'avons déjà signalé dans la partie introduction de cet article, à savoir : MAN, APD et TPE. De plus, les cinq différents types d'erreurs, présentés dans le tableau suivant, sont commis par ces élèves en traitant ladite tâche:

Type de l'erreur	Description de l'erreur
Erreur minime	L'élève a appliqué le processus correctement pour trouver la solution juste, mais il a commis une petite erreur de calcul
Violation de « l'interruption de la règle »	L'élève a utilisé une stratégie de tâtonnement erronée
Utilisation incorrecte du concept « Moyenne »	L'élève a essayé d'appliquer directement l'algorithme de calcul de la moyenne pour résoudre le problème, mais cette application était incorrecte
Manipulation injustifiée des symboles	L'élève a choisi plusieurs données indiquées dans la tâche et il les a manipulées d'une façon sans rapport avec le contexte du problème
Erreur impossible à identifier	Le travail de l'élève ou son explication ont été non clairs ou incomplets de telle sorte qu'on ne peut pas identifier le type d'erreur

Tableau 1. Erreurs des élèves relatives à la tâche ouverte

En ce qui concerne les représentations de la solution trouvée par les élèves, Cai(1995) a pu distinguer quatre catégories : *verbale* dans laquelle l'élève a principalement utilisé une expression écrite, *illustrée* où l'élève a principalement utilisé une photo ou un graphe, *arithmétique* dans laquelle l'élève a principalement utilisé des expressions arithmétiques, et enfin *algébrique* où l'élève a principalement utilisé des expressions algébriques. Aussi, des analyses quantitatives ont-elles montré:

- qu'il y a des différences statistiquement significatives entre les élèves qui ont utilisé les différentes représentations,
- que les élèves avec une représentation algébrique possèdent la meilleure performance significative, suivis de ceux qui ont utilisé une représentation symbolique arithmétique,
- qu'il n'y a pas de différence significative entre les élèves qui ont utilisé une représentation visuelle et ceux qui ont utilisé une représentation verbale.

2.2. Modèles préconisés de compréhension

o ***Pollatsek, Lima et Well (1981):***

En se basant sur le modèle de compréhension d'un concept mathématique établi par Skemp[1] en 1979, Pollatsek, Lima et Well (1981) ont construit une

[1] Skemp (1979) a éclairci la distinction entre *la compréhension instrumentale et la compréhension relationnelle d'un concept.* La compréhension instrumentale d'un concept quantitatif *consiste à acquérir seulement une collection de règles isolées (vraisemblablement apprises par cœur) pour*

compréhension complète du concept « moyenne arithmétique », dont nous présentons l'essentiel dans les deux paragraphes suivants:

Le niveau de compréhension instrumentale le plus bas peut consister à *comprendre seulement la règle de calcul de la moyenne simple d'une série de nombres*. Mais, de plus, on pense qu'il y a plusieurs genres de connaissances supplémentaires qui doivent être représentées dans un schème de moyenne. En outre, *trois genres de connaissances* peuvent être distingués : *fonctionnel*, *calculatoire* et *analogique*.

Par *connaissance fonctionnelle*, on se réfère à la compréhension de la moyenne comme un concept signifiant, véritable et universel. Si la compréhension de la moyenne se réduit au calcul qu'on peut effectuer avec des nombres abstraits et si la moyenne est alors vue comme une référence universelle limitant le choix des scores qu'on peut entrer dans la formule de calcul, son acquisition complète réclame une connaissance supplémentaire. *Une connaissance calculatoire* adéquate vise à impliquer l'une ou l'autre des formules de calcul de la moyenne pondérée ou la formule de calcul de la moyenne non pondérée, combinée avec une information à propos de la manière d'obtenir la somme appropriée. Il est particulièrement important, en résolvant des problèmes relatifs à la moyenne pondérée, de savoir que l'on peut aller de la somme d'une série de scores à la moyenne en divisant par le nombre de scores, tout aussi bien qu'on peut obtenir la somme relative à la moyenne en la multipliant par le nombre de scores. Enfin, *une connaissance analogique* pourrait impliquer des images visuelles de la moyenne comme le milieu ou le point d'équilibre. La moyenne doit être représentée analogiquement par une valeur du score autour de laquelle la somme des déviations des points de données doit être nulle; une telle représentation doit être suffisante pour empêcher les élèves de commettre des erreurs graves en résolvant des problèmes relatifs à la pondération de la moyenne, à condition qu'ils aient bien assimilé la connaissance fonctionnelle qui indique quels éléments ils ont à utiliser comme poids.

Bien qu'il puisse sembler raisonnable que les performances des élèves varient en termes de connaissances analogiques ou de calcul, Pollatsek, Lima et Well (1981) ont abouti au fait que la plupart des élèves n'utilisent pas la connaissance analogique de la moyenne en traitant un problème de pondération. La connaissance de la règle de calcul seule, *non seulement n'implique aucune compréhension réelle du concept de base sous-jacent, mais peut empêcher l'acquisition d'une compréhension relationnelle adéquate*. Les élèves peuvent penser que *la compréhension instrumentale d'un concept constitue une compréhension complète*.

---

arriver à des réponses limitées d'une classe de problèmes. Par contre, la compréhension relationnelle *consiste à formuler un schéma approprié ou une série de structures conceptuelles suffisantes pour résoudre diverses classes de problèmes*.

o***Gall (1995):***

Quant à lui, Gall (1995) a proposé un modèle composé de trois éléments pouvant jouer un rôle très important dans le développement de la pensée statistique chez les élèves et qui sont des éléments de base pour évaluer le degré d'appréhension de ce concept par les élèves. Le premier élément est qu'il s'agit de former des élèves qui doivent comprendre :

- A quoi la moyenne est-elle utile ? (par exemple pour représenter l'emplacement du centre d'une série de données, pour aider aux prédictions et aux comparaisons),
- Sous quelles conditions y a-t-il un sens d'utiliser une moyenne, et pourquoi ?
- Que peut-il arriver si une moyenne est utilisée là où elle ne devrait pas effectivement l'être, ou vice versa ?
- Quel est le rôle de l'outil d'équilibrage dans le contexte des autres outils de la boîte à outils statistiques ? Les élèves doivent savoir dans quelles situations la moyenne est différente des autres outils, et reconnaître que la moyenne peut ne pas nécessairement être le premier outil à utiliser, le seul outil dont on a besoin, ou le plus approprié.

Le deuxième élément est qu'*il faut tester les aptitudes des élèves à mobiliser la notion de moyenne non seulement dans un contexte actif (production) s'occupant de la production des recherches basées sur des données statistiques, mais aussi dans un contexte passif qui permet d'interpréter ou de consommer ces recherches*. Le consommateur des données statistiques peut ne pas avoir nécessairement besoin de savoir en profondeur comment effectuer une recherche ou comment utiliser des techniques statistiques, mais il a besoin de savoir comment interpréter, au moins informellement, les déclarations élaborées autour du concept « moyenne ». Une activité utile pour développer le savoir-faire statistique concernant la « moyenne » peut débuter par la demande que les élèves cherchent et comparent les définitions de cette notion dans différents dictionnaires. Ensuite, les élèves peuvent être invités à écrire, discuter et comparer leurs interprétations en formulant des phrases comportant le mot « moyenne », et qu'ils pourraient entendre en tant qu'auditeurs passifs.

Finalement, le troisième élément concerne *l'importance de la signalisation du contexte pour évaluer les connaissances des élèves, relatives à la notion de moyenne arithmétique*. Les évaluations doivent surtout être focalisées sur les aptitudes des élèves à utiliser la moyenne et à manipuler le concept « moyenne » en discutant ses utilités et ses interprétations dans des contextes différents. Il est difficile de juger entièrement qu'une personne connaît les outils, sans lui fournir le contexte (par exemple des problèmes concrets) qui peut motiver l'utilisation.

Pour évaluer les niveaux de la compréhension des élèves relative à la notion de moyenne, les enseignants doivent élaborer des tâches présentant un besoin pertinent d'utiliser cette notion. Demander aux élèves de décrire une série simple de données avec l'espoir qu'ils choisissent d'utiliser la moyenne est moins bénéfique. Les techniques graphiques (par exemple l'histogramme) les mesures ordinales (par exemple la médiane) peuvent souvent être préférables. Pourtant, les connaissances des élèves relatives à la moyenne doivent aussi être examinées à travers des tâches d'interprétation, parce que dans la vie quotidienne, il y a peu d'instances où les citoyens ont à calculer les moyennes. De telles évaluations sont de grande utilité si les élèves ont préalablement fourni des efforts en communication écrite et orale, relative aux problèmes statistiques (Zaki et Elm'hamedi, 2013).

o ***Marnich (2008):***

La plupart des modèles de compréhension du concept de moyenne arithmétique séparent les éléments arithmétiques de ceux statistiques relatifs à ce concept. Deux conceptualisations reliées à la moyenne arithmétique sont mises en évidence, à savoir: « Partage équitable » et « Milieu de la balance ». Elles sont connectées soit à leurs places en aspects mathématiques soit à leurs places en aspects statistiques de ce concept. La conceptualisation « Milieu de la balance » conçoit le concept de la moyenne arithmétique comme le *point d'équilibre des données*; tandis que celle de « Partage équitable » voit ce concept comme *une distribution uniforme des données*.

Une étude menée dans Marnich (2008) a signalé que les connaissances des élèves se développent en matière de conceptualisation du « Partage équitable » après qu'ils ont travaillé sur des activités focalisées sur le « Milieu de la balance ». La réciproque est aussi vraie : les connaissances des élèves se développent en matière de conceptualisation du « Milieu de la balance » après qu'ils travaillent sur des activités focalisées sur le « Partage équitable ». De plus, des activités focalisées sur l'une de ces deux conceptualisations permettent aux élèves d'améliorer leurs connaissances relatives aux concepts mathématiques liés à la moyenne arithmétique. Ensuite, cette étude a fait remarquer que la propriété usuelle de la moyenne arithmétique : «Somme des déviations autour de la moyenne est égale à zéro», est un moyen viable et efficace servant à transférer les connaissances des élèves d'une conceptualisation à l'autre: «Partage équitable» et «Milieu de la balance».

A la lumière de cette revue de littérature que nous avons présentée tout au long de cette partie, deux points que nous voyons essentiels légitiment notre problématique. La première raison est que notre recherche s'inscrira dans un contexte purement marocain, différent de ceux où se sont déroulées toutes les études évoquées par cette revue. La deuxième raison est que nous proposons une ingénierie didactique, inspirée de ces recherches, susceptible de permettre à l'élève du collège l'acquisition d'une compréhension conceptuelle relative à la moyenne arithmétique qui est un concept très enraciné dans l'histoire (Lavoie et Gattuso, 1998 ; Plackett, 1970).

3. Expérimentation auprès des élèves

3.1. Objectifs de l'étude et expérimentation

Nous rappelons que l'hypothèse que nous défendons dans cet article est la suivante.

«*Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en place avant tout cours axé sur la formule* $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$*, introduisant ce concept; et avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3ème année du collège*».

Très précisément, nous voulons savoir si la mise en place d'activités pratiques avant tout cours théorique favorise une compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique chez les élèves de 3ème année du collège.

Les propriétés que nous avons prises en considération pour pouvoir mettre en exergue notre étude sont les suivantes :

- ***(P$_1$)*** : «APD» n'est pas la seule stratégie possible pour résoudre un problème impliquant le concept de la moyenne arithmétique, mais la stratégie: «MAN», basée sur une application successive de l'opération mathématique: «retrancher puis ajouter», et la stratégie: «TPE», sont aussi possibles pour réaliser un tel objectif;
- ***(P$_2$)*** : La valeur prise par la moyenne arithmétique est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale;
- ***(P$_3$)*** : Une donnée nulle est toujours à prendre en considération et ne doit pas être négligée lors du calcul de la valeur de la moyenne arithmétique;
- ***(P$_4$)*** : Une donnée égale à la valeur de la moyenne arithmétique n'a pas d'effet sur la valeur de cette dernière;
- ***(P$_5$)*** : La somme des déviations des données autour de la moyenne arithmétique est toujours égale à zéro;
- ***(P$_6$)*** : La valeur prise par la moyenne arithmétique est très sensible aux données extrêmes.

3.2. Echantillons

Les sujets sur lesquels nous avons testé notre hypothèse de recherche sont les élèves de la 3ème année du collège. Ils sont en nombre de 144 (74 garçons et 70 filles), âgés entre 14 et 17 ans. Ils sont choisis d'une manière aléatoire. Dans un premier temps nous avons aléatoirement divisé ces 144 sujets en deux groupes G1 et G2 d'effectifs 72 chacun. Puis dans un deuxième temps nous avons fait un tirage au sort pour savoir parmi G1 et G2 ce qui va représenter le groupe expérimental (G.E) et le groupe de contrôle (G.C). Les rôles de chaque groupe dans la mise en place de notre hypothèse de recherche seront l'objet du paragraphe suivant dans lequel nous allons présenter le plan expérimental sur lequel nous allons nous baser.

3.3. Plan expérimental

Afin de mettre à l'épreuve l'expérience notre hypothèse de recherche, nous allons adopter le plan expérimental détaillé dans le tableau suivant. Ce plan expérimental est composé de quatre étapes. Pour chaque étape, nous avons présenté les éléments essentiels, les stratégies adoptées (MAN, TPE ou APD), les groupes concernés ainsi que la durée estimative de réalisation :

	1ère étape	**2ème étape**	**3ème étape**	**4ème étape**
Eléments de l'étape	*3 activités pratiques visant l'appréhension des propriétés P_1 jusqu'à P_6 du concept de la moyenne arithmétique.*	*Cours traditionnel et officiel sur la statistique, contenant le concept de la moyenne arithmétique.*	*Activité théorique visant l'appréhension des mêmes propriétés P_1 jusqu'à P_6 du concept de la moyenne arithmétique.*	*•Questionnaire formé de tâches (Items) à réaliser. •La réalisation de chaque tâche nécessite la mobilisation d'une des propriétés de P_1 jusqu'à P_6.*
Stratégies adoptées	*MAN et/ou TPE*	*APD*	*APD*	
Groupes concernés	*G.E*	*G.E et G.C*	*G.E et G.C*	*G.E et G.C*
Durée de réalisation	*2 heures*	*4 heures*	*2 heures*	*1 heure*

Tableau 2. Eléments du plan expérimental

3.3.1. 1ère étape

Cette étape est composée de trois activités pratiques destinées aux sujets appartenant au groupe expérimental G.E seul. Elles devraient permettre à ces sujets de mieux conceptualiser le concept de la moyenne arithmétique par l'appréhension à base empirique des propriétés citées, et ce en utilisant les stratégies: «MAN» et/ou « TPE » seulement. Leur rôle est très important, dans la mesure où la stratégie: «APD», usuellement utilisée, se déroule dans un laps de temps ne laissant pas de vraies chances à l'élève pour pouvoir acquérir une compréhension conceptuelle de cette notion. Ainsi, nous présenterons en annexe 1 un ensemble de directives et d'instructions à prendre en considération lors de l'accomplissement de ces activités. Nous décrirons ensuite en détail chacune de ces activités (voir annexe 2) tout en spécifiant le matériel didactique nécessaire ainsi que la procédure à suivre pour pouvoir la réaliser correctement.

3.3.2. 2ème étape

Cette étape est composée du cours traditionnel et officiel sur la statistique, programmé pour les élèves de la 3ème année du collège. Il est dispensé à la fois au groupe expérimental et à celui de contrôle, pendant une durée de quatre heures. Dans ce cours le concept de la moyenne arithmétique est introduit sur la base de la stratégie APD qui utilise la formule $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$. La partie exercice relative à ce concept est axée sur une application directe et aveugle d'une telle formule.

3.3.3. 3ème étape

Cette étape est constituée d'une activité théorique ayant pour objet la réalisation des tâches impliquées dans les activités pratiques de la 1ère étape en se basant sur la stratégie « APD », axée sur l'application de la formule: $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Il est à signaler que cette activité n'est pas présentée aux deux groupes G.E et G.C de la même manière du fait que les sujets du groupe G.C n'ont pas profité des 3 activités de la 1ère étape. Ils ne savent même pas de quoi il s'agit dans ces activités. En revanche elle vise les mêmes objectifs pour ces deux groupes.

3.3.4. 4ème étape

Cette étape concerne un questionnaire composé de 8 tâches (Items) à réaliser par chacun des deux groupes, G.E et G.C pendant une durée d'une heure. Nous présentons dans le tableau ci-après les objectifs des différentes tâches impliquées dans ce questionnaire. Ils sont numérotés de O_1 à O_8, visant l'évaluation du niveau de compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique chez nos sujets. La réalisation de chaque tâche nécessite l'utilisation d'une des propriétés développées dans les activités de la 1ère et de la 3ème étape :

(O_1)   *Savoir que : «APD» n'est pas la seule stratégie possible pour résoudre un problème impliquant le concept de moyenne arithmétique, et que la stratégie: «MAN», basée sur une application successive de l'opération mathématique : «retrancher puis ajouter», et la stratégie: «TPE», sont aussi possibles pour réaliser un tel objectif.*
(O_2)   *Pouvoir mettre en œuvre l'une des stratégies «Mise A Niveau» ou «Tâtonnement Puis Erreur» pour réaliser une tâche impliquant le concept de la Moyenne Arithmétique.*
(O_3)   *Savoir que la moyenne arithmétique de données représentées dans un registre numérique a toujours une valeur comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale.*
(O_4)   *Pour des données représentées par un diagramme en bâtons, pouvoir situer entre la donnée minimale et la donnée maximale le point où l'on peut lire la valeur de leur moyenne arithmétique.*
(O_5)   *Savoir qu'une donnée nulle est toujours à prendre en considération et ne doit pas être négligée lors du calcul de la valeur de la moyenne arithmétique.*
(O_6)   *Savoir qu'une donnée égale à la valeur de la moyenne arithmétique n'a pas d'effet sur la valeur de cette dernière.*
(O_7)   *Savoir que la somme des déviations des données autour de la moyenne arithmétique est toujours égale à zéro.*
(O_8)   *Savoir que la valeur de la moyenne arithmétique est très sensible aux données extrêmes.*

Tableau 3. Objectifs des différents items du questionnaire

Avant de procéder à l'analyse proprement dite des productions des sujets, nous allons consacrer la prochaine section à l'analyse *a priori* du questionnaire en présentant les réponses impliquant seulement une compréhension de type conceptuel de chaque question, sachant que celles à caractère compréhension de type instrumental sont plus simples et ne nécessitent pas plus que l'utilisation de la formule $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Nous avons procédé ainsi afin de mieux cerner l'interprétation – statistique – des réponses fournies par les sujets:

Item n°1.

Laquelle (ou bien lesquelles) des opérations mathématiques suivantes voyez-vous possibles pour résoudre un problème nécessitant le calcul de la valeur d'une moyenne arithmétique :

☐ *Retrancher puis ajouter.*	☐ *Diviser puis ajouter.*	☐ *Diviser seulement.*
☐ *Ajouter puis diviser.*	☐ *Ajouter seulement.*	☐ *Multiplier seulement.*

Analyse a priori de l'item1

Il est vrai que : « Ajouter puis diviser », est l'opération mathématique usuelle pour déterminer la valeur d'une moyenne arithmétique. Mais, l'opération « Retrancher puis ajouter » (ou d'une manière globale, une application successive d'une telle opération) peut aussi être utilisée pour réaliser un tel objectif, et ce en diminuant les données de valeurs élevées et en augmentant celles de valeurs faibles.

De ce fait, ces deux opérations mathématiques sont les plus faciles pour résoudre un problème nécessitant le calcul de la valeur d'une moyenne arithmétique.

Item n°2:

A. La taille moyenne de quatre personnes est égale à 170 centimètres (cm). Parmi les données suivantes, que vous pouvez trouver entre parenthèses et qui sont exprimées en cm, quelle (quelles) est (sont) celle(s) qui peut (peuvent) être considérée(s) comme *impossible(s)* pour correspondre aux tailles de ces quatre personnes ?

☐ *(175, 170, 155, x), où x est un nombre inconnu supérieur à 155.*
☐ *(145, 155, 169, x), où x est un nombre inconnu inférieur à 169.*
☐ *(180, 160, 150, x), où x est un nombre inconnu supérieur à 150.*
☐ *(185, 175, 180, x), où x est un nombre inconnu supérieur à 175.*

Analyse a priori de l'item 2A

La valeur de la moyenne arithmétique est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale. Donc, seules la 3ème et la 4ème modalité sont en concordance avec l'énoncé de cette question.

B. Le tableau ci-après représente le nombre de points en dessus (ou bien en dessous) de la moyenne, obtenus par l'élève Ahmed dans les matières fondamentales suivantes: arabe, français, mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la terre. Le terme moyenne dans ce texte désigne : la note moyenne obtenue par Ahmed dans ces cinq matières seulement, et non la moyenne générale correspondant à toutes les matières.

Matière	**arabe**	**français**	**mathématiques**	**sciences physiques**	**sciences de la vie et de la terre**
Nombre de points au-dessus ou en dessous de la moyenne	*Deux points en dessous de la moyenne*	*?*	*Quatre points au-dessus de la moyenne*	*Un point en dessous de la moyenne*	*Cinq points au-dessus de la moyenne*

Combien de points au-dessus ou en dessous de la moyenne a obtenu l'élève Ahmed en français ?

Analyse a priori de l'item 2B

La somme des points en dessous de la moyenne est égale à 3. Celle au-dessus de la moyenne est égale à 9. Donc, Ahmed a obtenu en français 6 points au-dessus de la moyenne (9 – 3).

Item n°3 :

Un commerçant a commencé l'expérience de vente des vases dans un marché de fleurs. Le tableau ci-dessous montre le nombre de vases qu'il a vendus pendant les trois premiers jours:

1^{er} jour	
$2^{\text{ème}}$ jour	
$3^{\text{ème}}$ jour	
$4^{\text{ème}}$ jour	**?**

A. Combien de vases ce commerçant a-t-il vendu pendant le $4^{\text{ème}}$ jour, sachant que le nombre moyen de vases vendus pendant les quatre jours est égal à 7 vases ?

Analyse a priori de l'item 3A

Le commerçant a vendu 11 vases pendant le $4^{\text{ème}}$ jour. En effet :

- **$1^{\text{ère}}$ méthode** (Stratégie : « Tâtonnement Puis Erreur »):

Supposons par exemple que le commerçant a vendu 6 vases pendant le $4^{\text{ème}}$ jour. Voyons alors si l'équation de la moyenne arithmétique est vérifiée : $\frac{9+3+5+6}{4} = 5.75$. On remarque que 5.75 est inférieure à 7.

Supposons à présent que le commerçant a vendu 9 vases pendant le $4^{\text{ème}}$ jour (c'est-à-dire une valeur supérieure à 6). Voyons si l'équation de la moyenne arithmétique est vérifiée : $\frac{9+3+5+9}{4} = 6.5$. On remarque que 6.5 est inférieure à 7.

Supposons une troisième fois que le commerçant a vendu 11 vases pendant le $4^{\text{ème}}$ jour (c'est-à-dire : une valeur supérieure à 9). Voyons si l'équation de la moyenne arithmétique est vérifiée: $\frac{9+3+5+11}{4}=7$. On remarque que cette égalité est vraie. Donc, le commerçant a vendu 11 vases pendant le 4ème jour.

- **2ème méthode** (Stratégie: « Mise A Niveau »):

On retranche 2 vases du 1er jour et on les ajoute au nombre de vases vendus pendant le 2ème jour. On ajoute aussi 2 vases à ce nombre de vases vendus pendant ce 2ème jour pour qu'il soit égal à 7. On ajoute aussi 2 vases au nombre de vases vendus pendant le 3ème jour pour qu'il devienne égal à 7. Enfin, on ajoute 7 vases complètes au nombre de vases vendus pendant le 4ème jour.

Le nombre de vases vendus pendant le 4ème jour est égal au nombre de vases ajoutés sans qu'ils soient retranchés de n'importe quel jour. Ce nombre est égal à 2+2+7, soit 11.

B. Au 5ème jour, le commerçant n'a vendu aucun vase. Choisissez parmi les trois propositions ci-après, celle que vous voyez convenable pour correspondre au nombre moyen de vases vendus par le commerçant pendant les cinq premiers jours:

☐ *la valeur 7* ☐ *une valeur supérieure à 7* ☐ *une valeur inférieure à 7*

Analyse a priori de l'item 3B

Bien que le nombre de vases vendus pendant le 5ème jour soit nul, le dénominateur de l'équation de la moyenne arithmétique doit être augmenté de 1 (c'est-à-dire le 5ème jour). De ce fait, la valeur nouvellement prise par la moyenne arithmétique doit être inférieure à l'ancienne (c'est-à-dire, pendant les 4 premiers jours). Par conséquent, la 3ème modalité est celle qui est vraie.

C. Au 6ème jour, le commerçant a vendu un nombre de vases égal au nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours. Parmi les trois propositions ci-après, choisissez celle qui correspond au nombre moyen de vases vendus par le commerçant pendant les six premiers jours :

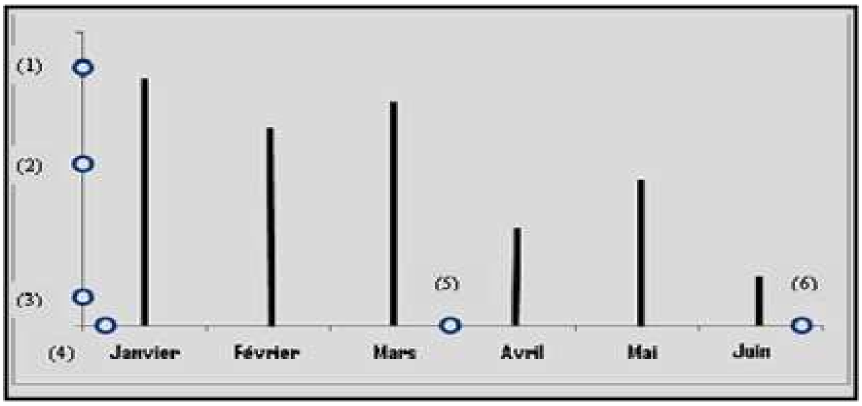
☐ *Le nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours.*
☐ *Une valeur supérieure au nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours.*
☐ *Une valeur inférieure au nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours.*

Analyse a priori de l'item 3C

L'ajout d'une donnée égale à la moyenne arithmétique ne modifie en rien la valeur de cette dernière. Donc, la 1ère modalité est celle qui est vraie.

Item n°4:

Le diagramme en bâtons ci-dessous représente les quantités de pluies (en mm) tombées au Maroc durant le 1er semestre de l'année 2000. Parmi les petits anneaux, numérotés de 1 à 6, que vous pouvez trouver sur ce diagramme, cochez celui qui indique la valeur moyenne des quantités de pluies tombées durant ce 1er semestre



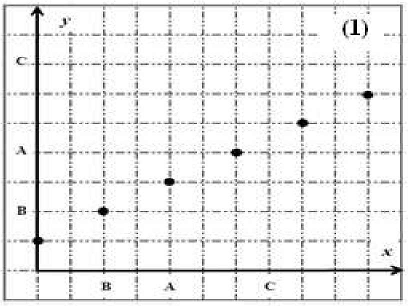
Analyse a priori de l'item 4

On ne peut pas lire la valeur de la moyenne arithmétique sur l'axe des abscisses. Donc les anneaux (4), (5) et (6) ne conviennent pas. De plus, la valeur de la moyenne arithmétique est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale. Par conséquent, les anneaux (1) et (3) ne conviennent pas non plus. L'anneau (2) est le seul qui puisse indiquer la valeur de la moyenne arithmétique.

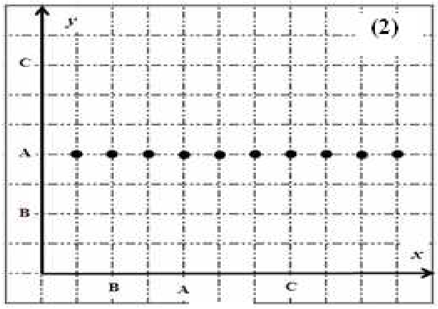
Item n°5:

On désigne par la lettre A, la valeur du nombre moyen de matchs de football suivis par neuf amis pendant la semaine dernière. On désigne aussi par les lettres B et C respectivement, le nombre minimal et le nombre maximal de matchs de football suivis par ces amis pendant la semaine dernière. Un dixième ami a rejoint ces neuf amis, et pour lui le nombre de matchs qu'il a suivis pendant la semaine dernière est égal à un nombre inconnu, noté x. Enfin, on désigne par la lettre y le nombre moyen de matchs de football suivis par les dix amis pendant la semaine dernière.

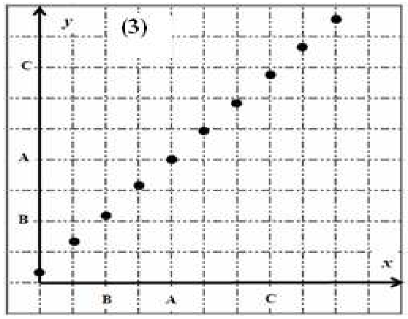
Les quatre graphiques ci-dessous, numérotés de 1 à 4, contiennent quelques points représentant la valeur de *y* en fonction de *x*.
Cochez la case située sous celui des quatre graphiques qui vous paraît le mieux représenter la situation.



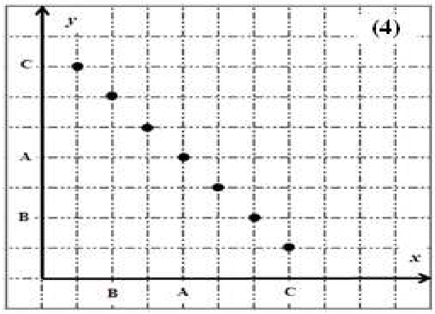
☐



☐



☐



☐

Analyse a priori de l'item 5

On sait que :

- y(A) doit être égale à A. Donc, le graphique (1) ne convient pas.
- y(x) n'est pas constante. Donc, le graphique (2) ne convient pas non plus.
- Plus x s'écarte de A en direction de B, plus y diminue; et plus x s'écarte de A en direction de C, plus y augmente. Donc le graphique (4) ne convient pas non plus.

C'est finalement le graphique (3) qui représente le mieux la situation.

3.4. Analyse *a posteriori* et interprétation des réponses des sujets

3.4.1. Codage et outils d'analyse retenus pour le traitement des réponses des sujets

Pour le traitement des réponses des sujets, l'analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM), nous a semblé être un outil efficace puisqu'il va permettre d'analyser et d'interpréter les réponses des sujets en termes de liens qui existent entre les modalités des différentes questions du questionnaire.

Par ailleurs, pour ne pas biaiser l'analyse, au vu du nombre important de modalités (24) pour l'ensemble des 8 questions (items) du questionnaire, face au nombre «limité» des sujets interrogés (144), nous avons décidé de retenir un codage en tri-modalité: «*Compréhension Conceptuelle*», «*Compréhension Instrumentale*» et «*Absence de Compréhension*». Nous rappelons que nous avons défini ces modalités de la façon ci-après, comme il a été déjà signalé dans l'introduction de cet article. Ce codage adopté, représente en quelques sortes des niveaux hiérarchisés de compréhension du concept de la moyenne arithmétique :

- *Compréhension Conceptuelle* : Elle sera mise en valeur lorsqu'en traitant une question donnée, le sujet préfère utiliser l'une des deux stratégies MAN ou TPE plutôt que la stratégie APD. Toute propriété caractéristique de la moyenne lui paraît utilisable, sans qu'il se sente tenu de recourir à l'application de la formule $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, pour pouvoir la vérifier, la démontrer ou la mettre en évidence.
- *Compréhension Instrumentale* : Elle sera prise en considération lorsque le sujet traite une question donnée par simple application de la formule $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
- *Absence de Compréhension* : Elle sera prise en considération en l'absence de compréhension conceptuelle et de compréhension instrumentale, ou lorsque le sujet ne donne aucune réponse à une question donnée.

Dans le tableau 4 suivant, nous résumons les relations existant entre ces questions, leurs objectifs, les propriétés visées du concept de la moyenne arithmétique et les activités pratiques correspondantes, ainsi que le codage des questions et modalités adoptées.

Question	Objectif	Propriété	*Activités*[2]	Libellé question	Code question	Codes modalités[3]		
Item n°1	O_1	P_1	A_1 et A_2	*Opérations de Calcul de la Moyenne*	*OC*	*OCC*	*OCI*	*OCA*
Item n°2 (A)	O_3	P_2	A_1, A_2 et A_3(C, D et H)	*Position de la Moyenne entre les Données extrêmes*	*PD*	*PDC*	*PDI*	*PDA*
Item n°2 (B)	O_7	P_5	A_3(E et F)	*Déviations Autour de la Moyenne*	*DA*	*DAC*	*DAI*	*DAA*
Item n°3 (A)	O_2	P_1	A_1, A_2 et A_3(C, E, G_2 et H)	*Stratégies de Calcul de la Moyenne*	*SC*	*SCC*	*SCI*	*SCA*
Item n°3 (B)	O_5	P_3	A_2 et A_3(G_1)	*Effet d'une Donnée Nulle*	*DN*	*DNC*	*DNI*	*DNA*
Item n°3 (C)	O_6	P_4	A_3(G_2 et H)	*Effet d'une Donnée Egale à la Moyenne*	*DE*	*DEC*	*DEI*	*DEA*
Item n°4	O_4	P_2	A_1	*Localisation de la Moyenne à partir d'un Diagramme en Bâtons*	*LD*	*LDC*	*LDI*	*LDA*
Item n°5	O_8	P_6	A_3(G)	*Sensibilité de la Moyenne aux Données extrêmes*	*SD*	*SDC*	*SDI*	*SDA*

Tableau 4. Tableau de bord et codages

3.4.2. Valeurs propres, inertie totale et nombre d'axes retenus

L'analyse factorielle des correspondances multiples[4] appliquée au tableau disjonctif complet[5] issu du codage des réponses des sujets, a conduit à des valeurs propres non nulles de moyenne 0,125 (l'inverse du nombre de questions qui est égal à 8). Ces valeurs propres sont : λ_1=0,645, λ_2=0,214, λ_3=0,165 et λ_4=0,147. L'inertie totale est égale à 1 (nombre de valeurs propres non nulles, divisé par le nombre de questions). Par ailleurs, le calcul des taux d'inertie liés à ces quatre valeurs propres conduit aux pourcentages décroissants allant de 34,4% à 7,84%. Ces valeurs indiquent que l'essentiel de l'information est lié aux quatre premiers

---

[2] A_i désigne : Activité n° i. Pareillement, A_i (X et Y) désigne : les questions X et Y de l'activité n° i.

[3] La dernière lettre du code d'une modalité désigne le type de compréhension considérée, comme suit : C : Conceptuelle, I : Instrumentale et A : Absence de compréhension.

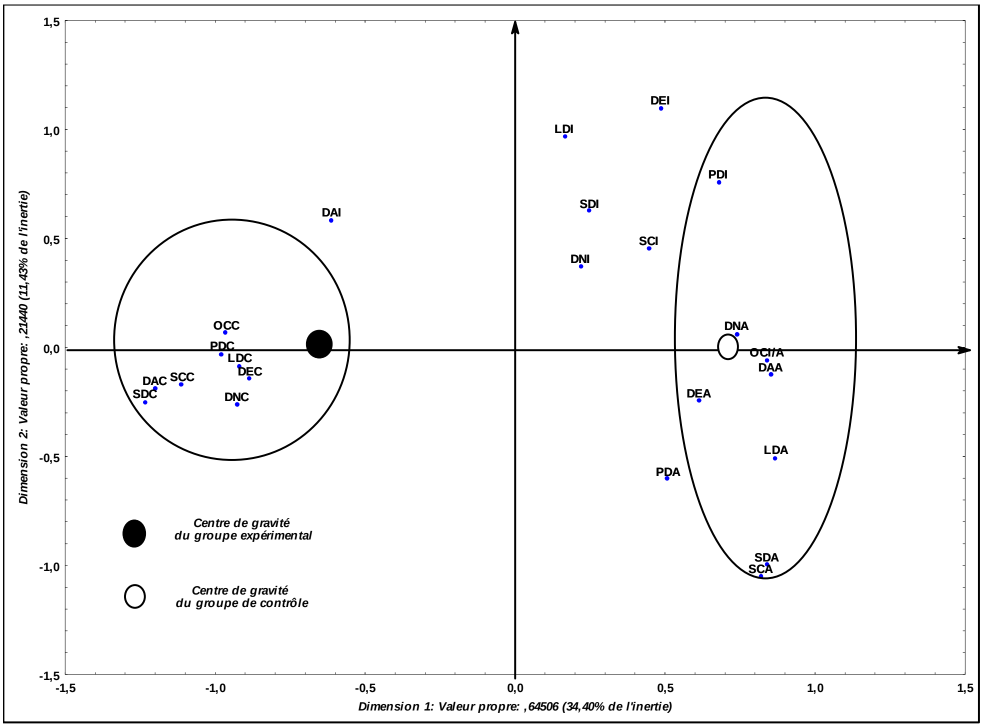
[4] Cette analyse a été conduite à l'aide du logiciel Statistica (Version 6).

[5] Vu l'effectif très faible des sujets ayant choisi la modalité OCA de la question OC, nous avons fusionné cette modalité avec la modalité OCI de la même question pour créer une nouvelle modalité que nous avons nommée OCI/A d'effectifs la somme des effectifs des deux modalités qui les constituent. OCI/A remplacera donc dans notre analyse, OCI et OCA. On a adopté ce fusionnement en raison du fait que dans l'AFCM, plus une modalité a un effectif faible, plus elle a des contributions relatives élevées dans la construction des axes factoriels, ce qui pourrait biaiser notre analyse.

axes factoriels qui représentent ensemble 62,51% de l'information totale[6]. Ces valeurs propres sont différentes; cela signifie que nous sommes pratiquement en présence de deux valeurs propres simples (λ_1 et λ_2), et une valeur propre double ($\lambda=\lambda_3\approx\lambda_4$). Par conséquent, il va falloir étudier les axes 1, 2 séparément, et le plan (3,4).

3.4.3. Interprétation du 1er axe factoriel (*Axe d'appréhension du concept de moyenne arithmétique*)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à une inertie de 34,4% pour l'axe 1. En outre, toutes les modalités indiquant une compréhension conceptuelle ont une coordonnée négative sur cet axe, par opposition aux modalités indiquant une compréhension instrumentale ou une absence de compréhension, qui y ont toutes une coordonnée positive (voir graphique 1). Par conséquent, l'axe 1 s'interprète comme évaluant l'appréhension du concept de moyenne arithmétique.



Graphique 1. Plan factoriel (1, 2)

[6] Le pourcentage de 62.51% de l'information totale est considéré comme très important du fait que nous avons appliqué l'AFCM sur un tableau disjonctif complet au lieu d'un tableau de Burt. Pour en savoir plus, consulter Benzécri (1979).

Les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 1 ci-dessus[7]. Elles ont une contribution comprise entre 2.1% et 8.4%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à un tel axe est comprise entre 0,13 et 0,8. Nous pouvons donc considérer que toutes les questions posées dans notre questionnaire sont représentatives de ce dernier et jouent toutes un rôle dans l'évaluation de la compréhension du concept de moyenne arithmétique chez les élèves de la 3ème année du collège.

Par ailleurs, à partir des coordonnées factorielles des individus, nous avons pu déterminer les localisations dans le graphique 1 des centres de gravité des groupes expérimental (G.E) et de contrôle (G.C). Nous pouvons ainsi remarquer que le centre de gravité du G.E se trouve proche des modalités impliquant une compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique, tandis que celui du G.C se situe entre les modalités indiquant une absence de compréhension de ce concept.

Cette analyse nous permet donc de confirmer notre hypothèse de recherche :

«*Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en place avant tout cours axé sur la formule* $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$, *introduisant ce concept; et avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent effectivement une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3ème année du collège*».

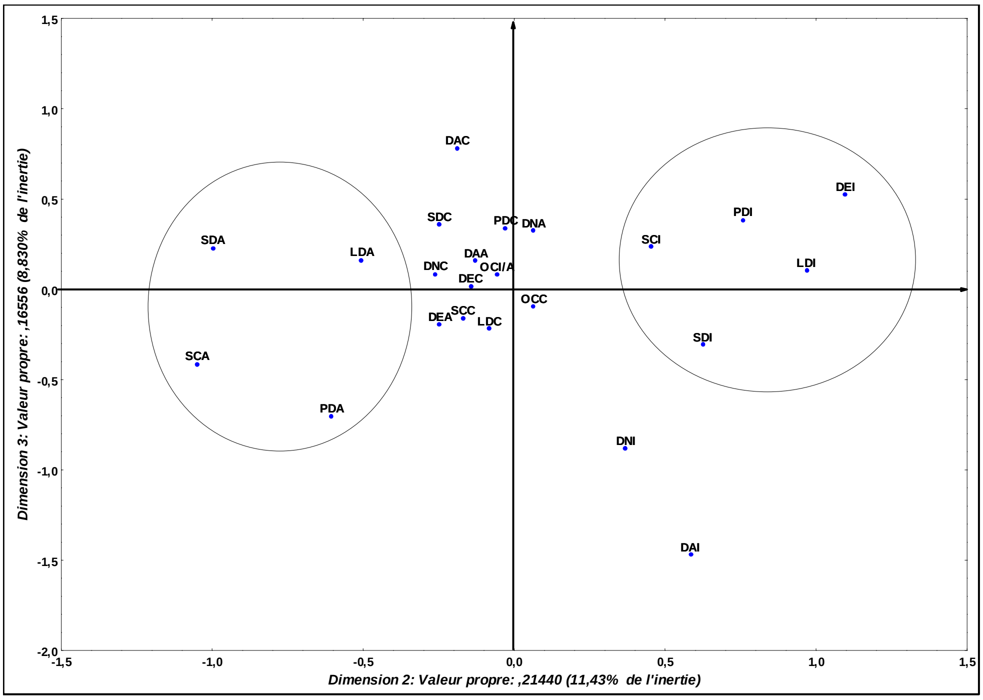
3.4.4. Interprétation du 2ème axe factoriel (*Axe opposant l'absence de compréhension à la compréhension instrumentale de la moyenne arithmétique*)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à une inertie de 11,43% pour l'axe 2. En outre, les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 2 ci-dessous[8]. Elles ont une contribution comprise entre 5.5% et 14.1%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à un tel axe est comprise entre 0,15 et 0,37. En outre, cet

[7] Notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes coordonnées en valeur absolue par rapport au 1er axe factoriel. Les modalités restantes occupent des positions intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.

[8] Notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes coordonnées en valeur absolue par rapport au 1er axe factoriel. Sinon, le reste des modalités occupent quasiment des positions intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.

axe oppose des modalités indiquant une absence compréhension à des modalités indiquant une compréhension instrumentale. Par conséquent, nous pouvons interpréter cet axe comme étant « *un axe opposant l'absence de compréhension à la compréhension instrumentale de la moyenne arithmétique* ».



Graphique 2. Plan factoriel (2, 3)

D'un autre côté, parmi les items dont les modalités correspondent à l'absence de compréhension du concept de moyenne arithmétique et qui ont des contributions relatives élevées pour la construction de l'axe 2, nous nous sommes focalisés sur l'item 4, codé LD, relatif à la localisation de la moyenne à partir d'un diagramme en bâtons. Nous avons choisi cet item du fait que nous sommes très conscients de ce que ce genre d'items révèle des difficultés majeures chez nos sujets et suscite des réponses étonnantes de la part de ces derniers. Ainsi, en se référant aux réponses erronées (modalité LDA) des sujets, nous avons pu identifier les cinq principaux types de conceptions erronées présentées dans le tableau suivant.

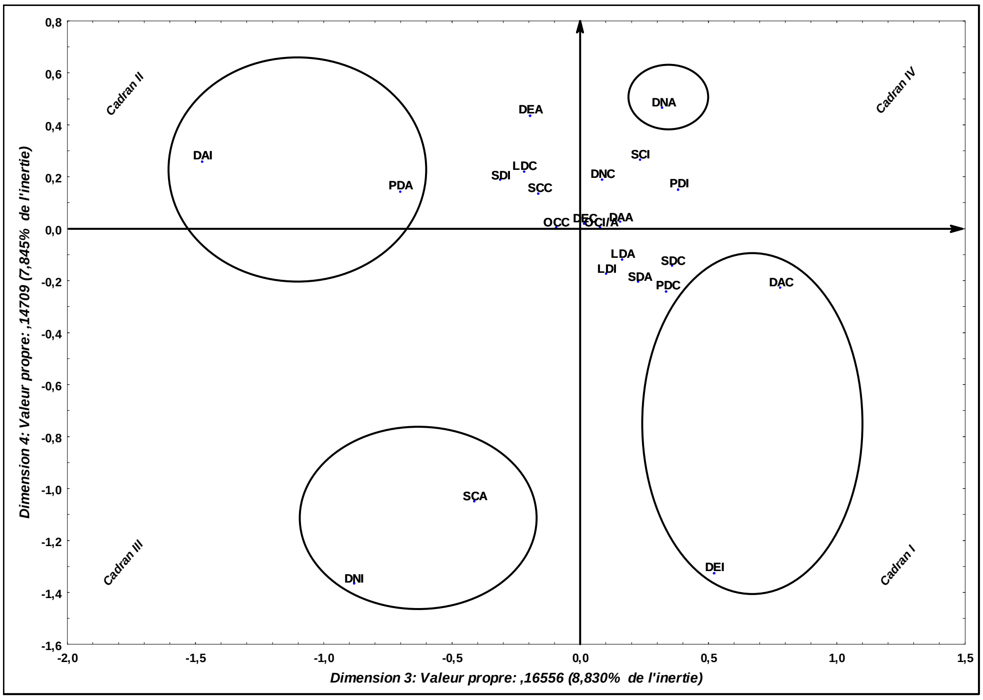
Description de la conception erronée	**Réponses types des sujets**
Conception ambigüe, nécessitant une discussion approfondie avec les sujets.	• *« Puisque* $\frac{6}{6}=1$ *alors l'anneau (3) est la bonne réponse ».* • *« J'ai choisi l'anneau (6) du fait que la pluie commence à tomber en mois de juin ».* • *« J'ai choisi l'anneau (4) parce qu'en mois de janvier et février on est en plein saison de l'hiver ».*
Confusion entre moyenne arithmétique et donnée maximale.	• *« J'ai choisi l'anneau (1) parce que c'est à partir de cet anneau qu'on peut lire la moyenne de quantités de pluie tombée, et on sait que cette moyenne est toujours égale au bâton le plus long ».*
Lecture de la moyenne arithmétique à partir de l'axe des abscisses.	• *« J'ai choisi l'anneau (5) parce qu'il est au milieu des six mois ».* • *« J'ai choisi l'anneau (5) parce que peut être la pluie tombe beaucoup en mois de mars, et la saison de l'hiver se termine en ce mois ».*
Toute valeur sur l'axe des ordonnées est une moyenne arithmétique.	• *« J'ai choisi les anneaux (1), (2) et (3) parce que c'est sur l'axe des ordonnées qu'on lit les quantités de pluie alors que l'axe des abscisses est relatif aux mois ».*
L'impossibilité de conjecturer une valeur approximative de la moyenne arithmétique sans connaitre les valeurs de toutes les données.	• *« J'ai choisi les anneaux (1) et (6) parce qu'on peut calculer la moyenne arithmétique à partir des anneaux extrêmes de chaque axe. Et du fait que ces deux anneaux contiennent la quantité de pluie globale ainsi que les quantités de pluie de chaque mois, l'opération de calcul de la moyenne sera devenue facile ».* • *« J'ai choisi l'anneau (1) parce que c'est le point le plus élevé à partir duquel on peut observer la donnée maximale et les données inférieures ».* • *« J'ai choisi l'anneau (3) parce qu'il est une unité de mesure relatif à l'axe des quantités de pluie. A partir de cet anneau, on peut connaitre les graduations. Ce qui va permettre de lire le graphique et par conséquent déterminer la quantité de pluie de chaque mois ».*

Tableau 5. Conceptions erronées des sujets, relatives à l'item LD

Il apparait donc très évident, à partir des réponses des sujets, qu'il soit nécessaire de prendre en considération toutes ces conceptions erronées lors d'un enseignement sur le concept de la moyenne arithmétique à nos élèves. Ces conceptions révèlent sans doute un problème très général et très important en mathématique, celui de l'influence du changement de registres sémiotiques sur l'appréhension des concepts de cette discipline. Par conséquent, il est fondamental de s'intéresser à cet aspect de la compréhension en introduisant la notion de la moyenne arithmétique auprès des élèves, et ce en la présentant à eux sous ses différents registres sémiotiques possibles (*verbal, graphique, tabulaire*, …) et surtout en les formant et les habituant à passer d'un registre à l'autre avec plus de facilité et de fluidité (Duval, 1993).

3.4.5. Interprétation du plan factoriel (3,4) (*Plan d'opposition de niveaux successifs de compréhension*)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à des inerties de 8,83% pour l'axe 3 et de 7.84% pour l'axe 4 Le graphique 3 suivant représente la projection de l'ensemble des modalités par rapport au plan (3,4) :



Graphique 3. Plan factoriel (3, 4)

Les modalités correspondant aux plus fortes contributions relatives (comprises entre 11.4% et 32.9%) dans la construction des axes 3 et 4, et ayant une bonne représentation (comprises entre 0.19 et 0.54), sont celles qui sont entourées dans le graphique 3.

En cherchant parmi ces modalités les groupements qui présentent les plus fortes oppositions, nous constatons qu'il y a quatre groupes de modalités: (DAC et DEI), (DAI et PDA), (DNI et SCA) et (DNA). Ainsi, nous pouvons déclarer que :

- Les individus qui manifestent une compréhension conceptuelle relative au fait que la somme des déviations autour de la moyenne est nulle, se caractérisent plutôt par une compréhension instrumentale traduisant le fait qu'une donnée égale à la moyenne a un effet sur la valeur prise par cette dernière.
- Aussi, les individus qui acquièrent une compréhension instrumentale concernant le fait que la somme des déviations autour de la moyenne est nulle sont probablement incapables de connaitre que la moyenne est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale, ce lorsque les données sont exprimées par un registre sémiotique de type numérique.
- De plus, les individus qui témoignent d'une compréhension instrumentale relative au fait qu'une donnée nulle a un effet sur la valeur prise par la moyenne arithmétique, se caractérisent plutôt par un déficit relativement aux stratégies de calcul de la valeur prise par la moyenne, étant donné que la seule stratégie adoptée est: APD.

De plus, ces quatre groupes de modalités s'opposent deux à deux[9] (*Cadran I vs Cadran II* et *Cadran III vs Cadran IV*). Ainsi, à partir des types de modalités composant ces groupes, nous pouvons proposer que le plan (3,4) est un plan «*d'opposition de deux niveaux successifs de compréhension d'une même propriété; et que chaque niveau est accompagné d'un niveau de compréhension qui lui est inférieur et qui est relatif à une propriété différente*».

4. Conclusion et perspectives de recherches

En premier lieu, il apparait clairement que le concept de la moyenne arithmétique n'est pas aussi simple que pourrait le laisser penser la formule conduisant à l'algorithme de calcul $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$.

Ainsi, nous concluons à partir des résultats de cette recherche que, même en modulant du fait que le groupe expérimental a bénéficié par rapport au groupe de

---

[9] Voir Cadran I, Cadran II, Cadran III et Cadran IV du graphique 3.

contrôle d'une durée supplémentaire d'activités de deux heures consacrées à des activités expérimentales préalables, il est tout à fait vraisemblable que :

«*Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en place avant tout cours axé sur la formule* $\overline{\mathrm{X}} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$*, introduisant ce concept; et avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent effectivement une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3ème année du collège*».

Il apparait aussi qu'à partir des réponses des sujets au questionnaire posé, qu'il reste nécessaire d'introduire, en classe, le concept de la moyenne arithmétique en le présentant aux élèves sous ses différents registres sémiotiques possibles (*verbal, graphique, tabulaire, …*) et surtout en les formant à passer d'un registre sémiotique à l'autre de manière fluide en toute facilité.

En second lieu, nous faisons remarquer que nous avions assuré les conditions pour que les sujets du groupe expérimental n'utilisent pas la stratégie « Ajouter Puis Diviser » dans l'accomplissement des différentes tâches impliquées dans les trois activités pratiques. Pour cela, nous avons essayé de mettre l'accent sur la construction de ces tâches de telle façon que les sujets ne soient pas enclin à utiliser une telle stratégie opératoire, en les contraignant à adopter les deux stratégies : « Mise A niveau » et « Tâtonnement Puis Erreurs » visant à développer chez eux la dimension de la compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique.

Il ressort que la recherche doit se poursuivre pour voir s'il ne serait pas préférable de programmer les trois activités pratiques que nous avons présentées ici au niveau de la 3ème année du primaire (âge de 8 ans) du fait que ce n'est qu'à partir de ce niveau scolaire qu'est introduit le concept de la «Division» ? Ne serait-il pas recommandé d'introduire le concept de la moyenne arithmétique en se basant sur la stratégie « APD » au niveau de la 4ème année du primaire (au lieu de la 3ème année du collège) du fait que ce n'est qu'à partir de ce niveau que les élèves commencent à construire le concept de nombres décimaux ? Ne serait-il pas utile de programmer l'activité théorique que nous avons présentée dans notre recherche, aux élèves de la 4ème année du primaire et ce après avoir reçu de cours sur cette notion basé, comme nous l'avons déjà dit, sur la stratégie « APD » ? Nous pensons qu'en procédant ainsi, nous pourrions mieux garantir non seulement une compréhension conceptuelle de la moyenne arithmétique chez les élèves mais aussi une compréhension satisfaisante de ce concept. Cependant, afin de s'assurer d'une telle conjecture, il est nécessaire que ceci soit objet d'études approfondies, que nous allons mener dans nos prochains travaux relatifs à l'élaboration d'ingénieries didactiques permettant une compréhension globale de ce concept statistique, le plus habituellement utilisé.

BIBLIOGRAPHIE

ANDRADE, V. L. V. X. (2013) *Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais.* Thèse (http://theses.univ-lyon2.fr/documents/lyon2/2013/lira_v_x_de_andrade_v).

BENZECRI, J. P. (1979) Sur le calcul des taux d'inertie dans l'analyse d'un questionnaire, *Cahiers de l'analyse des données,* **4**, 377-378.

CAI, J. (1995) Beyond the Computational Algorithm: Students' understanding of the Arithmetic Average Concept. *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education*. **3**, 144-151. Universidad de Pernambuco.

CARPENTER, T. P., CORBITT, M. K., KEPNER, H. S., LINDQUIST, M. M. & REYS, R. E. (1981) *Results from the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

CHATZIVASILEIOU, E., MICHALIS, I. & TSALIKI, C. (2010) Elementary School Students' Understanding of Concept of Arithmetic Mean, *ICOTS 8*.

COUTANSON, B. (2010) *La question de l'éducation statistique et de la formation de l'esprit statistique à l'école primaire en France. Étude exploratoire de quelques caractéristiques de situations inductrices d'un enseignement de la statistique au cycle III* Thèse (http://theses.univ-lyon2.fr/documents/lyon2/2010/coutanson_be).

DUVAL, R. (1993) Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **5**, 37-65.

ELM'HAMEDI, Z. (2010) *Contribution à une ingénierie didactique pour l'enseignement et l'apprentissage des tests statistiques à l'université*. Doctorat. Université Sidi Mohammed Ben Abdellah- Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Fès, Maroc.

GAL, I. (1995) Statistical Tools and Statistical Literacy: The Case of The Average, *Teaching Statistics*, **17(3)**, 97-99.

GOODCHILD, S. (1988) School Pupils' Understanding of Average, *Teaching Statistics*, **10**, 77-81.

HARDIMAN, P., WELL, A. & POLLATSEK, A. (1984) Usefulness of a balance model in understanding the mean, *Journal of Educational Psychology*, **76**, 792-801.

LAVOIE, P. & GATTUSO, L. (1998) An Historical Exploration of the Concept of Average, *ICOTS 5*.

LIMA, S., POLLATTSEK, A. & WELL, A. D. (1981) Concept or Computation: Students' Understanding Of The Mean, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 191-204. University of Massachusetts, Amherst.

MARNICH, M. A. (2008) *A knowledge structure for the arithmetic mean: Relationships between statistical conceptualizations and Mathematical concepts*. Doctorat of Education. University of Pittsburgh.

MEVARECH, Z. R. (1983) A deep structure model of students' statistical misconceptions, *Educational studies in Mathematics*, **14**, 415-429.

MOKROS, J. & RUSSELL, S. J. (1995) Children's concepts of average and representativeness, *Journal for Research in Mathematics Education*, **26**, 20-39.

PFANNKUCH, M. & WILD, C. (2003) Statistical thinking: How can we develop it? *Teaching Children Mathematics*, **2**, 360-364.

PLACKETT, R. L. (1970) The Principle of The Arithmetic Mean. In studies in the history of Statistics and Probability (Vol. 1), eds. E. Pearson and M.G. Kendall London; Griffin.

POLLATSEK, A., LIMA, S. & WELL, A. D. (1981) Concept or computation: Students' Understanding of the Mean, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 191-204.

SKEMP, R. R. (1979) *Intelligence, Learning and Action*, Wiley, Chichester.

STRAUSS, S. & BICHLER, E. (1988) The development of Children's Concepts of the Arithmetic Average, *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 64-80.

WASTON, J. M. & MORITZ, J. (1999) The Beginning of Statistical Inference: Comparing two Data Sets, *Educational Studies in Mathematics*, **37**, 145-168.

ZAKI, M. & ELM'HAMEDI, Z. (2009) Eléments de mesure pour un enseignement des tests statistiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **14**, 153-194.

ZAKI, M. & ELM'HAMEDI, Z. (2013) Aspects de quelques critiques non fondées de la théorie des tests statistiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **18**, 139-171.

ZAHID ELM'HAMEDI
Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle,
Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Région Chaouia Ouardigha, Hay El Farah II,
Avenue Taha Hussein, B.P: 3066, Ville de Settat, Royaume du Maroc.
Tél : +212 673346514.
E-mail : mhamdizahid@yahoo.fr

Annexe 1. Directives pour la réalisation des trois activités pratiques

1. Les 3 activités sont numérotées et intitulées de la façon suivante:
- Activité n°1: *«Egalisation des tours»,*
- Activité n°2: *«Partage des pourboires»,*
- Activité n°3: *«Action d'équilibrage»;*

2. Les trois activités sont relativement indépendantes entre elles;
3. Au cours d'une séance de travaux pratiques, les sujets s'organisent entre eux pour former des groupes de quatre personnes;
4. On peut admettre que deux ou trois groupes travaillent sur un même type d'activité en même temps;
5. L'ordre de réalisation des activités 1, 2 et 3 est sans importance;
6. Chaque activité est éventuellement identifiée par le matériel didactique nécessaire pour son accomplissement, et par la procédure à suivre pour pouvoir la réaliser;
7. Chaque groupe est prié d'accomplir les trois activités;
8. Les quatre sujets de chaque groupe doivent coopérer et se concerter entre eux au cours de la mise en œuvre de ces trois activités;
9. Les sujets sont priés de ne pas utiliser l'opération mathématique «*Ajouter Puis Diviser*» pour la mise en œuvre de ces trois activités;
10. Une durée de 40 minutes est très suffisante pour accomplir une activité donnée;
11. L'enseignant accompagne tous les groupes jusqu'à ce qu'ils accomplissent adéquatement les trois activités.

Annexe 2. Les trois activités expérimentales

ACTIVITE N°1: « *EGALISATION DES TOURS* »

- **MATERIEL DIDACTIQUE:** Quarante-deux (42) cubes, tous de mêmes dimensions:

- **PROCEDURE:**

Sept de vos amis participent à un programme de gain de poids qui nécessite que chacun d'eux gagne un (1) kilogramme par semaine. Ils devront essayer de gagner ce kilogramme en mangeant des tablettes de chocolat spécial.

En faisant des tests médicaux variés, ces amis sont alors capables de déterminer le nombre de tablettes de chocolat que chacun d'eux doit manger par semaine pour gagner ce kilogramme. Les résultats de ces tests sont illustrés par la figure 1 suivante, composée de sept tours (*une tour correspond à un et un seul ami*):

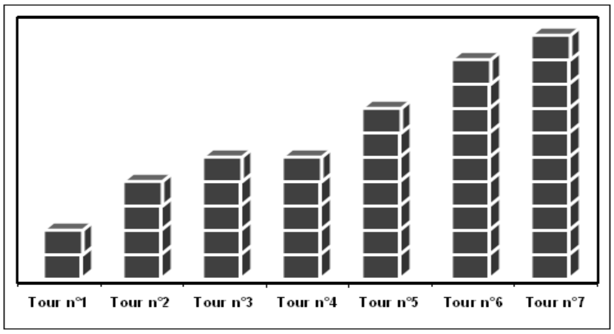
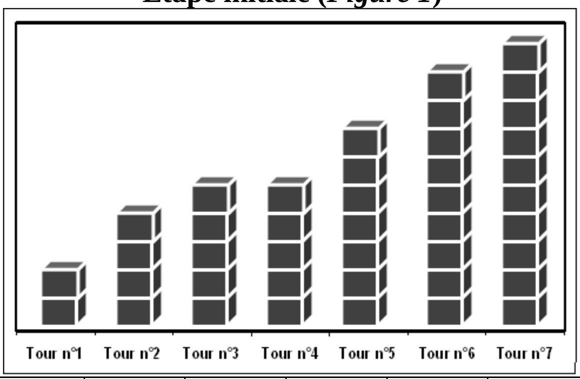


Figure 1

A. A l'aide des cubes que vous avez devant vous, essayez d'élaborer une modélisation de la figure 1.

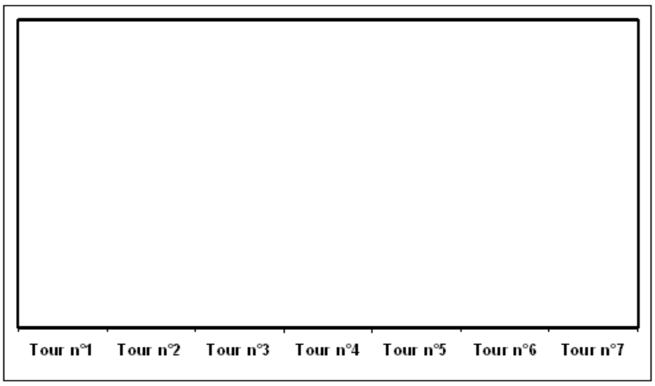
B. Dans cette question, vous êtes priés de déplacer les cubes d'une tour à l'autre jusqu'à ce qu'elles soient toutes de hauteurs égales, *sans utiliser l'opération mathématique: «Ajouter Puis Diviser»*. La hauteur commune à toutes ces tours, que vous obtiendrez, s'appelle: *nombre moyen (expérimental)* de tablettes de chocolat à consommer. Décrivez ci-dessous les étapes du processus adopté pour réaliser cette opération de mouvement des cubes. Ce processus commence évidemment par l'étape initiale (*Figure 1*) et se termine par l'étape finale (*Tours de hauteurs égales*). La description d'une étape donnée consiste à dessiner, dans la figure correspondante, les cubes actuels de chaque tour au cours de cette étape, et de remplir le tableau en dessous de chaque figure. La hauteur d'une tour donnée ne doit changer qu'une seule fois au maximum dans chaque étape.

Etape initiale (*Figure 1*)



Notation du nombre de cubes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Valeurs	2	4	5	5	7	9	10

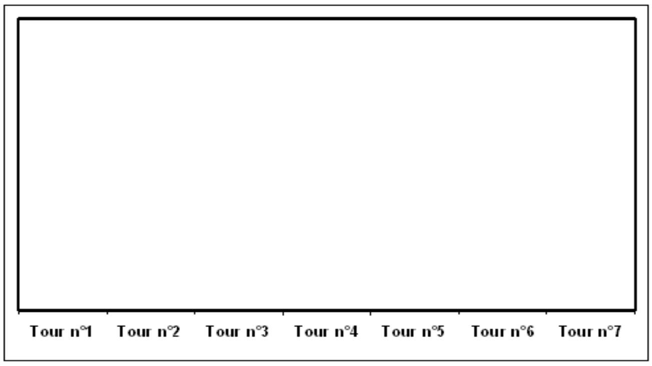
Etape 1



Notation du nombre de cubes	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
y_i en fonction de x_i							
Valeurs							

...

Etape finale
(*Tours de hauteurs égales*)



Notation du nombre de cubes	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
z_i en fonction de y_i							
Valeurs							

Ce nombre moyen (expérimental) est égal, selon vous, à:…....Tablettes de chocolat.

C. A l'aide des cubes que vous avez devant vous, faites construire à tour de rôle par chacun d'entre vous un modèle de la figure 1, puis déplacer ces cubes d'une tour à l'autre jusqu'à ce qu'elles soient toutes de la même hauteur, et ce sans utiliser l'opération mathématique : «*Ajouter puis diviser*».

ACTIVITE N°2: « *PARTAGE DES POURBOIRES* »

• **MATERIEL DIDACTIQUE:** Trois caisses numérotées de 1 à 3, contenant des sommes d'argents réparties et composées comme le montre le tableau suivant:

		Pièces composant le montant				
	Montant (en Dh)	**5 Dh**	**1 Dh**	**20 Ct**	**10 Ct**	**5 Ct**
Caisse 1	3,5	0	3	2	1	0
Caisse 2	9,25	1	4	1	0	1
Caisse 3	12,45	2	2	1	2	1

• **PROCEDURE:**

A. Les trois caisses numérotées de 1 à 3, que vous avez devant vous, contiennent respectivement des sommes d'argents de : 3,5Dh (3 pièces d'un dirham, 2 pièces de 20 centimes et une pièce de 10 centimes), 9,25Dh (une pièce de 5 dirhams, 4 pièces d'un dirham, une pièce de 20 centimes et une pièce de 5 centimes) et 12,45Dh (2 pièces de 5 dirhams, 2 pièces d'un dirham, une pièce de 20 centimes, 2 pièces de 10 centimes et une pièce de 5 centimes). Elles représentent des pourboires en faveur de trois élèves seulement, parmi vous. Faites alors un tirage au sort pour affecter ces caisses et aussi savoir l'élève qui ne recevra pas de caisse. Ces caisses appartiennent alors à trois élèves parmi vous: Elève 1, Elève 2 et Elève 3. L'élève 4 n'a pas la chance de bénéficier d'une caisse.

B. Dans un premier temps, vous, les élèves 1, 2 et 3, avez décidé de partager ces montants de pourboires entre vous trois seulement, en adoptant un jeu d'échange de pièces de monnaies, *sans utiliser l'opération mathématique: «Ajouter Puis Diviser»* les montants inclus dans les caisses. Combien chacun de vous trois devrait recevoir alors? Ce montant commun, que vous obtiendrez, s'appelle: *montant moyen (expérimental)*. Décrivez ci-dessous les étapes du processus adopté pour réaliser cette opération de partage des pourboires. Ce processus commence par l'étape initiale (*Tableau 1*) et se termine par l'étape finale (*Même montant de pourboire pour les trois élèves*). La description d'une étape donnée consiste à remplir le tableau qui y correspond. Le montant de pourboire d'un élève donné ne devrait changer qu'une seule fois au maximum dans chaque étape.

Etape initiale *(Tableau 1)*

Elèves	Notation du montant	Montant (en Dh)
Elève 1	x_1	3,5
Elève 2	x_2	9,25
Elève 3	x_3	12,45

Etape 1

Elève	Notation du montant	y_i en fonction de x_i	Montant (en Dh)
Elève 1	y_1		
Elève 2	y_2		
Elève 3	y_3		

...

Etape finale
(Même montant de pourboire pour les trois élèves)

Elève	Notation du montant	v_i en fonction de u_i	Montant (en Dh)
Elève 1	v_1		
Elève 2	v_2		
Elève 3	v_3		

Ce montant moyen (expérimental) est égal, selon vous, à: ……………Dh.

C. Etant donné que vous êtes des amis intimes, et vous décidez de faire profiter l'élève 4 des pourboires en les partageant de façon égale entre vous quatre**,** remettez les montants dans leurs caisses puis partagez les montants inclus dans les caisses entre vous quatre en adoptant seulement un jeu d'échange de pièces de monnaies, *sans utiliser l'opération mathématique: «Ajouter Puis Diviser».* Combien chacun de vous quatre devrait-il alors recevoir ? Ce montant commun que vous obtiendrez, s'appelle: *montant moyen (expérimental).* Décrivez ci-dessous, comme en B, les étapes du processus adopté pour réaliser cette opération de partage des pourboires. Ce processus commence par l'étape initiale (*Tableau 2*) et se termine par l'étape finale (*Même montant de pourboire pour* *les quatre élèves*). La description d'une étape donnée consiste aussi à remplir le tableau qui y correspond. Le montant de pourboire d'un élève donné ne devrait changer qu'une seule fois au maximum dans chaque étape.

Etape initiale *(Tableau 2)*

Elèves	Notation du montant	Montant (en Dh)
Elève 1	x_1	3,5
Elève 2	x_2	9,25
Elève 3	x_3	12,45
Elève 4	x_4	0

⬇

Etape 1

Elève	Notation du montant	y_i en fonction de x_i	Montant (en Dh)
Elève 1	y_1		
Elève 2	y_2		
Elève 3	y_3		
Elève 4	y_4		

⬇

…

⬇

Etape finale
(Même montant de pourboire pour les quatre élèves)

Elève	Notation du montant	v_i en fonction de u_i	Montant (en Dh)
Elève 1	v_1		
Elève 2	v_2		
Elève 3	v_3		
Elève 4	v_4		

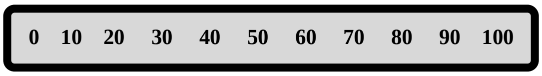
Ce nouveau montant moyen (expérimental) est égal, selon vous, à: ………Dh.

D. Le nouveau montant moyen trouvé en C est égal, selon vous, à celui trouvé en B: ☐ *Vrai* ☐ *Faux*

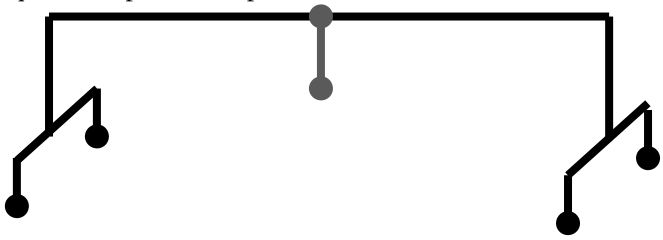
ACTIVITE N°3: « *ACTION D'EQUILIBRAGE* »

• **MATERIEL DIDACTIQUE:**

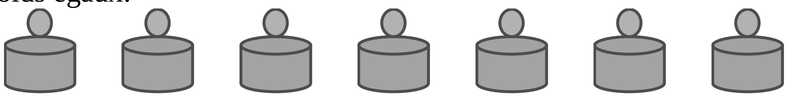
- Un bâton homogène de longueur un (1) mètre, gradué et troué aux valeurs des dizaines, en 0 et en 100:



- Une barre sur pieds à laquelle on pourra suspendre le bâton :



- Sept (7) poids égaux:



- Sept (7) crochets (de poids négligeables) permettant de suspendre les poids sur le bâton:

§, §, §, §, §, §, §

• **PROCEDURE:**

A. A l'aide du matériel que vous avez devant vous, suspendez un bâton homogène de longueur un (1) mètre en son point milieu (50 cm), comme le montre la figure 1 suivante:

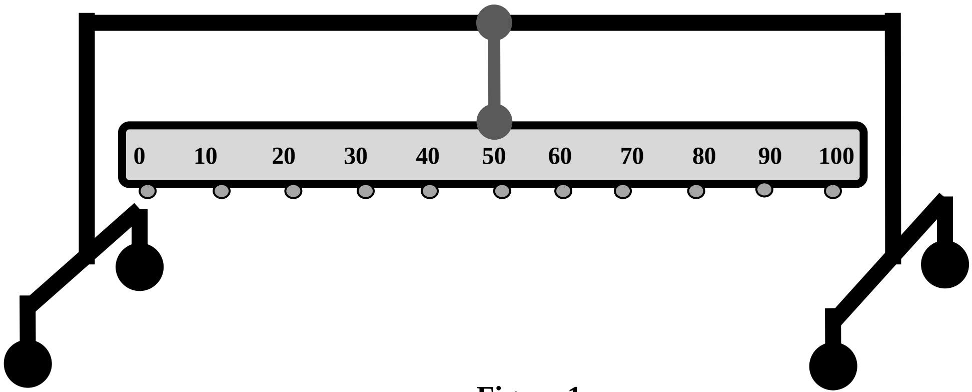


Figure 1

B. Accrochez quatre poids égaux sur le bâton aux points: 20 cm, 40 cm, 70 cm et 90 cm.

C. Essayez d'accrocher un cinquième poids de telle sorte que le bâton soit en position d'équilibre au point 50 cm ? *Ce point d'accrochage est à : …..…cm.*

D. Décrochez un poids parmi ces cinq, puis essayez de déplacer les quatre autres sur le bâton de telle sorte que ce dernier soit en position d'équilibre. Inscrivez dans le tableau ci-dessous les points d'accrochage :

Poids	Points d'accrochage
1^er^ poids	*…………….cm*
2^ème^ poids	*…………….cm*
3^ème^ poids	*…………….cm*
4^ème^ poids	*…………….cm*

E. Comparez alors la somme des distances au milieu du bâton des poids à gauche du point 50 cm à celle des distances au milieu du bâton des poids à droite de 50 cm. *Ces deux sommes de distances sont:* ☐ *Egales* ☐ *Différentes*

F. Raccrochez de nouveau quatre poids égaux sur le bâton aux points: 20 cm, 40 cm, 70 cm et 90 cm comme dans la question B. *Les deux sommes de distances correspondantes sont cette fois-ci:* ☐ *Egales* ☐ *Différentes*

G. Accrochez quatre poids égaux aux points: 30 cm, 40 cm, 60 cm et 70 cm. Vous pouvez ainsi remarquer que le bâton est en position d'équilibre au point 50 cm. Vous procédez ensuite à déplacer le cinquième poids du point 0 cm jusqu'au point 100 cm, tout en passant par: 10 cm, 20 cm, 50 cm, 80 cm et 90 cm. En faisant ce déplacement croissant du cinquième poids, vous remarquez que:

G.1. Plus on s'écarte du point 0 cm vers le point 50 cm, plus le bâton tend vers sa position d'équilibre: ☐ *Vrai* ☐ *Faux*

G.2. Le bâton garde sa position d'équilibre si le cinquième poids est accroché au point 50 cm: ☐ *Vrai* ☐ *Faux*

G.3. Plus on s'écarte du point 50 cm vers le point 100 cm, plus le bâton s'écarte de sa position d'équilibre: ☐ *Vrai* ☐ *Faux*

H. Décrochez tous les poids suspendus sur le bâton puis raccrochez de nouveau quatre poids et ce aux points suivants : 30 cm, 40 cm, 60 cm et 70 cm. Vous pouvez ainsi remarquer que le bâton est en position d'équilibre une fois suspendu au point 50 cm. En accrochant successivement un cinquième poids, un sixième poids puis un septième poids dans le même point 50 cm, vous remarquerez que :

☐ *Le bâton conserve sa position d'équilibre.*

☐ *Plus vous accrochez les trois poids (le cinquième, le sixième puis le septième) un après l'autre, plus le bâton s'écarte de sa position d'équilibre.*