OSIEL RAMÍREZ-SANDOVAL, CÉSAR F. ROMERO-FÉLIX, ASUMAN OKTAÇ

COORDINACIÓN DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN EL USO DE TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO

Abstract. Coordinating semiotic registers in the use of linear map in the plane. This paper presents an analysis of interviews with college students, which includes various situations involving the concept of linear map. Our goal is to analyze the coordination of registers by students and their relationship to the success and efficiency to solve the given situations. To clarify the concept of coordination of registers, we describe successful cases of coordination and various ways in which this coordination is not achieved, with analysis of possible sources causing non-coordination, for example the confusion of registers. To achieve meaningful analysis, we study the representations used by students, as well their verbal explanations, segmented into interpretable units. We include a discussion through examples about the notion of *mixing registers*.

Résumé. Coordination des registres de représentation sémiotique des transformations linéaires du plan. Ce document présente les résultats d'une analyse d'entretien avec les étudiants de premier cycle en mathématiques à propos de diverses situations impliquant la notion de transformation linéaire. Le but est d'analyser la coordination des registres par les étudiants et sa relation à la réussite et l'efficacité pour la résolution. Afin de clarifier la notion de coordination des registres, sont présentées des descriptions de cas réussis de coordination ainsi que de diverses façons non couronnées de succès, avec l'analyse des causes possibles de non-coordination, tel le mélange de registres. Pour réaliser une analyse significative, nous étudions les représentations utilisées par les étudiants ainsi que leurs explications orales, segmentées en unités interprétables. Est incluse une discussion sur la notion de *mélange de registres* appuyée par des exemples.
Mots-clés. Algèbre linéaire, transformation linéaire, registres de représentation sémiotique, coordination de registres, mélange de registres.

Resumen. El presente artículo muestra resultados de un análisis de una entrevista realizada a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que incluye diversas situaciones que involucran el concepto de Transformación Lineal. Con este análisis se pretende analizar la coordinación de registros por parte de los estudiantes y su relación con el éxito y eficiencia al resolver las situaciones planteadas. Para aclarar el concepto de coordinación de registros se presentan descripciones de casos exitosos de coordinación y de diversas formas en que no se logra ésta, analizando posibles fuentes que provocan la no coordinación como es el caso de la mezcla de registros. Para lograr un análisis significativo, se estudian las representaciones utilizadas por los estudiantes, así como sus explicaciones verbales, segmentadas en unidades interpretables. Se incluye una discusión a través de ejemplos, sobre la noción de *mezcla de registros*.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 225 - 250.

1. Objetivos de Investigación y Antecedentes

Como Dorier y Sierpinska (2001) señalan "[el] Álgebra Lineal es un tema cognitivamente y conceptualmente difícil" (p. 256). Hay varios factores que influyen en esta dificultad, entre ellos la diversidad de registros empleados y sus interpretaciones.

La presente investigación toma como marco de referencia a la teoría de registros de representación semiótica elaborada por Duval (1993, 1999, 2008) y centra su atención en el concepto de Transformación Lineal, con el objetivo de explicar la relación que guarda la coordinación de registros con el éxito al resolver situaciones matemáticas que involucran a dicho concepto, partiendo de la identificación de los registros que usaron los estudiantes y las conversiones que lograron. Por otro lado, se pretende contribuir al debate sobre los registros de representación que se emplean en Álgebra Lineal, señalando discrepancias entre las interpretaciones existentes y ofreciendo nuestro punto de vista. Aunque no fue un objetivo propuesto al iniciar la investigación, se ofrece una discusión respecto a la noción de mezcla de registros, como resultado de la interpretación de las producciones de los estudiantes.

Existen investigaciones sobre el concepto Transformación Lineal bajo diversos enfoques. Roa-Fuentes y Oktaç (2010) describen dos posibles maneras de construir el concepto; Soto, Romero e Ibarra (2012) analizan la eficacia de una propuesta que parte de un acercamiento gráfico al concepto de transformación lineal, mismo que puede ser útil para crear una base de significación más concreta, antes de presentar su versión más abstracta; Ramírez y Oktaç (2012) reportan que las concepciones de varios estudiantes pueden reducirse a considerar sólo a las transformaciones lineales prototipo; Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1999) analizan las concepciones que pueden desarrollar los estudiantes de la transformación en un ambiente de geometría dinámica.

El enfoque del presente trabajo está en la coordinación de los diversos sistemas de representación que emplean los estudiantes para dar solución a problemas de matemáticas que involucran el concepto de Transformación Lineal, sin negar que la complejidad intrínseca del concepto juega un papel importante en su aprendizaje. Según Duval (1999) "la ausencia de coordinación entre los diferentes registros produce con mucha frecuencia un handicap para los aprendizajes conceptuales" (p. 30). Esta coordinación implica realizar conversiones entre registros, lo cual generalmente no es trivial ni espontáneo porque se necesitan de diversos recursos como: la identificación de las unidades significantes del registro de partida y llegada, la diferenciación entre representado y representante, y la identificación de los registros. De no llevarse a cabo la coordinación entre los registros, la comprensión conceptual de este tópico podría converger tarde o temprano a un fracaso.

El artículo se divide en seis apartados, iniciando con esta introducción para dar paso a los aspectos metodológicos en el apartado dos. Posteriormente en la sección tres se proporciona información sobre los actores involucrados en el curso de álgebra lineal que se observó y del cual se seleccionaron a los estudiantes participantes en la entrevista, continuando con el apartado cuatro donde se muestran los elementos teóricos que sustentan la presente investigación; incluyendo nuestra interpretación del concepto de coordinación de registros, que es empleada en el análisis de la entrevista presentado en la sección cinco. Finalmente se reportan las conclusiones de la investigación, proponiendo una serie de reflexiones que invitan al debate y a realizar futuras investigaciones.

2. Aspectos Metodológicos

La presente investigación se apoya en las consideraciones metodológicas hechas por Duval (2008), para investigaciones con un enfoque semiótico, partiendo de que no es suficiente analizar sólo las producciones de los estudiantes:

> En primer lugar, lo principal es no confundir dos cuestiones. Una se refiere a la identificación de las variables que determinan el desarrollo de la comprensión en matemáticas. La otra se refiere al análisis e interpretación de las producciones de los alumnos que se adquieren sea en las aulas, sea a través de la observación individual, o bien a través de experimentos. La primera es con mucha frecuencia ignorada o reducida a la segunda, y, sin embargo, es crucial porque se trata de un modelo del funcionamiento del pensamiento matemático. (p. 56)

Apelando a estas consideraciones, en la presente investigación se identificaron las variables que denotan la comprensión y uso del concepto de Transformación Lineal. Para ello se realizó una descripción de los posibles registros a emplear por los estudiantes, abarcando sus reglas de formación, características de los tratamientos y conversiones, y relaciones entre algunos de estos registros (ver sección 4.2).

Duval (2008) comenta que una aproximación semiótica permite describir al menos un procedimiento de análisis, el cual se compone de tres etapas:

> (1) Las observaciones se realizan en el contexto de un problema; es esencial empezar por hacer el mapa representacional de todo el campo de trabajo de representaciones… en el que la búsqueda de la solución puede ser gestionada por los estudiantes. Esto no depende de lo que los estudiantes han hecho, sino de lo que se les proporciona o lo que se espera de ellos.
>
> (2) Este campo de trabajo es una herramienta para dividir la producción de cada estudiante en segmentos o unidades interpretables en función de:

— los pasajes que él / ella hace o no hace … entre los diferentes registros de representación

— el registro elegido por el alumno para realizar un tratamiento.

(3) Por último, sobre esta base, una comparación verificable puede llevarse a cabo entre las distintas producciones conseguidas. Naturalmente, esta comparación puede estar correlacionada con el nivel de habilidades matemáticas, sin confundirse con ellas. Y, esta comparación se puede extender también a las producciones conseguidas durante largos períodos de tiempo, con el fin de observar si la comprensión evoluciona en profundidad o no. (p. 57)

Para los fines de la presente investigación, estas etapas se interpretan de la siguiente manera: En la primera se realizó la descripción de los registros y sus relaciones, así como un análisis a priori de cada actividad. El segundo momento corresponde a segmentar la producción de los estudiantes en situaciones de coordinación y no coordinación. En la etapa final se analizaron las producciones de los estudiantes buscando relaciones entre la coordinación y el éxito al resolver las situaciones.

3. Tratamiento Didáctico

Con base en los señalamientos metodológicos se hizo una revisión del acercamiento de los libros de texto empleados en el curso, se identificó el perfil del profesor y se realizó la observación en clases durante un semestre. Al final de éste se realizó un estudio piloto, aplicando una secuencia de actividades que involucraba el concepto de Transformación Lineal en los registros algebraico, matricial y gráfico, propiciando conversiones entre ellos. De los resultados obtenidos de esta aplicación, de los productos entregados durante el curso y del desempeño de los estudiantes en el curso, se seleccionó a cinco estudiantes, cuidando que se tuviera una muestra heterogénea de los integrantes del grupo, para realizarles posteriormente una entrevista individual.

La investigación se apoyó en un curso de Álgebra Lineal que se ofreció en una universidad pública en México. Los estudiantes cursaban el segundo semestre en una carrera de Licenciatura en Matemáticas. Con la intención de observar el tipo de ejemplos, ejercicios y registros que se emplearon en el curso, nos apoyamos en la filmación y toma de notas en las sesiones.

El curso tomó como base la noción de sistema de ecuaciones; se avanzaba explorando las características de otros conceptos como: matrices, espacios vectoriales, subespacios, bases y dimensión, entre otros, para posteriormente redefinirlos de manera formal, demostrando algunos teoremas y aplicándolos a ejemplos vistos e integrándoles nuevos elementos de otros conceptos. Los libros de texto en el curso fueron los siguientes: Hoffman y Kunze (1973) que presenta un enfoque teórico; Poole (2007) y Grossman (2008) que ofrecen una perspectiva orientada a las aplicaciones. Lejos de que esta diversidad fuese un inconveniente, ofrece una oportunidad de ver diferentes ejercicios que el profesor previamente seleccionaba para su concatenación. El profesor que impartió el curso, tiene el grado de Doctor en Matemáticas, cuenta con una trayectoria de catorce años de docencia, y ha impartido durante este periodo de manera intermitente el curso de Álgebra Lineal.

4. La Teoría de Registros de Representación Semiótica

En este apartado señalamos brevemente algunos de los elementos que componen la teoría de registros de representación semiótica, en los que nos apoyamos en la investigación presentada en este artículo.

4.1. Registro de Representación Semiótica

Duval (1993) manifiesta que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Para ello, resumiendo la definición de Duval (1993), un sistema de signos puede ser un **registro de representación**, si permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La formación de una representación identificable.

2. El tratamiento de una representación.

3. La conversión de una representación a otra.

Acerca de la tercera actividad, Duval (2006) comenta que “es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común” (p. 112). Más precisamente, es común que dos representaciones de un mismo objeto en distintos registros no sean congruentes. La congruencia de representaciones está determinada por las siguientes “tres condiciones: correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y convertir una unidad significante en la representación de salida en una sola unidad significante en la representación de llegada” (Duval 1999, p. 6), siendo las unidades significantes las partes en que se puede descomponer una representación.

Es importante señalar que cuando se tiene congruencia entre dos representaciones en un sentido, no necesariamente se va a tener congruencia en el otro sentido de la conversión. Asimismo se pueden cumplir parcialmente, en diferente medida, los tres criterios de congruencia lo cual nos permite comparar la congruencia entre distintas representaciones y hablar de representaciones más o menos congruentes. Por otro lado, cuando dos representaciones son congruentes se facilita la actividad de conversión, logrando en algunos casos que ésta sea realizada de manera instantánea como una traducción o sustitución, cosa que no es posible para la mayoría de las representaciones.

Sin embargo, Duval (1993) advierte que no se debe confundir a la conversión con dos actividades que le son próximas: la codificación y la interpretación. La importancia de estas distinciones es que la conversión, en general, no puede ser reducida a una codificación o interpretación, aunque haya casos particulares de conversiones triviales.

> Lo que uno llama generalmente «interpretación» requiere de un cambio de marco teórico, o de un cambio de contexto. Ese cambio no implica un cambio de registro, sino que con frecuencia moviliza analogías.
>
> El «código» es la «transcripción» de una representación en otro sistema semiótico distinto de aquél donde está dada. (p. 179)

Diversos conceptos en Álgebra Lineal como por ejemplo sistemas de ecuaciones, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales al trabajarlos en R^2 o R^3, pueden representarse en por lo menos tres registros. Uno de los objetivos de la presente investigación es identificar los que emplearon los estudiantes entrevistados y las conversiones que realizaron entre ellos.

4.2. Coordinación de Registros de Representación Semiótica

Se ha hecho énfasis en que un concepto matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas, sin embargo se reporta que la complejidad de utilizar varios registros genera obstáculos para el aprendizaje del Álgebra Lineal (Pavlopoulou, 1993; Soto et al., 2012) y "…que sólo la coordinación de varios registros de formas semióticas ayuda a remontarlos" (Duval, 1993, p. 173).

La coordinación de registros de representación es una condición esencial para la aprehensión conceptual e implica ineludiblemente la conversión entre registros; pero esta última suele ser la menos espontánea y la más difícil de realizar de las tres actividades cognitivas propias de los registros de representación.

La coordinación consiste en la movilización y la articulación cuasi-inmediatas de los registros de representación semiótica. Esta coordinación supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro.

Una persona con una buena coordinación de registros podría resolver situaciones matemáticas trabajando en un solo registro, no porque no pueda emplear otros, sino porque decidió que la manera más eficiente de llegar a la solución es trabajar en ese único registro, considerando los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en los diferentes registros y la solución a la que desea llegar. Incluso no se requiere el señalamiento hacia el exterior, en papel o verbalmente por ejemplo, de representaciones de los registros coordinados en la situación que se esté tratando.

4.3. Registros de representación en Álgebra Lineal

Existen investigaciones (Pavlopoulou, 1993; Soto, 2003; Soto et al., 2012) que describen características de los registros de representación usados o recomendados para el estudio del Álgebra Lineal; para los propósitos de este artículo consideramos necesario precisarlas aún más. En esta sección presentamos una descripción que, aunque no es exhaustiva, proporciona mayor detalle sobre las características de los cuatro registros que pueden emplearse para dar solución a las situaciones que aparecen en las entrevistas.

Algunas de las situaciones que necesitan ser atendidas, corresponden a las definiciones de registros específicos. Distintos autores identifican diferentes registros utilizados en Álgebra Lineal; por ejemplo Pavlopoulou (1993) habla de un registro gráfico y uno algebraico, mientras que Soto (2003) analiza dos registros gráficos y dos algebraicos distintos (p.14). Nos encontramos ante una falta de consenso sobre las definiciones de registros específicos, aunque no parece haber confusiones con la definición general dada por Duval mencionada en la sección anterior.

En nuestro caso, coincidimos con Soto (2003) al apreciar dos registros gráficos, mientras que Pavlopoulou (1993), maneja solo un registro algebraico, aunque no exactamente el mismo; pero diferimos de ambos sobre las representaciones matriciales. Mientras que Pavlopoulou y Soto parecen coincidir con lo que ambos llaman “registro tabular”, nosotros apreciamos distintas reglas de formación y tratamiento aplicadas a arreglos rectangulares de signos, con las que definimos el “registro matricial” que analizamos en las producciones de los estudiantes. Resaltamos entonces la necesidad de tener en mente estas diferencias entre nombres y definiciones de los registros mientras se consulta algún trabajo sobre representaciones en Álgebra Lineal.

Cabe aclarar que los conceptos de Álgebra Lineal que aparecen en las preguntas de la entrevista tales como espacio vectorial, vector y transformación lineal pueden ser representados en los cuatro registros que describiremos en este apartado. En la descripción nos enfocamos en la manera particular que cada registro permite representar a estos objetos, en algunos tratamientos elementales y en características de algunas conversiones, coincidiendo en general con la descripción hecha por Pavlopoulou (1993).

4.3.1. Registro gráfico sintético

Como menciona Soto (2003), en el sistema educativo mexicano es común que el primer encuentro de estudiantes con el concepto de vector sea en cursos de física en donde los vectores (principalmente magnitudes vectoriales) se representan con "flechas" definidas ya sea por un punto inicial y un punto final, o por su magnitud, dirección y sentido. En ambos casos las representaciones se aprecian como en la Figura 1.

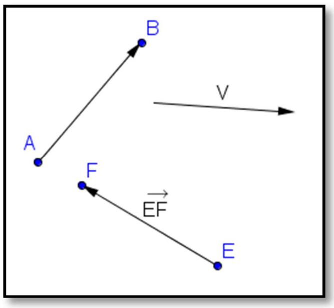

Figura 1. Representación gráfica sintética de vectores

Este registro tiene reglas de formación particulares que lo distinguen de otros, por ejemplo, para representar a un vector fijo se puede utilizar cualquier flecha de una familia infinita con la misma magnitud, dirección y sentido (Figura 2) ya que comparten características definitorias en el registro; esto implica que la traslación de las flechas es un tratamiento neutro, en el sentido de que las representaciones conservan la misma información después de realizado el tratamiento. El hecho de que la traslación sea neutra permite que se utilice como método para comprobar si dos flechas representan al mismo vector: se traslada una flecha hacia la otra y si coinciden los puntos iniciales y finales se concluye que están representando al mismo vector.

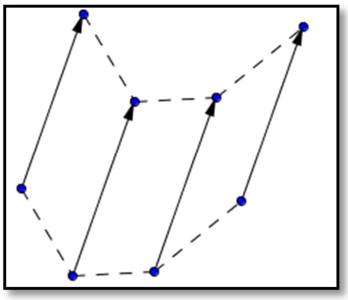

Figura 2. Familia de flechas que representan al mismo vector

Sobre los tratamientos esenciales en este registro, retomamos de Soto (2003) que existen dos tratamientos para la suma de vectores: regla del paralelogramo y regla del triángulo. Para sumar dos vectores, digamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, con la regla del paralelogramo se traslada uno hasta que coincidan los puntos iniciales de ambos de manera que forman los lados adyacentes de un paralelogramo; los otros dos lados se construyen dibujando copias de los dos vectores iniciales, cada uno iniciando en el punto final del otro (ver Figura 3). El vector suma se representa entonces como la flecha que coincide con la diagonal del paralelogramo. Con la regla del triángulo, se traslada una flecha de modo que el punto inicial de ésta coincida con el punto final de la segunda flecha y el vector suma se representa con la flecha formada con el punto inicial del segundo vector y el punto final del primero (Figura 3).

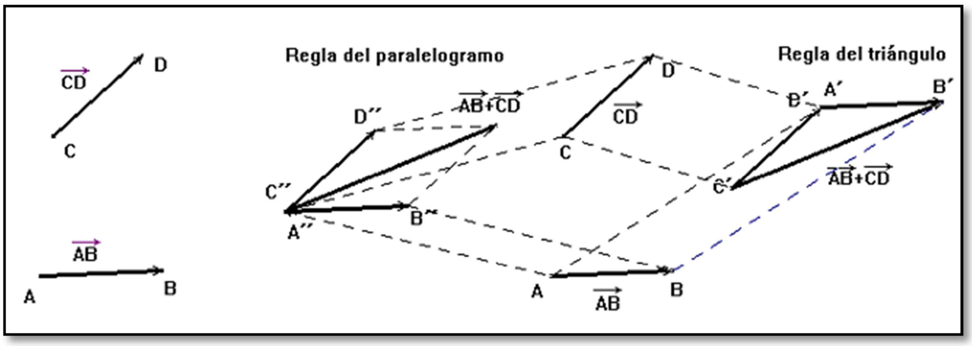

Figura 3. Tratamientos de suma en el registro gráfico sintético (tomada de Soto, 2003, p. 16)

Es común encontrar dificultades al utilizar este registro en Álgebra Lineal por la multitud de representaciones válidas para la misma situación (sea para vectores o para sumas) o por las muy distintas interpretaciones que se les puede atribuir a una misma representación, como la que trata con la forma de la letra “M” en el plano (Figura 4).

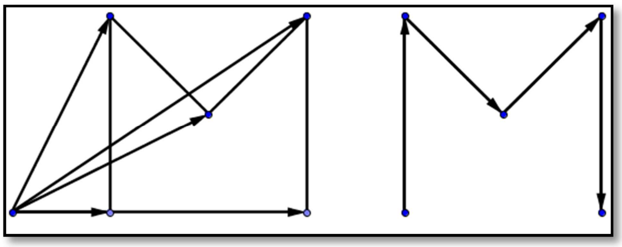

Figura 4. Interpretaciones posibles de una figura con forma de “M” en el plano

La ambigüedad del registro puede implicar complicaciones para su uso en determinadas situaciones al poder significar cosas considerablemente distintas, como podremos ver más adelante.

4.3.2. Registro gráfico cartesiano

Comúnmente en los cursos de Álgebra Lineal se deja de utilizar el registro sintético para representar a los vectores pasando a un nuevo registro gráfico que tiene inicialmente distintas reglas de formación para las representaciones. En este otro registro gráfico, los vectores también son representados por flechas pero ahora todas las flechas comparten el punto inicial; este punto inicial común es llamado *el origen* y generalmente es definido por la intersección de dos rectas perpendiculares llamadas *ejes*. Los ejes pueden estar graduados y de tal manera las flechas pueden estar acompañadas de etiquetas como en el otro registro gráfico (Figura 1) o con etiquetas de coordenadas como *(2,3)*, como se observa en la Figura 5.

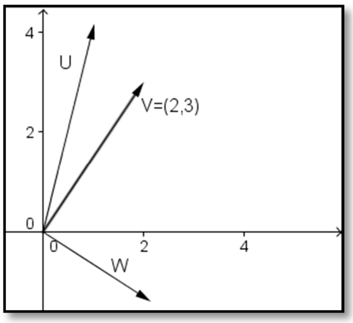

Figura 5. Representación cartesiana de vectores

En este segundo registro, dos flechas representan al mismo vector sólo si tienen el mismo punto final (o coordenadas), por lo que sólo hay una flecha para cada vector, y el vector cero es representado por el origen. La suma de vectores puede realizarse sólo con la regla del paralelogramo ya que no es válido desplazar una flecha de modo que su punto inicial sea distinto al origen. El registro cartesiano no comparte la ambigüedad del registro sintético al facilitar una única interpretación de representaciones como la de la letra M (y en general de cualquier región del plano) que podía ser vista en el registro sintético de dos formas distintas; la interpretación en el registro cartesiano corresponde a las flechas que van del origen a cada punto de la región indicada.

4.3.3. Registro algebraico y registro matricial

Presentamos estos dos registros en la misma subsección porque, a diferencia del par de registros gráficos, estos pueden ser utilizados simultáneamente sin mayores complicaciones y sin generar ambigüedad de las representaciones involucradas en las situaciones analizadas en la entrevista.

El registro algebraico es quizá el más usado cuando se definen conceptos o se redactan teoremas por las ventajas que su estatus de lenguaje formal le proporciona. En este registro se utilizan letras, números y símbolos para representar diversos tipos de objetos como vectores, escalares y operaciones, formando expresiones discursivas separadas en renglones, como por ejemplo: la combinación lineal de tres vectores $a \cdot \mathrm{V} + \mathrm{c} \cdot \mathrm{W} + \mathrm{d} \cdot \mathrm{Z}$; o la definición de vectores propios para una transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \wedge \exists k \in \mathbb{R}: T(U) = k \cdot U$$

En este registro dos letras representan al mismo vector si se declara explícitamente, es decir, el vector V es igual al vector W si se tiene la expresión V=W, o si se puede inferir a partir de tratamientos algebraicos como la sustitución de expresiones equivalentes. En general el registro algebraico permite una organización más eficiente del conocimiento matemático, ya que facilita la representación de situaciones complejas de una manera más precisa y compacta aunque con las desventajas propias del formalismo (ver Duval, 1999 y Soto et al., 2012).

El registro matricial permite representar una gran diversidad de objetos del Álgebra Lineal. Por un lado las matrices son arreglos rectangulares de otros objetos (números, polinomios, otras matrices, etc.) vistos como un elemento de algún espacio vectorial, por ejemplo los elementos de $\mathcal{M}_{nxm}(\mathbb{R})$. Por otro lado mediante el mismo tipo de arreglos rectangulares se pueden representar conceptos de otra naturaleza como cambios de base, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones. En el caso de una transformación lineal, ésta se puede representar con una matriz que al multiplicarla por cualquier vector se obtenga la imagen de tal vector bajo la transformación lineal. De antemano, reconocemos como desafortunada la selección de la palabra “matriz” para designar tanto al objeto matemático como a una de sus representaciones ya que esto puede llevar a una confusión entre ambos entes, y aparentemente también puede provocar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático (Duval, 2006).

La naturaleza de las matrices como arreglos de otros objetos provoca que en cierta forma se “hereden” algunas características de estos y de sus representaciones. De tal manera, es importante tener en cuenta que los tratamientos matriciales son generalmente derivados o influenciados por los tratamientos de las componentes de éstas. Si se tiene una matriz con entradas racionales de la forma a/b el tratamiento de suma es significativamente distinto a si la matriz tuviera entradas enteras o entradas algebraicas. Esta característica de los tratamientos matriciales nos puede llevar a interpretar partes de éstos, por ejemplo la suma de componentes, como tratamientos de otros registros, pero la información dada por la ubicación de cada componente en el arreglo matricial, el orden de los tratamientos así como las relaciones entre las componentes de la matriz resultado y las componentes de las matrices iniciales, excede la información obtenida por los tratamientos aislados de las componentes. Entonces, una suma de dos matrices conlleva más información que la sola suma de sus componentes, por lo tanto no se puede reducir por completo el tratamiento matricial a un tratamiento algebraico. Esto es similar a las relaciones entre los tratamientos de los números naturales y los números racionales; los tratamientos racionales se desarrollan a partir de los naturales pero no pueden reducirse a estos.

En las situaciones relevantes para este artículo nos podemos encontrar con arreglos de números, como $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemento de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$; o de arreglos de polinomios, como $\begin{pmatrix} 2 \cdot x + y \\ x - 3 \cdot y \end{pmatrix}$ elemento de $\mathcal{M}_{2x1}(\mathbb{P}[x, y])$.

El uso simultáneo de estos dos registros puede ser observado en expresiones del tipo $\alpha \cdot U + \beta \cdot V = \alpha \cdot \binom{1}{2} + \beta \cdot \binom{2}{3}$. Es común encontrar en libros o en producciones de los estudiantes expresiones mixtas que, en el mejor de los casos, implican que se ha desarrollado la coordinación de esos registros a tal grado de poder realizar conversiones de manera espontánea en una misma expresión. A pesar de que se pueden encontrar abundantes ejemplos de expresiones mixtas, no significa que los registros matricial y algebraico sean en su totalidad congruentes, como muestra Pavlopoulou (1993) en casos de conversión de matrices a sistemas de ecuaciones.

Atribuimos la abundante utilización de estas expresiones algebraico-matriciales al nivel de congruencia entre algunas representaciones en estos dos registros. Las reglas de formación en ambos registros tienen varias coincidencias, como se aprecia en la representación de una combinación lineal de vectores. Las unidades significantes en las expresiones de combinación lineal mantienen el mismo orden para la suma y para el producto por escalar. De tal manera, una simple sustitución puede ser suficiente para la conversión de una combinación lineal entre los registros matricial y algebraico.

El uso simultaneo de registros se menciona como una característica de la coordinación de registros (Duval, 1999) aunque aclarando que no son equivalentes, incluso hay usos simultáneos que provocan confusiones y obstruyen la actividad matemática; sobre esto hablaremos más en las siguientes secciones.

5. Análisis de la entrevista

En la entrevista se usó una secuencia de cinco actividades. Las tres primeras pretenden situar el concepto de Transformación Lineal mediante preguntas abiertas; las dos restantes son situaciones que comúnmente no se encuentran en los libros de texto. El entrevistador tuvo el papel de conducir, plantear y explicar las situaciones que se presentaban durante el desarrollo de la entrevista; uno de sus principales tareas consistió en obtener información extra en los argumentos aportados por los estudiantes, principalmente cuando se detectaba la no coordinación de registros por parte de los estudiantes, dado que estas situaciones sugerían un análisis más profundo.

A continuación presentamos el análisis de algunas situaciones realizadas durante la entrevista, poniendo especial énfasis en los casos donde las situaciones guardaban estrecha relación con la coordinación de registros, así como en algunos usos inapropiados de representaciones.

5.1. Definición de Transformación Lineal, según los estudiantes

La primera pregunta que se presentó a los estudiantes tenía el propósito en situar su concepción de Transformación Lineal, al cuestionarles ¿Qué entiendes por Transformación Lineal?

La mayoría de los estudiantes hicieron alusión a la definición que se muestra en sus libros de texto, especialmente la definición que ofrece Grossman (2008, p. 460):

> Sean V, W dos espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α,
>
> $$T(u+v) = Tu + Tv$$
>
> y
>
> $$T(\alpha v) = \propto Tv$$

Por ejemplo durante la entrevista Natalia[1] presentó su propia “definición” de la siguiente manera:

> Natalia: Me basaría en lo que es la definición, entonces: Se supone que una transformación lineal, es tal que pasa un vector $\alpha \in$ V, lo pasa a ser otro vector y el cual pertenece a un espacio vectorial diferente de V o puede ser el mismo. Esa es la definición, que yo daría por así decirlo.

[1] Todos los nombres de los estudiantes son pseudónimos.

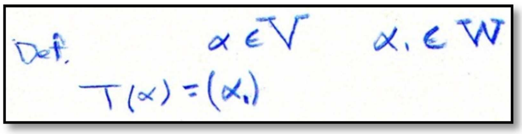

Figura 6. Definición de Natalia de Transformación Lineal

Natalia aporta una "definición", que no incluye suficientes condiciones para definir a una Transformación Lineal, aunque el siguiente extracto muestra que ella conoce la definición formal al explicarla de la siguiente manera:

> Natalia: …claro, si ya nos lo explican en los libros, bueno nos dice que la definición, dado dos vectores, su transformación cada uno; bueno, que la transformación lineal de la suma de los dos vectores es igual a que si fuera la transformación por separado y que si dado un escalar β, entonces este β al multiplicarlo por el vector, es como si tuviéramos al escalar β multiplicando a la transformación lineal, bueno ésta es la definición que he visto en los libros.

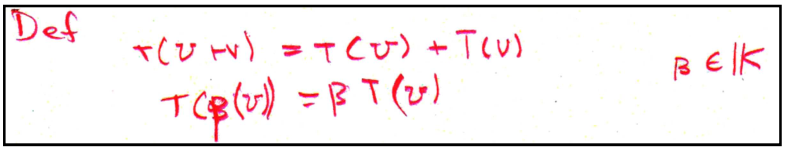

Figura 7. Definición formal representada por Natalia

Sin embargo ella insiste en usar su propia definición y nuevamente la explica, empleando el siguiente diagrama:

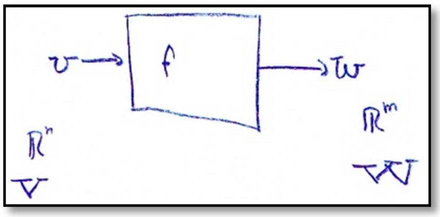

Figura 8. Diagrama de Transformación Lineal de Natalia

Esta figura, evoca a la presentación elemental de función que emplean algunos libros de cálculo al verla como una "caja negra", que trasforma los valores u objetos de entrada en los valores u objetos de salida. Natalia muestra confusión entre el concepto de función y el concepto de Transformación Lineal, ya que emplea algunos elementos distintivos de un curso de Cálculo. La concepción de Natalia consiste en el cambio de un vector en el dominio a uno del contradominio, sin considerar condiciones de linealidad. Como veremos más adelante esto afectará su desempeño en el resto de la entrevista.

Por otro lado, el estudiante Luis al abordar la misma actividad, explica de manera más detallada lo que entiende por transformación lineal.

> [Luis] (Escribe): Por transformación lineal, entiendo una función que va de un subespacio dado a otro subespacio o en su defecto al cuerpo de los escalares en el cuál se esté trabajando, que cumple con la siguiente propiedad: Dados 2 elementos del subespacio (u,v) y un escalar (α) del cuerpo correspondiente, se tiene que

$$\alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v)$$

Al parecer, Luis se apega a la definición presentada en uno de sus libros de texto, donde se define la Transformación Lineal de la siguiente manera (Hoffman y Kunze, 1973):

> Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que

$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T(\beta)$$

> para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F. (p. 67)

La definición personal de Luis corresponde a la definición formal, y esto influye positivamente en su desempeño durante la entrevista.

5.2. Ejemplos de Coordinación de Registros

La elección del registro adecuado para iniciar la solución de un problema y la articulación de los demás registros que se decida utilizar contribuyen al éxito de la solución del problema matemático. Situaciones que provocan este tipo de decisiones se presentaron en diversos momentos de la entrevista, por ejemplo, se pidió a los estudiantes un *ejemplo de una Transformación Lineal*. Luis presentó el siguiente ejemplo:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ -5y \\ z+x \end{pmatrix}$$

Figura 10. Transformación Lineal propuesta por Luis

El estudiante además de proporcionar un ejemplo de Transformación Lineal, decidió demostrar por qué lo es y en el transcurso de esta actividad, reveló la coordinación de los registros algebraico y matricial al emplear acertadamente conversiones en diferentes momentos para obtener su resultado de manera eficiente. Luis podría haber intentado hacer la demostración en el registro algebraico, planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones; podemos apreciar que ese camino sería menos eficiente que el matricial y suponemos que él mismo observó esto, por lo que decidió utilizar tratamientos matriciales. Luis escribe los vectores que va a utilizar de manera algebraica y matricial, pero cada uno para un fin distinto. Las expresiones algebraicas son utilizadas para presentar combinaciones lineales pero los tratamientos son realizados en las representaciones matriciales, pues necesita operar con las coordenadas de cada vector para realizar la demostración. De esta manera, al inicio de su demostración pasa del registro algebraico al matricial sin presentar dificultades.

$$u=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},\quad c \in \mathbb{R}$$
$$cu=\begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad cu+v=\begin{pmatrix} cx_1+x_2 \\ cy_1+y_2 \\ cz_1+z_2 \end{pmatrix}$$

Figura 11. Coordinación de los registros algebraico y matricial por Luis

Posteriormente aplicó su transformación lineal al resultado de la suma de los vectores; esto incluye una serie de tratamientos algebraicos englobados en el tratamiento matricial de evaluación de la transformación. La evaluación de cada componente, o coordenada, puede ser vista por separado como tratamiento algebraico pero el conjunto de la evaluación de la matriz, conservando el orden de las componentes es un tratamiento matricial.

$$T\begin{pmatrix} cx_1+x_2 \\ cy_1+y_2 \\ cz_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [cx_1+x_2]+2[cy_1+y_2]-3[cz_1+z_2] \\ -5\,[cy_1+y_2] \\ [cz_1+z_2]+[cx_1+x_2] \end{pmatrix}$$

Figura 12. Aplicación de la transformación lineal de Luis

Con tratamientos adecuados, acomodó la expresión de tal manera que presentara un alto nivel de congruencia con la expresión algebraica $cT(u)+T(v)$; esto le permitió realizar la conversión del registro matricial al algebraico de manera instantánea, como se muestra en la Figura 13. Concluyó su demostración al comprobar la condición de linealidad con la igualdad que propuso en su definición.

$$c\begin{pmatrix} x_1+2y_1-3z_1 \\ -5y_1 \\ z_1+x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2+2y_2-3z_2 \\ -5y_2 \\ z_2+x_2 \end{pmatrix}= cT(u)+T(v)$$

Figura 13. Conversión del registro matricial al algebraico

La conversión mostrada en la figura anterior se aprecia como un ejemplo en Álgebra Lineal de la afirmación general de Duval (1999) de que "el paso de una representación a otra se hace espontáneamente cuando ellas son congruentes" (p. 35).

Una situación de coordinación semejante a la anterior se aprecia cuando se solicita al mismo estudiante que *proporcione un ejemplo de una Transformación No Lineal*.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-2y \\ z \\ y^3 \end{pmatrix}$$

Figura 14. Transformación no lineal propuesto por Luis

Luis proporciona un ejemplo en el registro matricial (Figura 14) y haciendo un análisis similar a su ejemplo de transformación lineal, demuestra que éste no lo es. La estrategia que emplea consiste primero en trabajar el resultado obtenido al evaluar $T(c\alpha+\beta)$, iniciando con el tratamiento matricial que incluye varios tratamientos algebraicos, posteriormente trabajar con la expresión $c(T\alpha)+T(\beta)$ y averiguar la igualdad con la imagen de la combinación lineal. Debido a que no son iguales los resultados, concluye que su ejemplo no corresponde a una Transformación Lineal.

$$cT(u)+T(v)= c\begin{pmatrix} x_1^2-2y_1 \\ z_1 \\ y_1^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2^2-2y_2 \\ z_2 \\ y_2^3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} cx_1^2-2cy_1+x_2^2-2y_2 \\ z_1+z_2 \\ cy_1^3+y_2^3 \end{pmatrix} \neq T(cu+v)$$

Figura 15. Argumento final de la demostración de Luis

De esta manera Luis llega a demostrar que el ejemplo que propuso, efectivamente corresponde a una Transformación No Lineal. De la misma manera que en la situación anterior, parece diseñar un plan de acción que involucra los dos registros, haciendo uso frecuente de expresiones mixtas, para luego transitar libremente entre ellos. Estas características son interpretadas como coordinación ya que puede utilizar ambos registros de manera simultánea aprovechando las ventajas de cada uno.

5.3. Ejemplos de No Coordinación de Registros

La ausencia de coordinación de registros crea obstáculos en el aprendizaje del Álgebra Lineal, provocando incluso el fracaso en la resolución de problemas. Por ejemplo en el caso de Natalia, cuando se le solicitó que proporcionara un ejemplo de Transformación Lineal, ella inicia planteando la siguiente expresión, aludiendo a la forma que tendría la transformación lineal que propone.

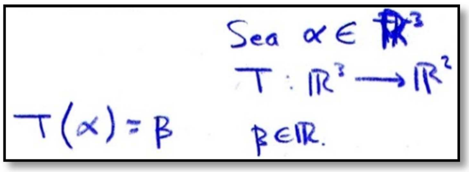

Figura 16. Propuesta de Natalia de Transformación Lineal

Inicialmente notamos que Natalia tiene dificultades con las reglas de formación del registro algebraico, pues le faltó escribir el superíndice de R^2 para que la última expresión indique que beta es un vector del plano; además utiliza letras para designar vectores que se acostumbran usar para escalares. A lo largo de su intento de respuesta Natalia emplea la única característica de las Transformaciones Lineales que declaró en su definición. Al solicitarle que especifique cómo sería la Transformación Lineal, recurre al registro matricial para señalar que sería del tipo $\propto = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ con $T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ empezando a revelar dificultades para trasladar su ejemplo del registro algebraico al matricial, pues sólo representa una pequeña parte de la información que tenía en la representación algebraica. Para indagar sobre esta dificultad, se le solicita a Natalia que proporcione el arreglo matricial correspondiente a la Trasformación Lineal que propuso inicialmente; ella nuevamente acude al registro algebraico para argumentar que la Transformación Lineal solicitada tendría la siguiente forma:

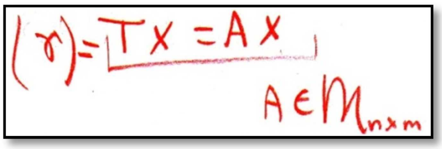

Figura 17. Expresión algebraica propuesto por Natalia

Argumenta que "*la matriz tendría que ser de…2x2…bueno, sería buscar entonces una matriz, tal que al multiplicarse entonces diera al producto, entonces como éste es un vector* (x, y, z) *la matriz que buscamos nos va a mandar a* R^2". Natalia se conforma con dar una expresión que contenga una matriz pero vista como elemento de un espacio de matrices y no como un arreglo rectangular como era esperado, esto relacionado a la inconveniencia de la palabra "matriz" para ambos significados. Posteriormente, en su intento por trasladar su representación algebraica al registro matricial, erra nuevamente y al percatarse que no puede proporcionar una matriz y por ende no puede realizar el producto matricial, como lo muestra la Figura 18, termina por no lograr proporcionar un ejemplo de Transformación Lineal.

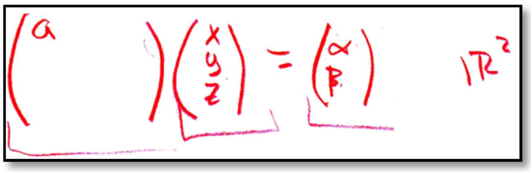

Figura 18. Representación matricial propuesta por Natalia

Esta última expresión muestra que Natalia no pudo realizar la conversión de la igualdad escrita algebraicamente al registro matricial, esto como consecuencia de la definición incompleta que utiliza. Sin embargo, el hecho de que no se diera cuenta de qué datos le faltaban implica que no reconoce algunas unidades significantes en ambos registros, las que describen la relación entre las componentes de la matriz y la ecuación algebraica.

5.3.1. Mezcla de registros de representación

A continuación describimos otros ejemplos en los que no se logra la coordinación de registros para Transformaciones Lineales, pero ahora debido a que se han mezclado dos registros diferentes y esto obstruye el proceso de solución o interpretación de los problemas. Para aclarar a qué nos referimos con mezcla de registros, partimos de que "…incluso si han sido movilizados varios registros, simultánea o sucesivamente, esto no acarrea su coordinación" (Duval, 1999, p. 51).

En la coordinación el uso simultáneo implica la selección consciente del registro en el que se va a trabajar para aprovechar las ventajas de éste en la situación particular. Un estudiante podría intentar utilizar varios registros pero sin hacer esa discriminación y sin tomar en cuenta las particularidades de cada registro. No mantener presente la diversidad y heterogeneidad de registros podría llevar a un sujeto a mezclar dos o más de ellos. De esta manera, identificamos la mezcla de registros como un tipo de uso simultáneo sin coordinación.

La mezcla de registros consiste en la utilización de representaciones que no respetan las reglas de formación del registro al que se supone pertenecen, mezclando reglas de formación de dos o más registros. Al mezclar dos registros se acaba trabajando en un tercer *sistema* de representación que podría ni siquiera ser ya un registro al no conservar alguna de las tres propiedades definitorias de los registros de representación. Esto resulta problemático ya que, según nuestras observaciones, los estudiantes pueden no ser conscientes de que han mezclado registros y actúan como si siguieran trabajando en uno de los registros originales habiendo perdido propiedades y posibles ventajas de éste.

Cabe señalar que la mezcla de registros que observamos es distinta a las expresiones mixtas del registro de la escritura formal y la lengua natural descritas por Duval (1999). En nuestro caso, la mezcla de registros no incluye la identificación de las reglas de formación en ninguno de los registros ni intenta conservar coherencia con algún registro de manera que permita la interpretación adecuada de la expresión formada. Además, las expresiones obtenidas no permiten ser convertidas a expresiones válidas en uno de los registros involucrados pues se pierde la información necesaria al ignorar las reglas de formación. Sin embargo, coincidimos en que la mezcla de registros genera representaciones no funcionales, pues no se pueden aplicar los tratamientos de ninguno de los registros involucrados ya que las reglas de tratamiento están estrechamente ligadas a las reglas de formación.

Por ejemplo Natalia al intentar dar un ejemplo de transformación no lineal inicia su respuesta en el registro algebraico con la expresión $T(x) = mx + b$, procede a representar una transformación lineal gráficamente como punto de comparación para lo que ella intenta representar como una transformación no lineal. La primera gráfica que realiza corresponde al registro gráfico cartesiano (Figura 19) y consiste en un par de flechas que parten del origen representando a un vector y su imagen, respectivamente.

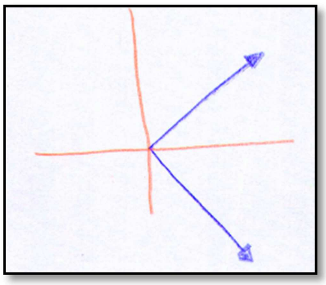

Figura 19. Representación gráfica cartesiana de una transformación lineal, hecha por Natalia

Esta gráfica cartesiana está bien formada y funciona como representación de lo que Natalia expresa verbalmente: la transformación manda, de alguna manera, un vector a otro. La mezcla de registros aparece a continuación, cuando explica su ejemplo de transformación no lineal. Para este caso Natalia grafica dos flechas pero ahora una de ellas, la flecha imagen, no parte del origen.

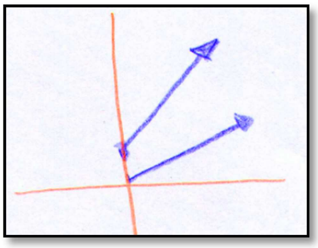

Figura 20. Representación de transformación no lineal según Natalia

Natalia describe la gráfica aclarando que el vector que no parte del origen es la imagen del otro y por esa razón la transformación no es lineal. Al parecer, intenta representar el tipo de transformaciones que no mandan el cero al cero, tal como lo hizo algebraicamente. Ella argumenta que la flecha imagen "…ya ni siquiera comienza en el origen, entonces ya no [es lineal]".

En su segunda gráfica utiliza reglas de representación de ambos registros gráficos que no son compatibles. La flecha imagen no respeta la regla del registro cartesiano de iniciar en el origen, por lo que en ese registro la representación no es válida. Por otro lado, si consideramos su representación como si estuviera en el registro gráfico sintético, al parecer las flechas tienen misma dirección, magnitud y sentido por lo que representarían al mismo vector y no se serviría para representar a una transformación como la que Natalia expresó algebraicamente. Natalia supone que está trabajando en el registro cartesiano, al utilizar los ejes y porque identifica a las flechas como vectores diferentes, pero en realidad utiliza una mezcla de los registros cartesiano y sintético, manteniendo algunas reglas de ambos pero de una manera contradictoria que no le permite realizar representaciones coherentes que le sirvan para expresar su idea y resolver el problema en cuestión.

Por otro lado Franco, otro estudiante entrevistado, muestra algunas coincidencias con el caso de Natalia al interpretar el problema de la "M", que consistía en encontrar una transformación lineal que *mandara* una figura con forma de "M" a una figura con forma de *M* itálica; esta pregunta fue adaptada de Wawro (2009).

> A continuación se proporciona una figura de la letra ′M′, escrita con estilo de fuente "normal" de tamaño 12, y a la derecha, se muestra la misma letra con fuente "cursiva" de tamaño 16. ¿Podrías encontrar una matriz que transforme la ′M′ en la letra de la derecha?

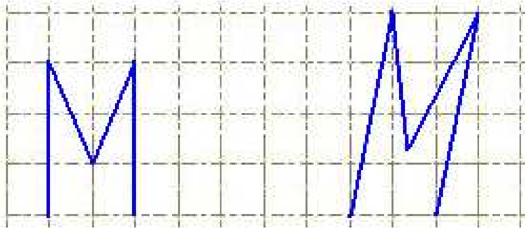

Figura 21. La letra M escrita en dos fuentes y tamaños diferentes

Franco parte de una estrategia general para resolver el problema: obtener información en el registro gráfico de un par de vectores y sus imágenes para luego convertir representaciones gráficas al registro algebraico y resolver sistemas de ecuaciones con cuyos resultados se obtendrían las entradas de la matriz transformación. En general, la estrategia que Franco siguió era la correcta para resolver el problema. Sin embargo, al principio de su solución tuvo problemas al mezclar los registros gráficos.

Franco inicia la solución del problema seleccionando dos vectores de la letra M, uno vertical hacia arriba y otro diagonal como se ve en la Figura 22. La mezcla de registros ocurre cuando *lee* las coordenadas de los vectores; Franco interpreta al vector vertical como (0,3) y al diagonal como (1,-2). Esta interpretación nos lleva a pensar que Franco se permite leer coordenadas como en el registro cartesiano y al mismo tiempo interpretar las flechas con respecto a su punto inicial y final. Interpreta a dos puntos distintos como si ambos fueran el origen y así lee de manera independiente las coordenadas de cada flecha.

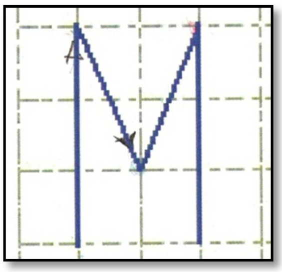

Figura 22. Representación de vectores en la letra M de Franco

De esta manera, la mezcla de registros que utiliza Franco no le permite resolver el problema, pues tendría que haber mantenido el origen fijo como punto de referencia para obtener datos consistentes. La existencia de dos puntos origen le genera datos contradictorios que no pueden ser usados para resolver el problema ya que por separado, cada interpretación corresponde a una transformación lineal distinta.

6. Conclusiones

Después de estudiar los registros de representación usados por los estudiantes entrevistados notamos que la falta de consenso sobre los registros de representación del Álgebra Lineal genera problemas al analizar la información obtenida y para comunicar nuestros resultados. Al intentar compartir algunas de nuestras observaciones se volvió obvio que en la literatura no existe un acuerdo sobre los nombres y características de los registros de representación del Álgebra Lineal aunque se sigan las mismas definiciones propuestas por Duval; dichas variaciones en las interpretaciones de los registros generan diferencias significativas en el análisis de las producciones de los estudiantes.

Las aportaciones del presente estudio residen en la descripción sobre las reglas de formación y tratamiento en los diversos registros, particularmente en el registro gráfico y el registro matricial, los cuales no se reducen a su presentación estructural. Asimismo se ofrece por primera vez, una descripción para profundizar sobre los fenómenos de mezcla de registros, expresiones mixtas y sus implicaciones en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

En nuestras observaciones comprobamos que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente al presentársele alguna situación matemática, busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverlas. Sin embargo, el que resuelva alguna situación de manera satisfactoria no implica que tenga esta habilidad. Por ejemplo el estudiante Franco al solicitarle un ejemplo de Transformación Lineal responde con la transformación identidad, caracterizándola con $T(I)=I$ y comprobando algebraicamente las propiedades de la definición. Aunque el estudiante proporcionó una respuesta correcta, la pregunta no nos permite averiguar si el estudiante realiza o no una coordinación; simplemente pudo haber recordado un ejemplo trivial de Transformación Lineal.

Destacamos la importancia de analizar las producciones semióticas de los estudiantes junto con sus expresiones verbales, así como a través de preguntas de seguimiento para comprobar las hipótesis sobre lo que significa cada expresión aportada por ellos; de ahí la pertinencia de realizar un análisis a priori de las situaciones a presentar, que incluya la identificación de las variables visuales y unidades significantes en los registros, según sea el caso. Esta estrategia permitirá obtener un análisis más confiable sobre los conocimientos que poseen los estudiantes en función de las evidencias empíricas que podamos obtener.

Por otro lado, en algunas ocasiones se presentaron situaciones donde se muestra una gama de registros no coordinados, como fue el caso de Natalia al intentar proporcionar un ejemplo de Transformación Lineal. Su acercamiento incluye representaciones de varios registros pero no lo consideramos coordinación porque sólo está realizando conversiones entre los registros que se le ocurren, partiendo de la poca información que pudo obtener de la definición incompleta de transformación lineal que usa; esta definición le impide tomar en cuenta algunas unidades significantes y el no hacerlo implica no cumplir la condición principal para la coordinación. Más adelante, dando un ejemplo de transformación no lineal, ella intenta coordinar los registros gráfico cartesiano y el algebraico para que su respuesta sea más clara que con sólo la expresión $T(x) = mx + b$. Sin embargo, debido a la mezcla de registros en la que cae, su respuesta queda opacada por las representaciones no válidas obtenidas de una conversión fallida en su intento de coordinar los registros, haciendo parecer que no tenía un significado claro de transformación no lineal, aunque el principio de su explicación (la ecuación) es una respuesta aceptable. De hecho, Natalia tiene un significado más desarrollado de transformación no lineal que de lineal, lo cual se observa comparando su definición de transformación lineal con el ejemplo de transformación no lineal.

Duval (2006) afirma que es primordial para el aprendizaje matemático no confundir un objeto con alguna de sus representaciones; paralelamente, en esta investigación afirmamos que también es importante no mezclar los registros mismos. La mezcla de registros que observamos surgió por no mantener presente las propiedades del registro en el que se pretendía trabajar, tratando de usar conjuntamente propiedades de otro registro con características similares, al parecer inconscientemente. Identificamos a la mezcla de registros como un problema importante porque no sólo inhibe la coordinación, obstruye la exteriorización de las ideas y la interpretación de representaciones; provoca además la imposibilidad de las conversiones y que no se pueda estimar de manera correcta la conveniencia de usar un registro u otro.

Observamos que la coordinación favorece la solución eficiente de situaciones matemáticas, mas no la garantiza y en algunos casos ni siquiera es necesaria. Las soluciones algorítmicas de problemas prototipo en la enseñanza mono-registro son un caso claro de esta situación. La importancia mayor de la coordinación según la teoría es para la aprehensión conceptual.

Después de haber observado a estudiantes que han pasado por un proceso de instrucción, nos surgen algunas inquietudes, las cuales merecen una investigación propia.

¿En el contexto de Transformaciones Lineales, cómo se puede desarrollar la coordinación de registros?

¿Cómo se puede evitar la mezcla de registros?

¿A parte de la conversión qué hay que desarrollar para lograr la habilidad de la coordinación?

Las respuestas a estas preguntas contribuirán a mejorar teoría al esclarecer las relaciones entre la coordinación de registros y el aprendizaje conceptual; asimismo facilitará el desarrollo de propuestas de enseñanza que generen comprensión integrativa.

Referencias

DORIER J. L. & SIERPINSKA A. (2001), Research into the teaching and learning of Linear Algebra, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (Ed. Holton), 255-273, Kluwer Academic Publishers.

DREYFUS T., HILLEL J. & SIERPINSKA A. (1999), Cabri based Linear Algebra: Transformations, en *European Research in Mathematics Education I: Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Ed. Schwank), **1,** 209-221.

DUVAL R. (1993), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Ed. Hitt), 173-201, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France; México: Grupo editorial Iberoamérica.

DUVAL R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

DUVAL R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61.1-2**, 103-131.

DUVAL R. (2008), Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics, en *Semiotic perspectives in the teaching and learning of mathematics series. Semiotics in Mathematics Education, Epistemology, History, Classroom, and Culture* (Eds. Radford, Schubring & Seeger), 39-63, Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

GROSSMAN S. (2008), *Álgebra Lineal*. México: Sexta Edición, McGraw-Hill Interamericana.

HOFFMAN K. & KUNZE R. (1973), *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

PAVLOPOULOU K. (1993), Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation, *Annales de didactique et de sciences cognitive* **5**, 67-93.

POOLE D. (2007), *Álgebra Lineal: una introducción moderna*. México: Thomson Editores.

RAMÍREZ O. & OKTAÇ A. (2012), Modelos intuitivos sobre el concepto de Transformación Lineal. La didáctica de la Matemática: Enfoques y problemas. *Colloque Hommage à Michèle Artigue*. DIDEROT, París.

ROA-FUENTES S. & OKTAÇ A. (2010), Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **13.1**, 89-112.

SOTO J. L. (2003), *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R^2 y R^3*, Tesis doctoral, Cinvestav - IPN, México.

SOTO J. L., ROMERO C. F. & IBARRA S. E. (2012), El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra, en *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (Eds. Hitt & Cortés), 38-49, Quebec, Canada, Loze-Dion éditeur.

WAWRO M. (2009), Task design: Towards promoting a geometric conceptualization of linear transformation and change of basis, *Twelfth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education,* Raleigh, NC.

OSIEL RAMÍREZ SANDOVAL
Cinvestav-IPN, México y UACJ, México
osiel.ramirez@uacj.mx

CÉSAR F. ROMERO FÉLIX
Cinvestav-IPN, México
cromero@cinvestav.mx

ASUMAN OKTAÇ
Cinvestav-IPN, México
oktac@cinvestav.mx