MARIA DEL ROCIO JUAREZ, ADELINA ARREDONDO & FRANÇOIS PLUVINAGE

ETUDE COMPAREE DE LA FORMATION INITIALE DE PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES EN FRANCE ET AU MEXIQUE

Abstract. Comparative Study of Pre-service Mathematics Teacher Education in France and Mexico. This paper presents a comparative study of mathematical and pedagogical competencies that prospective teachers of mathematics can acquire in France and Mexico. In order to identify these competencies, a questionnaire was designed on the basis of common knowledge and skills coming out from curriculum and national proofs. The observed results suggest some possible ways in order to improve teacher education in both countries.

Résumé. Cet article présente une étude comparée des compétences disciplinaires et pédagogiques acquises par de futurs professeurs de mathématiques en France et au Mexique. Un questionnaire a été construit sur la base de connaissances communes aux deux pays, identifiées dans leurs programmes scolaires et leurs épreuves nationales des concours de recrutement des professeurs. L'étude s'appuie en particulier sur les réponses à ce questionnaire données dans deux groupes d'étudiants, l'un français et un mexicain. Il apparaît que les étudiants des deux groupes ont des motivations assez semblables mais des trajectoires de formation différentes. Les français ont moins de connaissances pédagogiques mais manifestent une plus grande maturité mathématique que les mexicains, à relativiser toutefois par le fait que ces derniers ne sont pas préparés à enseigner jusqu'au baccalauréat, mais seulement jusqu'en neuvième année de la scolarité (élèves de quinze à seize ans).

Mots-clés. Etudes comparées, Formation initiale des enseignants, Enseignement du second degré, Compétences mathématiques, compétences pédagogiques.

Resumen. El objetivo del presente trabajo es mostrar algunos resultados obtenidos en un estudio comparado sobre las competencias disciplinares y pedagógicas de las matemáticas que han adquirido los futuros profesores de matemáticas en Francia y en México durante su formación inicial. Para identificar las competencias que adquirieron los futuros profesores al llegar a la parte final de su formación, se diseñó un cuestionario a partir de un denominador común identificado en los programas y las pruebas nacionales de oposición a las que se deben someter los estudiantes de ambos países al llegar al proceso final de su formación.

Introduction

Au vu de résultats d'élèves jugés faibles, tels ceux qui apparaissent dans le rapport pour le Mexique sur l'évaluation internationale TIMSS de 1995 (Backhoff & Solano, 2003), les autorités du système éducatif mexicain ont reconnu, il y a de cela plusieurs années, une situation difficile de l'enseignement des mathématiques

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 251 - 283.

dans le second degré (au Mexique, ce niveau est dit moyen – *nivel medio*, la préparation du baccalauréat correspondant à un niveau plus élevé – *nivel medio superior*). Par ailleurs, des articles de chercheurs, tels Sáenz (2007), Rico (2008) et Vaillant (2009), mentionnent qu'au terme de leur formation initiale de professeurs de mathématiques, les étudiants présentent des déficiences sur des compétences mathématiques qui devraient être acquises dans les institutions de formation des enseignants. Nous entendons ici par compétence mathématique la capacité à raisonner mathématiquement, à poser et résoudre des questions et à appliquer un mode de pensée mathématique à la résolution de problèmes de la vie réelle. C'est précisément ce que les enquêtes internationales PISA cherchent à cibler chez les jeunes en fin ou au sortir de la scolarité de base, soit à l'âge de 15 ans.

Quelles compétences en mathématiques les futurs professeurs de cette discipline doivent-ils acquérir dans les pays qui obtiennent de bons résultats dans les épreuves standardisées telle PISA ? Comment les plans de formation des futurs professeurs de mathématique, en France et au Mexique, favorisent-ils l'acquisition de compétences mathématiques ? Quelles places respectives les compétences disciplinaires et les compétences pédagogiques occupent-elles dans le parcours de formation de professeurs de mathématiques en France et au Mexique ?

Des réponses à de telles questions peuvent provenir d'études comparées de la formation, lesquelles ont tenu un rôle stratégique dans le système éducatif en incitant à des améliorations tant de l'enseignement mathématique que de la formation des enseignants de mathématiques (Arredondo & Juárez, 2011).

Un objectif de la présente étude est ainsi de montrer une comparaison des compétences mathématiques acquises par les futurs professeurs de mathématiques en France et au Mexique, lors de leur formation initiale d'enseignants. Pour ce faire, la méthodologie utilisée a consisté en la consultation, la sélection, l'examen, l'analyse et la comparaison des parcours de formation des futurs professeurs de l'enseignement du second degré en France et au Mexique. Pour effectuer de manière précise l'analyse de ces parcours, les unités qui les composent ont été réparties en trois catégories : connaissances générales, mathématiques en tant que telles, enseignement des mathématiques.

De manière à identifier les compétences disciplinaires et pédagogiques propres aux mathématiques acquises en fin de formation théorique, un questionnaire a été élaboré sur la base de critères communs, identifiés dans les épreuves des concours nationaux de recrutement organisés dans chacun des deux pays. Les catégories d'analyse constitutives du questionnaire ont été fondées sur la proposition de Godino (2009) pour l'évaluation des connaissances et compétences professionnelles acquises par le futur professeur de mathématiques de l'enseignement du second degré lors de son parcours de formation. Le questionnaire qui fut élaboré a été révisé par des spécialistes de l'enseignement des mathématiques et des formateurs d'enseignants, tant du côté français que mexicain. Il a ensuite été appliqué à deux groupes d'étudiants en fin de leur formation théorique en vue de l'enseignement des mathématiques: en France, un groupe de préparation au CAPES (Certificat d'Aptitude à l'Enseignement Secondaire) de l'Université de Paris 7-Diderot, dont les résultats au niveau national sont habituellement bons, et au Mexique, un groupe de l'École Normale Supérieure de l'État de Mexico, institution également bien placée du point de vue de la réussite aux concours de recrutement des professeurs. Notamment, lors de l'année universitaire 2010-2011, les taux de réussites à ces concours des deux institutions retenues furent les plus élevés dans leur pays respectif.

Des raisons de choisir la France et le Mexique pour une étude comparée

Comme nous l'avons dit en introduction, la présente étude a notamment été motivée par des préoccupations qui ont été exprimées au sein du système éducatif mexicain. Pour plus de précisions quant au bien-fondé de ces inquiétudes, nous avons pris en compte les résultats des enquêtes internationales standardisées PISA. Le rapport de l'OCDE sur les résultats en mathématiques de l'enquête PISA 2012 dans soixante-quatre pays (OECD, 2013), place le Mexique en cinquante-deuxième position. On trouve en tête du classement des pays qui ont peu de points communs avec le Mexique : Shanghai, Singapour, Hong-Kong, Corée, Chine, Taiwan, Japon, Liechtenstein, Suisse, Finlande. Pour sa part, la France, dont la culture est plus proche de la culture latine du Mexique et dont le système éducatif se rapporte à des modèles semblables, est classée dans la moyenne, au vingt-cinquième rang. Elle peut donc constituer pour le Mexique une référence intéressante pour une comparaison.

Il convient par ailleurs de noter que les résultats de l'enquête PISA de 2012 ont fait apparaître des glissements par rapport à l'enquête précédente, qui avait été réalisée en 2003. Ces glissements se sont produits dans un sens favorable pour le Mexique et défavorable pour la France (OCDE, 2013), rapprochant ainsi les résultats des deux pays. Pour le Mexique : augmentation du score global en mathématiques de 28 points, soit l'une des plus fortes augmentation parmi les pays participants à l'enquête, ce score atteignant 413 points, soit une valeur encore inférieure à la moyenne des pays de l'OCDE qui est de 494 points, et réduction de l'écart des résultats entre jeunes de milieux sociaux avantagés ou non. Au contraire pour la France : baisse de 16 points du score global, qui s'est situé en 2012 à 495 points, donc dans la moyenne des pays de l'enquête, alors qu'en 2003 il était supérieur à cette moyenne, et augmentation de la proportion d'élèves en difficulté. Il convient de signaler que lors de cette période de référence 2003-2012, les systèmes éducatifs des deux pays ont évolué ; par exemple, une mesure prise en France a été la diminution de 2 heures de la durée hebdomadaire d'enseignement à l'école primaire, réduite de 26 heures à 24 heures[1]. Plus avant dans la présente étude, nous revenons sur celles des évolutions qui concernent la formation initiale des enseignants.

Un second critère de choix pour une étude comparée a été l'appartenance des deux pays à l'OCDE, ce qui est d'une très grande importance, car cela rend possible la consultation des bases de données statistiques et des indicateurs de développement élaborés par cet organisme, susceptibles de servir pour effectuer des comparaisons. Soulignons que l'OCDE offre aux gouvernements un cadre pour comparer des expériences politiques, chercher des réponses à des problèmes communs et considérer la coordination des politiques nationales.

Le troisième critère tient à la conception de l'École Normale Supérieure au Mexique, en charge de former les futurs enseignants de la scolarité dite de base (*educación básica*). Cette École a été pensée, créée et développée dans une large mesure en réplique au système français (Ducoing, 2004), cela même si les sous-systèmes de formation des enseignants qui enseignent des mathématiques empruntent dans les deux pays des chemins différents.

1. Formation initiale des professeurs en France et au Mexique : similitudes et différences

La France et le Mexique ont des caractéristiques qui leur sont propres en matière de formation d'enseignants de mathématiques. Du côté français, une réforme est en marche, avec la création en 2013 des Écoles supérieures du professorat et de l'éducation (ESPE), qui ont pris la relève des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM). Au Mexique, le régime actuel est en vigueur depuis 1999. Nous pointons tout d'abord les traits principaux des deux systèmes de formation, tels qu'ils fonctionnent actuellement ; nous examinerons ensuite ce qu'il en est des contenus d'enseignement.

Le tableau 1 ci-après met en regard les niveaux de scolarité et la formation des enseignants. On y remarque qu'en France, les enseignants de mathématiques se forment dans les ESPE et peuvent dispenser des cours aussi bien au Collège qu'au Lycée, tandis qu'au Mexique, les enseignants issus des Ecoles Normales Supérieures n'interviennent pas au niveau des Preparatorias (équivalentes aux Lycées). Pour simplifier, le tableau 1 ne présente que les filières d'enseignement général et technique les plus fréquentées, sans inclure des formations professionnelles courtes qui viennent après la scolarité obligatoire (exemple : en

[1] Voir Bulletin Officiel, BO 2002 hors-série n° 1 du 14 février et BO 2008 hors-série n° 3 du 19 juin, consultés à http://www.education.gouv.fr/bo/2002/hs1/default.htm et http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/MENE0813208A.htm.

France, il existe un concours spécifique de recrutement des professeurs de lycée professionnel).

France		Age en années des élèves accueillis	Mexique	
Formation des enseignants	Niveaux de scolarité		Niveaux de scolarité	Formation des enseignants
ESPE → CRPE (*) organisation par académie	Maternelle	Moins de 6	Kinder	Escuela Normal
	Ecole (5 années)	De 6 à 12	Primaria (6 années)	
ESPE → CAPES (**) ou Agrégation	Collège (4 années)	De 12 à 13		
		De 13 à 15	Secundaria (3 années)	Escuela Normal Superior
	Lycées (3 années)	De 15 à 18	Bachillerato ou Preparatoria (3 années)	Universités

Tableau 1. Enseignement et formation des enseignants en France et au Mexique
(*) CRPE : Concours de Recrutement des Professeurs des Ecoles
(**) CAPES : Certificat d'Aptitude au Professorat du second degré

Les étudiants français qui préparent la maîtrise *"Métiers de l´enseignement, de l´éducation et de la formation"* (MEEF) la présentent dans le contexte des ESPE. Parmi les unités qui constituent cette maîtrise, on trouve des modules consacrés à l'enseignement disciplinaire, les mathématiques dans le cas qui nous intéresse, ainsi que des modules d'initiation à la recherche, d'ouverture internationale, de mise en œuvre d'outils pédagogiques innovants. La formation inclut également la préparation aux concours nationaux de recrutement, comportant des épreuves écrites d'admissibilité suivies d'épreuves orales d'admission. Les candidats admis à l'issue de ces épreuves suivent une année de stage pratique, qui consiste un enseignement en responsabilité de neuf heures hebdomadaires et en l'élaboration d'un mémoire issu d'une réflexion sur la pratique enseignante ; ce stage est rémunéré comme un enseignement à temps complet (voir EDUSCOL, 2013).

Au Mexique, les institutions en charge de la formation des enseignants du secondaire sont les Ecoles Normales Supérieures du pays. La durée de formation est de quatre ans après le baccalauréat. A partir de la signature de l'Accord National de Modernisation de l'Education de Base (ANMEB, 1992) les programmes de la formation initiale des professeurs ont été modifiés. Ils comportent un tronc commun portant sur l'enseignement de base (préscolaire, primaire et secondaire) et une présence intense en classe pour observation et pratique. Il s'agit que l'enseignant domine les contenus fondamentaux et acquière les bases pédagogiques suffisantes pour la pratique dans le domaine de l'éducation.

A partir de 1996, la SEP (Secrétariat d'Education Publique, équivalent au Mexique du Ministère de l'Education Nationale en France), en coordination avec les autorités éducatives des États (semblables aux régions françaises, mais avec autonomie législative et exécutive), mit en marche le programme pour la transformation et le renforcement académique des Écoles Normales (PTFAEN), selon les quatre lignes d'action suivantes: modifications de programmes d'enseignement, formation du personnel enseignant des écoles normales, élaboration d'orientations et de normes pour la gestion institutionnelle et la régulation du travail académique, amélioration des installations et équipements des écoles normales. Le programme partait de l'idée que les écoles normales devaient continuer comme par le passé à former les maîtres de l'éducation de base, mais en répondant aux demandes sans cesse plus nombreuses et plus complexes, issues du besoin d'une éducation suffisante pour tous, de qualité de formation élevée et dont les bénéfices soient distribués équitablement (SEP, 1999).

Le plan de formation des enseignants du second degré est entré en vigueur en 1999 et n'a pas été réformé depuis cette date. Il a un caractère national et se distribue dans trois directions, qui sont : activités scolaires, activités d'approche de la pratique scolaire, pratique intensive en conditions réelles de travail. La formation vise à ce que les normaliens acquièrent la connaissance de l'élève du second degré ainsi que la pédagogie et la didactique d'une discipline. Pour obtenir leur titularisation, les élèves-professeurs en dernière année de formation doivent rédiger un mémoire, témoin d'une réflexion sur la pratique enseignante avec les élèves de l'enseignement du second degré. Leur formation achevée, les élèves-professeurs doivent également se présenter au concours d'accès au système éducatif national.

2. Comparaison des plans de formation initiale des professeurs de mathématiques en France et au Mexique

Pour identifier les similitudes et les différences dans les processus de formation des enseignants de mathématiques du secondaire dans l'un et l'autre pays, on a effectué une analyse comparée des résultats des formations initiales. Le tableau 2 présente les meilleurs scores obtenus localement dans les deux pays pour les candidats aux concours nationaux de recrutement de professeurs de mathématiques pour l'année scolaire 2010-2011.

France *(CAPES Externe de MATHÉMATIQUES. Sesión 2011)*				**Mexique (Résultats du concours national de recrutement 2011)**			
Académies	**Pré-sentés**	**Admissi bles**	**Reçus**	**Ecole normale**	**Pré-sentés**	**Admissi bles**	**Reçus**
Paris-Créteil-Versailles	**299**	**244 81.6%**	**104 35%**	**Normal Superior del Estado de México**	**30**	**26 86%**	**10 33%**
Lille	95	77 81%	44 46%	Normal Superior "Prof. Medrano R." del Estado de Chihuahua	29	17 58%	12 41%
Aix-Marseille	91	67 73.6%	33 36%	Centro de Actualización del Magisterio de Chilpancingo	24	16 66%	8 30%
Rennes	87	70 80.4%	36 41%	Normal Superior de Guanajuato	23	15 65%	9 39%
Bordeaux	84	73 86.9%	42 50%	Normal Superior de Chiapas	21	17 80%	10 47%

Tableau 2. Meilleurs résultats locaux en France et au Mexique des candidats aux concours nationaux 2010-2011 de recrutement de professeurs de mathématiques
Sources : *Ministère de l`enseignement supérieur et de la recherche* (2011) et SEP (2011)

Pour la France, notre analyse de la formation des professeurs de mathématiques s'est appuyée sur le C*ahier des charges du plan académique de formation 2012-2013* (précisant le plan de formation académique 2012-2013) mis en œuvre par l'Université de Paris Diderot-VII, laquelle appartient à l'Académie de Paris et organise la préparation aux concours pour les académies de Paris, Créteil et Versailles. Dans le cas du Mexique, le document analysé est le plan d'études 1999, pour la licence en éducation secondaire de spécialité les mathématiques pour l'enseignement.

Le programme de formation des futurs professeurs de mathématiques de France offre une formation à la fois professionnelle et disciplinaire à l'enseignement des mathématiques (collège et lycée) et comprend la préparation aux concours nationaux du CAPES et du CAFEP (enseignement professionnel). Cette formation permet aux étudiants d'acquérir une culture mathématique de base solide, adaptée aux besoins de l'enseignement secondaire et à l'évolution de ses contenus, et les prépare à enseigner les mathématiques à partir d'une première expérience d'enseignement et d'acquérir une culture plus approfondie sur le domaine de leur choix (histoire des mathématiques, didactique des mathématiques, ou diversification des pratiques professionnelles).

Le programme pour la formation des futurs enseignants de mathématiques du Mexique est divisé en trois domaines principaux: la formation disciplinaire, la formation didactique et la sensibilisation à la pratique scolaire. Pour les normaliens l'étude du contenu disciplinaire devrait être associée aux besoins, processus et formes d'apprentissage de leurs futurs élèves, en s'appuyant sur des activités didactiques spécifiques, des ressources pour l'enseignement et certaines pratiques et modalités d'évaluation.

De l'examen des deux documents précités résulte le constat de quelques aspects communs tels que par exemple, concernant les compétences professionnelles à acquérir en formation des futurs enseignants, le fait de dominer les objectifs et les contenus de l'enseignement secondaire, ainsi que celui de dominer la discipline. Une différence constatée dans les plans de formation est le total des crédits propres à chaque plan de formation.

Dans le cas de la France, il y a 180 crédits pour le premier cycle et 120 pour la maîtrise, soit un total de 300 crédits. Au Mexique le programme comprend 392 crédits pour la seule licence. En procédant à une analyse plus approfondie, on peut diviser le programme de chaque pays en sections de connaissances générales qui incluent les questions relatives à l'éducation, au système éducatif et aux sujets de l'éducation, en sections de mathématiques en tant que discipline et en sections portant sur l'enseignement des mathématiques. On est ainsi conduit au tableau 3.

France			
Total de crédits	Mathématiques	Enseignement des mathématiques	Connaissances générales
Licence (180)	135	6	39
Máster (120)	63	54	3
Total (300)	**198**	**60**	**42**
Pourcentages	**66%**	**20%**	**14%**

Mexique			
Total de crédits	Mathématiques	Enseignement des mathématiques	Connaissances générales
Licenciatura **Total (392)**	**63**	**105**	**224**
Pourcentages	**16%**	**26%**	**58%**

Tableau 3. Distribution des crédits de formation des professeurs de mathématiques en France et au Mexique

Sources. Données de la SEP, 1999 et du *Site de l'UFR de mathématiques de l'Université de Paris- Diderot, 2012*

Dans ce tableau 3, nous pouvons voir que le programme France privilégie la maîtrise des mathématiques, en allouant 66% de crédits à son étude, en plus des séances de préparation aux épreuves du CAPES, ce qui implique que pour devenir professeur de mathématique, il faut surtout être fort dans la discipline. La situation est différente en ce qui concerne le Mexique, car la préparation aux épreuves du concours de recrutement ne fait pas partie du programme; bien que celui-ci spécifie que les futurs enseignants possèdent une maîtrise du contenu de base de mathématiques, il alloue seulement 16% des crédits de formation à l'étude des mathématiques en tant que discipline, ce qui peut être vu comme une faiblesse du programme. Il vaut ainsi la peine de se pencher de plus près sur la formation, notamment mathématique, que reçoivent les futurs professeurs de mathématiques.

3. La formation spécifique des professeurs de mathématiques

Dans le cas de la France, la formation des professeurs de mathématiques a été traditionnellement orientée prioritairement, pour ne pas dire exclusivement, vers l'acquisition d'un solide bagage mathématique. On pourrait résumer cette orientation en disant qu'elle correspond à l'application rigoureuse, quoiqu'implicite, d'un principe que nous énoncerons comme suit.

Principe N(N+1) : Pour bien pouvoir enseigner les mathématiques à un niveau de scolarité N, il convient de résoudre aisément les questions du niveau (N+1).

Dans l'énoncé de ce principe, il convient d'entendre par niveaux de scolarité les grands niveaux répertoriés dans le tableau 1. Ainsi en application de ce principe un professeur des écoles (ou Primaria au Mexique) doit être à l'aise sur des exercices mettant en jeu des nombres négatifs, ou des problèmes nécessitant un recours à l'algèbre élémentaire, notions ou pratiques qui sont du niveau du second degré (Secundaria) et dépassent donc le niveau auquel il enseigne. De même, ce principe demandera à un professeur de Secundaria du Mexique, équivalent au collège en France, de résoudre sans difficulté des exercices du niveau baccalauréat.

En France dans la situation actuelle, le recrutement des professeurs est prévu pour tout l'enseignement du second degré, allant jusqu'au niveau du baccalauréat. Il y avait bien eu au moment de la création des Collèges d'Enseignement Général un corps de professeurs spécialisés pour ce niveau d'enseignement secondaire, mais ce corps a été mis en extinction par décret de décembre 2003. Aujourd'hui, l'application du principe N(N+1) pour le recrutement des professeurs de l'enseignement du second degré en France conduit donc, en l'absence de palier reconnu pour le niveau de la fin de scolarité obligatoire, à des exigences qui correspondent aux contenus mathématiques de la licence ou des classes préparatoires aux grandes écoles.

Or il y a une rupture dans l'enseignement du second degré, entre l'esprit et les contenus des mathématiques de la scolarité obligatoire et celles des lycées. Les premiers s'adressent de manière indifférenciée à l'ensemble de la population, et ont pour objectifs essentiels ceux de la formation de citoyens concernés et responsables, objectifs que nous avons déjà mentionnés à propos des évaluations internationales PISA. Les seconds portent la marque de futures orientations professionnelles des publics concernés. La rupture peut notamment être repérée par la considération de grands blocs homogènes du point de vue de leurs problématiques et leurs moyens d'expression, dénommés *strates* par Adjiage & Pluvinage (2012), la *strate algébrique* étant une cible (difficilement atteinte) de la scolarité obligatoire, alors que la *strate fonctionnelle* est réservée au lycée.

En vertu de ces considérations, il apparaît que les professeurs qui enseignent au niveau du collège français sont recrutés pour leurs connaissances mathématiques non pas selon le principe N(N+ 1), mais selon un principe N(N+2). Deux types d'effets négatifs peuvent en résulter :

- une insuffisance du nombre des candidatures par rapport aux besoins en enseignants, le niveau exigé pour le concours permettant de postuler avec de bonnes chances ailleurs que dans l'enseignement du second degré,
- un décalage créant des difficultés à s'adresser à un public de 11-15 ans, ce public étant souvent jugé par les professeurs plus difficile que les lycéens.

Dès la fin du 20^{e} siècle, plusieurs chercheurs français, tels Artigue (1995) et Chabanes (1996), ont décrit la formation des professeurs de mathématique en France et ont notamment pointé son manque de prise en compte des particularités d'élèves auxquels l'enseignement s'adresse. Les conditions actuelles ne font que renforcer ces observations.

Les contenus figurant dans la licence de mathématique (mathématiques pour l'enseignement) présentent beaucoup de points communs à travers toute la France : structures algébriques, fondements du calcul différentiel et intégral et de l'analyse, un peu de géométrie (cf. Dorier, 2007). A partir de la troisième année (maîtrise) des cours d'informatique sont donnés dans toutes les universités et les étudiants s'initient souvent à des programmes de calcul formel tels *Maple*, *Mathematica* et *Matlab*. Par contraste, les relations avec les autres disciplines, les applications et la modélisation, les statistiques, l'analyse numérique sont généralement absentes du programme de la licence et sont facultatives au niveau de la maîtrise.

Au Mexique, la formation des professeurs de mathématiques est dévolue aux Ecoles Normales Supérieures selon le plan d'études de 1999. Il y a un tronc commun de formation à l'Education de Base (premier et second degré), offrant les champs suivants de formation : une formation générale à l'Education de Base, une formation commune à toutes les matières de l'enseignement du second degré, une formation spécifique à chaque discipline, les mathématiques dans le cas qui nous intéresse. Les futurs professeurs sont censés acquérir les compétences et la sensibilité nécessaires à l'éducation d'adolescents, en plus de la capacité à mettre en œuvre les contenus de la discipline d'enseignement pour laquelle ils se forment.

Pour les futurs professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire au Mexique, l'objectif fondamental du plan d'études de la licence en éducation secondaire, du point de vue de la discipline d'enseignement, est le développement de capacités à manipuler en profondeur les contenus mathématiques de ce niveau. Ce n'est donc pas le principe N(N+1) qui s'applique, mais bien plutôt un principe NN', qui s'énonce comme suit.

Principe NN' : Pour bien pouvoir enseigner les mathématiques à un niveau de scolarité N, il convient de connaître les fondements mathématiques des contenus de ce niveau.

En nous exprimant en termes d'espaces de travail mathématiques considérés par Kuzniak (2011), nous dirons que ce principe conduit à attendre des professeurs à un niveau N qu'ils voient les contenus de ce niveau au sein d'une structure mathématique N' plus avancée que celle présentée à leurs élèves. Par exemple, on peut attendre en vertu de ce principe que le nom de Peano à propos des entiers naturels ne soit pas inconnu d'un professeur des écoles, ou qu'un professeur du niveau secondaire sache considérer la géométrie plane du point de vue des transformations (e. g. caractériser un parallélogramme non seulement comme un quadrilatère à côtés opposés parallèles, mais comme un quadrilatère ayant un centre de symétrie).

Du point de vue pédagogique, la formation vise à ce que les futurs professeurs de mathématiques sachent analyser les situations didactiques dont la mise en œuvre dans l'enseignement favorise l'acquisition par les élèves d'une connaissance qui ait du sens et soit fonctionnelle (SEP, 1999). La formation propre à la spécialité comprend quatorze cours de mathématiques sur les contenus et les compétences didactiques, chacun d'une durée moyenne de quatre heures hebdomadaires, à savoir :
- *introduction à l'enseignement des mathématiques,*
- *la pensée algébrique, les nombres et leurs relations,*
- *les figures géométriques et les corps,*
- *le plan cartésien et les fonctions,*
- *les processus de changement ou de variation,*
- *la mesure et le calcul en géométrie,*
- *les processus cognitifs et le changement conceptuel en mathématiques et en sciences,*
- *échelles et similitude,*
- *séminaire sur des thèmes choisis de l'histoire des mathématiques,*
- *séminaire de recherche sur l'enseignement des mathématiques,*

- *technologie et enseignement des mathématiques,*
- *la prévision et le hasard,*
- *saisie de données et traitement de l'information*.

Mais quelles compétences vont pouvoir résulter de l’application de ces principes et modalités de formation ? Rappelons qu’une compétence est plus qu’une somme de connaissances et savoir-faire, elle implique la capacité à répondre à des demandes complexes en mobilisant des ressources psychosociales dans un contexte particulier (OCDE, 2004). Que sont alors exactement des compétences en mathématique? Et quelles compétences sont attendues des enseignants de cette discipline?

Les compétences en mathématiques ont été considérées par l'Union européenne comme l'une des compétences clés pour le développement personnel, la citoyenneté active, l'inclusion sociale et l'employabilité dans la société de la connaissance du XXIe siècle. Le concept de compétence mathématique dépasse donc les compétences de base en calcul, et comprend une combinaison de connaissances, compétences et attitudes (EURYDICE, 2011). Au niveau international sont reconnues huit compétences mathématiques, qui sont les suivantes: utiliser des modes mathématiques de pensée, poser et la résoudre des problèmes mathématiques et avec les mathématiques, être capable d'analyser et de construire des modèles mathématiques, être capable de faire un raisonnement mathématique, gérer différentes représentations d’objets mathématiques, être capable de gérer le langage symbolique et les formalismes mathématiques, et être en mesure de s'approprier des outils mathématiques (Niss et Højgaard, 2011).

4. Une étude de cas sur des préparations à l’enseignement mathématique

Après notre étude comparative entreprise sur les documents qui régissent la formation des professeurs de mathématiques dans chacun des systèmes éducatifs propres aux deux pays, il vaut la peine de jeter un regard sur la réalité du terrain. Nous nous contenterons dans la présente étude d’obtenir une vision synthétique sur les publics en cours de formation, et notamment d’appréhender entre les deux pays quelques traits de similitude ou des particularités. L’application de questionnaires permet de recueillir des données provenant d’instruments que l’on peut considérer comme identiques. En effet, s’agissant de mathématiques et de leur enseignement, la langue utilisée est de peu d’importance pour l’expression des questions posées. Dans notre étude, celles-ci ont été des trois types:

- positionnement personnel, motivations et impressions des étudiants sur la formation en cours,
- exercices du champ didactique,

- exercices mathématiques.

Les deux premiers types ont été regroupés dans un même questionnaire. Pour le questionnaire de positionnement, motivations et impressions, il nous semble suffisant ici de citer les rubriques proposées, qui ont été les suivantes :

1. Trajectoire personnelle
2. Vécu de formation
3. Expérience personnelle en rapport avec l'éducation ou l'enseignement
4. Quelle image avez-vous de l'enseignement des mathématiques ?
5. Quels problèmes voyez-vous dans l'enseignement des mathématiques ?

En revanche, en annexe 1, nous reproduisons intégralement dans leur version française les deux exercices du champ didactique qui ont été posés.

Les exercices mathématiques, au nombre de quatre, ont constitué un second questionnaire, prévu pour une durée de passation de deux heures. Les énoncés en version française sont reproduits en annexe 2. Ci-après, nous présentons en premier lieu l'analyse a priori des exercices, puis l'application du questionnaire et l'analyse des résultats observés auprès des populations interrogées.

4.1 Analyse a priori des exercices proposés

Exercice D1

L'application du questionnaire dans lequel sont proposés *in fine* deux exercices de caractère didactique était prévue « papier-crayon », c'est-à-dire sans recours à des informations extérieures. Le premier exercice didactique fait simplement appel à une culture personnelle, en présentant des noms qui se sont illustrés par leur contribution à l'étude des phénomènes d'apprentissage ou d'enseignement. Plusieurs réponses peuvent être acceptées:

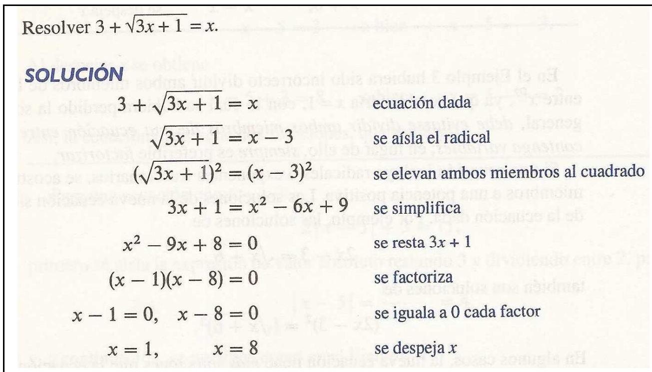
- pour Socrate, l'*ironie socratique* ou la *maïeutique,*
- pour Piaget, l'*épistémologie génétique* ou les *stades de développement,*
- pour Vygotsky (nom qui s'écrit aussi Vygotski), les *zones de développement* et notamment la *zone proximale de développement,*
- pour Brousseau, la *théorie des situations*, avec les dialectiques qui la sous-tendent, telle la *dialectique de l'action* ou celle de la *formulation*.

Nous ne ferons pas aux distingués lecteurs de cet article l'injure de détailler davantage.

Exercice D2

Le second exercice didactique correspond à une activité professionnelle pas toujours très prisée des enseignants, mais néanmoins nécessaire (n'est-ce pas, Socrate !) : la correction de réponses (écrites) d'élèves. Nous avons choisi une réponse donnée par un lycéen mexicain (élève de *preparatoria*) pour sa typicité et sa facilité d'adaptation au français : il a suffi de remplacer quelques expressions originellement en espagnol par leur équivalent français, le reste de la production étant présenté en écriture symbolique. L'exercice résolu par l'élève est une équation de la forme $\sqrt{A} = B$, où A et B sont des expressions contenant x.

Ce type d'équation est présenté dans des manuels scolaires, tel celui de Swokowski & Cole (1996). Nous reproduisons en figure 1 un extrait de la page 90 de ce manuel, avec en regard la traduction française des indications données. On remarquera que les auteurs ne précisent jamais le statut logique d'une ligne par rapport à celle qui la précède ; précisons pour le lecteur de cette étude qu'il s'agit toujours d'une équivalence SAUF pour la troisième ligne de la solution, consistant en une égalité qui est impliquée par la seconde mais ne lui est pas équivalente.



Resolver $3 + \sqrt{3x+1} = x$.

SOLUCIÓN

$3 + \sqrt{3x+1} = x$	ecuación dada
$\sqrt{3x+1} = x - 3$	se aísla el radical
$(\sqrt{3x+1})^2 = (x-3)^2$	se elevan ambos miembros al cuadrado
$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$	se simplifica
$x^2 - 9x + 8 = 0$	se resta $3x + 1$
$(x-1)(x-8) = 0$	se factoriza
$x - 1 = 0, \quad x - 8 = 0$	se iguala a 0 cada factor
$x = 1, \quad x = 8$	se despeja x

Equation donnée
On isole le radical
On élève au carré les deux membres
On simplifie
On ôte $3x + 1$
On factorise
On égale à 0 chaque facteur
On en déduit x

Figure 1. Reproduction de la p. 90 du manuel de Swokowski & Cole

Bien évidemment les auteurs du manuel n'en restent pas à ce qui est présenté en figure 1, ils poursuivent en s'appuyant sur une précision générale qu'ils ont formulée au préalable, à savoir que *quand on élève les deux membres à une puissance paire, il est nécessaire de vérifier les solutions.* En l'occurrence, cette vérification conduira à rejeter la valeur 1 comme solution et au contraire à accepter la valeur 8.

Une telle ligne de conduite préconisée par les auteurs permet d'éviter d'introduire des considérations et des notations logiques. La résolution d'une équation du type considéré est en effet possible par équivalence logique :

$$(\sqrt{A} = B) \Leftrightarrow \big((A = B^2) \wedge (B \geq 0)\big)$$, le symbole $\wedge$ signifiant « et ».

Mais les auteurs de manuels doivent juger trop complexe pour les élèves le symbolisme logique et en particulier une telle équivalence, car elle remplace une égalité par une égalité doublée d'une inégalité. Ce point mériterait toutefois réflexion, car il n'est pas difficile de comprendre que si deux quantités sont égales, leurs carrés le sont, mais que si les carrés de deux quantités sont égaux, les quantités peuvent être opposées.

Venons-en à présent à la correction demandée dans l'exercice D1. La résolution présentée suit très précisément la démarche du manuel que nous avons cité, mais omet la vérification préconisée dans le manuel. Celle-ci conduirait à rejeter la valeur 3. En effet, pour $x = 3$, $\sqrt{7-x} = \sqrt{4} = 2$, tandis que $x - 5 = -2$. Les deux nombres qui ont même carré ne sont pas égaux, mais opposés. Par ailleurs, l'attention de l'élève s'est portée sur l'inégalité $x \leq 7$ qui exprime que la racine carrée de $7 - x$ est définie, mais cette condition sera forcément remplie quand on égalera $7 - x$ à $(x - 5)^2$, c'est-à-dire un nombre positif. Il se peut d'ailleurs que la formulation de cette condition finalement inutile occulte aux yeux de l'élève l'inégalité qui seule importe : $x - 5 \geq 0$.

Quelle est alors la tâche du correcteur confronté à cette résolution ? S'il a lui-même résolu correctement l'équation, condition *sine qua non* pour faire ce travail, il se rendra compte du principal défaut de la réponse, qui est de ne pas avoir rejeté la valeur $x = 3$ comme solution. Ce défaut le conduira probablement à proposer une note de l'ordre de 3 sur le maximum de 5, car le reste est correct. Plus délicate est alors la décision concernant le commentaire à rédiger à l'intention de l'élève. D'une manière générale, les objectifs de tels commentaires sont doubles :

- justifier la notation aux yeux de l'élève concerné,
- lui donner l'occasion de s'améliorer.

Dans notre exemple, l'élève peut avoir l'impression d'avoir parfaitement résolu l'équation et il faut en conséquence qu'il comprenne pourquoi le correcteur ne lui a pas attribué la note maximum de 5 sur 5, mais seulement 3. Pour l'objectif de conduire l´élève à s'améliorer, des explications très détaillées ne sont peut-être pas ce qui est le plus approprié: d'une part, le paquet de copies, qui est la situation courante de correction, ne permet pas au correcteur de rédiger un « roman » pour chacune, mais pousse à la brièveté ; d'autre part, le commentaire ne peut pas être une répétition du cours, qui devrait avoir un caractère collectif dans la situation de classe, mais sera efficace s'il délivre un message qui se grave dans la mémoire de l'élève. En l'occurrence, nous pensons au contrôle, qui est une composante très importante de l'activité mathématique; on ne peut que conseiller aux professeurs d'inciter les élèves à contrôler leurs résultats systématiquement, pas seulement dans les conditions particulières signalées par les auteurs du manuel cité. En l'occurrence, un feed-back de type socratique pourrait être suffisant, sous la forme « Les valeurs obtenues sont-elles toutes solutions de l'équation donnée? » ou avec plus de précision « La valeur 3 est-elle solution de l'équation donnée? »

Exercice M1

Pour les exercices de mathématiques, l'usage des machines était explicitement autorisé. Le temps total de 2h15 pour la passation de ces exercices, soit une moyenne d'un peu plus de 30 minutes par exercice, peut être jugé suffisant. Pour le premier exercice, de multiples traitements sont possibles. Par exemple avec le logiciel GeoGebra, un tracé de quelques courbes de la famille $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax} - 3a$ dépendant du paramètre a permettait de répondre rapidement : Pour $a > 0$, la courbe ne coupe pas l'axe des x, donc l'équation n'a pas de solution ; pour $a = 0$ (voir Figure 2), l'équation admet tout nombre réel négatif comme solution (placer alors une croix dans l'avant-dernière ligne de la colonne) ; pour $a < 0$, la courbe coupe en un point l'axe des x, donc l'équation a une solution unique.

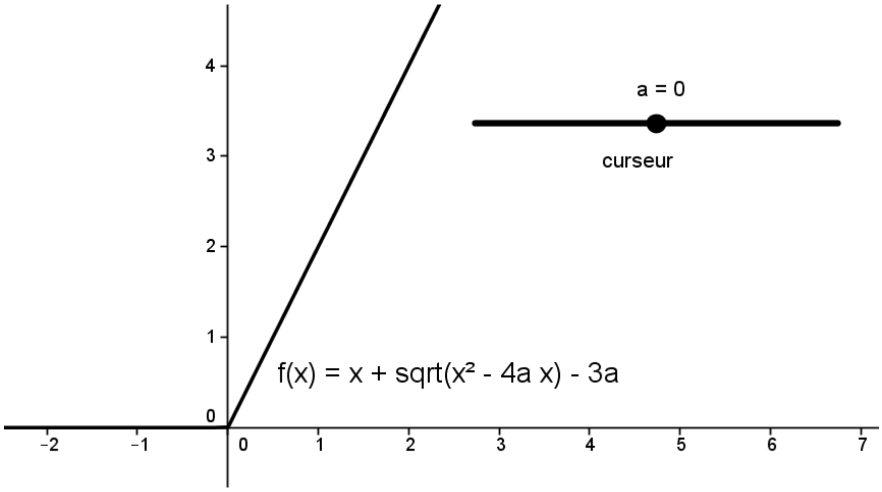


Figure 2. Traitement rapide de l'exercice M1 avec GeoGebra.

D'autres traitements sont possibles. Par exemple, avec le logiciel Derive, la commande SOLVE(√(x·(x - 4)) + x - 3, x, Real) renvoie la réponse "false", ce qui indique que l'équation proposée n'a pas de solution pour $a = 1$. Sans recourir à des TIC (calculatrice programmable ou ordinateur), on peut conduire une étude analogue à celle montrée dans l'exercice D2, en isolant le radical.

$x + \sqrt{x^2 - 4ax} = 3a$	L'équation donnée
$\sqrt{x^2 - 4ax} = 3a - x$	On isole le radical
$x^2 - 4ax = (3a - x)^2$	On élève au carré les deux membres
$x^2 - 4ax = 9a^2 - 6ax + x^2$	On développe le second membre
$2ax = 9a^2$	On simplifie et isole x

Sauf si a est nul, l'équation ne peut donc avoir pour solution que $x = 9a/2$. Et la vérification dans l'équation donnée conduit à écarter cette valeur comme solution si a est positif, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution dans ce cas.

Exercice M2

L'exercice porte sur une construction tout en présentant une figure achevée. Il faut donc la déconstruire, notamment en se représentant la situation initiale. L'énoncé aidait en indiquant « A partir de deux droites graduées de même origine ». Ces deux droites sont celles qui se coupent en O et portent les marques de graduation indiquant 1. Le segment joignant l'une de ces marques au point marqué *a* a été tracé ensuite, suivi pour conclure par la parallèle à ce segment qui va produire le résultat voulu *ab*, qui résulte de la propriété de Thalès : *ab* est à *a* comme *b* est à 1.

La construction de Descartes a le gros intérêt, contrairement à la multiplication *ab* vue comme aire d'un rectangle de côtés *a* et *b*, de présenter le produit comme une longueur, autrement dit un objet mathématique qui a la même dimension que chacun de ses facteurs. De plus la construction est opérante pour les nombres négatifs et fournit alors directement la règle des signes, habituellement si difficile à faire comprendre aux élèves. La seule propriété que la construction met moins en évidence que le produit comme aire de rectangle est la distributivité du produit sur la somme. La figure 3 illustre cette propriété, que l'interprétation de la somme comme translation (la flèche qui va de O à *b* est égale à celle qui va de *c* à *b* + *c*) et l'observation de la congruence des deux triangles grisés permettent de justifier.

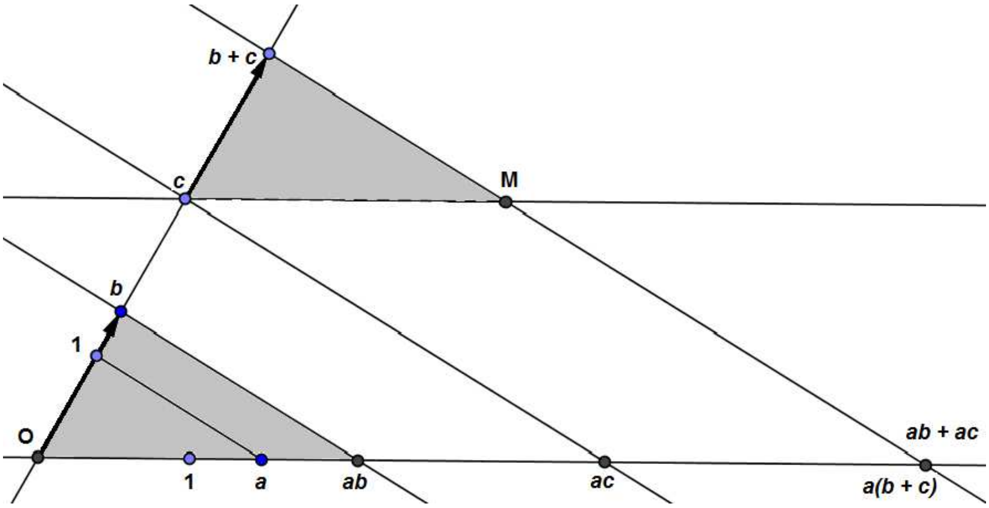


Figure 3. Distributivité $a(b+c) = ab + ac$ dans la construction de Descartes

Exercice M3

L'exercice demande d'obtenir en géométrie analytique le lieu de l'orthocentre d'un triangle ABC dont les sommets A et B sont fixes et C décrit une parallèle à la droite AB. Il paraît naturel pour cette situation de choisir l'axe des *x* confondu avec la droite AB. La hauteur du triangle ABC issue de C est alors parallèle à l'axe des *y*, donc a pour équation $x = t$, où t désigne l'abscisse de C.

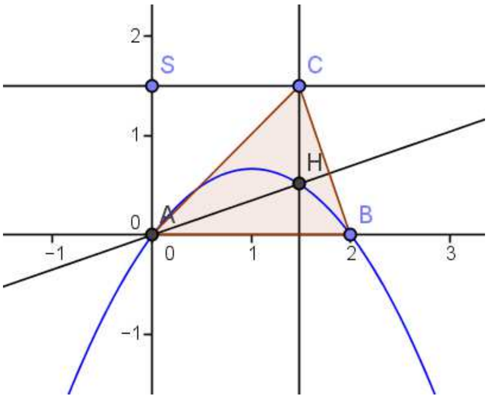


Figure 4.

Cela conduit, malgré la symétrie de rôle de A et B, à privilégier l'un de ces sommets, par exemple A, en choisissant en ce point l'origine des axes. Dans ces conditions (Figure 4), les sommets ont respectivement pour coordonnées A(0, 0), B(b, 0), C(t, c), et la droite BC a pour pente c/(t – b). Il en résulte que sa perpendiculaire en A a pour équation : y = (b – t)x/c. Les coordonnées de l'orthocentre H sont ainsi (t, (b – t)t/c), et le lieu de H est donc la parabole d'équation y = (b – x)x/c.

Exercice M4

L'exercice M4 porte sur le jeu de la « course à 20 », lequel a pu être utilisé à l'école primaire au profit d'un apprentissage de la division. Ici, on ne recherche pas le gain, mais on cherche le nombre de parties possibles. Même si la situation présentée est finie, elle échappe par sa taille à des résolutions par comptage direct. Deux pistes différentes peuvent être suivie pour obtenir le nombre de parties possibles de « course à 20 » : l'une relève d'une démarche combinatoire, l'autre d'une démarche inductive.

La démarche combinatoire consiste à considérer d'abord la plus longue partie possible, celle où l'on n'ajoute que 1 à chaque coup. Cette partie est de 20 coups. Ensuite, on considère les parties dans lesquelles on aura ajouté 2 lors de l'un des coups. Ces parties comportent 19 coups et on a dit 2 à l'un quelconque de ceux-ci. Elles sont donc au nombre de 19. Les parties en 18 coups sont au nombre de $\binom{18}{2}$, le nombre de possibilités de choisir 2 éléments parmi 18. De même on obtiendra $\binom{17}{3}$ parties en 17 coups. Et ainsi de suite, jusqu'à l'unique partie en 10 coups où l'on ajoute 2 chaque fois. D'où le nombre total p(20) de parties de « course à 20 » :

$$p(20) = \sum_{k=0}^{10} \binom{20-k}{k}.$$

La démarche inductive consiste à observer que l'on dira 20 soit après avoir dit 19, soit après avoir dit 18. Autrement dit, si p(n) désigne le nombre de parties possibles de course à n, on obtient la relation p(20) = p(19) + p(18), et plus généralement p(n) = p(n – 1) + p(n – 2). On reconnaît là la relation classique des suites de Fibonacci. Ci-après nous reproduisons les sorties Excel correspondant à chacune de ces deux démarches, avec les combinaisons $\binom{20-k}{k}$ pour k allant de 0 à 10 dans la démarche combunatoire et les nombres p(n) de parties possibles de course à n pour n allant de 1 à 20 dans la démarche inductive, le résultat final étant 10946.

Démarche combinatoire

0	1
1	19
2	153
3	680
4	1820
5	3003
6	3003
7	1716
8	495
9	55
10	1
Somme	10946

Démarche inductive

1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597
17	2584
18	4181
19	6765
20	10946

Remarques sur les compétences sollicitées par les exercices proposés

Les exercices proposés ont été choisis pour être comparables aux exercices posés lors des épreuves de recrutement des professeurs, que ce soit en France ou au Mexique. Nous avons aussi voulu qu'ils soient illustratifs des principes N(N+1) ou NN' que nous avons présentés dans le § 3. Nous avons considéré pour ce faire que N est le niveau du collège français ou de la *secundaria* mexicaine et N+1 le niveau du baccalauréat (*preparatoria* au Mexique), ce qui nous a conduit à ne pas retenir d'exercices de niveau proprement universitaire.

L'exercice le plus en conformité avec le principe N(N+1) est l'exercice M3, la parabole lieu de l'orthocentre d'un triangle, car c'est un exercice qui serait très normalement soumis à des lycéens préparant le baccalauréat, simplement peut-être en précisant le repère à utiliser, plutôt que d'en confier le choix aux personnes interrogées. Des quatre exercices mathématiques, le plus illustratif du principe NN' est M2, le produit par la construction de Descartes, qui ne mobilise aucune connaissance dépassant le niveau de la scolarité obligatoire, mais amène à approfondir le concept de produit de nombres beaucoup plus que cela est fait dans le discours mathématique scolaire. Pour les exercices M1 et M4, l'informatique représente dans chaque cas un apport intéressant, mais de manière très différente pour les deux exercices: Pour M4 (les parties de course à 20), l'informatique vient après la résolution: ce n'est qu'une fois une démarche trouvée (combinatoire ou inductive) que l'outil calcul opérera sur les objets déterminés. Et l'obtention de l'une ou l'autre démarche suppose une bonne culture mathématique, faute de laquelle on n'a aucune chance de faire surgir les objets mathématiques pertinents. Pour M1 au contraire, nous avons vu que l'informatique peut fournir des résultats expérimentaux qui permettent de répondre sans avoir complètement conduit l'étude mathématique; au passage, notons que cette réduction est une critique fréquemment exprimée par les détracteurs de l'utilisation de l'outil informatique dans l'enseignement.

Au total, mise à part l'absence d'un exercice qui demanderait de produire une démonstration, les quatre exercices retenus constituent un échantillon qui représente bien les divers types de démarches mathématiques que l'on peut attendre de professeurs.

4.2 Application des questionnaires, population interrogée et résultats

Les questionnaires qui viennent d'être présentés ont été appliqué en 2012 et 2013 à deux groupes d'étudiants en formation de professeurs de mathématiques, l'un au Mexique et l'autre en France, chaque groupe recevant évidemment les questionnaires dans sa langue. Les réponses obtenues pour le groupe français, constitué d'étudiants de la préparation de Paris 7-Diderot, ont été au nombre de douze et pour les étudiants de l'Ecole Normale Supérieure de l'Etat de México de dix-sept. Ils s'agit donc de petits effectifs, qui conduisent à situer la présente étude comme une étude de cas et à l'analyser comme telle, même si l'on peut considérer que les deux groupes ont un certain caractère de représentativité du public en formation de professeurs de mathématiques, compte tenu des sélections auxquelles ce public est soumis.

Sans entrer dans les détails, nous pouvons indiquer que les questionnaires de positionnement et de motivations ont conduit à des résultats assez voisins entre les deux pays: on s'y oriente vers les métiers de l'enseignement pour des raisons similaires. Mais les trajectoires d'études sont distinctes: Les étudiants français ont passé une licence de mathénatiques avant de s'inscrire à l'ESPE, les étudiants mexicains sont entrés à l'École Normale Supérieure à l'issue d'études de type lycée, ne leur donnant que des connaissances très basiques de mathématiques. Leur formation à l'École, ainsi que nous l'avions vu dans le tableau 3, n'a ensuite comporté que 16% de crédits pour l'étude des mathématiques, alors que 66% des crédits de formation sont dévolus aux mathématiques dans le programme français. La formation mathématique des mexicains est donc nettement moins poussée que celle des français, alors qu'ils bénéficient en revanche de plus de formation pédagogique et didactique.

Ces contrastes se retrouvent dans les réponses aux deux questions didactiques des exercices D1 et D2: Des 17 étudiants mexicains, 12 peuvent associer des concepts didactiques aux personnages indiqués, ce que seuls 2 des 12 étudiants français savent faire. Et en contraste, si moins d'un étudiant du groupe mexicain sur quatre s'est rendu compte de l'erreur présentée par la copie d'élève de l'exercice D2, deux étudiants français sur trois l'ont repérée (voir Figure 5). Un tel résultat serait inquiétant pour la formation mexicaine, si le sujet de la copie présentée dans l'exercice D1, au lieu d'être de *preparatoria* (lycée), était de *secundaria* (collège).

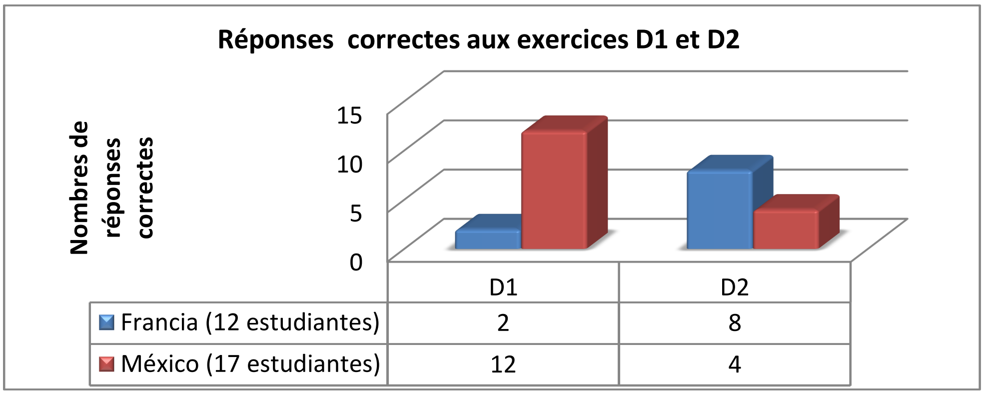


Figure 5. Réponses aux questions didactiques

Pour les résultats aux exercices mathématiques, nous nous sommes rapportés à des critères suffisants par rapport à l'idée de compétence qui nous intéresse, donc des réussites au moins partielles, sans exiger des réussites totales. C'est ainsi que pour M1, les réponses correctes seront suffisantes, sans exigence de justification complète, que pour M2, nous compterons comme réussite une réponse correcte à la première question, sans nous inquiéter des suivantes, et que pour M3 la reconnaissance d'une parabole sera suffisante, même si son équation n'est pas donnée.

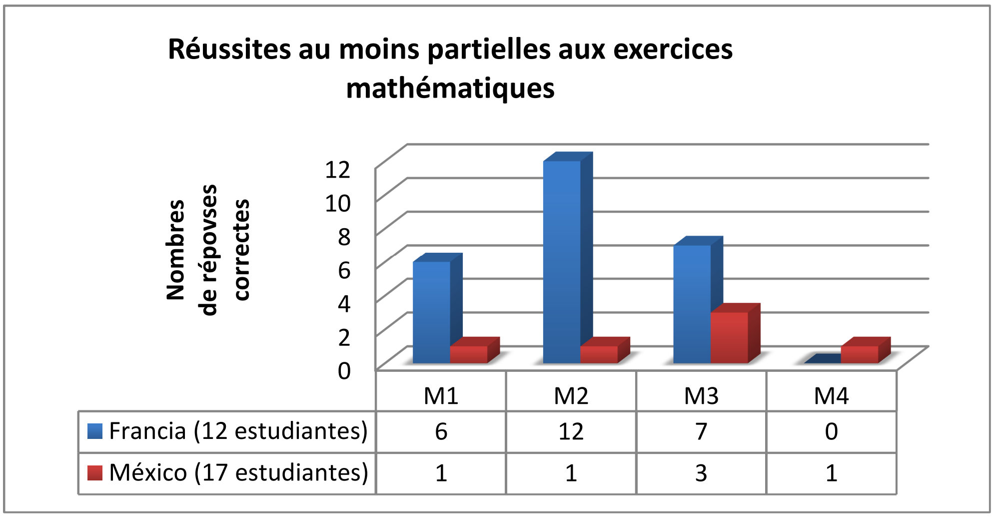


Figure 6. Réussites au moins partielles aux exercices mathématiques proposés

Les résultats apparaissent sur le Figure 6. Pour les étudiants du groupe français, la gamme de réussite est complète: réussite de tous pour M2, d'environ la moitié pour M1 et M3, échec total pour M4. Et, comme on pouvait s'y attendre compte tenu de leur programme de formation, les résultats des étudiants du groupe mexicain sont faibles sur les questions qui dépassent le niveau de la *secundaria*. Seul l'exercice M3 (lieu d'un orthocentre) a amené la plupart des étudiants de ce groupe à se lancer dans des recherches, mais le succès n'est au rendez-vous que pour un étudiant sur quatre.

Un résultat dont l'ampleur nous a frappés est celui obtenu sur M2: Ont réussi cet exercice tous les étudiants du groupe français et un seul du groupe mexicain. Or, nous l'avons dit, cet exercice ne mobilise aucun savoir qui dépasse le niveau de la scolarité obligatoire. Un étudiant mexicain nous donne une piste possible pour expliquer ce phénomène, en déclarant (nous traduisons ses propos) : « *Je n'ai pas réussi à interpréter le schéma. Je ne l'avais pas vu auparavant.* » C'est peut-être alors non pas tant les connaissances mathématiques que la maturité mathématique qui pourrait faire défaut aux étudiants mexicains. Et l'acquisition d'une telle maturité pourrait être favorisée sans doute par une certaine augmentation des crédits affectés à la formation proprement mathématique, mais aussi par la mobilisation dans cette formation du principe N(N+1) plutôt que de privilégier presque exclusivement le principe NN'. En effet, le premier, en ne se focalisant pas sur les contenus à enseigner, pourrait favoriser l'acquisition de davantage d'autonomie dans l'activité mathématique.

En annexe 3, nous avons reproduit deux réponses à l'exercice M3 et deux réponses à l'exercice M4, chaque fois une de chaque pays. Dans la réponse de l'étudiant français à M3, on peut voir une caractéristique qui est souvent présente, mais n'est pas visible sur les seuls résultats : une tendance à répondre rapidement. Pour l'étudiant français qui a produit la réponse à M3, le recours à Geogebra lui a permis d'obtenir rapidement le tracé du lieu cherché. Il ne s'est pas prononcé pour reconnaître dans ce tracé une parabole. Il se trouve qu'avec Geogebra, le tracé du lieu est malheureusement inopérant pour une parabole: Le logiciel ne se prononce pas sur sa nature et, si l'on prend cinq points du lieu obtenu et que l'on demande au logiciel la conique définie par ces cinq points, il retournera une équation approchée, mais celle-ci correspondra immanquablement à une conique autre qu'une parabole (notre essai nous a retourné une ellipse). Remarquons au passage que le logiciel Cabri est plus performant ici, il donne l'équation du lieu, alors qu'il faut reprendre toute l'étude avec Geogebra et passer par la géométrie analytique que l'énoncé suggère. L'étudiant ne l'a pas fait. Pour cet exercice M3, une majorité des étudiants français a eu recours à un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra), mais ce n'est donc pas une garantie de réussite.

La réponse reproduite à ce même exercice M3 de l'étudiant mexicain est incorrecte, mais pour une autre raison que le fait d'aller vite. L'étudiant n'a pas eu recours à l'informatique, il a procédé à des constructions « papier-crayon ». Signalons au passage que le recours à la technologie a été, d'une manière générale, bien moindre pour les étudiants du groupe mexicain que pour ceux du groupe français. Suite aux quelques tracés effectués, l'étudiant exprime l'idée que le lieu cherché est un demi-cercle, peut-être en référence à mauvais escient au théorème de Thalès sur l'angle droit, parce que qui dit hauteur dit angle droit. On peut avancer que ce type d'erreur correspond à une connaissance insuffisamment assimilée.

La tendance des étudiants français à répondre vite est probablement favorisée par la nature des épreuves des concours français, dont la longueur exige en retour une bonne vitesse de résolution. Si l'on prête attention aux manifestations de ce phénomène, on peut facilement en repérer parmi les réponses données. Par exemple, une réponse (non reproduite) d'un étudiant français à l'exercice M1 consiste à obtenir avec la machine des tracés pour les deux valeurs 1 et -1 du paramètre a. Il en déduit des réponses correctes pour $a > 0$ et $a < 0$. Mais pour $a = 0$, il ne se réfère pas à un tracé et conclut sans argument à l'appui que tout réel est solution, ce qui est faux. Ici, la vitesse est ainsi devenue de la précipitation. Sans doute l'entraînement à travailler vite est-il bon pour la formation de futurs mathématiciens, mais en est-il de même pour celle de futurs professeurs ?

Les réponses à M4 reproduites en annexe 3 renforcent, si besoin était, les propos qui précèdent. Il s'agit des réponses fournies par un étudiant français et un étudiant mexicain, qui sont tous deux entrés dans la démarche combinatoire. Mais si l'étudiant mexicain a conclu correctement, l'étudiant français a commis des erreurs par manque de soin, en allant vite.

Conclusion

Pour limité qu'il soit, le regard que nous avons porté sur les formations initiales de professeurs de mathématiques dans les deux pays met en évidence des pistes de réflexion pour de possibles améliorations, pouvant s'appuyer sur des recherches expérimentales. L'étude comparée a en effet conduit à des questionnements qui n'auraient pas surgi dans des études séparées.

Du côté français, le dogme de la formation unique pour les professeurs enseignant tant au collège qu'au lycée mérite d'être questionné. Ce dogme avec pour conséquence la quasi exclusivité accordée au savoir et au savoir-faire mathématique pour le pré-recrutement (le concours du CAPES) risque d'avoir des effets négatifs surtout pour l'enseignement au collège français. En effet l'application du principe N(N+1) s'est transformée *de facto* en un principe N(N+2) pour les professeurs qui enseigneront au collège français, avec le risque pour eux de se couper de leur public. Par ailleurs, pour donner un exemple pédagogique, connaître Socrate au moment de corriger une copie de mathématique n'est sans doute pas inutile.

De côté mexicain, l'organisation générale semble satisfaisante, et d'ailleurs les résultats de l'enquête PISA au Mexique entre 2003 et 2012 sont apparus en hausse notable, contrairement à la France où ils se sont détériorés durant la même période. En revanche, un sérieux regard sur les contenus proposés dans la formation de l'École Normale Supérieure pourrait permettre des améliorations sensibles du niveau mathématique des professeurs recrutés, sans perte en retour pour la qualité de leur enseignement, au contraire. Les nombres de crédits peuvent être discutés, mais aussi la philosophie de la formation proprement mathématique, pour laquelle le principe N(N+1) pourrait être mis en concurrence avec le principe NN' qui seul fonctionne actuellement.

Annexe 1 DEUX QUESTIONS DIDACTIQUES

Exercice D1 : Une question de connaissance de la didactique des mathématiques

Pouvez-vous associer un concept didactique à chacun des personnages qui suivent?

Socrate : ____

Piaget : ____

Vygotsky : ____

Brousseau : ____

Exercice D2

Corriger la résolution suivante d'équation par un lycéen, en lui attribuant une note de 0 à 5 et en rédigeant le commentaire que vous destineriez à cet élève.

3. *Résoudre l'équation* $\sqrt{7-x} = x-5$ $\sqrt{7-x} \geq 0$ $(\sqrt{7-x})^2 = (x-5)^2$ $(\sqrt{7-x})^2 \geq 0$ $7-x = x^2-10x+25$ $7-x \geq 0$ $7 \geq x$ $x^2-9x+19=0$ $\Rightarrow x \leq 7$ $(x-6)(x-3)=0$ $\Rightarrow \boxed{x_1 = 6 \quad x_2 = 3}$ *solutions* *comme* $6<7$ *et* $3<7$ *les solutions sont* $x_1 = 6$, $x_2 = 3$	**Note proposée (de 0 à 5)** …… **Commentaire pour l'élève** …………………………… …………………………… …………………………… ……………………………

Annexe 2 QUESTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES

Durée: 2 heures. Calculatrice programmable ou ordinateur personnel autorisés

Exercice M1

Dans le corps R des nombres réels, on considère l'équation suivante, dépendant du paramètre *a* :

$$x + \sqrt{x^2 - 4ax} = 3a$$

Pour chaque colonne de la table ci-dessous, placer une croix dans la case qui convient.

Dans le cas où

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$	
			l'équation a 0 solution
			l'équation a 1 solution
			l'équation a 2 solutions
			l'équation a une infinité de solutions ne recouvrant pas R
			l'équation admet tout élément de R comme solution

Pour répondre, avez-vous utilisé l'outil informatique (de la calculatrice programmable à l'ordinateur) ? ☐ Oui ☐ Non

En cas de réponse affirmative, merci de préciser brièvement l'outil utilisé et l'usage fait :

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Exercice M2

A partir de deux droites graduées de même origine, pour obtenir le produit de deux nombres, René Descartes propose une méthode dans l'appendice géométrique à son fameux *Discours de la Méthode* (Descartes, 1637, p. 298).

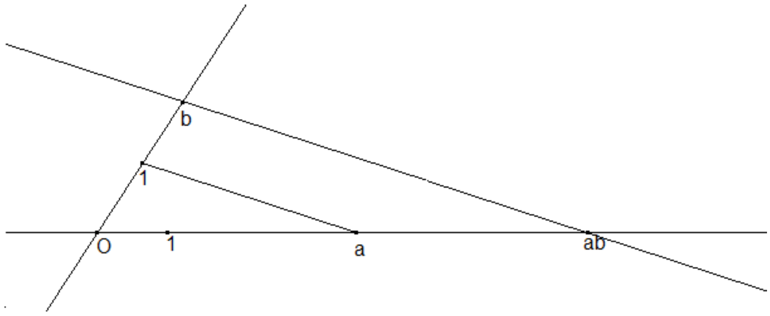


Figure. Illustration de l'obtention géométrique de a×b par la méthode de Descartes.

1) Ainsi que Descartes l'a fait, <u>décrire</u> la construction illustrée pour l'obtention géométrique du produit a×b.

---

2) <u>Justifier</u> l'obtention géométrique du produit a×b par cette construction.

---

3) Illustrer géométriquement la <u>distributivité</u> du produit sur la somme.

4) La *Figure* tracée illustre la méthode de Descartes dans le cas de deux nombres positifs. A la lumière de la construction, commenter la *règle des signes* pour le produit de deux nombres relatifs.

Exercice M3

Un triangle *ABC* a ses sommets *A* et *B* fixes, tandis que son sommet *C* est mobile sur une droite parallèle à *AB*. Quel est le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle *ABC* ? Justifier la réponse.

Recommandation : Choisir un repère convenable et recourir à la géométrie analytique.

Exercice M4.

La *course à vingt* est un jeu pour deux joueurs. Le premier joueur commence le jeu en disant 1 ou 2, à son choix. Ensuite, chacun des deux joueurs, à tour de rôle, ajoute au dernier nombre déclaré 1 ou 2, toujours à son choix. Le gagnant est le joueur qui dit vingt.

A	1		5		7		10		14		17		20
B		3		6		9		12		16		18	

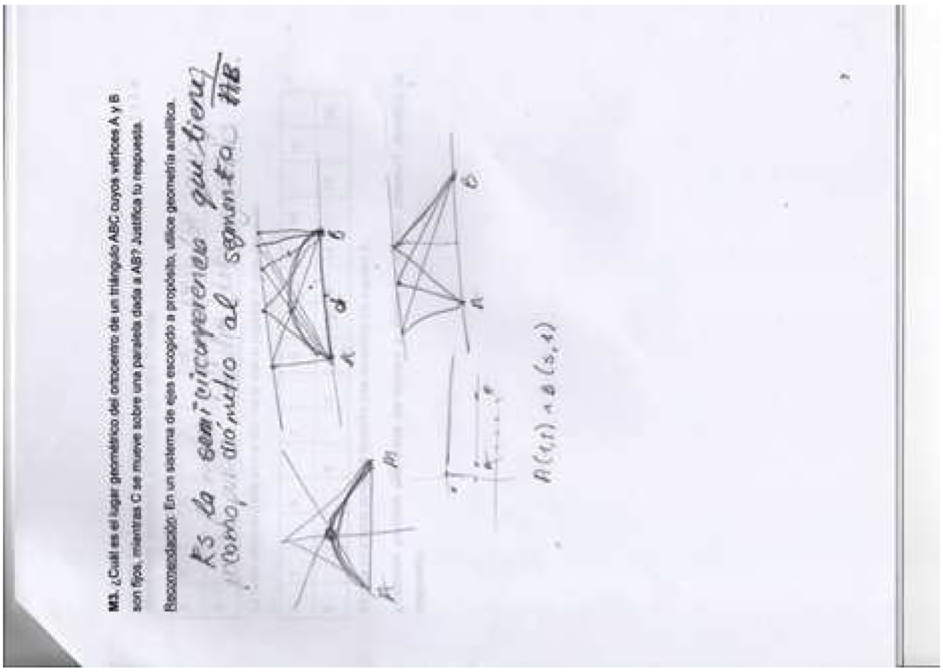
La table ci-dessus montre une partie, dont le gagnant est le joueur A.

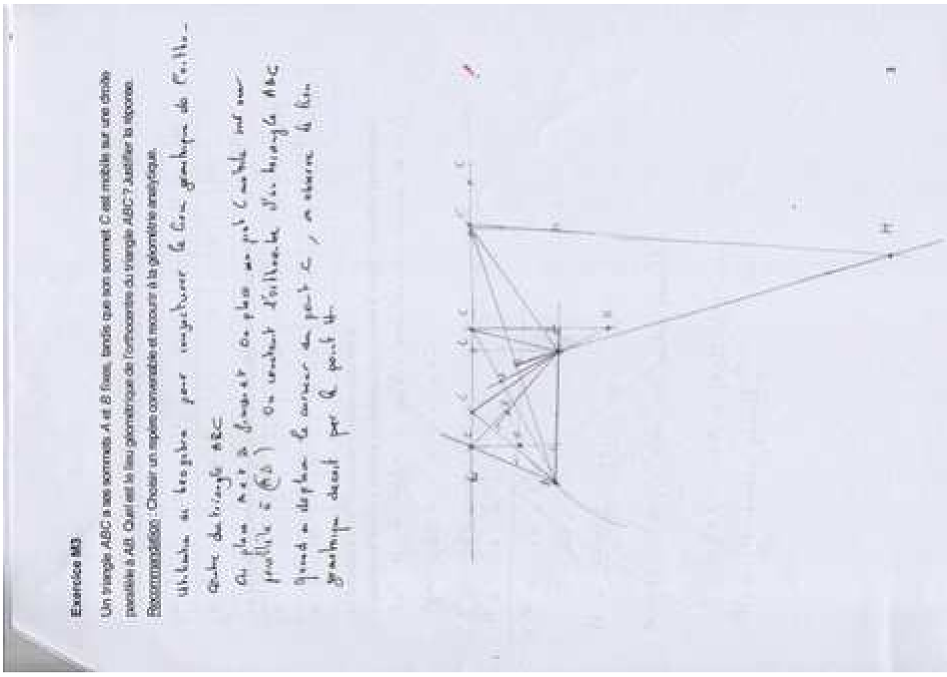
A	1		5		7		10		13		16		19	
B		3		6		9		11		14		17		20

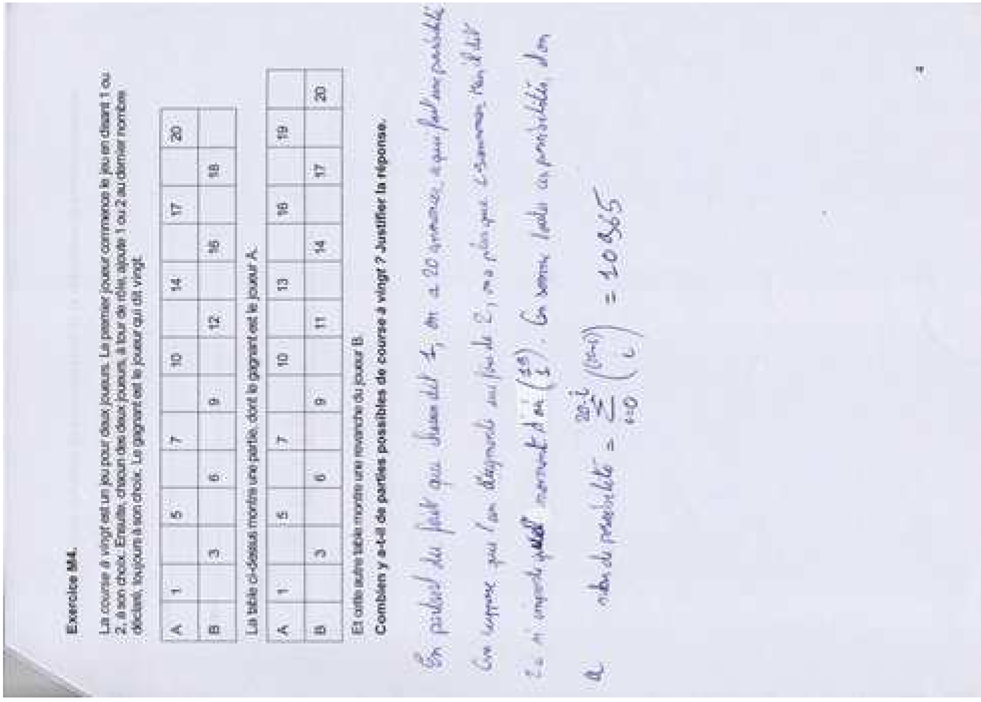
Et cette autre table montre une revanche du joueur B.

Combien y a-t-il de parties possibles de *course à vingt* ? Justifier la réponse.

Annexe 3 REPRODUCTION DE RÉPONSES A M3 ET M4







Exercice M4.

La *course à vingt* est un jeu pour deux joueurs. Le premier joueur commence le jeu en disant 1 ou 2, à son choix. Ensuite, chacun des deux joueurs, à tour de rôle, ajoute 1 ou 2 au dernier nombre déclaré, toujours à son choix. Le gagnant est le joueur qui dit vingt.

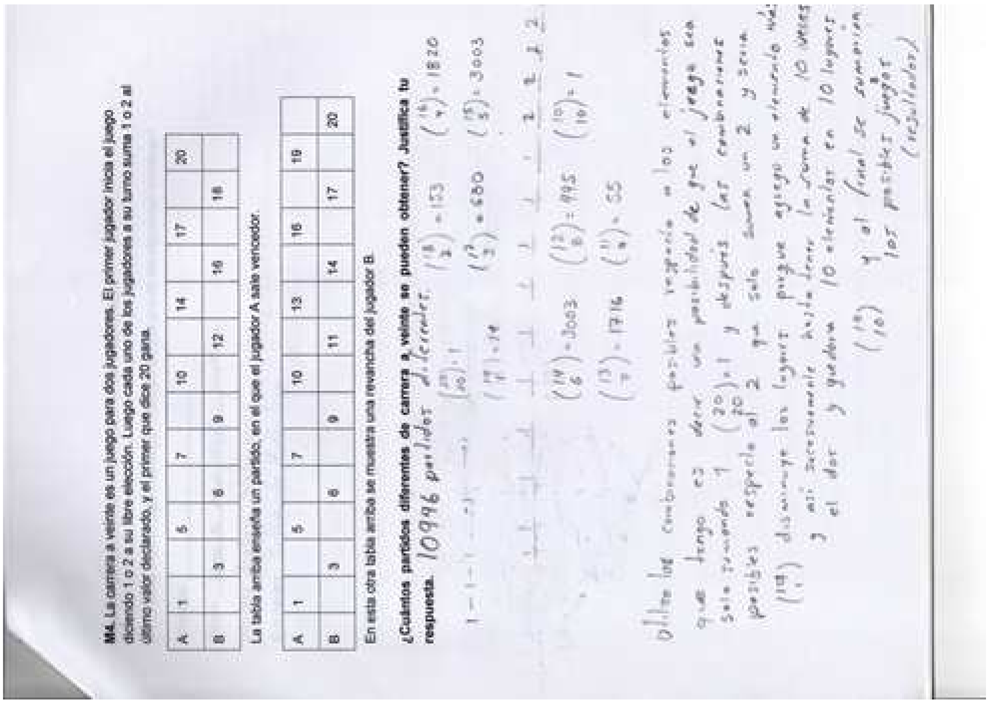
A	1		5		7		10		14		17		20
B		3		6		9		12		16		18	

La table ci-dessus montre une partie, dont le gagnant est le joueur A.

A	1		5		7		10		13		16		19	
B		3		6		9		11		14		17		20

Et cette autre table montre une revanche du joueur B.

Combien y a-t-il de parties possibles de *course à vingt* ? Justifier la réponse.



M4. La carrera a veinte es un juego para dos jugadores. El primer jugador inicia el juego diciendo 1 o 2 a su libre elección. Luego cada uno de los jugadores a su turno suma 1 o 2 al último valor declarado, y el primer que dice 20 gana.

A	1		5		7		10		14		17		20
B		3		6		9		12		16		18	

La tabla arriba enseña un partido, en el que el jugador A sale vencedor.

A	1		5		7		10		13		16		19	
B		3		6		9		11		14		17		20

En esta otra tabla arriba se muestra una revancha del jugador B.

¿Cuántos partidos diferentes de carrera a veinte se pueden obtener? Justifica tu respuesta.

Bibliographie

Acuerdo Nacional de Modernización de Educación Básica, ANMEB (1992). Diario Oficial de la Federación. P. 12.
Consulté à: http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/b490561c-5c33-4254-ad1c-aad33765928a/07104.pdf.

ADJIAGE, R. & PLUVINAGE, F. (2012) Strates de compétence en mathématique. *Repères-IREM* Numéro 88. Nancy, France, TOPIQUES éditions. P.43-72

ARREDONDO, A. & JUÁREZ M. R. (2011). Los estudios comparados, la formación de docentes en matemáticas, categorías e indicadores. Ponencia presentada en el Congreso Internacional de Educación y Prácticas Innovadoras de la UNAM. México. P. 19. ISBNN 978-607-02-2575-8

ARTIGUE, M. (1995). Ingeniería didáctica, en *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. Colombia. Impreso en México. p. 25

BACKHOFF ESCUDERO, E. & SOLANO FLORES, G. (2003), Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias Naturales (TIMSS): Resultados de México en 1995 y 2000, Informe técnico, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). P.34 Consulté à
http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Reportes_investigacion/TIMSS_95/Completo/timss95_00completo.pdf

DORIER, J. L. (2007). Panorama de las matemáticas en la educación francesa desde el parvulario hasta la universidad. *Repères-IREM*, (Institut de Recherche sur l`enseignement des mathématiques) de Paris 7. Consulté à: http://www.cfem.asso.fr/sysedufresp.pdf

DUCOING, P. (2004). Origen de la Escuela Normal Superior de México en *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*. Vol. 6. Num. 6. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Colombia. P. 35. Consulté à: HTTP://WWW.REDALYC.ORG/PDF/869/86900604.PDF

EDUSCOL (2011). *Le site des professionnels de l`éducation.* (http://eduscol.education.fr/).

EDUSCOL (2013). *Le site des professionnels de l`éducation.* (http://eduscol.education.fr/).

EURYDICE, (2011). La enseñanza de las matemáticas en Europa. Retos comunes y políticas nacionales. Red española de información sobre educación. Gobierno de

España. Ministerio de Educación, cultura y deporte. P. 23. Consulté à: http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice

GODINO J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. En *Revista de Educación Iberoamericana de Educación Matemática*. No. 20.

ICMI, 2009. *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study*, eds: Ruhama Even and Deborah Loewenberg Ball. New ICMI Study Series 11

UFR de mathématiques de l'Université de Paris- Diderot, (2012). Consulté à http://www.math.univ-paris-diderot.fr/#les_cursus

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*(1), 9-24.

MINISTERIO DE ENSEÑANZA SUPERIOR Y DE LA INVESTIGACION, (2011). *Cahier des charges du plan académique de formation 2012-2013*. Académie de Paris. Ministère de l`éducation nationale française. Consulté à : http://www.ac-paris.fr/portail/upload/docs/application/pdf/201201/cahier_des_charges_paf12-13.pdf

NISS, M. y HOJGAARD, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* MFUFA, Roskilde University, Denmark. Consulté à: https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf

OCDE, (2004). Definición y selección de competencias. Executive summary. Consulté à: http://www.oecd.org/centrodemexico/laocde/

OECD (2013) *PISA 2012 Results*,
Consulté à http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm

OCDE (2013), Note par pays.
Consulté à: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-france.pdf

RICO, L. Y CAÑADAS, M. (2008). *Estudio TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas.* Universidad de Granada. España. P. 123. Consulté à: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIIIRicoGomezCanadas.pdf

SÁENZ, C. (2007). *La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros.* Investigación didáctica. Instituto Universitario de Ciencias de la

Educación (IUCE). Universidad Autónoma de Madrid (UAM). P. 45 Consulté à: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/87932/216422

SEP, (1999). *Plan de estudios de la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas.* Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales. Subsecretaria de Educación Básica y Normal. pp. 25-28. México. D.F.

SEP, (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. Dirección General de Desarrollo Curricular. Primera edición México. D.F. Pag. 15-18 Consulté à: http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/PlanEstudios11.pdf

SEP, (2011). Competencias para el México que queremos. Hacia PISA 2012. Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio. México. D.F.

SWOKOWSKI, E. & COLE, J. (1996) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberamérica, Tercera Edición, p. 90

VAILLANT, D. (2009). *La formación de docentes de matemática: reveladores hallazgos.* Grupo de Trabajo sobre Desarrollo Profesional Docente en América Latina. Programa de Promoción de la Reforma Educativa de América Latina y el Caribe. Facultad de Administración y Ciencias Sociales Universidad ORT Uruguay. Pag. 5-6. Consulté à:
http://www.preal.org/Grupo3NN.asp?Id_Noticia=215

María del Rocío Juárez
rocil_1978@hotmail.com

Adelina Arredondo
adelinaarredondo@yahoo.com

François Pluvinage
fpluvinage@cinvestav.mx