MIREILLE SABOYA, NADINE BEDNARZ, FERNANDO HITT

LE CONTROLE EXERCE EN ALGEBRE : CONCEPTUALISATION ET ANALYSES EN RESOLUTION DE PROBLEMES

Abstract. Self-control engaged in algebra: analyze of students' productions and a clarification on their conceptualization. Part 1: problem solving. Our reflection takes its roots, first in a theoretical analysis of what constitutes an activity of control when doing mathematics and, on the other hand, in an empirical study conducted on a group of secondary students (14 -15 years). A written questionnaire on various components of algebra, supplemented by individual interviews with some students, forms the basis of the experiment. We examine here more specifically two items of this questionnaire, which proved particularly rich for the analysis. Data analysis reveals many facets about the control activity exercised by the students throughout the process, shedding new light on the conceptualization that we had been able to establish after theoretical analysis.

Résumé. Notre réflexion prend son ancrage, d'une part, dans une analyse théorique de ce que recouvre l'activité de contrôle en mathématiques et, d'autre part, dans une étude empirique conduite auprès d'un groupe d'élèves de secondaire (14-15 ans). Un questionnaire écrit portant sur différentes composantes de l'algèbre, complété par des entrevues individuelles avec quelques élèves, forme la base de l'expérimentation. Nous revenons plus spécifiquement ici sur deux problèmes de ce questionnaire, qui se sont avérés particulièrement riches pour l'analyse. Les multiples facettes qu'ils nous révèlent de l'activité de contrôle exercée par les élèves, tout au long du processus, apportent un éclairage nouveau sur la conceptualisation que nous avions pu établir après analyse théorique.

Mots-clés : contrôle, algèbre, résolution de problèmes, sémantique, syntaxique, anticipation, vérification, perception des erreurs, contradiction, engagement réfléchi.

Introduction

En didactique des mathématiques, quelques chercheurs se sont intéressés au contrôle[1] exercé sur l'activité mathématique, et au rôle fondamental qu'il joue dans la résolution d'une tâche par les élèves, que cette dernière ait trait à la résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985, Richard, 1990/1998), aux aspects opératoires liés au calcul (Chaachoua, Nicaud et Bittar, 2005; Artigue, 1993) ou au travail sur les concepts mathématiques (Balacheff et Gaudin, 2002, 2010). Ce contrôle pourrait bien être un enjeu clé de l'apprentissage des mathématiques comme le montrent les

[1] Nous préciserons cette notion de contrôle plus loin. Étymologiquement le terme de contrôle (*contre-role*) renvoie à une idée de « vérification », de registre tenu en double pour la vérification d'un autre.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 20, p. 61 - 100.

études portant sur la vérification ou la validation, des processus auxquels ce contrôle est souvent associé (voir notamment Coppé, 1993 ; Margolinas, 1989 ; Chevallard, 1989 ; Balacheff et Gaudin, 2002, 2010).

En algèbre, domaine plus spécifiquement ciblé dans cet article, les difficultés rencontrées par les élèves au regard de la signification du symbolisme (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992 ; Booth, 1984), de la manipulation d'expressions algébriques (Matz, 1982 ; Sleeman, 1986 ; Lee et Wheeler, 1989), de la résolution d'équations (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992 ; Margolinas, 1989, 1991 ; Chevallard, 1989 ; Lemoyne, 1989), de systèmes d'équations (Sfard et Linchevski, 1994), ou encore de la résolution de problèmes (Lochhead et Mestre, 1988 ; Bednarz et Dufour-Janvier, 1994) interrogent le contrôle que l'élève exerce sur cette activité algébrique. L'apprentissage de l'algèbre semble ici se heurter, en lien avec différentes tâches, au problème du sens attribué à cette résolution par l'élève. Le contrôle exercé par les élèves dans ce domaine apparaît ainsi un enjeu clé à prendre en compte.

Mais que sait-on de ce contrôle exercé sur l'activité mathématique ? Plus spécifiquement en algèbre ? Comment se caractérise t-il ? Quelles en sont les manifestations ?

Différents travaux, en lien avec la résolution d'équations (Margolinas, 1989, 1991), la validation d'expressions algébriques (Mary, 1999) ou la résolution de problèmes[2] (Schmidt, 1994 ; Schmidt et Bednarz, 1997), mettent en évidence des situations susceptibles de forcer un tel contrôle : des questions venant par exemple interroger le sens de l'équation et de ce que veut dire résoudre une équation (Margolinas, 1989, 1991 ; Bednarz et Dufour-Janvier, 1992)[3], des éléments qui confrontent la validation d'expressions générales (Mary, 1999 ; Lee et Wheleer, 1989). Certains de ces travaux permettent par ailleurs d'identifier deux types de contrôle à l'œuvre en algèbre, notamment en résolution de problèmes, un contrôle sémantique et syntaxique. Ainsi certaines difficultés dans le passage arithmétique-algèbre peuvent être mieux comprises à travers la nature du contrôle exercé dans les deux domaines : la résolution arithmétique avance en prenant appui sur des grandeurs connues et des significations contextuelles, alors que la résolution algébrique doit prendre appui sur des critères autres pour juger de la validité des raisonnements mis en place (nous revenons plus loin sur cette distinction).

Nous nous sommes intéressés de plus près à ce contrôle, et avons cherché à en clarifier davantage les contours. Nous revenons sur cette conceptualisation, issue

[2] Ces travaux ont cherché à clarifier les continuités et discontinuités dans le passage arithmétique algèbre dans un contexte de résolution de problèmes (Bednarz et Janvier, 1996).

[3] Le questionnaire (présenté plus loin) reprend certains de ces items.

d'une analyse de différents travaux de recherche (section 1). Après avoir défini les objectifs de cette étude et ses aspects méthodologiques (section 2), nous dégageons les différentes manifestations de contrôle mises de l'avant par les élèves dans deux tâches touchant à la résolution de problèmes (section 3). Cette expérimentation fait partie d'un projet de recherche plus large, mené en collaboration avec une enseignante du secondaire, centré sur l'élaboration d'une intervention didactique visant le développement du contrôle chez les élèves (voir Saboya, 2010). Nous revenons dans cet article sur l'étude préliminaire à celle-ci, qui a permis de mieux comprendre les manifestations de contrôle par les élèves, et ce avant toute intervention[4]. Ces résultats nous permettent en retour d'enrichir notre conceptualisation du contrôle, en ouvrant sur de nouvelles perspectives (section 4).

1. Une conceptualisation du contrôle sur l'activité mathématique

Ce qu'on appelle contrôle en mathématiques a été notamment abordé sous l'angle de la métacognition et du regard exercé sur le processus de résolution (Schoenfeld, 1985), du recours à des méta-connaissances dans le traitement de situations mathématiques (Robert, 1993 ; Artigue, 1993)[5] ou encore de la notion de conception (Balacheff et Gaudin, 2002, 2010). Dans ce dernier cas, en partant de préoccupations liées à la modélisation des connaissances des élèves, et notamment du rôle que joue la validation, Balacheff et Gaudin (2002, 2010) proposent une formalisation de la notion de conception (le modèle cK¢) dans laquelle apparaît la notion de contrôle. En s'inscrivant dans la lignée de Vergnaud (1991), Balacheff et Gaudin caractérisent une conception par un triplet – une classe de situations-problèmes qui donnent du sens au concept, un ensemble d'opérateurs construits par le sujet dans ces situations, nécessaires pour réaliser les actions, et un ensemble de signifiants associés qui supportent les actions dans cette situation – auquel il ajoute une structure de contrôle sous-jacente aux prises de décision lors de la résolution. Cette formalisation permet de rendre compte de la complexité d'une acquisition conceptuelle, et notamment, du point de vue de l'observateur, de l'efficacité locale d'une certaine connaissance-en-acte. La notion de contrôle apparaît donc ici fortement liée à une construction conceptuelle par l'apprenant : « *the criteria which allow one to decide whether an action is relevant or not, or whether a problem is solved, is a crucial element in understanding a mathematical concept* » (Balacheff et Gaudin, 2010, p. 16) (voir notamment sur le concept de fonction, Balacheff et Gaudin, 2002, 2010, sur les équations et inéquations de degré 1 et le travail formel

[4] Ce point de départ nous a permis par la suite de mieux comprendre l'évolution des élèves tout au long de l'expérimentation à l'égard du contrôle qu'ils exercent sur l'activité mathématique.

[5] Cette dernière dimension est une des composantes reprise dans notre conceptualisation du contrôle (voir Saboya, 2010).

en algèbre, Chaachoua, Nicaud et Bittar, 2005). Par la manière dont Balacheff et Gaudin caractérisent cette structure de contrôle, composée de tous les moyens qui permettent de faire des choix, de prendre des décisions et d'exprimer un jugement, sa caractérisation se rapproche de notre propre conceptualisation de l'activité de contrôle, telle que nous la développerons par la suite. Notre idée du contrôle est toutefois plus générale que celle associée à une construction conceptuelle (à une conception liée à un ensemble de problèmes, d'opérateurs et de signifiants), elle cible le processus de résolution de l'élève dans différents types de tâches (et non les conceptions qui s'y construisent) et s'intéresse au contrôle exercé sur ce processus, contrôle pouvant amener éventuellement à la réussite de la tâche[6].

Que sait-on des contours de cette activité de contrôle exercée par l'élève ? Dans le passage à l'algèbre, comme nous l'avons montré ailleurs (Bednarz et Saboya, 2007), deux types de contrôle sont en jeu : un ***contrôle sémantique*** qui va s'appuyer par exemple en résolution de problèmes, dans la phase de mathématisation, sur une compréhension des relations entre les données et des notations symboliques associées. Celle-ci requiert « un contrôle sémantique s'articulant sur une signification contextuelle des grandeurs en présence, des relations et des transformations » (p. 148). Cette mathématisation va solliciter, chez l'élève, un ensemble de productions sémiotiques intermédiaires (reformulation de la relation, ordre de grandeur des quantités et de la relation, notations intermédiaires…) qui lui permettent d'organiser et de se construire une représentation des grandeurs et de leurs relations. En ce sens, par les multiples activités intermédiaires qu'elle sollicite, cette mathématisation est le témoignage de ce contrôle sémantique[7]. Au moment de la résolution, un autre type de contrôle

---

6 Nous rejoignons Balacheff sur le fait que le contrôle n'amène pas nécessairement l'élève à la réussite. Pour ce chercheur en effet, la réussite fonctionne seulement dans l'ensemble des problèmes où la conception a été construite. Pour nous, une réussite dans la tâche, pensons par exemple à la résolution de l'équation $x+x/4= 6+x/4$, peut être accompagnée de certaines manifestations de contrôle, par exemple syntaxiques (utilisation de règles de transformation des expressions et de transformation de l'équation permettant de garder l'égalité vraie), sans que pour autant il n'y ait engagement réfléchi dans ce processus de résolution, qui dans ce cas devrait mener à voir vite $x=6$. Il peut ainsi y avoir réussite, ou réussite partielle sur certains aspects, sans que cela ne manifeste un contrôle global de l'activité de la part de l'élève.

7 Ainsi la relation « il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs », conduisant souvent à une erreur du type $6E=P$ (Lochhead et Mestre, 1988) dans le processus de symbolisation, sollicite une reformulation de la relation en termes numériques (par exemple « le nombre d'élèves est 6 fois celui des professeurs »), une idée de l'ordre de grandeur de chacune de ces quantités, une image mentale de cet ordre de grandeur et de leur relation ; elle peut s'appuyer sur des représentations intermédiaires (par exemple Nombre de professeurs : I, nombre des élèves : IIIII ou encore une illustration par des segments l'un sous l'autre)

est en jeu : « la résolution s'appuie sur un travail sur des expressions algébriques, qui a une certaine signification bien sûr, mais dans un autre registre (des transformations sur des quantités sont ici effectuées de manière à conserver l'égalité) » (p. 148). Cette distinction entre contrôle ***sémantique*** et ***syntaxique***, reprise dans d'autres domaines[8], est une dimension centrale de la conceptualisation du contrôle en algèbre. Elle demeure toutefois très globale. Une analyse de différents travaux de recherche en didactique des mathématiques (non nécessairement spécifiques dans ce cas à l'algèbre) nous a permis d'aller plus loin et de dégager différentes composantes qui relèvent de ce que nous pourrions appeler un contrôle sur l'activité mathématique : un certain type d'engagement dans la tâche, une certaine manière de faire face aux erreurs, un certain regard sur la démarche, la réponse, etc. Une conceptualisation du contrôle en émerge.

Avoir du contrôle se traduit ainsi, pour certains auteurs, par une ***anticipation***, et ce avant toute résolution, une anticipation définie souvent comme une estimation de l'ordre de grandeur du résultat (Cipra, 1985). Coppé (1993) va plus loin et élargit cette caractérisation, en précisant que l'anticipation ne relève pas seulement d'une estimation de l'ordre de grandeur mais d'une analyse préalable des propriétés que devra posséder le résultat. Il s'agit ainsi de poser une condition de validité du résultat avant de le connaître. Cette anticipation va souvent conduire à une vérification par la suite (au regard de ces conditions de validité du résultat posées a priori). On retrouve là une autre composante du contrôle mise en évidence dans les recherches, notamment celles portant sur la résolution de problèmes (Richard, 1990/1998).

Cette ***vérification*** est associée au retour sur la solution trouvée. D'un point de vue méthodologique, elle se retrouve ainsi chez Polya (1945/1965) dans « [l'examen] de la solution obtenue » et chez Mason (1994) dans ce qu'il appelle « la révision ». D'un point de vue interne à l'élève, le contrôle se manifeste par une vérification de la solution trouvée et de la démarche adoptée. Pour Richard (1990/1998), cette vérification prend place après l'exécution, et peut conduire à la découverte d'incohérences entre la solution trouvée et d'autres informations données dans le problème, ou encore à un sentiment pour le solutionneur d'avoir épuisé l'espace de recherche et d'arriver ainsi à une impasse. Autrement dit, la vérification peut conduire à une remise en cause de la représentation construite dans un premier

---

permettant de contrôler davantage cette mathématisation et le processus éventuel de symbolisation.

[8] Brousseau l'introduit par exemple en 1986 à propos de la théorie des ensembles : « Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle [sémantique] diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus « syntaxique ». (Brousseau, 1986, p. 43).

temps, à l'abandon de celle-ci et à la construction d'une autre représentation. Pour Coppé (1993), un élève qui vérifie est un élève qui se questionne sur le caractère vrai/faux du résultat. La vérification implique ainsi un retour sur ce que l'élève a produit. Coppé distingue deux types de vérification, celle qui porte : i) sur le résultat lui-même ; et celle qui porte ii) sur la méthode qui a permis d'arriver à ce résultat et donc sur les critères de choix de cette méthode. Comme Cipra (1985), pour Coppé, vérification et anticipation peuvent aller de pair, la vérification s'effectuant suite à une anticipation déçue.

C'est cette même idée d'un retour sur la démarche que l'on retrouve dans l'analyse du travail du mathématicien (Hadamard, 1945/1975), cette vérification lui permettant de détecter les erreurs (notamment de calcul) qui peuvent être fréquentes et proviennent d'une incertitude, et lui permettant de dépasser le doute. Ce travail de détection des erreurs présent chez les mathématiciens met de l'avant, on le voit dans ce qui précède, une autre composante du contrôle reliée à la ***perception des erreurs***. Cette activité de retour sur les erreurs part d'un doute face à la véracité d'un résultat et passe par la question « est-ce que la réponse a un sens? » (Cipra, 1985). L'auteur montre qu'il y a de nombreux moyens de savoir s'il y a une erreur dans le raisonnement, sans savoir pour autant où cette erreur se trouve ni de quel type d'erreur il s'agit. Le questionnement sur le sens de la réponse, l'anticipation de l'ordre de grandeur, le recours à d'autres registres permettant de revenir sur un raisonnement et contribuent éventuellement à dépasser le doute.

Tout aussi important, la ***sensibilité à la contradiction*** apparaît également une composante centrale de ce contrôle sur le processus de résolution, permettant de revenir sur ce qui est avancé. Les travaux de Piaget (1974), Kargiotakis (1996) et Hitt (2003) se sont intéressés à cette sensibilité à la contradiction et à son dépassement. Cette sensibilité s'exprime souvent chez l'élève par un sentiment de déséquilibre ou de « malaise » (Hitt, 2003, p. 260), par un conflit ressenti (Piaget, 1974) entre une anticipation et un certain résultat non attendu. Pour qu'il y ait un ***dépassement de la contradiction***, une action doit être entreprise par l'élève pour rétablir l'équilibre et dépasser ainsi le conflit ressenti. Piaget fait une distinction entre la sensibilité à la contradiction et son dépassement. Ainsi plusieurs élèves sont conscients de l'existence d'une contradiction mais n'arrivent pas à la dépasser, ce dépassement exigeant « un effort supplémentaire de réflexion rétroactive » (Piaget, 1974, p. 11-12)[9].

[9] Cette conceptualisation rejoint en partie celle de Balacheff et Gaudin (2010) dans la mesure où elle prend appui sur une idée de déséquilibre/ré-équilibre : « *the first raison d'être of the notion of conception is the need to conceptualize the specific states of equilibrium achieved by the subject/milieu system satisfying some viability constraints of a situation* » (p. 11). Nous nous intéressons aux perturbations manifestées par le sujet, à ces

D'autres composantes du contrôle ont également été mises de l'avant en lien avec le processus de résolution lui-même. Ainsi, l'***engagement réfléchi*** s'appuie sur une prise de distance, un arrêt devant le problème avant, en cours et/ou à la fin de la résolution (Kargiotakis, 1996). Ce contrôle est ainsi lié à une réflexion sur l'action, entre autres avant même de s'engager dans la résolution (voir à ce sujet Bednarz et Dufour-Janvier, 1992).

On parle également de ***discernement/choix éclairé*** au regard de différentes stratégies de résolution possibles. Schoenfeld (1985) insiste ici sur l'importance de lier les caractéristiques d'un problème et la stratégie privilégiée. Ainsi, quand l'élève travaille sur un problème, il peut posséder plusieurs stratégies de résolution, mais toutes ces stratégies ne sont pas nécessairement efficaces. Si l'élève choisit une stratégie peu appropriée et qu'il poursuit avec celle-ci en excluant les autres, alors soit il échouera dans la résolution du problème, soit il arrivera à sa résolution mais avec des procédures difficiles et coûteuses en temps. Ce choix peut donc affecter le processus de résolution d'un problème. Le contrôle se manifeste ainsi par la capacité de voir différentes stratégies pour résoudre le problème et par la capacité de faire un choix pertinent d'une stratégie appropriée, efficace, peu coûteuse en temps en ayant préalablement écarté les stratégies qui sont inappropriées (Schoenfeld, 1985; Krutetskii, 1976).

Une première conceptualisation du contrôle ressort de cette analyse de différents travaux de recherche, à travers 1) deux dimensions de contrôle (syntaxique et sémantique) à l'œuvre dans la résolution de différentes tâches en algèbre, notamment la résolution de problèmes, et 2) différentes composantes sollicitées tout au long du processus de résolution : i) l'anticipation (des conditions de validité du résultat), ii) la vérification (du résultat et de la démarche), iii) la perception des erreurs, iv) la sensibilité et le dépassement de la contradiction, v) l'engagement réfléchi (une prise de distance avant, pendant ou après) et vi) le discernement/choix éclairé (vis-à-vis des différentes stratégies). Dans un travail préalable, d'autres composantes ont également été relevées que nous ne reprenons pas ici, notamment le recours à des méta-connaissances (pour plus de détails sur cette conceptualisation plus globale, voir Saboya, 2010). Nous avons en effet fait le choix de ne rapporter que les composantes liées directement à la résolution de problèmes, et donc en lien avec les tâches expérimentées (voir section 3).

---

signes de déséquilibre, s'exprimant dans notre cas par une idée de doute, une sensibilité à la contradiction.

2. Objectifs de l'étude et méthodologie

Cette conceptualisation du contrôle constitue un cadre de référence pouvant servir de support au choix de situations à proposer aux élèves, dans lesquelles un contrôle est requis, ou présentant un potentiel en termes de son développement (Saboya, 2010). Toutefois, elle nous renseigne peu sur la manière dont ce contrôle prend forme chez les élèves au regard de différents types de tâches. Notre recherche s'inscrit dans cette perspective et vise à cerner les manifestations du contrôle qui apparaissent chez les élèves.

Un questionnaire écrit a été élaboré, à cette fin, regroupant, d'une part, différentes composantes de l'algèbre et de son apprentissage (résolution de problèmes, résolution d'équations, interprétation du symbolisme et travail sur les expressions algébriques, généralisation à des fins de preuve), et s'appuyant, d'autre part, sur le cadre de référence élaboré précédemment. Cette conceptualisation du contrôle (voir section 1) a ainsi servi de fondement au choix des 13 questions retenues[10] (voir tableau 1 ci-dessous).

Ce questionnaire a été expérimenté auprès d'une classe de secondaire 3 (14-15 ans) comprenant 36 élèves d'une école de la banlieue de Montréal[11]. De manière complémentaire, dix élèves ont été vus en entrevue individuelle. Ces élèves ont été choisis sur la base des traces de contrôle observées chez ces derniers au questionnaire écrit. Nous avons ciblé deux types d'élèves, des élèves qui exerçaient peu de contrôle au début de l'expérimentation pour arriver à mieux comprendre le possible développement de celui-ci au cours de l'intervention didactique (voir Saboya, 2010) et des élèves qui laissaient apparaître un certain contrôle, et ce de manière à cerner la réflexion accompagnant leurs traces. Ces entrevues ont permis de revenir plus précisément sur quatre questions du questionnaire touchant à différentes composantes de l'algèbre (résolution de problèmes, résolution d'équations, sens des expressions algébriques) et de mieux comprendre les décisions prises par les élèves lors de la résolution et les raisons sous-jacentes.

[10] D'autres composantes étaient également ici ciblées, que nous ne reprenons pas pour les fins de cet article.

[11] Il s'agit d'élèves forts, qui font partie du programme d'éducation internationale.

Composantes de l'algèbre / Composantes du contrôle	Résolution de problèmes	Résolution d'équation s	Sens/travail sur les expressions algébriques	Générali-sation à des fins de preuve[12]
Vérification, retour sur la démarche, sur les calculs, sur la réponse…	Question 1			X
Engagement réfléchi	X	X	X	
Discernement, choix éclairé (de stratégies, d'une écriture)	X	X		
Perception des erreurs,	X	X	X	
Sensibilité à la contradiction, capacité de dépasser la contradiction	Question 5 (également exploitée lors de l'entrevue)	X	X	

Tableau 1. Le questionnaire, sa composition au regard de l'algèbre et du contrôle[13]

Deux questions, issues du bloc résolution de problèmes, sont reprises pour les fins de cet article – nous les avons situées dans le tableau précédent – ces dernières s'étant révélées riches pour illustrer notre propos. Nous présentons plus précisément ci-dessous ces deux questions ainsi que leur analyse préalable, sous l'angle du contrôle, de manière à mieux faire ressortir les raisons qui ont guidé dans chacun des cas notre choix.

Trains[14] *(question 1)*	***Cafés/croissants***[15] *(question 5)*
Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives? Explique comment tu as fait pour trouver.	Au restaurant, une tasse de café et trois croissants coûtent 2,70$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. Explique comment tu as fait pour trouver.

---

12 Cette composante de l'algèbre étant peu abordée à l'école au moment de l'introduction à l'algèbre, nous ne l'avons pas retenue pour l'analyse.

13 Pour le lecteur intéressé par l'expérimentation plus globale, l'ensemble des items du questionnaire est en annexe.

14 Cette situation, tirée de Bednarz, Janvier, Mary et Lepage (1992), a été modifiée (la relation initiale du problème était il y a 8 wagons de plus dans le train à 16 wagons que dans le train à 12 wagons).

15 Ce problème provient du travail de thèse de Schmidt (1994).

Analyse préalable (raisons du choix du problème sous l'angle du contrôle) Sollicite une interprétation du résultat au regard du contexte (celui-ci n'étant pas entier). Oblige à un retour au problème de départ (plusieurs stratégies possibles : arrondissement du résultat trouvé, interprétation dans le contexte, par exemple, un wagon ne sera pas plein, etc.).	*Analyse préalable (raisons du choix du problème sous l'angle du contrôle)* Voir la sensibilité à la contradiction que manifeste l'élève (on est en effet dans une situation dans laquelle l'élève est confronté à des contradictions, les données sont contradictoires) (Kargiotakis, 1996 ; Schmidt, 1994). Voir s'il pourra dépasser éventuellement cette contradiction.

Tableau 2- Les deux problèmes et leur analyse préalable

Les différentes manifestations de contrôle, qui émergent de l'analyse des stratégies de résolution des élèves dans ces deux problèmes, dépassent considérablement, comme nous le verrons maintenant, cette analyse préalable.

3. Analyse des manifestations du contrôle chez les élèves dans la résolution de problèmes

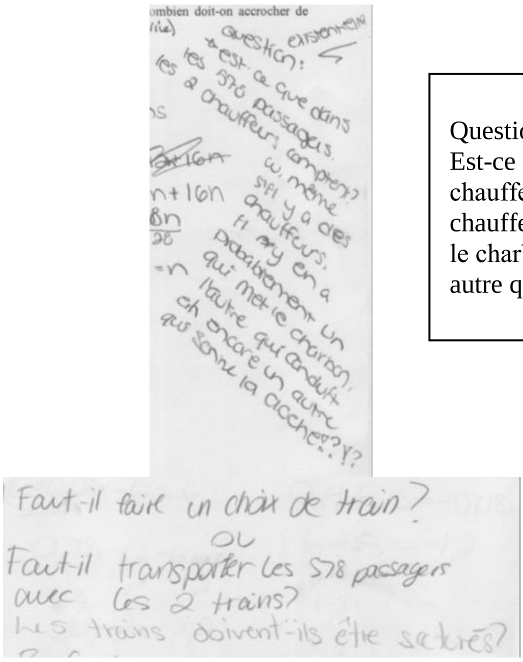
Avant d'entrer dans cette analyse, deux remarques préliminaires s'imposent. Les manifestations de contrôle relevées ici et là tout au long du processus de résolution par l'élève ne sont pas nécessairement synonymes, comme nous l'avons indiqué précédemment, de réussite à la tâche. Il peut y avoir contrôle partiel sur certains aspects, conduisant à une réussite de la tâche, sans que pour autant cela ne manifeste un contrôle de la part de l'élève au regard d'autres indicateurs importants (voir note 6). Nous ne sommes donc pas dans cette analyse centrés sur la réussite de l'élève aux tâches proposées mais bien sur la manière dont il les aborde à un moment ou l'autre du processus et sur ce que cela nous révèle du point de vue du contrôle. Nous rendons compte de plus, dans cette analyse qualitative, non pas de l'ensemble des raisonnements mis en place par les élèves du groupe, mais bien de différentes solutions retrouvées chez les élèves qui nous permettent d'avancer sur une conceptualisation du contrôle.

3.1. Analyse des manifestations de contrôle exercé par les élèves dans la résolution du problème des trains

Dans cette première tâche, l'analyse préalable pointait la nécessité d'un retour sur la réponse après résolution (voir section 2, tableau 2). Notre analyse montre, comme nous le verrons ci-dessous, que le contrôle exercé par les élèves sollicite bien d'autres éléments et s'avère bien plus riche et complexe que ne le laissait entendre a priori notre choix.

a) Une première manifestation de contrôle avant toute résolution.

L'analyse des traces laissées par les élèves nous amène à relever *un premier indicateur de contrôle, se mettant en place avant toute résolution* (quelque chose que nous n'avions pas anticipé a priori). Il s'exprime sous la forme d'un questionnement portant sur l'énoncé du problème, comme le montrent les deux extraits ci-dessous (figure 1). S'explicitent chez ces deux élèves une *distance critique* face à l'énoncé, prenant son ancrage dans le contexte, non sans conséquence sur la résolution par la suite (dans le premier cas, l'élève travaillera avec 576 passagers s'il exclut les 2 chauffeurs pour trouver le nombre de wagons à placer après chacun des trains; dans le deuxième cas, penser un train ou deux trains, des trains saturés ou non, va affecter bien sûr la nature de la réponse).



Retranscription
Question existentielle :
Est-ce que dans les 578 passagers les 2 chauffeurs comptent? Ou même s'il y a des chauffeurs, il y en a probablement un qui met le charbon, l'autre qui conduit et encore un autre qui sonne la cloche ?!?

Retranscription
Faut-il faire un choix de train ?
ou
Faut-il transporter les 578 passagers avec les 2 trains ?
Les trains doivent-ils être saturés ?

Figure 1.Deux exemples de manifestation de contrôle au tout début du processus

En ce qui concerne la résolution du problème, certains élèves ont procédé algébriquement et d'autres arithmétiquement. La nature du contrôle n'étant pas la même dans ces deux cas de figure, nous distinguerons ces deux résolutions de manière à mieux les comprendre.

b) Différentes manifestations de contrôle dans la résolution algébrique du problème

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la résolution algébrique requiert un *contrôle sémantique* qui se met en place notamment au moment de la mathématisation du problème, de la mise en équation. Dans ce processus de symbolisation, différentes grandeurs et les relations qu'elles entretiennent sont sollicitées : un nombre de passagers, un nombre de wagons, un nombre de passagers par wagon (taux) permettant de faire le lien entre ces deux grandeurs. L'élève doit aussi gérer dans cette mathématisation diverses contraintes : i) un nombre total de passagers (connu) ; ii) un nombre de wagons dans les deux trains (inconnu) dont on sait qu'il est le même. Cette signification des grandeurs et de leurs relations, cette prise en compte des contraintes dans cette écriture de l'équation, témoignent d'un *contrôle sémantique sur le processus de symbolisation*.

L'analyse des solutions des élèves montre toute la difficulté associée à ce processus de symbolisation, ainsi que celle associée à la résolution de l'équation formulée. Mais elle nous révèle surtout, à travers les différentes tentatives/constructions dont témoignent ces solutions, la manière dont se met en place ***un contrôle progressif*** sur ce processus de symbolisation et de résolution. Autrement dit, nous le verrons dans ce qui suit, l'activité de contrôle exercée par l'élève en est bien une qui relève d*'un processus dynamique.*

Nous reprenons en détails trois exemples de solutions d'élèves qui illustrent des aspects différents de la mise en place progressive de ce contrôle. Nous tentons à cette fin de reconstituer, dans chacun des cas, le processus suivi par l'élève.

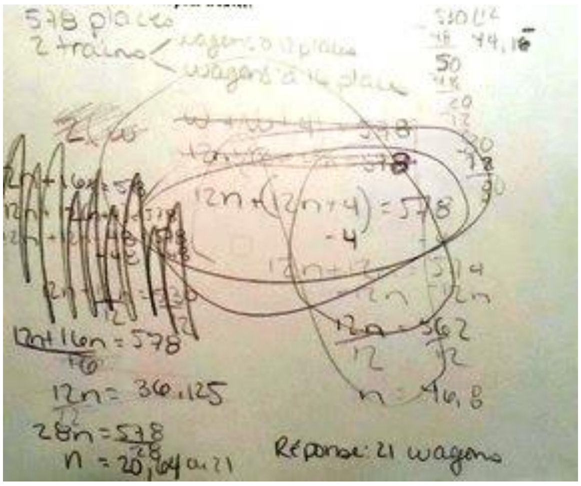


Figure 2- Exemple d'engagement algébrique témoignant de la construction progressive d'un contrôle sémantique et syntaxique (imbriqués)

Dans le tableau 2bis nous avons reconstitué dans l’ordre chronologique les différentes étapes suivies par l’élève pour résoudre ce problème (voir figure 2). Nous avons procédé ainsi pour les autres copies où suivre la démarche de l’élève n’est pas toujours aisé.

1re tentative	2e tentative	3e tentative	4e tentative
$w+(w+4)=578$ $12n+(12+4)n=578$ $12n+12n+4=578$ $-4 \quad -4$ $12n+12n=574$ $-12n \quad -12n$ $\frac{12n}{12}=\frac{562}{12}$ $n=46{,}8$	$12n+16x=578$ $12n+12(n+4)=578$ $12n+12n+48=578$ $-48 \quad -48$ $12n+\frac{12n}{12}=\frac{530}{12}$ 530 | 12 -48 50 $\quad 44{,}1\bar{6}$ -48 20 -12 80 -72 80	$12n+16n=578$ $\frac{12n+16n}{16}=\frac{578}{16}$ $12n=36{,}125$ $\frac{12n}{12}=36{,}125$	$28n=578$ $\frac{28n}{28}=\frac{578}{28}$ $n=20{,}64$ *ou* 21 Réponse : 21 wagons

Tableau 2bis – Reconstitution de la copie de l’élève (voir figure 2) dans l’ordre chronologique qui est celui de l’écriture par l’élève observé

Si nous nous attardons à ce que l’élève a barré (voir tableau 2bis, 1re tentative), nous pouvons noter une difficulté dans la première mise en équation formulée qui montre que ce processus de symbolisation, sollicitant la signification des grandeurs en jeu et de leurs relations, ne va pas de soi. Cette élève a écrit au départ $w + (w+4) = 578$. Toutefois, elle semble reprendre à son compte dans cette symbolisation l’information à l’effet qu’un des wagons (dans l’un des trains) a 4 places de plus que dans l’autre. Son inconnue w est ensuite remplacée par $12n$ qui décrit certainement le fait qu’il y a un nombre inconnu n de wagons à 12 places. C’est cette substitution qu’elle reprend dans l’expression $w+4$. La résolution de l’équation (nous y reviendrons) l’amène à trouver $n = 46{,}8$ qu’elle n’accepte pas comme réponse puisqu’elle barre ce qu’elle a produit. L’élève semble ainsi exprimer un doute face à la réponse et la démarche qui l’a conduit à celle-ci. D’où provient ce doute ? Probablement d’une anticipation, avec un calcul approximatif, du nombre de wagons, mais cela reste une hypothèse. Dans la résolution de cette équation ($12n+12n+4 = 578$), nous pouvons noter des difficultés de contrôle syntaxique. L’élève soustrait en effet une même quantité $12n$ (comme elle l’avait fait pour la constante 4 précédemment) à chacun des membres de l’équation (qui sont $12n+12n$ et 574) et aboutit alors dans le membre de droite à 562 ($574 - 12n = 562$), se ramenant ainsi à une forme qu’elle connaît $12n = 562$ et qu’elle sait résoudre (en divisant par 12 de chaque côté de l’égalité).

Doutant de sa réponse et de la démarche qui précède, elle revient alors sur la mathématisation du problème en écrivant cette fois $12n+16x = 578$ (voir tableau 2bis, 2e tentative), faisant appel dans cette symbolisation à deux inconnues (un certain nombre de wagons à 12 places et un certain nombre de wagons à 16 places). Guidée par le besoin de se ramener à une équation à une inconnue, l'élève va remplacer $16x$ par $12(n+4)$. On observe dans cette substitution la difficulté à garder un contrôle sur la signification des deux grandeurs en jeu (nombre de places par wagon et nombre de wagons). Comme pour la première résolution, l'élève ressent des difficultés de contrôle syntaxique dans la résolution de $12n+12(n+4) = 578$. Après avoir procédé à la distributivité dans le membre de gauche et au retrait de la constante 48 dans les deux membres de l'égalité, elle divise par 12 un seul des termes de l'équation du membre de gauche : $12n + \frac{12n}{12} = \frac{530}{12}$. Elle obtient $44,1\underline{6}$ (6 périodique) comme résultat de la division de 530÷12 (voir figure 2, en haut à droite) qu'elle remet en question puisqu'elle barre de nouveau sa démarche. Là encore si le résultat ne la satisfait pas, c'est sans doute en lien avec l'anticipation du résultat qu'elle avait prévu.

Dans sa troisième tentative (voir tableau 2bis, 3e tentative), l'élève mathématise le problème, en prenant en compte le fait que le nombre de wagons est le même dans les deux trains (son équation précédente pensée à deux inconnues $12n+16x = 578$ est ainsi ramenée à une inconnue : $12n+16n = 578$). Cependant, les mêmes difficultés d'ordre syntaxique (liées aux transformations à effectuer dans le cas d'expressions comprenant des inconnues, $12n+12n$ précédemment, $12n+16n$ ici) l'amènent à écrire l'équation $12n = 36,125$ (elle divise par 16 les deux membres de l'égalité et obtient : $\frac{12n+16n}{16} = 12n$ dans le membre de gauche). C'est lorsqu'elle se dispose à diviser les deux membres de l'équation $12n = 36,125$ qu'elle s'arrête. Elle a probablement divisé mentalement 36,125/12 et a pensé que le résultat n'était pas convainquant. C'est à ce moment que cette élève revient sur l'équation de départ $12n+16n = 578$ (voir tableau 2bis, 4e tentative) et surmonte sa difficulté de résolution (elle ajoute les termes semblables entre eux, avant de diviser par 28), elle dépasse ainsi ses difficultés d'ordre syntaxique, arrivant au résultat $n = 20,64$ qu'elle arrondit à 21, donnant comme résultat 21 wagons. Ce processus d'arrondissement et d'interprétation de la réponse est un autre indicateur de contrôle exercé sur la résolution du problème.

Que ressort-il de cette reconstitution sur le plan de l'analyse ?

La reconstitution qui précède met en évidence une *construction progressive en action* (à travers les traces que laisse l'élève) d'un contrôle sémantique prenant appui sur une intégration graduelle de la signification des grandeurs et de leurs relations, mais aussi d'un contrôle d'un autre ordre, syntaxique, qui s'exprime dans la résolution de l'équation et dans la manipulation des expressions en jeu (voir tableaux 3, 4, 5 et 6 pour une analyse de cette reconstitution).

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	**Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action**
(***CSé1***) Une « substitution » (de *w* devenant 12*n*) qui rend compte du passage d'une certaine grandeur (nb de passagers total dans un train) aux autres grandeurs en jeu. (***CSé2***) Une relation entre ces grandeurs explicitée : Nb de passagers par wagon × nb de wagons = Nb de passagers total (pour l'un des trains)	(***CSy1***) Une première « règle » en action montrant un certain contrôle syntaxique : on cherche à se ramener à une équation plus simple du type $ax = b$ (qu'on sait résoudre) ***(CSy2)*** Une deuxième règle en action : soustraire aux deux membres de l'équation une même quantité (4 et 12*n*) ne change rien à l'égalité
mais aussi	mais aussi
Une difficulté de contrôle sémantique visible dans la symbolisation de la relation entre le nombre de passagers dans chacun des trains (on transfère le 4 passagers de plus dans chaque wagon à l'ensemble des passagers du train)	Une difficulté à gérer le traitement des expressions avec inconnues, visible dans l'erreur de concaténation (572 12n = 566) ***Un choix non éclairé*** quant au traitement à faire (pour se ramener à quelque chose de plus simple) des expressions avec inconnues (soustraire 12*n*, même si la règle fonctionne, n'est guère ici pertinent)

Tableau 3 - 1re tentative autour de $w+(w+4) = 578$ (devenant)
$12n+ (12\,n+4) = 578$

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	**Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action**
(***CSé3***) Une relation entre les grandeurs de nature différente étendue aux 2 trains (passant par une symbolisation en termes de deux inconnues qui rend cette symbolisation plus aisée pour l'élève) : nb de passagers/wagon du 1er train × nb de wagons (du 1er train) + nb de passagers/wagon du 2e train × nb de wagons (du 2e train) = nb de passagers total. Mais ***Une relation entre les deux trains qui reste difficile***, quand on cherche à ramener à une inconnue (le 4 passagers de plus par wagon est ici transféré sur le nombre de wagons)	***Csy3***) Le traitement des expressions avec inconnues est distingué de celui des quantités connues (il faut diviser par le coefficient de cette inconnue de façon à se ramener à cette inconnue). Mais ***Des difficultés à gérer cette transformation***, visible dans le fait que l'on ne divise qu'une partie de l'expression ($12n + 12n/12 = 530/12$)

Tableau 4 - 2e tentative autour de $12n+16\ x = 578$ (devenant) $12n+12(n+4) = 578$

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	**Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action**
(***CSé4***) la relation entre le nombre de wagons de chacun des trains est prise en compte (permettant de ramener l'équation précédente à une inconnue)	La difficulté d'ordre syntaxique précédente demeure ($12n + 16n/16 = 578/16$)

Tableau 5 - 3e tentative autour de $12n+16n = 578$

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	**Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action**
(***CSé5***) Retour sur la réponse obtenue après résolution et interprétation dans le contexte	(***Csy4***) On réalise qu'il faut opérer sur les expressions inconnues de manière à se ramener à une expression plus simple (de la forme ax) avant de diviser par le coefficient

Tableau 6 - 4e tentative autour de la même équation

Cette analyse, outre les manifestations diverses de contrôle qu'elle permet d'expliciter (Csé1 à 5 ; Csy1 à 4), nous montre que contrôle sémantique et syntaxique sont profondément imbriqués. Les erreurs dans la manipulation des expressions, lors de la résolution de l'équation, et le doute que l'élève ressent face à la réponse qu'il obtient amènent l'élève à revenir sur la mathématisation du problème. Il y a ainsi une évolution dans le contrôle sémantique qui prend appui sur une prise de conscience de difficultés d'ordre syntaxique. Cette construction progressive fait ressortir, enfin, une composante du contrôle qui apparaît essentielle, celle d'une sensibilité aux erreurs produites. Nous pouvons en effet remarquer que tout au long de la résolution, cette élève est *sensible à ses erreurs*, et ressent un doute face aux résultats obtenus et à la démarche, qui l'amène à revenir sur cette démarche. Finalement, à la fin de la résolution, un *contrôle autour de l'interprétation de la réponse* tel que nous l'avions anticipé se met en place. L'élève arrondit le résultat trouvé à l'entier supérieur et lui donne un sens en contexte. Le schéma ci-dessous rend compte à la fois du dynamisme de cette activité de contrôle et de l'imbrication de ses différentes composantes (figure 3).

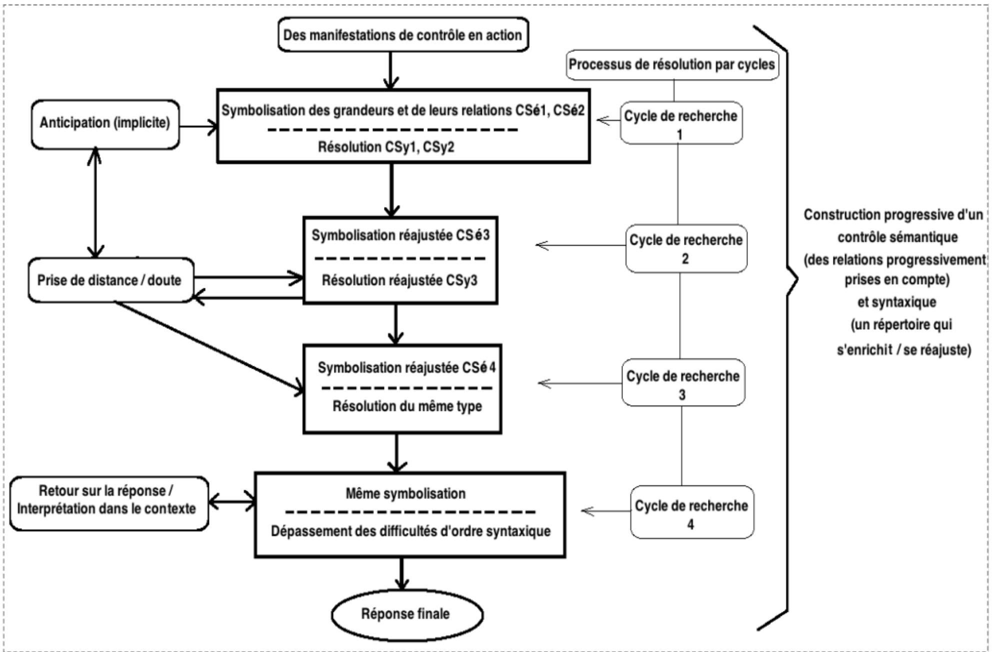


Figure 3. Ce qui ressort de l'analyse de cette première solution sous l'angle du contrôle

Dans le deuxième exemple (voir figure 4), une construction progressive est aussi visible illustrant le caractère dynamique du processus de contrôle qui se met en place. Analysons plus à fond celui-ci.

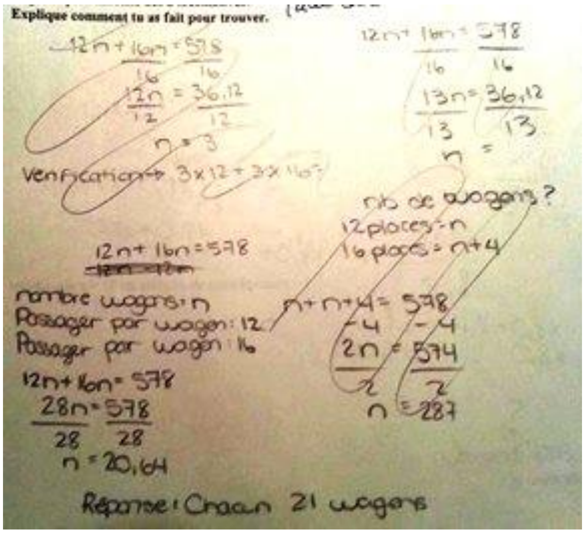


Figure 4. Un deuxième exemple d'engagement algébrique illustrant la construction progressive d'un contrôle syntaxique

La démarche de l'élève dans l'ordre chronologique est présentée dans le tableau 7.

1[re] tentative	2[e] tentative	3[e] tentative	4[e] tentative
$12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ $\frac{12n}{12} = \frac{36{,}12}{12}$ $n = 3$ Vérification : $3 \times 12 + 3 \times 16 =$	$12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ $\frac{13n}{13} = \frac{36{,}12}{13}$ $n =$	Nbre de wagons ? 12 places = n 16 places = n+4 $n + n + 4 = 578$ -4 -4 $\frac{2n}{2} = \frac{574}{2}$ $n = 287$	Nbre de wagons : n Passagers par wagon : 12 Passagers par wagon : 16 $12n + 16n = 578$ $\frac{28n}{28} = \frac{578}{28}$ $n = 20{,}64$ Réponse : chacun 21 wagons

Tableau 7 – Reconstitution d'une deuxième copie d'élève (voir figure 4) dans l'ordre chronologique qui est celui de l'écriture par l'élève observé

Dans les quatre tentatives de résolution effectuées par cette élève, trois d'entre elles présentent une mathématisation du problème ($12n+16n = 578$) indiquant un contrôle sémantique sur le processus de symbolisation : ce dernier rend compte des différentes grandeurs en jeu et de leurs relations, l'inconnue y est explicitée ainsi que chacun des taux (voir figure 4 en bas à gauche ou tableau 7, 4[e] tentative). Ce sont ici des difficultés d'ordre syntaxique qui vont amener l'élève à revenir sur sa résolution. Ainsi, dans ce qui est sûrement son premier essai (voir figure 4 en haut à gauche tableau 7, 1re tentative), l'élève cherche à se ramener à une équation plus simple du type $ax = b$ pour pouvoir résoudre (***Csy1***), elle divise les deux membres de son équation par 16 mais ne divise dans le membre de gauche qu'un des deux termes : $12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ (on retrouve ici une difficulté présente dans la solution précédente, voir figure 2), puis elle annule ce deuxième terme (faisant comme si $16n/16 = 0$). Elle obtient ainsi comme résultat n=3 obtenu à partir de l'équation $12n = 36{,}12$. L'élève s'aperçoit alors que sa réponse n'a pas de sens en procédant à une *vérification* qui, comme nous l'avons explicité précédemment (voir section 2), est une composante du contrôle (la vérification semble ici être liée à une procédure régulière déjà assimilée dans le processus de résolution de cette élève). Elle remplace pour cela la valeur de n trouvée dans l'équation de départ et constate (probablement avec un calcul mental) qu'elle n'obtient pas les 578 passagers attendus. Ce constat l'amène à revoir sa démarche de résolution. On peut en effet noter une expression de doute puisque l'élève barre cette première démarche. La résolution de l'équation est alors reprise (voir figure 4 en haut à droite ou tableau 7, 2e tentative), elle procède comme la première fois. La différence/le réajustement réside toutefois dans le résultat de la division de $16n/16$ qu'elle interprète cette fois-ci correctement $\frac{16n}{16} = n$ (faisant apparaître un contrôle syntaxique – ***Csy2*** – dans la manipulation de l'expression). La poursuite de la résolution l'amène à trouver pour n une valeur similaire à celle trouvée précédemment. Nous pouvons remarquer qu'elle ne se rend pas jusqu'au calcul de n, elle constate rapidement que la réponse n'est pas appropriée. Elle barre alors sa deuxième tentative de résolution et va se donner une équation intermédiaire ($n+n+4 = 578$, voir tableau 7, 3e tentative), plus simple, lui servant de tremplin à la construction d'un contrôle syntaxique. Cette équation intermédiaire ne traduit pas en effet pour elle la mathématisation du problème (on le voit bien puisqu'elle revient par la suite à l'équation qui a toujours été la sienne depuis le début (figure 4 en bas à gauche ou tableau 7, 4e tentative). Elle lui permet dans l'action de retrouver les transformations des expressions à faire pour résoudre (enlever une même quantité connue de part et d'autre de l'égalité, ***CSy3***, ajouter les deux quantités inconnues, ***Csy4***, avant de diviser de part et d'autre de l'égalité par le coefficient de l'inconnue ***Csy5***). Ce passage va lui permettre, dans sa 4e tentative, de revenir sur la mathématisation de départ et de mettre à profit le contrôle syntaxique construit précédemment dans sa résolution. Enfin, comme c'est le cas pour la production précédente analysée, l'élève revient sur la réponse trouvée en l'arrondissant à l'entier supérieur et interprète ce résultat en contexte.

Que se dégage-t-il de cette analyse ?

C'est ici une construction progressive d'un contrôle syntaxique qui se manifeste (comme on peut le voir dans les réajustements et le répertoire de « règles » de transformations des expressions, valides, qui se manifestent dans l'action). Cette construction prend appui sur un contrôle sémantique dans la mathématisation du problème (qui se manifeste dès le départ et que l'élève maintiendra tout au long du processus de résolution). Il est intéressant de constater la manière dont cette élève arrive à se réajuster dans son contrôle syntaxique de la résolution et de la manipulation des expressions. Elle perçoit à travers une *vérification* que le résultat auquel elle arrive ne fonctionne pas et interroge alors la résolution : elle perçoit ainsi d'abord que sa manipulation sur le monôme $16n$ (qu'elle annule en divisant par n) n'est pas correcte. Elle corrigera celle-ci par n (il y a donc là un premier *repérage d'erreur*) qu'elle ajoutera au $12n$ de l'équation de départ. Elle est alors consciente que la réponse qu'elle a obtenue ne fonctionne toujours pas (puisqu'elle est du même ordre de grandeur que la précédente). C'est la résolution de l'équation $n+n+4=578$, une équation intermédiaire, plus simple, qui lui permet de retourner à l'équation de départ et de la résoudre correctement. On retrouve ici un processus mis en évidence par Richard (1990/1998, p. 85), qui consiste pour comprendre à *particulariser un schéma* (voir figure 5 pour les éléments qui ressortent de cette analyse).

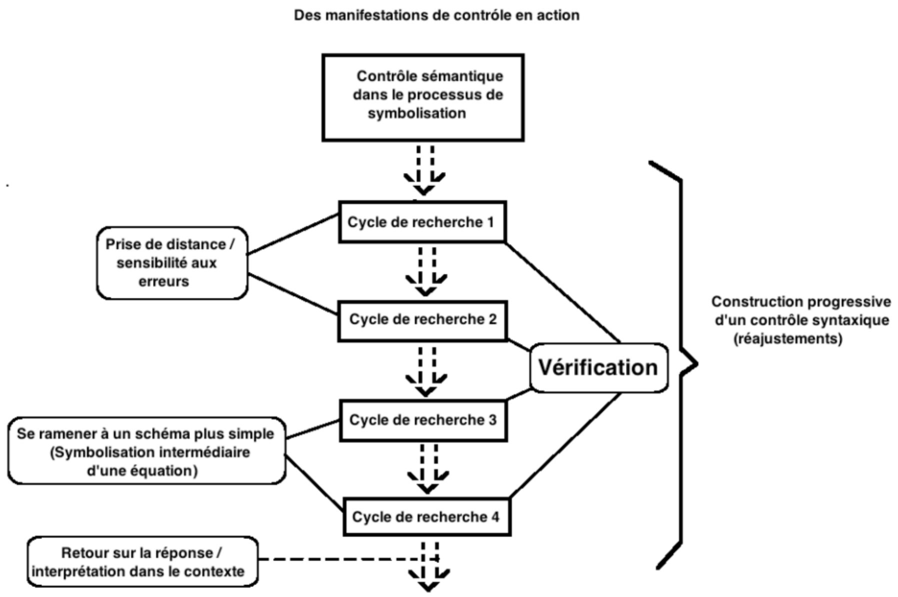


Figure 5. Ce qui ressort de l'analyse de cette deuxième solution sous l'angle du contrôle

Un troisième exemple nous fait entrer dans un processus de symbolisation et de résolution non standards (voir figure 6).

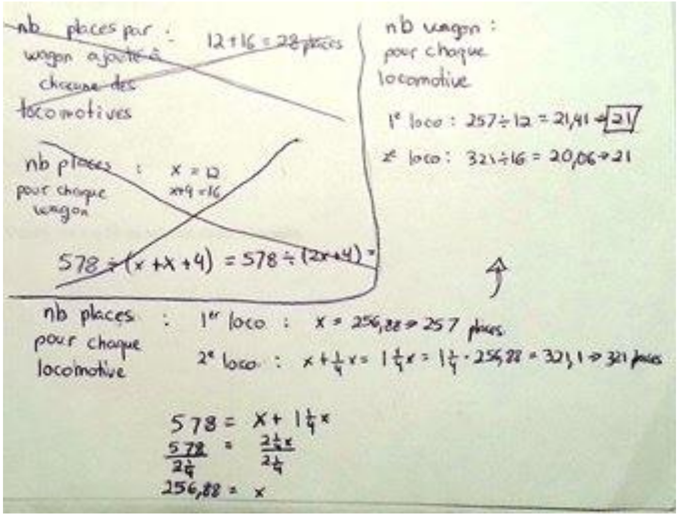


Figure 6. Un troisième exemple d'engagement algébrique non standard

Une première résolution arithmétique	Vers une résolution algébrique
Nbre de places par wagon ajouté à chacune des locomotives : 12+16=28 places Nbre de places pour chaque wagon : $x = 12$ $x+4 = 16$ $578 \div (x + x + 4) = 578 \div (2x + 4) =$	Nbre de places pour chaque locomotive : 1ère loco : x 2e loco : $x + \frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4}x$ $578 = x + 1\frac{1}{4}x$ $\frac{578}{2\,{}^1\!/_4} = \frac{2\,{}^1\!/_4\,x}{2\,{}^1\!/_4}$ $256{,}88 = x$ 1re loco : $x = 256{,}88$ → 257 places 2e loco : $x + \frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4}.256{,}88 =$ $321{,}1$ → 321 places Nbre de wagons pour chaque locomotive : 1re loco : $257 \div 12 = 21{,}41$ → $\boxed{21}$ 2e loco : $321 \div 16 = 20{,}06$ →21

Tableau 8 – Reconstitution de la copie de l'élève de la figure 6 dans l'ordre chronologique qui est celui de l'écriture par l'élève observé

L'élève amorce la résolution de façon arithmétique, en trouvant 28 places (il forme en quelque sorte un grand wagon combinant le wagon à 12 places et le wagon à 16 places, voir tableau 8, résolution arithmétique). Il pourrait ensuite poursuivre cette résolution arithmétique en divisant le nombre de passagers à transporter par 28 pour trouver le nombre de wagons, mais la nécessité qu'il ressent d'y aller algébriquement (effet de contrat, nous sommes en secondaire 3) va le conduire à vouloir introduire une inconnue. Son processus de symbolisation est alors influencé par son raisonnement arithmétique (il s'agit en quelque sorte d'une pseudo stratégie de résolution algébrique). Il pose en effet comme inconnues x et x+4, deux valeurs qui sont en fait connues (il écrit d'ailleurs x=12 *et* x+4=16) et tente alors une mathématisation du problème sous la forme de $578 \div (x + x + 4)$, qu'il simplifie en $578 \div (2x + 4)$, une symbolisation qui rend compte du raisonnement arithmétique qu'il avait amorcé (578÷28). Ne sachant comment traiter la dernière expression obtenue qu'il ne peut traduire en équation, l'élève barre cette première tentative de résolution.

L'élève reprend alors la mathématisation du problème en s'appuyant cette fois sur un choix non standard d'inconnue, le nombre de passagers dans le premier train (celui comprenant des wagons à 12 places), et tente alors de reconstruire, à partir de celui-ci, le nombre de passagers qu'on devrait retrouver dans le deuxième train, qu'il identifie comme $x + \frac{1}{4}x$(voir figure 6 en bas ou tableau 8 la résolution algébrique). Ce ¼ exprime en fait que 16 est formé de 12 et de ¼ de 12 (l'élève fait ici une erreur, on aurait dû retrouver 1/3), cette relation entre le nombre de passagers dans chaque wagon se transférant pour l'ensemble des passagers dans chacun des trains puisqu'on a le même nombre de wagons. Les inconnues identifiées, l'élève pose alors l'équation $578 = x + 1\frac{1}{4}x$ (voir figure 6 en bas). Cette équation traduit le fait que le nombre de passagers du premier train et celui du deuxième train donnent le nombre total de passagers, et précise la relation entre le nombre de passagers dans chacun des trains. Cette reconstruction témoigne ainsi d'une grande maîtrise des relations entre les grandeurs (même s'il y a erreur).

Un contrôle *syntaxique* est également présent à travers la résolution de l'équation et la manipulation des expressions. L'élève gère ici la résolution avec des nombres fractionnaires qu'il maîtrise parfaitement : $x + {}^{1}/_{4}\,x$ est remplacé par l'expression équivalente $1\,{}^{1}/_{4}\,x$; $x + {}^{1}/_{4}\,x\,{}^{1}/_{4}$ est remplacé par l'expression équivalente $2\,{}^{1}/_{4}\,x$, et on divisera par $2\,{}^{1}/_{4}\,x$ les deux membres de l'égalité pour retrouver la valeur de x, une résolution qui n'est pas standard.

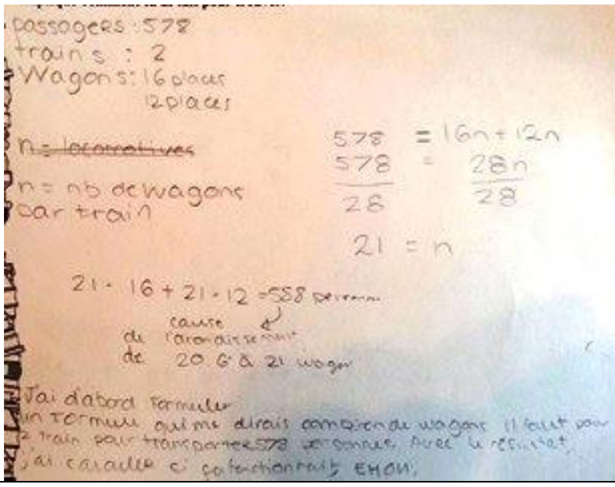
Un retour au problème est également visible mobilisant une interprétation en contexte. L'inconnue x trouvée qui correspond à 256,88, est en effet placée à côté de ce qu'il a identifié comme 1er loco et il calcule pour la 2^{e} loco, la valeur de $x + {}^{1}/_{4}\,x$. Ces nombres trouvés sont arrondis (il s'agit d'un nombre de places).

Finalement et tel que le montre l'élève avec une flèche (voir figure 6 en haut à droite), il trouve le nombre de wagons pour chacun des trains qu'il arrondit également cette fois-ci pour répondre à la contrainte sur le même nombre de wagons dans les deux trains.

L'analyse précédente traduit ainsi, comme dans les autres cas, le caractère dynamique de cette activité de contrôle. Un contrôle sémantique se construit dans l'action à travers un choix véritable d'inconnue, non standard, une maîtrise des relations entre les différentes grandeurs en jeu dans le problème, nourrie par un raisonnement arithmétique préalable. Un contrôle syntaxique est également visible dans la résolution algébrique avec des nombres fractionnaires. De plus, l'élève s'appuie sur une interprétation, un regard sur la réponse et sur les contraintes imposées dans l'énoncé du problème et ce, tout le long de la résolution.

L'analyse des productions des élèves du groupe nous permet d'aller plus loin sur certaines de ces composantes du contrôle, notamment la vérification et le retour au problème.

La vérification va ainsi recouvrir différentes formes. Nous avons vu, dans le deuxième exemple, que la vérification est ici associée à un retour à l'équation initiale (en remplaçant la valeur trouvée dans cette équation) et non à un retour au problème (voir figure 4). Le risque existe dans ce cas d'une vérification qui n'invalide nullement le résultat, lorsque l'équation par exemple ne rend pas compte des relations entre les données du problème (la réponse au problème est fausse mais la vérification qui s'appuie sur un retour à l'équation dira que cela est juste). Dans d'autres cas (voir exemple ci-dessous, figure 7), la vérification va être associée à un retour au contexte de départ. Ainsi cet élève, après avoir résolu l'équation et arrondi le résultat, va remplacer cette valeur dans l'équation de départ et dira explicitement qu'elle ne retrouve pas les 578 passagers de départ à cause de l'arrondi.



Retranscription

n = nb de wagons par train

$$578 = 416n + 12n$$

$$\frac{578}{28} = \frac{28n}{28}$$

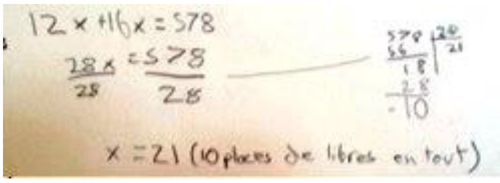
$$21 = n$$

$21\,.\,16 + 21\,.\,12 = 588\ personnes$ (à cause de l'arrondissement de 20,6 à 21 wagons).

J'ai d'abord formuler une formule qui me dirais combien de wagons il faut pour 2 trains pour transporter 578 personnes. Avec le résultat, j'ai calculé si ça fonctionnerait, EH OUI!

Figure 7. Un autre exemple de vérification

Qu'en est-il maintenant du retour sur la réponse ? (à la base, rappelons-le, du choix de ce problème). Les trois exemples précédents montrent, chacun à leur façon, un retour au problème suite à l'obtention d'un nombre décimal. La production écrite ci-dessous (voir figure 8) traduit un retour au problème qui va plus loin.



Retranscription

$$12x + 16x = 578$$

$$\frac{28x}{28} = \frac{578}{28}$$

$$\begin{array}{r|l} 578 & \underline{28} \\ \underline{56} & \;21 \\ 18 & \\ \underline{28} & \\ -10 & \end{array}$$

x = 21 (10 places de libres en tout)

Figure 8. Interprétation de la réponse en contexte

Après avoir procédé à la mise en équation, l'élève effectue 578÷28 en donnant du sens à l'algorithme de division en contexte (c'est ce que l'interprétation révèle) : il reste *18* passagers à placer et il dispose pour cela d'un grand wagon de 28 places. Il restera alors 10 places. Il y a ici la mise en place d'un contrôle au moment même où l'élève opère.

c) Différentes manifestations de contrôle dans la résolution arithmétique du problème

La résolution arithmétique avance, nous l'avons dit au tout début de ce texte, en prenant appui sur des grandeurs connues et des significations contextuelles. Quelles sont dans ce cas les manifestations plus précises de contrôle qui ressortent de l'analyse des solutions des élèves? Comme nous l'avons précisé, pour résoudre ce problème, une prise en compte de différentes contraintes est nécessaire. Elle constitue une des manifestations du contrôle, non anticipée préalablement, et particulièrement nécessaire dans un engagement arithmétique. C'est à travers des difficultés que nous avons pris conscience de l'importance de cette composante, visible dans l'ensemble des procédures qui procèdent notamment par essais erreurs, mais également dans d'autres cas comme le montre l'exemple suivant (voir figure 9).

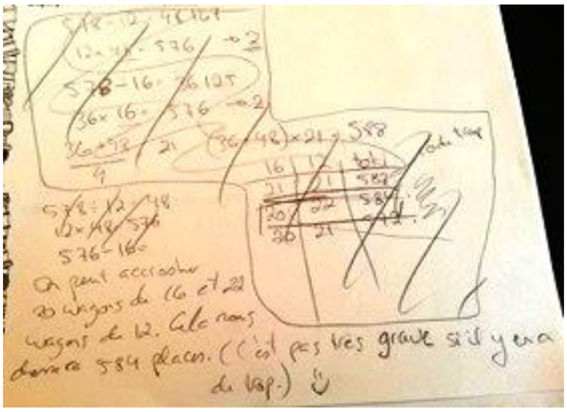


Figure 9. Une solution arithmétique illustrant une construction progressive et des manifestations de contrôle

<table>
<tr><th>1re tentative</th><th>2e tentative</th></tr>
<tr><td>

$578 \div 12 = 48{,}167$
$12 \times 48 = 576$
$578 \div 16 = 36{,}125$
$36 \times 16 = 576$
$\frac{36 + 48}{4} = 21$
$(36 + 48) \times 21 =$

<table>
<tr><th>16</th><th>12</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>21</td><td>21</td><td>588 (10 de trop)</td></tr>
<tr><td>20</td><td>22</td><td>584</td></tr>
<tr><td>20</td><td>21</td><td>572</td></tr>
</table>

</td><td>

$578 \div 12 = 48$
$12 \times 48 = 576$
$576 \div 16 =$
On peut accrocher 20 wagons de 16 et 22 wagons de 12. Cela nous donnera 584 places (c'est pas très grave si il y en a de trop) ☺

</td></tr>
</table>

Tableau 9 – Reconstitution de la copie de l'élève de la figure 9 dans l'ordre chronologique qui est celui de l'écriture par l'élève observé

Cet exemple met de l'avant, tout comme précédemment pour la résolution algébrique, le caractère dynamique du contrôle. Si on reconstitue les différentes tentatives de l'élève, nous pouvons remarquer (figure 9 en haut ou tableau 9, 1re tentative) qu'elle suppose en premier que les deux trains ont des wagons à 12 places, elle calcule alors qu'il faudrait 48 wagons pour transporter les 578 passagers (après vérification, 2 passagers ne pourraient alors monter, ce qu'elle identifie par une flèche et un 2). Par la suite, elle se penche sur le cas où les deux trains auraient des wagons à 16 places, il faudrait alors 36 wagons pour transporter 578 passagers (encore là, après vérification, il y aurait 2 passagers qui ne pourraient prendre place à bord du train, ce qu'elle identifie). Toutefois, on veut deux trains, un avec des wagons à 12 places et un autre avec des wagons à 16 places, l'élève calcule alors la moyenne de wagons qu'il faudrait pour avoir ces deux trains et qu'ils soient équilibrés (48 correspond à 2 trains à 12 places par wagon ; 36 correspond à 2 trains à 16 places par wagon) et arrive au résultat (48+36)/4 = 21 wagons par train. Nous pensons que l'élève ressent à ce stade un doute sur le résultat obtenu dû aux 2 passagers « non pris en charge » à chaque cas de figure considéré. Elle procède alors à une vérification en écrivant (48+36)×21 (une trace montrant une difficulté dans le contrôle des grandeurs ici en jeu) mais ne fait pas le calcul (elle remarque certainement que le résultat est nettement supérieur au nombre de passagers initial).

Elle reprend alors la vérification sous forme de tableau en identifiant dans chaque colonne le nombre de wagons à 16 places, le nombre de wagons à 12 places et le total. C'est en calculant le nombre de passagers total pour les 21 wagons trouvés précédemment que l'élève obtient 588 passagers. Elle semble alors déboussolée, focalisant sur la donnée des 578 passagers qui est pour elle une contrainte stricte à respecter et en oublie celle sur le même nombre de wagons. Cette centration sur les 578 passagers l'amène à procéder à des essais (changement de stratégie) et à considérer un nombre de wagons différent pour chacun des trains. Ses différents essais ne lui permettront pas de retrouver les 578 passagers initiaux. Nous pouvons supposer qu'à ce moment l'élève s'est arrêtée, a regardé ce qu'elle avait produit et constaté qu'elle tournait en rond. Elle a alors barré ce début de deuxième tentative de résolution (voir tableau 9, 2e tentative), encadré la première démarche de résolution et expliqué qu'on accrochera aux deux trains deux nombres de wagons différents. Elle est consciente qu'elle n'obtient pas ainsi les 578 passagers initiaux mais elle précise que « ce n'est pas très grave s'il y en a trop ».

Que ressort-il de cette reconstitution ?

Le contrôle relève là aussi, tout comme pour la résolution algébrique, d'un processus dynamique : il y a ***construction progressive d'un contrôle*** vis à vis des grandeurs, de leurs relations, des contraintes, visible à travers les différents réajustements qui s'opèrent. Là s'arrête toutefois la comparaison puisque ce contrôle, on le voit bien dans l'analyse, est avant tout sémantique, il est constamment nourri par la signification contextuelle des grandeurs en présence. La ***prise en compte simultanée des contraintes*** joue un rôle extrêmement important tout au long du processus, quelque chose qu'on ne retrouvait pas en algèbre puisqu'une fois la mathématisation posée, la résolution s'appuie sur un contrôle davantage syntaxique et d'autres règles du jeu. Dans cette résolution arithmétique, différentes manifestations du contrôle en action ressortent, qui rejoignent celles qu'on retrouvait en algèbre : ***une expression de doute*** (face dans ce cas à la réponse, qui est interprétée par exemple au regard des contraintes, il faut arriver à

578 passagers) ; ***une vérification mais qui n'apparaît pas juste en fin de résolution***. On voit en effet apparaître des vérifications locales en cours de processus (on revient par exemple sur un calcul, 578÷12=48, en vérifiant à l'aide de l'opération inverse 48×12=576); ***un retour sur la réponse et une interprétation, qui n'apparaît pas juste en fin de résolution*** mais aussi localement tout au long du processus (par exemple la réponse au calcul 48×12=576 effectué à des fins de vérification, est interprétée en contexte, il y aura 2 personnes qui ne seront pas transportées). Cette analyse vient ainsi nuancer et enrichir certaines composantes du contrôle.

3.2. Analyse des manifestations de contrôle dans la résolution du problème Café/Croissants.

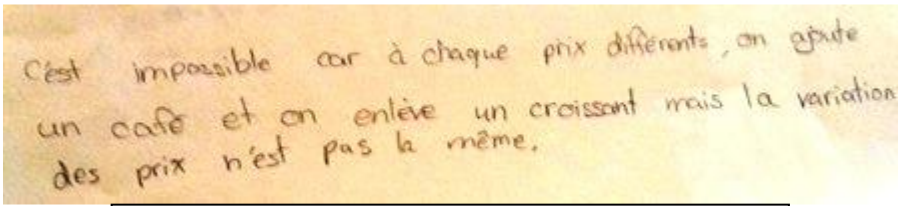
Rappelons ici les raisons qui ont été à la base du choix de ce problème, très différentes de celles présidant au choix du problème des trains : voir la sensibilité à la contradiction que manifeste l'élève et s'il pourra dépasser cette contradiction.

Tout comme dans l'étude menée par Schmidt (1994), on observe que la majorité des élèves ne perçoit pas que les trois équations (contraintes) sont incompatibles, n'interrogeant jamais le système d'équations lui-même (ou les contraintes) et leur compatibilité. Ainsi dans le cas de la résolution algébrique, les étudiants de Schmidt s'engagent dans une résolution et tournent en rond, revenant plusieurs fois sur leurs manipulations. Dans le cas de notre étude, la résolution algébrique conduit à un blocage. Ne possédant pas, en troisième année du secondaire, les connaissances nécessaires pour résoudre un tel système, les élèves vont en effet s'arrêter en général dès le début, ou dans de très rares cas, après avoir amorcé une manipulation. Ils vont alors poursuivre arithmétiquement, ces manipulations donnant lieu, tout comme pour la résolution algébrique des étudiants de Schmidt, à plusieurs essais, dans lesquels les élèves sont convaincus qu'ils arriveraient à un résultat, comme nous le montre les extraits suivants de verbatim (tirés des entrevues avec deux élèves) : « je ferais par essais-erreurs, ça pourrait prendre jusqu'à 1000 essais et puis à un autre moment je l'aurais ». Ou cet autre extrait dans lequel l'élève explique ce qu'il ferait « je pourrais diviser par 2 puis par 6, ça donne… Je ne vois pas autre chose que d'essayer par essais-erreurs, c'est juste long ». À la question de la chercheure « tu penses que tu finirais par trouver ? », l'élève répond « oui, si j'y passe toute la nuit ».

Par contraste, certains élèves expriment un *malaise*. Celui-ci se traduit par le fait qu'ils ne sont pas convaincus qu'ils vont arriver à trouver des prix pour le café et pour le croissant qui satisfont aux trois énoncés. Comme nous l'avons vu dans la section 2, ce malaise est une manifestation d'une *sensibilité à la contradiction*. Ainsi dans l'exemple ci-dessous (voir extrait de verbatim tiré d'une entrevue), l'élève perçoit une certaine contradiction. Cette résolution arithmétique, outre le malaise qu'elle exprime, rend compte d'un contrôle sémantique, qui se met en place ici autour de la gestion des trois contraintes.

> Chercheure : est-ce que si tu faisais d'autres essais, tu finirais par trouver ?
> Élève : Je ne sais pas, ça n'a pas l'air proportionnel.
> Chercheure : qu'est-ce que tu veux dire ?
> Élève : je ne sais pas, peut-être qu'il y a des coupons rabais qui font que quand tu achètes 2 croissants, tu as un café à moitié prix, je ne sais pas.

Dans le raisonnement de type arithmétique, un raisonnement sur les écarts permet, avant tout engagement dans la résolution de déceler la contradiction. Pour 1 café et 3 croissants, le prix est de 2,70$. Pour 2 cafés et 2 croissants, le prix est de 3$, donc si on achète un café de plus et qu'on prend un croissant de moins, on a une différence de prix de 0,30$. Si pour 2 cafés et 2 croissants le prix est de 3$ et pour 3 cafés et un croissant, il est de 3,50$, le même écart devrait se retrouver puisqu'on ajoute un café et qu'on a un croissant de moins. Or on retrouve ici un écart différent, de 0,50$! Ce problème n'a donc pas de solution. Dans la production ci-dessous (figure 10), la seule de ce type retrouvée dans le groupe, l'élève démontre un *engagement réfléchi* en s'arrêtant devant l'énoncé du problème avant toute résolution. Il arrive ainsi à percevoir *la contradiction et à la dépasser*, son raisonnement se basant sur cette idée d'écart.



Retranscription
C'est impossible car à chaque prix différents, on ajoute un café et on enlève un croissant mais la variation des prix n'est pas la même.

Figure 10. Un exemple de production qui montre le dépassement de la contradiction.

Ce qui ressort de l'analyse des productions des élèves à ce problème. Le contrôle se manifeste ici de différentes façons. Sans percevoir pour la majorité des élèves la contradiction entre les trois énoncés, le processus de résolution arithmétique illustre toutefois, dans certains cas, un engagement réfléchi à travers des essais contrôlés qui permettent de réduire le champ des possibles et une prise en compte des trois contraintes. On y relève aussi une sensibilité à la contradiction dans les propos des élèves qui expriment un malaise. Le contrôle se manifeste également par un dépassement de la contradiction qui s'appuie sur un arrêt sur les données du problème avant toute résolution.

4. Discussion

L'activité de contrôle est souvent associée, nous l'avons vu au tout début de cet article, à la vérification d'un résultat ou à sa validation. Les travaux de recherche nous font également part des problèmes d'apprentissage que les élèves ont en algèbre du point de vue sémantique et/ou syntaxique. Nous avons, dans ce qui précède, abordé le problème du contrôle dans la résolution d'une tâche mathématique d'un point de vue plus large. Nous nous sommes ainsi intéressés tout au long de notre projet de recherche à déceler les différentes manifestations que nous pouvons considérer comme faisant partie d'une activité cognitive, que nous avons désignée par contrôle, exercée par l'élève.

Notre interprétation de diverses recherches nous avait amené à relever, dans un premier temps, différentes composantes de ce contrôle : i) contrôle syntaxique, ii) contrôle sémantique, iii) anticipation, iv) vérification, v) perception des erreurs, vi) sensibilité à la contradiction et son dépassement, vi) engagement réfléchi et vii) discernement/choix éclairé. Celles-ci ont guidé notre choix des deux problèmes (et d'autres questions) qui ont été soumis aux élèves. Ainsi sont illustrées, à travers ces deux tâches plus spécifiquement ciblées dans cet article, certaines composantes théoriques du contrôle, qui ont été confirmées par l'analyse. Toutefois, l'analyse des productions des élèves s'est avérée beaucoup plus riche que l'analyse préalable de ces deux problèmes. Nous reviendrons dans cette discussion principalement sur le regard nouveau qu'amène cette analyse, sur cette conceptualisation du contrôle, avant de s'attarder à la manière dont se manifeste le contrôle en arithmétique et en algèbre et aux différences que nous révèle cette analyse.

Notre analyse contribue tout d'abord à mettre en évidence le *caractère progressif et dynamique du contrôle* (voir figures 3, 5, 6 et 9) et fait ressortir la profonde *imbrication,* dans le cas de la résolution algébrique, des *dimensions sémantique et syntaxique*, qui ne constituent pas deux dimensions disjointes l'une de l'autre. Autrement dit elle remet en question la manière dont est souvent envisagé le travail en algèbre dans un contexte de résolution de problèmes, conçu comme faisant appel de manière linéaire à une phase de mathématisation prenant appui sur le contexte, suivie d'une phase de résolution détachée du contexte qui est reliée à un ensemble de règles syntaxiques, puis d'un retour au contexte dans l'interprétation éventuelle de la réponse. L'analyse ici ressortir l'importance de considérer l'imbrication de ces différents aspects dans la fonction de contrôle exercée sur l'activité de résolution de problèmes en algèbre. Ce contrôle se manifeste à *différents moments* du processus de résolution (par exemple arrêt/ prise de distance avant toute résolution, anticipation, boucles de vérification locales et d'interprétation, expression de doute en cours de route, vérification et interprétation en fin de processus) et prend *différentes formes*. Elle se manifeste ainsi dans le questionnement sur le contexte avant toute résolution, dans le processus de symbolisation de relations avec des retours sur celui-ci et des réajustements, dans les manipulations d'expressions, dans un choix d'inconnue et un processus de symbolisation non standards, réfléchis, ou encore, en arithmétique, dans un contrôle sur les grandeurs en jeu et leurs relations, dans une prise en compte simultanée des contraintes…

Cette analyse vient *confirmer certaines des composantes* mises en évidence dans notre conceptualisation initiale (anticipation, vérification, perception des erreurs, engagement réfléchi, retour sur la réponse et interprétation, choix éclairé) *tout en les nuançant et les enrichissant considérablement*. Ainsi la *vérification* et le *retour sur la réponse* n'apparaissent pas, par exemple, seulement en fin de processus, mais sont aussi présentes localement en cours de processus. On peut parler de boucles de vérification dans un processus cyclique de construction progressive du contrôle, s'éloignant d'un modèle statique et linéaire. L'analyse nous amène également à voir que cette vérification peut être de différente nature (retour à l'équation initiale, retour au contexte de départ ou à des éléments du contexte, croisement avec une anticipation préalable). Dans le même ordre d'idée, le *choix éclairé* ne réfère pas seulement à un choix de stratégie plus efficace parmi un ensemble de possibles (ce que nous n'avons nullement observé dans l'analyse de ces tâches) mais aussi à une capacité de percevoir, face à l'utilisation de règles syntaxiques dans la résolution d'équations, au delà de leur validité, leur efficience à des fins de résolution (voir tableau 3 à propos de la résolution de $16n+12n=578$).

De *nouvelles composantes* non anticipées, sur lesquelles prend appui cette construction progressive d'un contrôle sémantique et syntaxique, permettent enfin d'enrichir cette conceptualisation théorique, tels *une distance critique face à l'énoncé* (figure 1), *un recours à un schéma intermédiaire (plus simple) utilisé comme tremplin pour dépasser une difficulté* (figure 4) ou encore la *prise en compte de différentes contraintes* dans la résolution de type arithmétique (figure 9).

L'analyse montre enfin *l'interrelation entre ces diverses composantes*, qui s'épaulent l'une l'autre. Ainsi le contrôle conçu comme un processus va prendre appui sur une anticipation (de l'ordre de grandeur de la réponse) et une vérification (au regard de cette anticipation, ou des contraintes de l'énoncé), une sensibilité aux erreurs, une prise de distance face à la réponse ou la démarche, une expression de doute (conduisant à ne pas retenir ce que l'on a fait), un dépassement des erreurs (visible dans les réajustements que fait l'élève). À travers les productions des élèves, dans le problème du train, il est en effet possible de voir comment l'anticipation se révèle une composante du contrôle que les élèves utilisent (même si cela n'est pas explicite dans leurs productions) en cours de résolution, et qui les conduit à un doute ou une vérification, parce qu'ils observent des incohérences entre ce qu'ils attendent et ce qu'ils obtiennent (voir figure 3). Cela confirme les résultats de Cipra (1985) et de Coppé (1993) à l'effet que la vérification, en plus d'être une stratégie dans la résolution de problèmes, joue un rôle inconscient de surveillance face aux incohérences que l'élève peut retrouver dans le processus de résolution. Dans le même sens, l'*engagement réfléchi* pourrait être en lien avec une « prise en compte des contraintes » et la perception d'erreurs. Cet *engagement réfléchi* permet aux élèves de faire une sélection de chemin au cours du processus, par un discernement ou par une prise de distance, qui pourrait être liés à un doute. Globalement, contrôle sémantique et syntaxique, anticipation, engagement réfléchi, vérification, sensibilité aux erreurs, doute, prise en compte des contraintes, etc., n'apparaissent pas ainsi comme des éléments isolés. Nous devons voir ces *composantes comme un réseau dynamique* : au fur et à mesure que l'élève avance dans la résolution d'un problème, elle/il renforce ce réseau promouvant, en retour, un enrichissement de chacune de ces composantes.

Que dire maintenant du contrôle examiné sous l'angle des approches arithmétiques et algébriques ? L'analyse a permis de repérer des *composantes du contrôle qui sont communes à ces deux approches* (vérification, retour sur la réponse, perception des erreurs, sentiment de doute, engagement réfléchi, etc.) mais aussi des *différences*. Face à une tâche de type algébrique, les restrictions sont prises en compte directement dans la mise en équation, de sorte que « le contexte s'éloigne » et que l'élève se concentre sur le traitement algébrique engageant un contrôle syntaxique. Une fois arrivé à un résultat, c'est le contexte qui émerge à nouveau, et qui détermine s'il faut faire un retour en arrière ou non. Pendant la résolution, lorsque le processus est long ou complexe, un questionnement, un doute peut émerger, et le contrôle syntaxique s'appuie sur une perception des erreurs, conduisant l'élève à se réajuster. Ainsi, une anticipation d'un résultat dans un contexte algébrique est probablement préservé pendant le traitement algébrique, et lorsque l'élève arrive à une réponse, le doute fait appel à cette anticipation et au contexte et va le renvoyer à l'analyse de sa procédure (tableau 2bis et figure 3). À l'opposé, dans le raisonnement arithmétique, le contexte est toujours présent (il interfère constamment avec la pensée de l'élève) de sorte que ce sont les contraintes du problème que l'élève devra prendre en compte (voir procédures et explications de la figure 9). La vérification et le retour sur le problème ne se manifestent pas non plus de la même façon dans l'un et l'autre cas. La vérification semble se faire après la résolution dans le cas de l'algèbre, elle intervient à différents moments en arithmétique dans une résolution qui garde une emprise constante sur la signification contextuelle.

Ce que nous avons montré dans cet article met globalement en évidence à propos du contrôle une activité cognitive exercée par l'élève différente de celle liée aux connaissances mathématiques (en jeu dans cette résolution) ou aux stratégies de résolution de problèmes, agissant comme « régulateur » de cette résolution. Cette activité cognitive guide les décisions des élèves pendant la résolution de problèmes, et ce tout au long du processus. Pensons par exemple à la vérification qui a été motivée par une anticipation inconsciente, comme celle qui nous avertit quand on va traverser la rue et qu'on décide de la traverser ou de s'arrêter quand on voit une voiture s'approcher. Nous parlons d'une activité cognitive dynamique qui se développe en même temps que l'on progresse dans la résolution d'un problème, une activité cognitive qui est liée aux sentiments, qui va mettre l'élève dans un état de malaise quand l'élève repère une contradiction et qui va disparaître quand la contradiction est dépassée. Avons-nous suffisamment d'informations sur ce type d'activité cognitive ? Nous pensons qu'il faut continuer à faire des investigations qui pourront nous donner plus d'informations sur le sujet. Une analyse des manifestations du contrôle dans d'autres types de tâches en algèbre nous permettra de poursuivre cette réflexion.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique. Dans M. Baron A. Robert A. (Dir.), *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques* (p.29-54). Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

BALACHEFF, N. ET GAUDIN , N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, No. 65, http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/

BALACHEFF, N. ET GAUDIN , N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function, in Hitt, F., Holton D. and Thompson P. (Eds.), *Recherche in College Mathematics Education*, Volume VII, p. 207- 234.

BEDNARZ, N. ET DUFOUR-JANVIER, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans A. Daife (Ed) *Actes du colloque sur la didactique des mathématiques et la formation des enseignants* (pp 21-40). Marrakech (Maroc) : École Normale Supérieure de Marrakech.

BEDNARZ, N., JANVIER, B., MARY, C. ET LEPAGE, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique, *Actes du colloque sur l'émergence de l'algèbre* (pp 17-31). Montréal, CIRADE, Université du Québec à Montréal.

BEDNARZ, N. ET JANVIER, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: an analysis of problems. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual conference of the International group for the psychology of mathematics education* (Vol. II, pp. 64-71), 29 juillet - 3 août, Lisbon, Portugal.

BEDNARZ, N. ET JANVIER, B. (1996). Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for Research and Teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

BEDNARZ, N., ET SABOYA, M. (2007). Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire. Dans J. Giroux, D. Gauthier (dirs.). Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne (pp. 139-166). Montréal : Éditions Bande Didactique.

BOOTH, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit X, 5*, 5-17.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques, 7* (2), 33-115.

CHAACHOUA, H., NICAUD J-F ET BITTAR M. (2005). Détermination automatique des théorèmes-en-acte des élèves en algèbre. Le cas des équations et inéquations de degré 1. Tchounikine P., Joab M. et Trouche L. (Éds.), *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain* (*Actes de la conférence EIAH 2005*, Montpellier, pp. 33-44). Lyon : ENS Éditions.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2e partie). *Petit x*, *19*, 43-72.

CIPRA, B. (1985). *Erreurs… et comment les trouver avant le prof... ».* Paris : Ed. InterEditions.

COPPE, S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé.* Thèse de doctorat inédite. Université de Lyon.

HADAMARD, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris : Gauthier-Villars.

HITT, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 8, pp 255-271.

KARGIOTAKIS, G. (1996). *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques inédite. Université Paris VII - Denis Diderot.

KRUTETSKII, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children* (Translated from Russian by J. Teller, edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup). Chicago and London:The University of Chicago Press.

LEE, L., ET WHEELER, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic, 20*, pp 41-54.

LEMOYNE, G. (1989). La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. Dans J. Gaudreau (Éd.), *Repères, essais en éducation*. (pp 79-101). Montréal: Les publications de la Faculté des sciences de l'éducation.

LOCHEAD, J. ET MESTRE, J.P. (1988). From words to algebra : mending misconceptions. In A. F. Coxford (Ed.). *The ideas of algebra, K-12*. Yearbook of the national Council of teachers of mathematics (pp. 127-135). Reston : NCTM.

MARGOLINAS, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.* Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

MARGOLINAS, C. (1991). Interrelations between different levels of didactic analysis about elementary algebra. In F. Furinghetti (Ed.). Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (vol. II, pp. 381-388). Assisi, Italy : PME Program Committee.

MARY, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire.* Thèse de doctorat en éducation inédite. Université de Montréal.

MASON, J. (1994). *L'esprit mathématique.* Bruxelles : De Boeck Université.

MATZ, M. (1982). Toward a process model for High school algebra errors. In Sleeman and Browns (Eds.). *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York : Academic Press.

PIAGET, J. (1974). Recherches sur la contradiction. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellerier, C. Dami. M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, J. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, J. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulo. *Les différentes formes de la contradiction. Volume 2*. Paris : Presses Universitaires de France.

POLYA, G. (1945/1965). *Comment poser et résoudre un problème.* Éditions Jacques Gabay.

ROBERT, A. (1993). Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances. In M. Baron, A. Robert (Eds.) Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques. RR Laforia 93/18 (pp. 5-18). Paris : Institut Blaise Pascal.

RICHARD, J.F. (1990/1998). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions.* Université de Paris VII.

SABOYA, M. (2010). Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.

SCHMIDT, S. ET BEDNARZ, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics.* 32, 127- 155.

SCHMIDT, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes.* Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

SFARD, A. ET LINCHEVSKI, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228.

SLEEMAN, D.H. (1986). Introductory algebra: A case study of students' misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 25-52.

MIREILLE SABOYA
201, Av. President Kennedy
Montréal, QC., H2X 3Y7
saboya.mireille@uqam.ca

NADINE BEDNARZ
201, Av. President Kennedy
Montréal, QC., H2X 3Y7
nadinebednarz@yahoo.ca

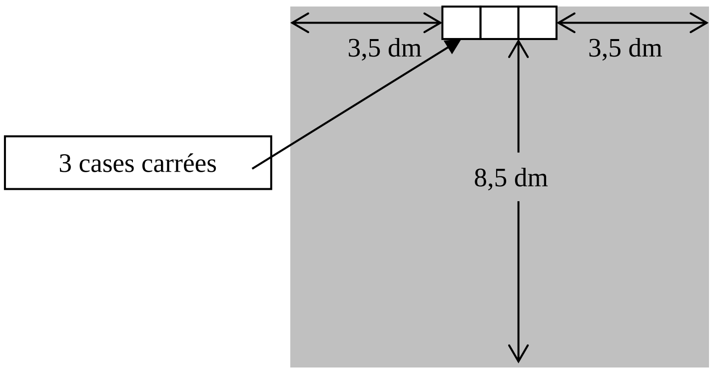
FERNANDO HITT
201, Av. President Kennedy
Montréal, QC., H2X 3Y7
hitt.fernando@uqam.ca

ANNEXE

LE QUESTIONNAIRE

Problème 1[16] : Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives?
Explique comment tu as fait pour trouver.

Problème 2[17] **: Le coffre à jouets**
Je veux construire un coffre à jouets. Ce coffre a deux caractéristiques : le fond de mon coffre est carré et dans ce fond, il y a 3 cases carrées dans lesquelles Mathilde va pouvoir ranger ses perles. Voici le plan du fond du coffre (le dessin n'est pas à l'échelle) :



Il manque des dimensions. Peux-tu m'aider à les trouver?

Problème 3[18] **:**
Trois sortes d'articles de sport ont été comptées dans un entrepôt. Pour les raquettes et les hockeys on a compté en tout 288 articles. S'il y a 5 fois plus de raquettes que de ballons et 48 hockeys de plus que de raquettes, combien y a-t-il d'articles de sport de chaque sorte dans l'entrepôt?
Explique comment tu as fait pour trouver.

---

[16] Cette situation est tirée et modifiée de Bednarz, Radford, Janvier et Lepage (1992).
[17] Ce problème a été inspiré d'une situation provenant d'un manuel français (Delord, R., Terracher, P.H., et Vinrich, G., 1993, *Mathématiques 3^e^*. Hachette Éducation. France) de troisième (élèves de 14-15 ans), modifié après consultation avec les professeurs de la section en didactique des mathématiques de l'UQAM.
[18] Ce problème provient des notes de cours du MAT2028, didactique de l'algèbre (session automne 2004), cours de deuxième année à l'UQAM destiné aux futurs enseignants de mathématiques au secondaire.

Problème 4[19] :
On a donné ce problème à Brigitte : Je vais au magasin et j'achète le même nombre de livres que de disques. Les livres coûtent 2 dollars chacun et les disques coûtent 6 dollars chacun. Je dépense 40 dollars en tout.

a) Brigitte a résolu le problème et a répondu ceci : 2L + 6D = 40. Explique dans tes mots ce que signifie cette équation.
b) Julie a résolu le problème de la façon suivante :

$$2x + 6y = 40$$

Puisque x = y, je peux écrire 2x + 6x = 40 donc 8x = 40.
Cette dernière équation indique que huit livres coûtent 40$ donc un livre coûte 5$.

Trouve ce qui est incorrect dans ce que dit et ce que fait Julie. ***Explique pourquoi.***

Problème 5[20] :
Au restaurant, une tasse de café et trois croissants coûtent 2,70$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. ***Explique comment tu as fait pour trouver.***

Problème 6[21] :
Mélanie a-t-elle commis des erreurs en résolvant cette équation :

$4x + 3 = 2(7x – 1)$?

	Dis-moi ce qui est incorrect	Mets ce qu'elle aurait dû écrire
$4x + 3 = 2(7x – 1)$ $4x + 3 = 14x – 1$ $3 = 10x - 1$ $4 = 10x$ $\frac{2}{5} = x$ $2,5 = x$		

[19] Cette situation est tirée de Bednarz et Dufour-Janvier (1992), voir bibliographie.
[20] Ce problème provient du travail de thèse de Schmidt (1994), voir bibliographie
[21] Cette situation a été inspirée par deux livres du secondaire, Breton (1994, page 248, *Carrousel mathématique 2.* Deuxième secondaire, tome 2. Montréal, Québec : Centre Éducatif et Culturel inc.) et Delord, Terracher et Vinrich (1993, exercice 15 page 70).

Problème 7[22] :
a) Résous l'équation suivante : $0{,}8x - 0{,}2(0{,}4x + 6) = 6$
b) Vérifie que $x = 10$ est solution de cette équation.

Problème 8[23] :
Résous l'équation suivante :

$$x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$$

Problème 9[24] :
Alexandre a résolu l'équation ci-dessous. Aide-le à continuer.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 3(x - 2) - x + 9 \\ 2x + 3 &= 3x - 6 - x + 9 \\ 2x - 3x + x &= -6 + 9 - 3 \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

Problème 10[25] :
Résous l'équation suivante :

$$5(2 + x) + 5\,(2 - x) = 4$$

Problème 11 :
Que vaut $(2r + 1)$ dans l'expression $4(2r + 1) + 7 = 35$.
Explique comment tu as fait pour trouver.

Problème 12[26] :
L'énoncé $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6$ est-il toujours vrai, jamais vrai ou parfois vrai ?
Explique.

---

[22] Nous nous sommes inspirée de la situation proposée par Hitt (2004), mais l'équation a été adaptée à des élèves de secondaire 3. Référence : Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. Dans Gisèle Lemoyne (Éd.). *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude.* Volume 30 (1).
[23] Cette résolution d'équation est tirée de Bednarz et Dufour-Janvier (1992), voir bibliographie.
[24] Cette situation a été inventée par les chercheurs.
[25] Les chercheurs ont aménagé cette équation afin de vérifier l'engagement réfléchi des élèves quant à l'interprétation de 20 = 4.
[26] Cette situation provient de Lee et Wheeler (1989), voir bibliographie.

Problème 13[27] **:**

Un enseignant donne à ses élèves l'expression algébrique suivante :

$$\boxed{2(x-4)-x+1-(-x^2-5)}$$

Les élèves se regardent, perdus…. « Wow ! C'est bien compliqué ! » Élodie s'exclame alors « regardez, je l'ai transformé et je l'ai écrite comme ça : $\mathbf{x^2+x-2}$ ». Marc répond « ben moi je l'ai transformé aussi et j'ai trouvé $\mathbf{(x-1)(x+2)}$! »

« C'est super ! » dit l'enseignant. Ce dernier est très content, il te propose à toi de répondre à trois questions.

a) Laquelle de deux écritures, celle d'Élodie ou de Marc vas-tu utiliser pour savoir à peu près combien vaut l'expression algébrique quand x vaut 10. Pourquoi ?

b) Si tu veux résoudre $2(x-4)-x+1-(-x^2-5)=0$, laquelle des équations vas-tu choisir de résoudre : $x^2+x-2=0$ (celle d'Élodie) ou $(x-1)(x+2)=0$ (celle de Marc) ? Pourquoi ?

c) Si tu veux remplacer x par 1 dans l'expression algébrique de l'enseignant, ça risque d'être long…. Laquelle des deux autres expressions vas-tu plutôt choisir ? Pourquoi ?

[27] Cette situation est inspirée de celle présentée par Lenfant (2002). Référence : Lenfant, A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.* Thèse de doctorat inédite. Université Paris 7.