VIVIANE DURAND-GUERRIER, THOMAS HAUSBERGER, CHRISTIAN SPITALAS

DEFINITIONS ET EXEMPLES : PREREQUIS POUR L'APPRENTISSAGE DE L'ALGEBRE MODERNE

Abstract. Definitions and Examples: Prerequisites for the Learning of Modern Algebra. The aim of this paper is a first didactical study of the learning difficulties of modern algebra concepts in a first degree in mathematics at University. This study is part of a wider research whose goal is the development of a didactics of mathematical structuralism supported on its epistemology. The empirical data analyzed in this paper are taken from a questionnaire, submitted to third year mathematics students at Montpellier University, in order to test the acquisition of notions previously identified as prerequisites to the learning of group theory. First, we develop the epistemological and cognitive aspects on one hand, and the input of logical semantics on the other hand. Next, we present the *a priori* and *a posteriori* analysis of the questionnaire submitted to students, and then return to our research question to provide a first set of elements of response to the problem of the teaching and learning of modern algebra. We end our paper by a general conclusion and new perspectives opened up by this work.

Résumé. L'objectif de cet article est une première étude didactique des difficultés d'apprentissage des concepts de l’algèbre moderne en licence de mathématiques. Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un travail plus large visant à développer une didactique du structuralisme en appui sur son épistémologie. Les données empiriques analysées dans l'article proviennent d'un questionnaire, proposé à des étudiants de troisième année de licence à l'Université Montpellier 2, destiné à tester l'acquisition des notions préalablement identifiées comme prérequis à l'apprentissage de la théorie des groupes. Tout d’abord, nous développons les aspects épistémologiques et cognitifs, d'une part, et les apports de la sémantique logique, d’autre part. Nous présentons ensuite les analyses a priori et a posteriori du questionnaire soumis aux étudiants, puis nous revenons sur notre questionnement et dégageons des premiers éléments de réponses relativement à la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre moderne. Nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives ouvertes par ce travail.

Mots-clés. Algèbre moderne, structure de groupe, didactique des mathématiques, structuralisme algébrique, définitions axiomatiques, exemples, syntaxe et sémantique.

Introduction

Les difficultés d’apprentissage des concepts de l’algèbre moderne en licence de mathématiques sont bien connues des enseignants du supérieur. Pour autant, peu de travaux ont été conduits sur ces questions. Nous présentons dans cet article les premiers éléments d’un travail en cours que nous conduisons à l’université de Montpellier 2 sur l’enseignement et l'apprentissage de l’algèbre moderne.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 20, p. 101 - 148.

En ce qui nous concerne, nous entendons par algèbre moderne (selon la terminologie introduite par van der Waerden en 1930, par opposition à l'algèbre classique centrée sur les techniques de résolution des équations) l'étude des structures algébriques telles que groupe, anneau et corps. Ces dernières structures sont enseignées de nos jours, en France, en troisième année de licence (L3). Cette algèbre est abstraite au sens où elle étudie les modes d'organisations possibles d'éléments dont la nature est indéterminée.

Les travaux didactiques antérieurs sur l'algèbre de niveau universitaire portent essentiellement sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en première et deuxième année de licence (Dorier 1997). En définitive, le terrain de l'algèbre générale reste grandement à défricher, malgré quelques travaux comme, par exemple, ceux de Lajoie et Mura (2004) mettant en évidence les difficultés liées à l’apprentissage de la notion de sous-groupe distingué et de groupe quotient, ou encore ceux de Azrou (2013).

Cet article s'inscrit dans le cadre d'un travail plus large conduit par l'équipe de didactique et épistémologie des mathématiques au sein du laboratoire I3M à Montpellier suivant deux axes principaux. Le premier axe, qui concerne l'étude des difficultés rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage de la structure de groupe, fait l'objet de la thèse en cours de Christian Spitalas, co-encadrée par Viviane Durand-Guerrier et Thomas Hausberger. L'analyse fine du rôle joué, dans le processus de conceptualisation, par les définitions et les exemples, ainsi que leurs interactions dialectiques, est au cœur de cette thèse. Le second axe comporte un questionnement épistémologique sur la pensée structuraliste (Hausberger 2012) en vue de développer une « didactique du structuralisme » (Hausberger 2015a). Enfin, ces recherches se nourrissent des travaux de Durand-Guerrier (2013) sur les apports de la sémantique logique pour les études didactiques.

Les données empiriques analysées dans l'article proviennent d'un questionnaire, proposé à des étudiants de troisième année de licence à l'Université Montpellier 2, destiné à tester l'acquisition des notions, tant mathématiques que méta-mathématiques (voir partie 3 ci-dessous), préalablement identifiées comme prérequis à l'apprentissage de la théorie des groupes. Au sein de ce questionnaire, un certain nombre de définitions et d'exemples, à restituer ou à construire, sont notamment demandés aux étudiants. Ces choix sont portés par nos analyses épistémologiques et cognitives soulignant l'importance de ces derniers en tant que prérequis à la construction d'une théorie abstraite des groupes. Les analyses logiques viennent quant à elles enrichir les analyses praxéologiques et éclairer les difficultés rencontrées par les étudiants dans la réalisation de ces tâches.

Dans un premier temps, nous développerons les aspects épistémologiques et cognitifs, d'une part, et les apports de la sémantique logique, d’autre part. Nous présenterons ensuite les analyses a priori et a posteriori du questionnaire soumis aux étudiants, puis nous reviendrons sur notre questionnement et dégagerons des premiers éléments de réponses relativement à la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre moderne. Nous terminerons par une conclusion générale et quelques perspectives ouvertes par ce travail.

1. Aspects épistémologiques et cognitifs

Cette section apporte quelques éléments sur la nature épistémologique particulière de l'algèbre moderne et répond à la question suivante : en quoi les définitions d'objets et de structures algébriques (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, élément neutre, inversible, irréductible, relation d'équivalence, division euclidienne, etc.) et les exemples de ces objets et structures, *identifiés en tant que tels* en L1 et L2, constituent des prérequis à l'enseignement de l'algèbre moderne en L3, c'est-à-dire au développement en classe d'une théorie abstraite des structures algébriques de groupe, d'anneau et de corps.

1.1. L'algèbre moderne, un savoir FUGS

Les structures algébriques font partie des savoirs identifiés par les didacticiens, sur un plan épistémologique, comme des FUGS, c'est-à-dire des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs (Robert 1987). Les difficultés liées à l'apprentissage de ces concepts peuvent alors être analysées en partie comme une conséquence de leur nature FUGS (Rogalski 1995).

Nous ne détaillerons pas ici ces éléments théoriques. Pour autant, il est utile de rappeler que l'une des stratégies proposée par Dorier et al. (1994) pour favoriser l'apprentissage des savoirs FUGS est la construction d'ingénieries longues, se donnant le temps de construire des savoirs préalables à unifier (consolidant également les prérequis), de les relire dans la théorie unifiée, enfin de mettre en avant des nouveaux problèmes inaccessibles auparavant.

C'est à ce temps d'élaboration des savoirs préalables auxquels les définitions et exemples, objets de cet article, participent. Parce que de telles ingénieries longues sont difficiles à mettre en place, il apparaît comme important, dans la gestion du temps didactique, de bien préparer le terrain en amont. Pour cela, il ne s'agit pas uniquement de fournir les prérequis empruntés à diverses branches et différents cadres (géométrie, arithmétique, etc.), mais de présenter les divers exemples d'une manière propice à une uniformisation future, c'est-à-dire à leur reconnaissance comme des objets ayant une structure commune dont on fera plus tard une théorie abstraite. Un premier pas dans le processus de conceptualisation consiste alors à mettre en parallèle ces définitions abstraites, regardées comme des étiquettes posées sur des boîtes à remplir, avec des classes d'exemples concrets rencontrés au gré des activités mathématiques. Un des objectifs du questionnaire (troisième partie de cet article) est d'évaluer l'acquisition de ce premier niveau de conceptualisation.

1.2. Formes, opérations et objets

Ce paragraphe pose les enjeux et la dynamique de déploiement de la pensée structuraliste en terme du triptyque formes-opérations-objets introduit par Granger (1994). Le questionnement philosophique éclaire également la dynamique du processus de conceptualisation, lorsqu'il s'agit d'accéder ou de faciliter l'accès à ce mode de pensée.

Les mathématiques sont une science formelle dont les objets sont construits essentiellement selon deux dynamiques : certains objets mathématiques proviennent par abstraction du monde sensible (le triangle, les entiers naturels, etc.) alors que d'autres sont nées des nécessités du développement interne de la théorie (les imaginaires, les nombres premiers, etc.). Le processus de reconnaissance des formes est déjà présent chez l'animal : c'est un processus cognitif qui passe par l'identification d'invariants. Granger définit alors la *forme* comme le *cadre invariant à l'intérieur duquel le contenu fonctionne comme porteur d'information*. Les objets mathématiques sont par essence des formes, le fruit d'un processus de symbolisation. Il n'y a pas de forme sans contenu (cela conduirait à une théorie mathématique vide) ni de contenu sans forme (l'exigence de définition des objets mathématiques impose de poser un cadre : souvent, il s'agit de la théorie des ensembles).

L'acte de cognition est pour Granger la *reconnaissance et l'exploitation d'une dualité de l'opération et de l'objet.* Il donne pour exemple la théorie des groupes : « Ainsi la notion de groupe est-elle apparue d'abord comme système de permutations composables et inversibles portant sur des objets numériques – les racines d'une équation algébrique. C'est bien alors le jeu des règles gouvernant les opérations qui est mis en vedette, et par le moyen duquel on parvient à déterminer les objets, dans la théorie de Galois et de Lagrange. Puis la notion de groupe abstrait est dégagée explicitement par Cayley, dans laquelle on considère cette fois un système d'objets quelconques, muni d'une loi de composition. L'extension conceptuelle ouverte par la mise en lumière de cette perspective duale rend possible une synthèse d'idées et de résultats antérieurs, qui constituera l' « Algèbre moderne » » (Granger 1994 p.39).

Il y a en définitive co-détermination des opérations et des objets, ce que les définitions axiomatiques des structures algébriques illustrent bien : ce n'est pas étonnant que ces dernières se présentent essentiellement comme des formalisations de systèmes opératoires (précisément des ensembles munis de lois et vérifiant diverses propriétés). Le groupe symétrique et les groupes issus de la géométrie sont des groupes de transformation : ils opèrent naturellement sur des ensembles. Abstraire la structure de groupe, c'est dégager les conditions internes de leur opérationnalité.

Les théories de structures algébriques sont des théories de formes d'objets mathématiques (lesquels sont déjà des formes). C'est une formalisation au sein du domaine mathématique formel (niveau 1) donc un niveau supérieur d'organisation (niveau 2). Développer une théorie abstraite des groupes, c'est ainsi prendre la forme de groupe pour objet : c'est en développer le contenu formel au sein de ce niveau supérieur d'organisation. En développer les possibilités opératoires conduit naturellement à la description des groupes en terme de générateurs et de relations (c'est historiquement le premier pas vers la structure de groupe abstrait, réalisé par Cayley). Cela conduit également à formaliser l'action de groupe sur un ensemble : les groupes sont faits pour opérer.

La pensée structuraliste se situe encore à un niveau supérieur (niveau 3) : elle vise à reconnaitre, relier les diverses structures et à rendre opératoire la notion même de structure. Cette dernière est la forme de l'objet groupe abstrait, qui prend place à côté des anneaux abstraits, des corps et des autres structures algébriques abstraites. Prendre la notion de structure pour objet, c'est développer une méta-théorie des structures comme la théorie des catégories. C'est encore différent de la démarche qui consiste à poser la notion de structure comme principe organisateur des théories algébriques (Bourbaki a développé une pensée structuraliste mais « loupé le coche » de la théorie des catégories).

1.3. Définitions par axiomes et méthode axiomatique

Jadis réservée à la géométrie d'Euclide, la présentation axiomatique des mathématiques a été érigée en méthode par Hilbert et prônée par ses successeurs (dont Bourbaki 1948). Il s'agissait d'une part d'apporter la rigueur dans un contexte de crise des fondements, d'où l'usage logique de la méthode axiomatique : on questionne alors l'indépendance des axiomes, la non-contradiction du système d'axiomes, etc. D'autre part, la présentation axiomatique des objets et théories mathématiques a joué un rôle important pour dégager les structures abstraites : en effet, les définitions par axiomes abstraient la nature particulière des objets et mettent l'accent sur les relations (le logique est en quelque sorte le degré zéro de la structure).

Cet usage immanent de l'axiomatique, au sens où elle permet d'établir des définitions implicites de concepts indépendamment de la nature des objets, est bien visible dans l'histoire des structures algébriques, telle que l'expose, par exemple, Wussing (2007) ou bien Corry (1996) : ainsi Kronecker énonce-t-il très tôt une caractérisation axiomatique d'un groupe abélien fini. De même Dedekind introduit-il les idéaux par une axiomatique, ainsi que les corps, synonymes de corps de nombres (un sous-ensemble de **C** clos sous les 4 opérations[1]). Pour autant, il ne

[1] Il s'agit également de demander que le corps soit de dimension finie en tant qu'extension du corps des rationnels (donc en tant que **Q**-espace vectoriel). Cette condition est nécessaire afin de pouvoir

suffit pas d'axiomatiser les concepts clefs de l'algèbre pour parler de mathématiques structurales. Ainsi Kronecker n'a pas fait le lien entre les groupes de permutation et sa présentation axiomatique des classes modulo un entier car il ne poursuivait pas un objectif d'uniformisation. De même, Weber définit groupes et corps sous forme axiomatique dans son exposition de la théorie de Galois mais reste attaché à une vision de l'algèbre comme théorie des équations. En définitive, ce ne sont pas tant les définitions abstraites des concepts que l'architecture de la théorie et le mode de raisonnement utilisé (par construction de concepts et déploiement de ces concepts de façon à faire apparaître leur nature FUGS) qui caractérisent les mathématiques structurales. Un des premiers exemples de telles mathématiques sera donné par Steinitz dans sa classification abstraite des corps.

Cavaillès (2008, p. 512) nous éclaire sur la différence à saisir, à savoir la distance qui sépare l'*idéalisation* de la *thématisation* : « Mais la formalisation n'est réalisée que lorsqu'au dessin des structures se superposent systématisées les règles qui les régissent. La thématisation prend pour départ l'enchaînement saisi cette fois dans son vol, trajectoire qui se mue en sens. La pensée ne va plus vers le thème créé mais part de la façon de créer pour en donner le principe par une abstraction de la même nature que l'autre, mais dirigée transversalement ».

Dans notre contexte, l'idéalisation est la dynamique qui vise à constituer des espaces généraux de formes abstraites et à laquelle les définitions par axiomes contribuent grandement. Une partie des difficultés cognitives de cette phase est liée à l'acquisition de la méthode axiomatique en tant que démarche faisant sens par rapport aux pratiques mathématiques effectives (liées à la manipulation d'objets). Ainsi les étudiants ont-ils tendance à oublier la définition axiomatique d'espace vectoriel, car elle est en général peu significative en relation avec les tâches usuelles demandées. La mise en avant des définitions par axiomes et la rigueur apportée par la méthode axiomatique constitue un changement de contrat visible dès l'entrée à l'Université. La phase de thématisation est, dans l'enseignement supérieur français actuel, réservée en général (c'est le cas à Montpellier) à une deuxième étape, qui est celle de l'apprentissage des structures algébriques abstraites en L3. Le changement de contrat se trouve encore renforcé.

1.4. Rôle des exemples paradigmatiques

La notion de paradigme, sous son acception la plus courante en épistémologie des sciences, est celle introduite par T. Kuhn (1983), sur la base de recherches historiques et sociologiques. Elle est davantage pertinente pour rendre compte du développement des sciences expérimentales. En effet, les changements de paradigme s'accordent peu à l'épistémologie formelle des mathématiques : comme

---

associer au corps un anneau qui possède des propriétés arithmétiques convenables, en l'occurrence des irréductibles en nombre suffisant.

l'a remarqué Cavaillès (2008), la nécessité interne[2], l'architecture, neutralise la contingence historique (Cavaillès parle de « cette histoire qui n'est pas une histoire »). Ce serait donc davantage une philosophie du concept qui rendrait compte du développement des mathématiques, par une dialectique interne, en opposition à l'idée de contingence, c'est-à-dire qui trouve ses raisons hors de soi. Pour autant, cette idée de paradigme est intéressante car elle renvoie à une pratique de la science au sein d'une communauté, qui légifère et normalise, qui constitue ses paradigmes. C'est en terme de constitution (et non de changement) que les pensées de Kuhn et Cavaillès se rejoignent : Cavaillès introduit le terme « paradigme » dans son ouvrage *Sur la logique et la théorie de la science*, paru en 1947 pour désigner un processus de pensée synonyme du processus d'idéalisation (voir 1.3), qui justifie son nom en tant qu'il constitue des liaisons-types. Les paradigmes sont donc des abstraits formels chez Cavaillès.

La notion d'exemple paradigmatique sera pour nous une transposition-synthèse de ces deux idées de paradigme : un exemple (ou une classe d'exemples) est paradigmatique lorsqu'il (ou elle) permet de dégager un ensemble de concepts et de processus opératoires qui ont une portée générale et peuvent être mis en œuvre sur d'autres exemples selon le même schéma. En d'autres termes, il se dégage une pratique avec un fort potentiel théorique et une aptitude à « faire école » et donner sens à une élaboration théorique future, pour reprendre le terme de Kuhn, à engendrer une « science normale ».

Il en est ainsi du groupe symétrique en théorie des groupes : cet exemple paradigmatique de groupe non abélien (à plus d'un titre puisque, d'après le théorème de Cayley, tout groupe fini peut être vu comme un groupe de permutations) est le prototype historique de groupe. Il se prête particulièrement bien aux calculs et permet de travailler la notion d'ordre d'un élément, de sous-groupe engendré, de générateur et de relations, de conjugaison, de suite de décomposition, etc. De même, $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ sont des prototypes d'anneaux euclidiens, mais l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss est davantage paradigmatique lorsqu'il s'agit d'étendre l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ et construire une théorie abstraite de la divisibilité dans les anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le prototype de groupe cyclique et d'anneau quotient ; il est un point d'appui important pour l'étudiant lorsqu'il s'agit de calculer dans un corps fini $\mathbf{F}_p[X]/(P)$ ou de conceptualiser un tel quotient. Enfin, à un niveau supérieur d'organisation, la structure d'espace vectoriel longuement travaillée au cours des deux premières années de licence, devient un exemple paradigmatique relativement à la pensée structuraliste : elle met en avant des définitions par

[2] « Le développement de la mathématique entière se fait suivant un rythme nécessaire : il y a un conditionnement réciproque des notions et des élargissements que provoque leur application obligatoire dans des domaines voisins », Cavaillès 2008.

axiomes et une présentation axiomatique de la théorie, ainsi que des théorèmes de structure (tout espace vectoriel admet une base, etc.).

En ce qui concerne l'apprentissage des structures algébriques, la mise en place de ces exemples paradigmatiques est d'autant plus fondamentale que le mode de pensée conceptuel qui est mobilisé par l'algèbre abstraite constitue un changement de paradigme relativement aux pratiques algébriques antérieures (historiquement, l'algèbre des équations et dans le contexte scolaire, celles du lycée).

1.5. Concepts et conceptualisation

« Mathématique conceptuelle » (*begriffliche Mathematik*) est le terme utilisé par les mathématiciens allemands des XIXe et XXe siècles (Riemann, Hasse, Dedekind, Hilbert, Emmy Noether) pour caractériser leur méthode de travail, focalisée sur la formation de concepts. La pensée structuraliste se caractérise donc, plus que par le type d'objet étudié, par une méthodologie et un style spécifique, qui a fait école à Göttingen autour de Noether. Cette école change la manière de prouver en privilégiant les preuves générales limitant les calculs et mettant en avant les concepts. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples ». Sous la plume des algébristes, concepts et structures souvent se confondent.

La théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990) laisse ouverte cette possibilité de prendre les concepts eux-mêmes comme objets. Il s’agit en effet d’une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l’étude du développement et de l’apprentissage des connaissances complexes, dont les mathématiques (mais pas seulement). Elle vise en particulier à comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances (savoir-faire et savoirs exprimés) (op. cit. p. 133)

La notion d’invariant opératoire est au cœur de ces filiations et ruptures. Vergnaud distinguent trois types logiques fondamentaux[3] (pp. 142-145) : 1. des invariants de type *propositions* : ils sont susceptibles d’être vrais ou faux - les *théorèmes-en-acte* sont des invariants de ce type - 2. des invariants de type *fonction propositionnelle* : ils ne sont pas susceptibles d’être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Les *concepts-en-acte* sont de ce type - 3. des invariants de types *arguments* ; ce sont des objets qui permettent de saturer les fonctions propositionnelles : *objets matériels, nombres, fonctions, ensembles, relations, propositions,* etc.

[3] L’importance de la prise en compte de ces catégories logiques dans les études didactiques est développée dans Durand-Guerrier (2013)

Les exemples donnés par Vergnaud mettent en valeur le fait que :

> « Ces distinctions sont indispensables pour la didactique parce que la transformation des concepts- outils en concepts-objets est un processus décisif dans la conceptualisation du réel. Cette transformation signifie entre autres choses que les fonctions propositionnelles peuvent devenir arguments. La nominalisation est une opération linguistique essentielle dans cette transformation. » (p. 145)

Rappelons que les fonctions propositionnelles modélisent les propriétés et les relations ; celles-ci sont satisfaites ou non par des objets auxquels elles sont susceptibles de s'appliquer. Par exemple : « être un nombre premier » est une propriété modélisée par une fonction propositionnelle de la forme $F(x)$, où x est une variable libre. Ce point de vue s'inscrit dans la perspective sémantique en logique initiée par Frege.

Ceci veut dire que des *concepts* peuvent devenir des objets (des *arguments* pour une nouvelle *fonction propositionnelle*), comme dans l'exemple suivant : *« avoir le même cardinal que »* est une relation d'équivalence.

Dans l'article de 2002 sur les formes opératoires et les formes prédicatives de la connaissance, Vergnaud écrit :

> « La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème-en-acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. » (Vergnaud, 2002, p. 14).

En 2004, lors du colloque organisé en son honneur, il revient sur cette question en insistant sur la nécessité de ne pas laisser s'installer une rupture entre connaissances opératoires et connaissances prédicatives (Merri, 2007, pp.348-349). Il ajoute à ce propos : « La forme prédicative de la science est évidemment essentielle, justement parce qu'elle est explicite et peut-être partagée, mais une connaissance qui n'est pas opératoire n'est pas véritablement une connaissance. » (p.349)

Nous faisons l'hypothèse que ce cadre théorique élaboré par Vergnaud est pertinent pour penser le processus de conceptualisation de l'algèbre abstraite ; néanmoins un travail important reste à entreprendre afin d'examiner, dans le processus de conceptualisation de l'algèbre abstraite, les invariants opératoires organisant l'action du sujet relativement aux situations qui fondent ces nouvelles pratiques algébriques. Dans ce travail, les définitions et exemples joueront assurément un rôle prépondérant et pleinement élaborateur. De même que Granger insiste sur la co-détermination des opérations et des objets (du point de vue de la connaissance), la mise en évidence des invariants opératoires est important du point de vue de la conceptualisation des objets structuraux car c'est bien le fonctionnement du concept en relation avec le sujet connaissant qu'il ne faut pas perdre de vue. Il s'agit également de prendre en charge la part de réflexivité qui est inhérente à la démarche algébriste contemporaine et dont la transposition didactique peut se traduire par une mise en situation à caractère méta (démarche entreprise par Dorier et al. (1994) et Dorier (1997) dans le cas de l'algèbre linéaire). Relativement aux définitions et exemples, cela revient à interroger la fonction de ces derniers dans l'élaboration théorique et le rôle des exemples en tant que représentations dans le processus de conceptualisation (en termes mathématiques, ce sont des modèles).

2. Les apports de la sémantique logique

Dans cette section, nous présentons des éléments d'analyses épistémologique et didactique mettant en valeur les éclairages que peut apporter le point de vue sémantique en logique pour éclairer les analyses didactiques (Durand-Guerrier, 2013). Nous nous intéressons en particulier à ce que ce point de vue apporte pour travailler avec les définitions.

2.1. Le point de vue sémantique en logique classique

La sémantique logique a été développée à la fin du XIX° siècle et au début du vingtième siècle par, en particulier, Frege, Russell, Wittgenstein ou Tarski et elle fut popularisée par Quine. Le point de vue adopté consiste à considérer comme centrale les articulations entre les aspects syntaxiques et sémantiques en logique. Les connecteurs logiques sont définis par leurs conditions de vérité, même lorsque ceci rentre en conflit avec la logique de sens commun, comme c'est le cas pour l'implication entre propositions qui est vrai lorsque son antécédent est faux, et ce quelque soit la valeur de vérité du conséquent (cf. Frege, 1971). D'autre part, la nécessité de prendre en compte les questions de quantification conduit ces auteurs à accorder une place centrale à la notion de prédicat (ou fonction propositionnelle) qui modélise les propriétés ou les relations (cf. Russell, 1903). Ceci conduit Tarski à introduire la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément de l'univers du discours, introduite afin de pouvoir donner une définition récursive de la vérité (Tarski, 1936a, 1972) via une extension des connecteurs propositionnels : une implication ouverte de la forme « $P(x) \Rightarrow Q(x)$ » est satisfaite par un élément a de l'univers du discours si et seulement si l'implication entre proposition « $P(a) \Rightarrow Q(a)$ » est vraie dans le domaine d'interprétation considéré. L'articulation entre syntaxe et sémantique a conduit en outre ces auteurs à clarifier la distinction, déjà identifiée par Aristote, entre vérité dans une interprétation et validité logique. Ceci est développé dans Wittgenstein (1921, 1993) pour le calcul des propositions et dans Tarski (1936c, 1969) pour la logique des classes et le calcul des prédicats. Quine (1950, 1972) en présente une synthèse et met en valeur la clarification conceptuelle apportée par la modélisation des énoncés de la langue dans le calcul des prédicats. Durand-Guerrier (2005, 2008) a montré la pertinence de cette approche sémantique pour l'étude didactique du raisonnement mathématique.

2.2 Un point de vue logique sur la notion de définition en mathématique

D'un point de vue logique, une définition est une phrase ouverte, associée à une propriété d'objet (exemple : « être un nombre premier ») ou à une relation entre objets (exemple : « être congruent à »), satisfaite par certains objets d'un domaine donné (éventuellement par un seul objet) et pas par d'autres. Elle n'est donc ni vraie ni fausse. Ce qui est vrai ou faux, c'est le fait qu'un objet satisfasse ou non cette définition (« tombe sous le concept associé », dans le vocabulaire de Frege). Au niveau que nous considérons, la structure logique des définitions est le plus souvent extrêmement complexe. Considérons par exemple la définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.

« Une famille de vecteurs *A* d'un *K*-espace vectoriel *E* est génératrice dans *E si et seulement si* tout vecteur de *E* peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de *A*. »

Ici les variables libres sont K, E et A ; on définit ainsi une relation G(A,E,K) par :

$$G(A,E,K) \Leftrightarrow_{\text{def}} [(A \subset E) et (\forall u \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (l_{1,} l_{2,} \ldots, l_n) \in K^n, \exists (u_{1,} u_{2,} \ldots, u_n) \in A^n, u = l_1 u_1 + l_2 u_2 + \ldots + l_n u_n)]$$

Une telle définition, comme c'est très souvent le cas en mathématiques, n'est pas une conjonction de propriétés élémentaires ; il s'agit d'une élaboration plus complexe qui fait intervenir des éléments de différente nature (espace vectoriel, corps sous-jacent, loi interne et loi externe, famille de vecteurs, éléments du corps sous-jacent, éléments de l'ensemble sous-jacent) et des quantificateurs : ici les éléments sont associés à des variables liées, les ensembles sont associés à des variables libres.

Une telle définition étant donnée, on peut envisager différents types de tâches en lien avec la relation entre *définition* et *exemples :*

- donner des exemples de triplets satisfaisant cette définition
- déterminer si un triplet donné satisfait ou non cette définition
- élaborer des objets satisfaisant cette définition : on peut pour cela fixer certaines des variables libres : *E* et *K* étant donnés, trouver des parties génératrices de *E* ; éventuellement les trouver toutes ; chercher celles ayant le nombre minimal d'éléments, etc.

- considérer un *K*-espace vectoriel *F* ; une partie *A* de *F* étant donnée, chercher *E* tel que *A* soit une partie génératrice du *K*-espace vectoriel *E* ; ceci conduit à la notion de sous espace vectoriel engendré par une partie de *F*.

Nous faisons l'hypothèse que la complexité logique de cette définition et la variété des types de tâches associées fournissent des indications sur les difficultés que les étudiants sont susceptibles de rencontrer pour la maîtriser, et ce d'autant plus que les types de tâches associées font rarement l'objet d'un travail autonome des étudiants.

2.3. La notion de conséquence logique et la méthodologie des sciences déductives

Dans la suite de son travail sur la définition sémantique de la vérité, Tarski définit la notion de conséquence logique d'un point de vue sémantique. Il introduit pour cela la notion de modèle d'une formule du calcul prédicat : étant donné une formule *F* et un domaine d'interprétation dont l'univers du discours est non vide, ce domaine est un modèle de *F* si et seulement si l'interprétation de *F* est un énoncé vrai du domaine. Par définition, on dira qu'une proposition *X* suit logiquement d'une classe *K* de propositions si et seulement si tout modèle de *K* est un modèle de *X* (Tarski, 1936b, 1972). Notons que ceci revient à dire que l'énoncé implicatif dont l'antécédent est formé de la conjonction des éléments de *K* et dont le conséquent est *X* est vrai dans tout domaine d'interprétation dont l'univers du discours est non vide, autrement dit est un énoncé universellement valide au sens de Quine. Ceci généralise la notion de tautologie développée par Wittgenstein (1921, 1993) : un énoncé du calcul des proposition est une tautologie si et seulement si il prend la valeur vraie pour toute distribution de valeur de vérité. Les tautologies et les énoncés universellement valides du calcul des prédicats sont associés aux règles d'inférence valides utilisées dans le raisonnement mathématique (Quine, 1950, 1972).

Tarski (1936c, 1969) met à profit cette relation entre vérité et validité pour introduire la méthodologie des sciences déductives. Étant donnée une mini-théorie *T* (il donne l'exemple de la congruence des segments), il dégage la forme logique des axiomes de cette théorie en introduisant autant de lettres de prédicats que nécessaire. Il définit alors le système axiomatique associé au sein du calcul des prédicats qui constitue une classe de propositions. Un théorème de la mini-théorie est un énoncé qui se déduit logiquement des axiomes par des règles de déduction (d'inférence) valides. Un tel théorème est associé à une formule *F* du calcul des prédicats, qui est une conséquence logique du système axiomatique. Tarski ajoute qu'il est possible en outre d'en donner une preuve purement logique. Ceci fait, Tarski considère d'autres modèles du système axiomatique qu'il vient de dégager. Dans ces modèles, l'interprétation de la formule *F* précédente est un théorème de la nouvelle interprétation. Il n’est donc pas nécessaire de refaire une preuve mathématique. Cette construction est le fondement de ce que Tarski appelle « Preuves par interprétation » : pour prouver que dans une théorie donnée, un énoncé n’est pas conséquence logique des axiomes, il suffit de construire un modèle du système axiomatique logique de la théorie dans lequel l’interprétation de la formule associée à l’énoncé est fausse[4]. La méthodologie des sciences déductives entretient des liens étroits avec la méthode axiomatique en mathématique ; ainsi la théorie des groupes peut être considérée, par exemple, comme un système axiomatique de la théorie des substitutions, système axiomatique pour lequel on a enrichi le calcul des prédicats pour disposer, dans le langage formel, des constantes nécessaires pour les définitions des axiomes. Selon ce point de vue, donner un exemple de groupe, c’est en fait donner un modèle du système axiomatique caractérisant la théorie des groupes. Sinaceur (1991) souligne la fécondité de cette approche orientée vers l’action, qui, selon elle, fournit une épistémologie effective pour les mathématiques.

3. Une étude exploratoire sur les prérequis des étudiants de L3

3.1 Motivations, contexte, choix globaux, modalités de passation

Les difficultés que nous avons constatées, relativement à l'apprentissage des structures algébriques telles que les groupes, nous ont amenés à nous interroger sur les origines possibles de ces difficultés. Dans ce cadre, la question des prérequis a été examinée. La théorie des groupes étant une théorie axiomatique abstraite et un de ses principaux intérêts d'étude résidant dans la diversité de ses champs d'application et dans sa dimension unificatrice, la connaissance des différents domaines dans lesquels elle se réalise (ses « modèles ») est donc nécessaire à une bonne compréhension de la théorie. C'est pourquoi la question des prérequis est particulièrement essentielle dans ce contexte. Ont d'abord été distingués les prérequis directement liés à la construction de la théorie des groupes (théorie élémentaire des ensembles, relation d'équivalence, ensemble quotient). Ensuite les prérequis logiques et méta-mathématiques : capacité à produire des définitions, des exemples, et à utiliser les définitions pour s'engager dans une preuve, ainsi que l'utilisation de la quantification. Enfin, ceux nécessaires à l'entrée dans une pensée structuraliste : familiarité avec les définitions axiomatiques, mise en relation des structures avec des objets, expérience antérieure avec une structure algébrique (notamment celle d'espace vectoriel). Seule structure étudiée dans le détail les années antérieures, l'espace vectoriel se présente comme un cadre particulièrement approprié à l'étude des prérequis méta-mathématiques cités ci-dessus. Par ailleurs, le concept de génération est central, et commun à l'étude des structures algébriques

[4] Pour un exemple élémentaire de l’application de cette méthode, voir Durand-Guerrier, 2005 ou 2008.

généralement étudiées les premières années d'université, telles que les structures d'espace vectoriel, de groupe, d'anneau ou encore de module. D'un point de vue logique, nous avons vu (au paragraphe 2) que la définition très riche et complexe de la notion de partie génératrice permet de considérer la mise en œuvre de nombreux types de tâches différents relatifs aux définitions et exemples. C'est pourquoi nous avons choisi de poser plusieurs questions relatives à cette notion dans le cadre des espaces vectoriels.

Les questions que nous présentons ici sont des items extraits d'un questionnaire plus large donné aux 40 étudiants présents lors de la première séance du module « Arithmétique et algèbre » de la troisième année de licence à l'Université Montpellier 2, durant l'année universitaire 2010-11. Ils furent invités à y répondre durant une heure. Pour chacune des notions interrogées que nous présentons ici, une définition était demandée aux étudiants, ainsi que des exemples qu'ils avaient en tête, avant tout travail sur les concepts considérés. Selon le cas, il s'agissait d'une définition d'objet (élément neutre), de structure (espace vectoriel, groupe), de relation entre objets (relation d'équivalence) ou de procédé (division euclidienne), avec différents niveaux de généricité. On pourrait supposer que ce type de question est élémentaire au niveau considéré, et mobilise essentiellement la mémorisation et la restitution. Cependant, comme nous l'avons illustré sur un exemple au paragraphe 2.2, la structure logique des définitions peut s'avérer complexe, les objets engagés pouvant être de types très différents. Nous faisons l'hypothèse que cette complexité logique peut éclairer certaines des difficultés des étudiants pour l'appropriation des concepts identifiés comme prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. Dans nos analyses, nous avons porté l'attention sur les connaissances mathématiques des étudiants, leurs conceptions, les registres de représentation utilisés et les phénomènes langagiers (syntaxe, sémantique).

3.2. Questions sur les espaces vectoriels et les parties génératrices

Quatre items du questionnaire concernent les concepts d'espace vectoriel et de partie génératrice, dont il est en particulier demandé une définition :

I.1. Définir ce qu'est un espace vectoriel. Donnez-en quelques exemples (variés).

I.2. Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Définir ce qu'est une partie génératrice de A. Donnez quelques exemples.

I.3. Dans chacun des cas suivants, la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez.

a) $E = M_n(\mathbb{R})$ ***et*** $A = GL_n(\mathbb{R})$.

b) $E = C^o \cap C^1_m \cap P_{2\pi}$ ***ensemble des fonctions continues,*** C^1 ***par morceaux et*** 2π***-périodiques, et*** $A = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$***, où*** $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \to e^{\text{int}}$.

I.4. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel :

$$E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | tr(M) = 0\}.$$

a) Expliquez rapidement pourquoi** E **est bien un espace vectoriel.

b) Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse.

→ *Analyse a priori*

Des aspects praxéologiques sont abordés ici autour de la restitution de définitions et d'exemples, voire de construction d'exemples : dans les questions I.1 et I.2, il est demandé de façon très générale de donner la définition d'une partie génératrice, puis de donner des exemples de partie génératrice. Le choix d'un espace vectoriel *E*, d'une partie *A* et d'une famille génératrice de *A* est à la charge de l'étudiant. Dans les items de la question I.3 les valeurs des variables A et E sont fixées ; dans la question I.4 la valeur de E est fixée. Ceci a un impact sur les types de tâches demandées : il s'agit respectivement de déterminer si des familles données sont génératrices de l'espace vectoriel considéré (question I.3) et de construire un exemple de partie génératrice (question I.4). Comme nous allons le voir, ce sont trois types de tâches différents, qui n'impliquent pas les mêmes présupposés techniques ou technologiques (au sens de Chevallard, 1999).

I.1. Définir ce qu'est un espace vectoriel. Donnez-en quelques exemples (variés). Deux types principaux de réponses sont attendus, reflétant deux conceptions de la notion d'espace vectoriel : des réponses tentant de donner, de manière plus ou moins correcte et complète, la définition axiomatique d'espace vectoriel et des réponses donnant la définition de sous-espace vectoriel. En effet, dans la pratique, l'on montre généralement qu'un ensemble est un espace vectoriel en vérifiant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Concernant les exemples, on peut supposer que la plupart des étudiants proposeront les suivants, conformément à ce qu'ils ont été susceptibles de rencontrer les années précédentes : l'espace des vecteurs du plan ou de l'espace de la géométrie usuelle, ou plus généralement le K-espace vectoriel K^n $(n \geq 1)$, probablement avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$; le K-espace vectoriel $K[X]$, espace vectoriel des polynômes sur K, probablement avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; le K-espace vectoriel $L(E, F)$ (applications linéaires de E dans F, espaces vectoriels sur K), avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; le K-espace vectoriel $M_n(K)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ également ; l'espace des suites réelles ou plus généralement des fonctions réelles, ou encore des fonctions continues.

I.2. Soit E *un espace vectoriel et* $A \subset E$ *un sous-espace vectoriel de* E. *Définir ce qu'est une partie génératrice de* A. *Donnez quelques exemples.* La définition dont il est question ici est celle d'une propriété d'objet, « *être une partie génératrice de A* $(\subset E)$ » (une fois l'espace vectoriel E et le sous-espace vectoriel A fixés), et non celle d'un objet mathématique à proprement parler. Une propriété d'objet est modélisée par un prédicat à une place, que l'on note ici $G_{A,E}(x)$. Donner une définition de cette propriété d'objet revient donc à énoncer une phrase ouverte en x, variable libre dont le domaine d'objet est l'ensemble des parties de E, telle que $G_{A,E}(x)$ est satisfaite par une partie P de E (i.e. $G_{A,E}(P)$ est vraie) si et seulement si P est une partie génératrice de A.

La notion de partie génératrice est à l'origine des concepts de base et de dimension rencontrés dès la première année de licence ; on pourrait donc s'attendre à ce que les étudiants soient assez à l'aise avec cette notion en troisième année. C'est pourquoi, après avoir posé une question visant à vérifier qu'ils en connaissent une définition correcte et qu'ils peuvent en donner des exemples, nous avons proposé dans la question I.3 des exercices un peu moins classiques que ceux habituellement proposés à ce sujet.

Dans cette question, les étudiants peuvent penser que l'on attend des exemples de nature très générale. En particulier, pour chaque exemple d'espace vectoriel E et de sous-espace vectoriel A choisis par l'étudiant, cette partie A sera génératrice de A. On peut néanmoins faire l'hypothèse que cet exemple apparaîtra peu, la convention selon laquelle un ensemble est une partie de lui même rentrant en conflit avec l'idée intuitive selon laquelle la partie est plus petite que le tout. D'un point de vue mathématique, l'intérêt d'une famille génératrice est d'autant plus grand que celle-ci est minimale, ce qui dans un espace vectoriel correspond au concept de base. On peut alors attendre que soient proposées des bases de *A*.

Ceci revient à considérer A et E fixés mais génériques ; les seuls exemples possibles étant alors des exemples eux aussi très génériques, $x = f(A, E)$ dépendant de A et E. Une autre interprétation possible de la tâche (celle généralement attendue dans ce type de question) consiste à considérer qu'il s'agit d'attribuer des valeurs particulières à A et à Epour donner un exemple de triplet satisfaisant la phrase ouverte $G(x, A, E)$, prédicat à trois places, qui modélise la relation ternaire « *être une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel ... d'un espace vectoriel…* ». Or l'on a vu que la définition d'espace vectoriel nécessite la donnée de quatre paramètres (ou variables) : *K* (le corps de base, avec ses lois), *E* (l'ensemble de base), + (la loi de composition interne), * (la loi de composition externe). Donc, en toute rigueur, si l'on ne dispose pas d'exemples d'espace vectoriel directement accessibles, pour construire un exemple concret parfaitement satisfaisant de partie génératrice, il faut trouver six objets qui satisferont le prédicat à 6 places *G*(*x*, *A*, *K*, *E*, +, *). Ainsi, la tâche de construction d'un exemple nécessite au préalable de donner des valeurs à *A* et *E*, et à toutes les variables implicites associées. On s'aperçoit qu'il s'opère ici un changement de contrat significatif entre la question de définition de la propriété, pour laquelle les éléments nécessaires sont introduits dans l'énoncé, et la recherche d'objets satisfaisant cette définition, pour laquelle les étudiants doivent prendre des initiatives sur un grand nombre de paramètres corrélés. Ce changement de contrat est caché par l'apparente continuité dans la formulation de la question. Le grand nombre de choix à faire pour l'étudiant souhaitant répondre à cette question risque de l'empêcher d'aboutir. Certains étudiants peuvent cependant être suffisamment familiers avec les espaces vectoriels et les familles génératrices pour pouvoir donner directement de tels exemples familiers sans nécessairement en construire, et donc sans préciser toutes les variables logiques *K*, +, *, etc. ; par exemple, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et, comme sous espaces vectoriels, des droites ou des plans. Notons, en outre, que cette tâche est inhabituelle, le contrat classique consistant le plus souvent à s'assurer qu'un élément donné satisfait ou non la définition.

I.3. Dans chacun des cas suivants, la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez.

Remarque préliminaire : il est à noter deux difficultés supplémentaires dans cette question. D'abord le terme « partie génératrice » de la question I.2 est remplacé par « famille (génératrice) » dans la question I.3. Ensuite les notations sont différentes dans les questions I.2 et I.3 : en effet dans la question I.2, *A* est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel *E*, et la partie génératrice à définir n'est pas nommée. Dans la question I.3, l'espace vectoriel à engendrer est noté *E* (au lieu de *A* si l'on avait gardé les mêmes notations), et la partie dont il est demandé d'affirmer qu'elle est ou non génératrice de l'espace vectoriel est notée *A* (au lieu de *G* par exemple). Même si les étudiants de L3 devraient être habitués à « jongler » entre les changements de notations et de statut des lettres, ces derniers introduisent des difficultés supplémentaires dans la réalisation des tâches qui leur étaient demandées.

Dans cet exercice, le type de tâche demandé est différent de ceux rencontrés à la question 2. L'espace vectoriel à engendrer et la partie sont donnés. Il s'agit ici de décider si un couple (*g*, *E*), où *E* désigne un espace vectoriel et g désigne une partie de *E*, satisfait la relation binaire « être une partie génératrice de ». Ainsi, alors que la question I.2 nécessitait une prise d'initiative (chercher des objets adéquats satisfaisant une définition), la question I.3 nécessite d'engager la définition de partie génératrice dans une preuve, ce qui suppose davantage de techniques mathématiques.

La question *b)* $E = C^o \cap C^1_m \cap P_{2\pi}$ *ensemble des fonctions continues,* C^1*par morceaux et* 2π*-périodiques, et* $A = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*, où* $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \to e^{\text{int}}$ correspond à un exemple d'objet ne satisfaisant pas la définition. Cependant, en raison de la complexité des notions mathématiques en jeu et du trop faible nombre de réponses, cet item ne nous a pas fourni d'information relative à notre questionnement.

a) $E = M_n(\mathbb{R})$ *et* $A = GL_n(\mathbb{R})$. Cette question est loin d'être classique. La principale difficulté ici est l'utilisation des matrices inversibles dans un contexte additif, et non plus multiplicatif. En effet, l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ forme un groupe pour la multiplication matricielle ; il peut être très déroutant, même pour un mathématicien aguerri, de rencontrer ce groupe dans un contexte additif. Bien que les étudiants ne l'aient peut-être jamais identifié en tant que groupe, ils connaissent néanmoins très bien les propriétés essentielles de cet ensemble : le produit de deux matrices inversibles est inversible, toute matrice dans $GL_n(\mathbb{R})$ possède un inverse (par définition), la multiplication matricielle est associative et possède un élément neutre (la matrice identité). Toutes ces propriétés ont été vues en algèbre linéaire, notamment lors de sa définition. Ici, nous attendons des confusions entre ces deux contextes additifs et multiplicatifs. Cette question étant originale, nous faisons l'hypothèse qu'il sera difficile pour les étudiants d'amorcer un raisonnement si le concept et la définition d'une partie génératrice ne sont pas acquis. Nous n'attendons pas nécessairement que les étudiants sachent entièrement répondre à la question. Il s'agit d'une part de mettre en évidence les conceptions erronées, et d'autre part d'identifier si certains étudiants sont capables de mettre en œuvre un raisonnement adéquat, même si celui-ci n'aboutit pas. Une résolution classique (donnée en annexe), permettant de simplifier la tâche, consiste à engendrer des générateurs connus (ici les matrices de la base canonique). Sans cette idée essentielle de la théorie de la génération, la tâche s'avère d'autant plus ardue.

I.4. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel :

$$E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | tr(M) = 0\}.$$

Remarque préliminaire : Ici, l'espace vectoriel de référence et la partie que l'on souhaite engendrer sont donnés : E est instancié par $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel A à engendrer est instancié par $\{M \in M_3(\mathbb{R}) | tr(M) = 0\}$ (noté E dans l'énoncé).

a) Expliquez rapidement pourquoi E est bien un espace vectoriel. Il est possible de trouver certaines vérifications à partir de la définition générale d'espace vectoriel, notamment pour les étudiants ayant donné, ou tenté de donner, une définition complète d'espace vectoriel dans la question I.1. Néanmoins, on s'attend plutôt à l'utilisation, complète ou non, de la caractérisation des sous-espaces vectoriels. L'argument le plus élégant est le suivant : l'ensemble E est le noyau de l'application linéaire « trace », donc un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse. Dans cette deuxième partie de la question, les étudiants doivent produire une partie génératrice. Il s'agit donc d'un travail de construction d'exemple (exemple de partie qui engendre un espace vectoriel E singulier donné). Construire un exemple de famille génératrice de E consiste à traduire ce que signifie $tr(M) = 0$, et ensuite à appliquer la technique, classique (dans $\mathbb{R}^n$), qui permet de passer d'une écriture avec paramètres à une combinaison linéaire dont ces paramètres sont les coefficients, dans le contexte des matrices (voir annexe A pour une preuve mathématique). Néanmoins, elle n'amène pas une réponse évidente directe. C'est pourquoi il est encore peu probable d'obtenir un grand nombre de réponses.

→ Nous présentons ci-après les principaux résultats issus de l'analyse des réponses des étudiants.

¤ Les résultats portant sur les questions I.1 et I.2

I.1. Un seul étudiant donne une définition correcte d'espace vectoriel ; un seul autre oublie un seul axiome. Deux autres en donnent une définition très incomplète comme : « *Un espace vectoriel est un espace munie d'une loi de composition* ». Sur 40 étudiants, 12 (soit 30 %) donnent la définition d'un sous-espace vectoriel ; 3 étudiants en donnent une définition hybride avec des axiomes de la définition d'espace vectoriel et d'autres de sous-espaces vectoriels, par exemple : « *E est un espace vectoriel : - E est muni d'une LCI / - E est muni d'un opérateur externe / -* $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K$(corps)$\lambda x + \mu y \in E$ ». Pourtant, cette notion devrait leur être familière. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène : la définition d'espace vectoriel est longue, axiomatique, et très formelle. D'ailleurs la majorité des étudiants a conscience de ce fait puisqu'ils présentent leur réponse avec des tirets pour énumérer les axiomes dont ils ne se souviennent plus. Un étudiant écrit même : « *Il s'agit d'un espace muni d'une LCI et une LCE qui vérifient 4 axiomes spécifiques* » sans pour autant les donner. De plus, contrairement à la définition d'un groupe, la définition d'espace vectoriel ne s'énonce généralement pas dans le seul langage naturel.

I.2. Concernant la définition de partie génératrice, seules quatre réponses peuvent être considérées comme correctes, par exemple « $P \in P(A)$ *est une partie génératrice de* A *si* $Vect(P) = A$ ». On trouve également une définition incomplète : « *Une partie génératrice de A est un ensemble de vecteurs de E tels que : //* $\forall a \in A, a = \sum \lambda_i a_i,\ \lambda_i \in K$ *pour E espace vectoriel sur K //* $a_i \in$ *partie génératrice de* A ». Il ne précise pas que les vecteurs de la partie génératrice doivent être dans la partie A à générer.

Nous avons classé les réponses des étudiants dans les quatre catégories suivantes :

– les réponses qui font référence à la notion de combinaison linéaire comme la définition incomplète ci-dessus, ou bien « *G est une partie génératrice de A si tout élément de A peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de G.* », ou encore *« ensemble des éléments de A dont la C.L. forme E »* (8 copies) *;*

– les réponses (5 en tout) qui évoquent l'espace vectoriel engendré par une famille de parties *(« Vect »)*, comme « *Une partie génératrice, est tq* $Vect(B) =$

A », ou encore « *A étant un espace vectoriel (puisque sous espace vectoriel de E),* $\exists A'$ // $A' \subset A$ tq $A = VectA'$ ».

– les réponses écrites en langage naturel pour lesquels les étudiants ont utilisé différents verbes ou adjectifs tels que « générer », « engendre », « décrit », « aboutit »... On en recense huit. Par exemple : « *C'est une partie de A telle que cette partie va pouvoir générer tout élément dans A* », ou encore « *C'est une partie qui définit tous les vecteurs de A » ;*

– et enfin les autres réponses (8) pour lesquels il y a en général confusion avec d'autres notions. Par exemple un étudiant écrit « *une partie génératrice de A est une famille libre de vecteurs »*, et un autre « *c'est une famille de vecteurs (appelée base de A) qui, par combinaison linéaire quelconque entre ses éléments, "aboutit" toujours sur un élément (ici vecteurs) de l'ensemble A.* » L'expression « *toujours sur un élément* » employée au lieu de « *sur tout élément* » (par exemple) laisse penser qu'il y a bien une confusion entre partie génératrice et stabilité, plutôt qu'une erreur de type logique[5].

¤ *Concernant les exemples d'espace vectoriel (questions I.1 et I.4 a))*

I.1. Dans le premier item, 27 étudiants sur 40 proposent des exemples d'espaces vectoriels. Dix-sept d'entre eux donnent « $\mathbb{R}$ », « $\mathbb{R}^3$ » ou « $\mathbb{C}$». Deux donnent des exemples de nature géométrique comme « *plan* $\mathbb{Z}$ », quatre en algèbre linéaire ou matricielle : « *ex : L(E,F) = esp. vect. des applications linéaires de E dans F* » ou « $M_n(\mathbb{R})$ », deux autres donnent $\mathbb{R}_n[X]$, et six exemples pris en analyse comme « *espace des fonctions continues réelles* ». Enfin sept étudiants donnent des réponses incorrectes, incomplètes comme : « *la droite* $2x + 1$ », « $\{(1,0), (0,1)\}$ » ou encore des réponses qui renvoient à une sous-classe comme : « *exemples : espace vectoriel normé // espace vectoriel euclidien* ». Seul un étudiant a précisé les deux lois de composition interne et externe, et un autre a donné une réponse sous forme de couple (« ($\mathbb{R}$,+) »).

I.4 a) Dans cette question, il s'agit de justifier rapidement pourquoi un ensemble donné est un exemple d'espace vectoriel. Seize étudiants sur 40 ont proposé une réponse à cette question. Leurs réponses se répartissent comme suit : un étudiant invoque que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et vérifie les axiomes correspondants ; sept étudiants vérifient les axiomes de sous-espace vectoriel sans affirmer qu'il s'agit de la définition de sous-espace vectoriel, parmi lesquels deux seulement vérifient bien que l'ensemble E est non vide ; six étudiants affirment que E est stable par combinaison linéaire sans pour autant le vérifier, parmi lesquels deux seulement évoquent le fait que E doit être non vide ; un

[5] On ne peut cependant pas écarter complètement une mauvaise appréciation de la portée du quantificateur universelle « toujours » dans la phrase, surtout si l'étudiant est étranger.

étudiant rappelle la définition de la trace sans pour autant répondre à la question ; enfin un étudiant donne un argument incorrect : « *E est un sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel, donc E est aussi un espace vectoriel.*». On peut remarquer qu'aucun étudiant ne revient à la définition générale d'espace vectoriel. Cependant les étudiants ne précisent pas en général que les propriétés qu'ils vérifient sont celles qui caractérisent un sous-espace vectoriel et non un espace vectoriel. Ceci peut être mis en relation avec les réponses obtenues à la question I.1 concernant les définitions, et illustre une conception d'espace vectoriel correspondant au concept de sous-espace vectoriel.

¤ *Concernant les exemples de partie génératrice (questions I.2, I.3 a) et I.4 b))*

I.2. Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Définir ce qu'est une partie génératrice de A. Donnez quelques exemples.

Pour la notion de partie génératrice, sept étudiants en proposent des exemples : un exemple dans $\mathbb{C}$: « $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$ *et* $Vect\{1, i\} = \mathbb{C}$ » ; cinq exemples qui évoquent $\mathbb{R}^2$, du type : « *dans* $\mathbb{R}^2$ $f(x) = \lambda x$ *est génératrice* » ; enfin, un étudiant écrit : « *Toute base d'un ev E génère E* ». Ce dernier cas revient à donner une sous-classe de famille génératrice (les bases), ce qui correspond à une réponse envisagée dans l'analyse a priori (interprétation de la tâche avec E et A génériques).

I.3.a) [...] la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez. $E = M_n(\mathbb{R})$ et $A = GL_n(\mathbb{R})$.

Cette question a été abordée par 6 étudiants sur 40 : un étudiant répond simplement « *oui* » ; un autre étudiant répond implicitement « *oui* » en écrivant ceci : « *la base de $M_n(\mathbb{R})$ c'est I_n, $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ car inversible. // Toute surfamille $\{M, M \in GL_n(\mathbb{R})\}$ sera génératrice*. ». L'étudiant(e) semble affirmer que I_n est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et que $GL_n(\mathbb{R})$, contenant cette base, est donc génératrice de $M_n(\mathbb{R})$; trois des six étudiants répondent « *non* » avec des réponses laissant penser qu'ils n'ont pas compris le concept de partie génératrice. « *non car cela signifierait que toute matrice est inversible.* » ; on pourrait aussi faire l'hypothèse qu'ils mobilisent le théorème-en-acte « Toute combinaison linéaire de matrices inversibles est une matrice inversible ». Un étudiant propose une réponse adéquate pour ce que veut dire « A engendre E » puisqu'il écrit que cela est équivalent à « *toute matrice peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrice $\in Gl_n(\mathbb{R})$* ». Mais il en conclut que $GL_n(\mathbb{R})$ n'engendre pas $M_n(\mathbb{R})$ en prenant l'exemple de la dimension 2 ; il décompose une matrice à l'aide de la base canonique des E_{ij} : « $a\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ *et donc là* $A, B, C, D \notin GL_n(\mathbb{R})$.// Faux » ($A, B, C, D$ étant sa désignation des quatre matrices de base, sous des accolades). Ainsi, il semble supposer que la seule décomposition possible est celle dans la base canonique, et comme les matrices de cette base ne sont pas inversibles, il pense avoir démontré que $GL_2(\mathbb{R})$ ne peut pas engendrer toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$. Une hypothèse est que cet étudiant projette l'unicité de la décomposition dans une base donnée sur l'unicité de la base.

I.4.b) Dans cette question, on considère l'espace vectoriel : $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | tr(M) = 0\}$*. [...] Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse.*

Seuls 6 étudiants ont répondu à cette question : Trois étudiants donnent la base canonique de l'espace $M_3(\mathbb{R})$. Parmi eux, l'un affirme que cette famille engendre A puisqu'elle engendre E, bien qu'il donne une définition de partie génératrice correcte à la question I.2. Ils ne vérifient pas que les matrices de la base canonique appartiennent bien à A. Deux étudiants s'assurent quant à eux que les matrices qu'ils fournissent sont dans A et ce faisant retirent les trois matrices de la base canonique ayant un 1 sur leur diagonale, conservant les 6 autres. On peut y voir l'application du théorème-en-acte suivant : « *une base d'un sous-espace vectoriel donné s'obtient par intersection de l'ensemble des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel initial avec le sous-espace* ». Aucun étudiant n'effectue de contrôle sémantique : par exemple on peut connaître a priori la dimension de E sachant que c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Enfin, un étudiant donne une réponse correcte avec une justification correcte dans le cas $n = 2$ en mettant en œuvre la technique proposée en annexe. On peut supposer qu'il fait ce choix pour alléger les calculs.

En définitive, les résultats obtenus à cette question, qui porte sur la principale structure algébrique étudiée par les étudiants pendant les deux premières années de licence, montrent la fragilité des acquisitions des étudiants par rapport aux prérequis visés, et en particulier pour ce qui concerne la notion de partie génératrice (au sens des espaces vectoriels). Dans la suite, nous quittons ce cadre familier des espaces vectoriels pour nous intéresser aux notions plus spécifiques de la structure de groupe.

3.3. Questions relatives à la structure de groupe

Dans cette partie, nous nous intéressons aux notions directement liées au concept de groupe et aux objets mathématiques et propriétés qui interviennent dans sa définition.

II.1. Savez-vous ce qu'est un groupe (en mathématiques) ? Si oui, donnez-en une définition et quelques exemples.

II.2. Soit * la loi de composition interne définie dans $\mathbb{R}$ par: $x * y = x + y - xy$.

a) Rappeler la définition d'un élément neutre. Montrer que * possède un élément neutre e.

b) Rappeler la définition d'un symétrique d'un élément x***. Chercher les éléments de*** $\mathbb{R}$ ***admettant un symétrique pour la loi *.***

→ Analyse a priori

II.1. Il s'agit d'une définition de structure mathématique, tout comme celle d'espace vectoriel demandée dans la question I.1 alors que la question II.2 concerne des objets apparaissant dans la définition axiomatique de cette structure. Cette question vise à donner une idée de la connaissance des étudiants concernant les groupes avant le début de ce cours, sachant que, redoublants mis à part, les étudiants n'ont encore jamais véritablement travaillé la notion en tant que structure définie axiomatiquement. Il ne nous semble donc pas très pertinent de sur-interpréter les résultats relativement à l'exactitude des réponses, contrairement à la théorie des espaces vectoriels par exemple, qui est censée leur être très familière. En revanche, cette question nous permet d'évaluer deux aspects relativement aux questions soulevées dans cet article : d'une part le registre qu'ils préfèrent utiliser entre le langage naturel et le langage algébrique formel. Au langage naturel correspondra toute réponse exprimée avec des mots en langue française, au langage formel correspondra toute définition donnée sous forme d'axiomes principalement exprimés avec les symboles logiques et mathématiques, et le langage mixte regroupera toutes les réponses mêlant à la fois langage naturel et langage formel. D'autre part, nous nous intéresserons aux aspects sémantiques et syntaxiques. Cette question du langage nous semble cruciale, et ce d'autant plus que lors d'entrevues avec les enseignants du module « arithmétique et algèbre » traitant de la notion de groupe, ceux-ci ont noté que les étudiants maîtrisaient insuffisamment la langue française, et que cela pourrait constituer un frein à une bonne compréhension de notions mathématiques comme les groupes.

Nous faisons l'hypothèse que, contrairement au cas des espaces vectoriels, il est peu probable de trouver des réponses reflétant une conception « sous-groupe », c'est-à-dire une vérification des axiomes caractérisant les sous-groupes. En effet la notion de groupe a pu être abordée les années antérieures, mais n'a pas été travaillée en détail : dans la pratique, l'on montre souvent qu'un ensemble est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe plus connu, mais si ce type de problème ne s'est pas présenté, il n'y avait aucune raison de s'attendre à une conception en terme de sous-groupe.

On peut imaginer que les groupes proposés seront :

- des groupes de « nombres » associés à un anneau ou à un corps comme $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, etc. ;

- des groupes quotients (principalement $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},+)$ ou $((\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})^*,\times)$, avec $n = 2,3,\dots$ ou n générique) ;
- des groupes de permutations tels que $(S_n,\circ)$ vu à travers l'étude des déterminants (voire $(S(E),\circ)$) ;
- des groupes en algèbre linéaire ou matricielle vus lors de l'étude d'espaces vectoriels, comme $(M_n(\mathbb{R}),+), (GL_n(\mathbb{R}),\times)$, $((L(E,F),\circ)$ avec E et F des espaces vectoriels) ou $(\mathrm{K}[\mathrm{X}],+)$;
- ou encore des groupes géométriques (comme le groupe des isométries, ou des déplacements).

*II.2. Soit * la loi de composition interne définie dans* $\mathbb{R}$ *par:* $x * y = x + y - xy$

*a) Rappeler la définition d'un élément neutre. Montrer que * possède un élément neutre* e.

b) Rappeler la définition d'un symétrique d'un élément x. *Chercher les éléments de* $\mathbb{R}$, *admettant un symétrique pour la loi *.*

Ces questions sont tirées d'une étude de Faiza Chellougui (2003) sur l'utilisation des quantificateurs en première année d'université en Tunisie, auxquelles nous avons ajouté les questions préliminaires de définition, ceci afin de mettre en perspective l'utilisation des quantificateurs dans les définitions proposées et leur mobilisation lors de la vérification de propriété ou la recherche d'éléments satisfaisant la définition. Nous faisons l'hypothèse que ceci est un indicateur de l'obstacle du formalisme en algèbre moderne.

¤ <u>Concernant les définitions :</u>

Tout d'abord, précisons que la formulation « un symétrique » dans la question II.2.b) peut prêter à confusion. En effet, le symétrique d'un élément x n'est *a priori* pas unique. Or l'existence d'un neutre (à droite et à gauche) implique son unicité.

Les syntaxes logiques des deux définitions demandées sont différentes, ce qui se retrouve dans la formulation des questions. En effet, « être un élément neutre » est une propriété universelle : e est élément neutre *si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$). Cela confère à e un statut particulier, celui de constante dans le langage des prédicats pour la théorie des groupes (voir par exemple Cori et Lascar, 1993). En revanche, « être symétrisable (ou inversible) » est une propriété existentielle : x est inversible $\Leftrightarrow \exists y_x \in \mathbb{R}, x * y_x = y_x * x = e$. Cependant, seule la formulation de la question a) de définition induit l'utilisation d'un quantificateur.

¤ <u>Concernant la recherche d'éléments satisfaisant la définition</u> :

Les formulations des deux questions de définition induisent deux types de tâche distincts impliquant des procédures de résolution différentes. En effet, la deuxième partie de la question II.2.a) commençant par « Montrer que », les étudiants n'ont pas à questionner l'existence de l'élément neutre mais à s'engager directement dans la démonstration de cette existence. Ainsi, ils peuvent essayer, pour quelques valeurs possibles de e, de vérifier la condition $\forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$. En outre, la solution ($e = 0$) correspond à la valeur du neutre dans les groupes de nombres additifs usuels. L'on s'attend donc à ce que beaucoup d'étudiants proposent directement la valeur 0 pour le neutre sans nécessairement engager un raisonnement par analyse et synthèse. A l'inverse, la question II.2.b) est très ouverte (« Chercher... ») ; il s'agit de déterminer les éléments de l'ensemble S suivant : $S = \{x \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{R} x * y = y * x = e\}$. Ceci renvoie à la structure logique des définitions de neutre et de symétrique évoquée ci-dessus.

Le caractère universel de l'élément neutre peut ramener la recherche de ce dernier soit à une simple vérification lorsque la valeur peut s'obtenir par une heuristique ou une intuition, comme c'est le cas ici, soit à un raisonnement par analyse et synthèse menant à l'égalité $x + e - xe = x$, puis $e(1 - x) = 0$, égalité devant être vérifiée pour tout x réel. Le choix d'une valeur de x (différente de 1) et l'intégrité de l'anneau $\mathbb{R}$ suffisent pour trouver la seule valeur de e possible ($e = 0$) ; la vérification de la satisfaction de la propriété universelle est ensuite immédiate. En revanche, dans la recherche des éléments qui ont un symétrique, le raisonnement par analyse et synthèse s'avère incontournable. Précisément, le réel x a un symétrique si et seulement si l'équation $x + y - xy = 0$ admet une solution réelle (le symétrique de x). Il s'agit donc de déterminer les conditions d'existence d'une solution d'une équation à une inconnue avec un paramètre, en fonction de ce paramètre. L'équation étant de degré 1 en y, la résolution est aisée : on obtient $y(x - 1) = x$. Ainsi x admet un symétrique pour $x \neq 1$, donné par $y = \frac{x}{x-1}$. De plus, 1 n'admet pas de symétrique car l'équation devient $0 = 1$ dans le cas $x = 0$. L'ensemble solution est donc $S = \mathbb{R} - \{1\}$. La symétrie en x et y apparaissant dans l'égalité $x + y - xy = 0$ masque en fait la dissymétrie du statut de ces deux variables : x est une constante quelconque (instanciation universelle de Copi (1954)), un paramètre, alors que y symbolise l'inconnue. Ainsi, à ce stade, la compréhension de la dépendance de y en x est indispensable pour achever le raisonnement. D'un point de vue praxéologique, ces deux types de tâches, apparemment semblables, impliquent donc des difficultés de mise en œuvre très différentes. Dans la première il y a une élimination d'un quantificateur à opérer (choisir une valeur particulière pour x permet de trouver la seule valeur possible pour e), alors que la deuxième nécessite de recourir à des techniques de résolution d'équations à paramètre.

Enfin les questions a) et b) ne sont pas indépendantes : Répondre correctement à la deuxième implique d'avoir trouvé un élément neutre à la première.

→ Résultats

II.1

¤ Concernant la définition d'un groupe :

Nous avons observé trois aspects dans les réponses des étudiants : la syntaxe (le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaisons), la sémantique (le signe est conçu dans sa relation à ce qu'il signifie) et la pragmatique (le signe est perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font)[6], en tenant compte également du registre de représentation utilisé par les étudiants. Ainsi, la syntaxe, dans le langage naturel, correspondra à une bonne utilisation des règles grammaticales du français et, dans le langage formel, à une bonne utilisation des symboles logiques (par exemple des quantificateurs). La sémantique correspondra au sens d'une phrase donnée en langage naturel : une phrase pourra n'avoir aucun sens tout en étant correcte d'un point de vue grammatical. Dans le langage formel, certaines erreurs syntaxiques comme l'absence de quantification peuvent difficilement être interprétée au niveau sémantique. Enfin l'analyse pragmatique doit être interprétée ici comme une analyse ayant pour objectif d'identifier, d'un point de vue sémantique, l'adéquation entre la définition demandée (celle de groupe) et la réponse que l'étudiant a effectivement donnée, et ce en faisant abstraction (lorsque c'est possible) des éventuelles erreurs syntaxiques et sémantiques. Le niveau pragmatique correspondra donc à l'adéquation entre la question demandée et la réponse donnée : une réponse pourra être syntaxiquement et sémantiquement correcte mais ne correspondra pas à la définition d'un groupe.

Pour illustrer notre méthode de classement, considérons les réponses suivantes à cet item données par les étudiants :

– « *Un groupe est un ensemble munit d'une loi [...]* » est un exemple de réponse en langage naturel syntaxiquement incorrect (confusion participe passé / adjectif), ce type d'erreur sera toutefois considéré comme mineur car ne gênant pas la compréhension de la réponse.

– « *groupe :*$0 \in E$*// muni de la loi associative, commutative // muni d'un inverse sur * // muni d'un neutre* » est une réponse en langage naturel ou aucune phrase n'est construite, donc incorrecte syntaxiquement.

– « *Un groupe est un pair* $(E,*)$ *avec* E *un ensemble et * un loi tel que* $(x*y)*z = x*(y*z)$ $x,y,z \in E$*//* $\exists e \in E$ *tel que* $e*x = x*e = x$ $\forall x \in E$*//* $\exists e \in E$ *tel que* $x*x' = e$ $\forall x \in E$ » est une réponse en langage mixte, à la fois sémantiquement incorrecte dans la partie écrite en langage naturel (« *est un pair*

[6] Nous empruntons ces définitions à Eco (1980) qui lui-même les reprend de Morris (1938).

(E,*) ») et dans la partie écrite en langage formel (quantificateur universel placé à la fin).

– Considérons enfin la réponse suivante :

$(A, *)$ $\quad \bullet\ a * b = b * a$ symétrie
$\forall a, b \in A$ $\quad \bullet\ a * e = e * a = a$ élément neutre
$\quad \bullet\ a * a^{-1} = e$ inverse

C'est une réponse considérée comme écrite dans le langage formel (les 4 mots en français sont uniquement utilisés pour nommer les propriétés explicitées dans un premier temps). Compte tenu de l'absence du quantificateur existentiel, elle est incorrecte d'un point de vue syntaxique, et aussi du point de vue sémantique. De plus, même en corrigeant ces erreurs de quantification, la réponse ne correspond pas à la définition d'un groupe (il manque l'axiome, d'associativité de * alors que la commutativité n'est pas requise) ; elle est donc en inadéquation avec la question posée, ce qui correspond à une erreur au niveau pragmatique.

Notons d'abord que 5 étudiants n'ont pas donné de réponse et que, parmi les autres, 15% d'entre eux ne produisent pas une phrase construite.

Le registre de langue préféré est le langage naturel (19 étudiants sur les 35 qui ont répondu), dont environ les deux tiers (63%) donnent une réponse correcte du point de vue de la syntaxe si l'on ne tient pas compte d'erreurs de formulation n'affectant pas le sens de la phrase. Le langage symbolique est très peu et très mal utilisé (deux étudiants l'utilisent, tous deux de manière incorrecte). Moins d'un quart des étudiants s'étant exprimés dans un langage mixte (3 sur 14, soit 21%) donne une définition correcte d'un point de vue syntaxique. Sur l'ensemble des réponses, la moitié des étudiants ayant répondu utilisent une syntaxe correcte, exclusion faite des erreurs n'affectant pas la signification de la phrase.

En ce qui concerne l'articulation entre syntaxe et sémantique, des difficultés spécifiques au langage utilisé apparaissent : l'usage de la quantification pose plus de problèmes dans le langage formel que dans le langage naturel. À l'inverse, l'application inappropriée à un objet mathématique (comme un ensemble) d'une qualité (comme l'associativité) s'appliquant à un autre objet qui lui est liée (comme la loi) est un phénomène présent presque exclusivement dans le langage naturel (erreur de type métonymique comme « *Un groupe est un ensemble associatif* [...] »). Les deux étudiants ayant utilisé le langage formel n'arrivent à aucune réponse satisfaisante, et ce sur aucun des trois niveaux d'analyse (syntaxique, sémantique et pragmatique). Ces résultats montrent que, pour notre population, le registre de langue naturelle est généralement utilisé par les étudiants pour lesquels les contours du concept sont demeurés flous. Les autres donneront plus volontiers une réponse en langage mixte. Néanmoins, le nombre d'étudiants donnant une réponse mathématiquement satisfaisante reste faible : seuls 2 étudiants sur 14 pour ceux qui répondent en langage mixte et 2 sur 19 pour ceux qui répondent en langage naturel. Aucun des deux étudiants répondant en langage formel ne donne une réponse mathématiquement satisfaisante.

Du point de vue lexical, nous avons relevé les mots clés utilisé(e)s par les étudiants dans leur réponse (voir annexe C pour le tableau des relevés statistiques), ou à défaut les propriétés lorsqu'elles n'ont pas été nommées (dans le langage formel par exemple). Nous avons obtenu les résultats suivants concernant les concepts intervenant dans le concept de groupe : « ensemble/espace » est apparu dans 23 réponses sur les 35 réponses obtenues ; « loi/opération » dans 30 copies, l'associativité apparaît à 25 reprises, l'élément neutre dans 29 copies, et le symétrique dans 28 copies. Par ailleurs, la commutativité et la distributivité apparaissent chacune dans 3 réponses, la « loi de composition externe » ou la présence de 2 lois dans 2 copies. Enfin la transitivité, l'addition et le terme de structure apparaissent chacun une fois.

De plus des liens semblent émerger : ainsi 21 des 23 étudiants qui citent le concept d'ensemble évoquent également une loi (de composition interne). De même un lien très fort entre élément neutre et symétrique apparaît : toutes les réponses (sauf une) évoquant l'existence d'un élément neutre évoquent également l'existence d'un symétrique (pour chaque élément). L'associativité est le concept le moins cité.

Dix étudiants donnent les 5 concepts clés caractérisant un groupe et uniquement ceux-là. Parmi eux, deux étudiants donnent une réponse en langage naturel correcte, alors que seulement 2 des huit réponses en langage mixte le sont. Donc sur un total de 10 copies, 4 donnent une réponse correcte. Les autres font généralement une mauvaise utilisation des quantificateurs, comme par exemple la réponse déjà donnée plus haut : « *Un groupe est un pair* $(E,*)$ *avec* E *un ensemble et* $*$ *un loi tel que*$(x*y)*z = x*(y*z)$ $x,y,z \in E$// $\exists e \in E$ *tel que* $e*x = x*e = x$ $\forall x \in E$// $\exists e \in E$ *tel que* $x*x' = e$ $\forall x \in E$ ».

¤ <u>Les exemples</u> :

Au total, douze étudiants sur 40 proposent des exemples : aucun exemple relatif au groupe symétrique, à l'algèbre linéaire (ou matricielle) ou à la géométrie, n'a cependant été cité, malgré un premier semestre de L3 dédié à l'algèbre linéaire. Voici les exemples qui sont apparus : 7 étudiants donnent un exemple de groupe de « nombres », principalement $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, mais aussi $(\mathbb{Q}^*,\times)$(une fois), et « $(\mathbb{R}^*,.)$ et $(\mathbb{C}^*,.)$ » (une fois) ; 4 étudiants sur 40 mentionnent $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}},+)$, un seul étudiant proposant la famille $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},+)$, avec n générique, alors que ces groupes ont été étudiés en deuxième année de licence à l'université Montpellier 2, dans le cadre d'un cours d'arithmétique (entiers naturels, divisibilité, congruences, construction de corps finis) et que l'anneau $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},+,\times)$ est au programme des classes préparatoires MP-MP* (voir extrait du programme en annexe B) d'où proviennent certains étudiants. Enfin, figurent 3 réponses incomplètes, incorrectes et/ou incohérentes.

*II.2.a) Soit * la loi de composition interne définie dans $\mathbb{R}$ par :*

$$x * y = x + y - xy.$$

*Rappeler la définition d'un élément neutre. Montrer que * possède un élément neutre e.* Nous avons repris les niveaux d'analyse de Chellougui (2003) sur l'utilisation des quantificateurs, en les adaptant à notre contexte.

En ce qui concerne la définition d'élément neutre, nous distinguons les types de réponses suivants :

- *présence du quantificateur universel uniquement* : dans 21 copies, le quantificateur est explicitement présent, qu'il soit correctement introduit ou non ; dans 4 réponses, sa présence est implicite, par exemple avec l'introduction d'un élément générique (« *soit x réel* ») ;

- *présence des deux quantificateurs universel et existentiel dans un énoncé clos* : par exemple « $\exists!\, e \in \mathbb{R}$ *tq* $\forall x \in \mathbb{R} x*e = e*x = e$ » (3 réponses) ;

- *absence de quantificateur* : aucun signe de quantification détecté, par exemple « $x*e = e*x = e$ » (6 réponses) ;

- *pas de réponse* : 3 copies.

En ce qui concerne la recherche effective d'un élément neutre, nous pouvons noter :

- *présence du quantificateur universel uniquement* : 5 réponses (dont 4 de manière explicite et une de façon implicite) ;

- *présence des deux quantificateurs universel et existentiel dans un énoncé clos* : aucune réponse ;

- *absence de quantificateur* : 24 réponses ;

- *pas de réponse* : 11 copies.

Il est remarquable que, lors du passage de la définition générale d'un élément neutre à la vérification d'existence effective, la nécessité d'utiliser un quantificateur ne semble plus évidente pour les étudiants. De fait, dans cette question, la non utilisation de la quantification ne semble pas avoir empêché la réponse à la deuxième partie de la question de manière significative, puisque 22 étudiants donnent la bonne réponse pour l'élément neutre (e = 0). Parmi eux, un seul a utilisé le quantificateur (universel) dans la définition et dans la recherche d'un élément neutre, 10 ont utilisé la quantification dans la définition et pas dans la recherche effective, ceci conformément à ce qui avait été indiqué dans l'analyse a priori, 2 dans la recherche de l'élément neutre et pas dans la définition, et enfin 9 étudiants ne font pas du tout usage de la quantification.

De plus, 12 des 21 bonnes réponses sont données directement, la recherche de l'élément neutre n'étant pas explicitée.

*II.2. b) Rappeler la définition d'un symétrique d'un élément x. Chercher les éléments de $\mathbb{R}$ admettant un symétrique pour la loi *.* Sur 40 étudiants, 34 ont traité cette question, partiellement ou totalement. Nous avions demandé aux étudiants de souligner les termes dont ils ne connaissaient pas le sens. Leurs réponses montrent que, pour la plupart, la notion de symétrique a déjà été rencontrée : en effet, seuls trois étudiants indiquent ne pas comprendre le mot « symétrique ».

Comme nous l'avons expliqué dans l'analyse a priori, la question de définition n'appelait pas une utilisation de quantificateur. De fait, 2 étudiants restituent l'axiome d'existence d'un symétrique pour chaque élément (de la définition de groupe) sans répondre à la question.

La grille d'analyse qu'avait utilisée Chellougui (Chellougui 2003) s'appuyait uniquement sur l'utilisation des quantificateurs, ce qui ne permet pas une analyse assez fine pour l'étude qui nous intéresse ici. En effet, nous souhaitons, par exemple, analyser ici un éventuel lien entre la maîtrise de la quantification dans la définition et la production effective d'un exemple, c'est-à-dire entre la première partie de la question et la deuxième ; de plus, une corrélation entre les réponses aux questions a) et b) pourra ainsi être observée. Nous avons donc distingué plusieurs niveaux dans la résolution de l'exercice :

– *Niveau 0* : Seule une définition erronée ou incertaine est proposée : par exemple, la définition de la commutativité est donnée (à la place de celle de l'élément symétrique), ou encore « *symétrique y de x* $\Leftrightarrow$ $y*x = -x$*// pas sûr de ça. Peut être que c'est* $y*x = 1$, *y inverse de x* » (3 réponses).

– *Niveau 1:* Seule une définition est proposée, énoncée de manière plus ou moins rigoureuse Par exemple : « $x^{-1}*x = x*x^{-1} = 1_*$ » ou encore « x^{-1}*est symétrique de x si et seulement si* $x^{-1}*x = x*x^{-1} = e$ » (12 réponses). Nous distinguons les étudiants qui avaient trouvé un élément neutre dans la question a) (5 copies) et les autres (7 copies).

– *Niveau 2 :* Les définitions sont traduites en terme d'équation avec le neutre trouvé à la question a), mais ne donnent pas lieu à une expression de l'inverse. On peut citer : « *Un symétrique d'un élément x est un élément donnant le neutre par composition à droite et à gauche avec x. // x + y – xy = 0* $\Leftrightarrow$ *x + y = xy* », ou encore « $x*y = e$ *avec y symétrique de x. //* $\Rightarrow$ *x + y – xy = 0* ». (13 réponses.)

– *Niveau 3 :* Une expression correcte de l'inverse est proposée, avec la condition explicite $x \neq 1$ (1 copie), ou non (4 copies) « $\forall x, \exists x' tq x{*}x' = x'{*}x = e$, *x' est dit symétrique de x. //* $x{*}y = x + y - xye = 0$. *// Je cherche y, symétrique de x. //* $x{*}y = 0x + y - xy = 0$*//* $y(1-x) = -x \Rightarrow y = \frac{x}{x-1}$ ». « $\forall x \in G, \exists ! \, y \in G$ *tel que* $x{*}y = e$ *//* $x{*}y = x + y - xy \Rightarrow x + y - xy = 0 \Rightarrow y(1-x) = -x \Rightarrow y = \frac{x}{x-1}$ *avec* $x \neq 1$ ». *(*5 réponses.)

– *Niveau 4 :* Une réponse correcte à la question est donnée sous la forme d'ensemble, obtenu via l'expression du symétrique (sans condition $x \neq 1$ explicite). Le cas $x = 1$ n'est pas justifié (1 copie) : « *C'est un élément x' tel que* $x{*}x' = e$. *// On a :* $x + x' - xx' = 0 \Leftrightarrow x = xx' - x' \Leftrightarrow x = x'(x-1) \Leftrightarrow x = x'(x-1) \Leftrightarrow x' = \frac{x}{x-1}$*. Donc l'ensemble de ces éléments est* $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ *»*.

– *Niveau 5* : Une réponse totalement correcte est donnée (aucune réponse).

Pour i de 1 à 3, le niveau $i + 1$ implique un traitement correct au niveau i, aux exceptions suivantes près : 4 étudiants du niveau 1, proposent une réponse pour la deuxième partie de la question sans explication. « *Je ne vois que 2* » ou « *Il n'existe pas* », ou encore « *pour* $x \neq 0$ ».

Regardons maintenant, avec ces niveaux d'analyse, les liens entre définitions du symétrique et recherche effective des éléments inversibles. Dans les niveaux 3 et 4, six étudiants ont su engager une procédure pour déterminer explicitement l'inverse d'un élément x (même si la condition d'existence n'est pas toujours énoncée). Au niveau 2, treize étudiants ont su interpréter la définition générale de symétrique dans le cadre de l'exercice en écrivant l'égalité $x + y - xy = 0$, mais n'ont pas su finir leur recherche. Huit transforment d'ailleurs cette expression en $x + y = xy$, mais sans nécessairement conclure. Trois étudiants concluent avec une réponse du type « *Ce sont tous les éléments qui vérifient l'équation* $x + y = xy$ », soit l'introduction de l'élément y n'est pas explicite, soit de la manière suivante : « *avec* $x \in \mathbb{R}$ ». Un étudiant conclut « $x = 0 = x^{-1}$ ». Un autre arrive à $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$ et conclut « *seul 2 vérifie cela*, $2{*}2 = 0$. » Toutes ces réponses semblent confirmer la non identification des statuts respectifs de x et y. Enfin, au niveau 1, cinq étudiants ont trouvé une valeur pour l'élément neutre à la question précédente, et ont donné la définition d'un symétrique, mais ne traduisent pas $x * y = e$ de la définition générale en $x + y - xy = 0$.

Finalement, 18 étudiants sur 23 sont capables de restituer la définition de symétrique, et ont tous les éléments pour le traduire dans le cadre de l'énoncé, mais ne sont pas capables de le faire. Ceci semble être dû à une mauvaise compréhension du statut des lettres. L'on peut faire l'hypothèse qu'il s'agit là d'un obstacle didactique : dans l'enseignement supérieur, la différence de statut des lettres n'est pas systématiquement traduite par un changement de notation, une explication étant que le statut des lettres dans un même problème peut changer (par exemple dans la résolution d'un système linéaire, les inconnues n'apparaissant pas comme variable pivot vont devenir les paramètres à partir desquelles l'ensemble des solutions va s'exprimer). Ainsi le symbole x est souvent utilisé comme inconnue, mais aussi indifféremment comme paramètre, variable ou élément générique. Dans cette question x est un paramètre, en fonction duquel il s'agit de déterminer si l'équation $x*y = e$ est résoluble, et non une inconnue, ce qui bloque l'étudiant dans son processus de résolution. Du fait de l'habitude d'introduire une lettre différente (par exemple a) lorsqu'il s'agit d'un paramètre, l'utilisation de la lettre a au lieu de x dans la formulation de la question aurait probablement facilité la résolution en clarifiant la situation. Un argument fréquemment avancé par les enseignants du supérieur est que la systématisation d'une telle prise en charge didactique nuit au développement de la flexibilité (ici au niveau des changements de statut des lettres) requise au niveau de l'enseignement supérieur. Les résultats obtenus à cet item indiquent que cette flexibilité n’est pas effective pour de nombreux étudiants de notre population.

D'un point de vue de l'impact de l'utilisation de la quantification sur la capacité à s'engager dans un processus de résolution, nous observons les faits suivants :

– En premier lieu, il n’y a conjointement aucune réponse parfaitement satisfaisante d'un point de vue mathématique (qui traite par exemple tous les cas) ni aucune réponse faisant un bon usage des quantificateurs à la fois dans la définition et la résolution.

– Ensuite, sur les 18 étudiants (13 du niveau 2 + 5 du niveau 1) ayant proposé une définition et un élément neutre à la question précédente, seuls deux ont utilisé explicitement des quantificateurs, alors que sur les 5 étudiants ayant trouvé une expression des symétriques, 2 ont utilisé des quantificateurs. Ce point est à nuancer puisque, comme nous l'avons expliqué, l'utilisation des quantificateurs n'était jamais totalement correcte.

– Enfin, en analysant les copies dans lesquelles une procédure de résolution a été engagée (ce qui se traduit par au moins une manipulation de l'égalité de départ), on observe le fait intéressant qu'aucune des réponses qui n'ont pas abouti ne présentait de quantification, alors que la quantification apparaît dans 2 des 5 copies qui proposent l'expression d'un inverse.

Le dernier point pourrait laisser penser que l'utilisation des quantificateurs permet un meilleur engagement dans un processus de résolution. Néanmoins, la faiblesse des effectifs nous incite à la prudence, même si ceci recouvre les résultats trouvés par Chellougui (2003). En outre, dans une analyse qualitative des réponses, nous pouvons observer que les 2 étudiants dont il est question font un mauvais usage des quantificateurs en donnant un énoncé clos correspondant à l'axiome d'existence d'un inverse de la définition d'un groupe : « $\forall x \in G, \exists!\, y \in G$ *tel que* $x{*}y = e$ ».

Cette situation est différente de la question a), où l'absence de la quantification n'a pas semblé avoir d'influence significative dans la possibilité de répondre ou non à la question. Ceci met bien lumière la différence de traitement dans les problèmes d'existence universelle (de la forme il existe - quel que soit) et d'existence relative (de la forme quel que soit - il existe) d'éléments, évoquée dans l'analyse a priori.

En définitive, les résultats obtenus à ces deux questions montrent la difficulté des étudiants à articuler les définitions formelles avec des exemples familiers. Ils confirment également les difficultés liées à la quantification identifiées par Chellougui (2003), en lien avec une instabilité du statut des lettres qui empêche les définitions d'être opératoires.

3.4. Questions autour du quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'objet paradigmatique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (exemple paradigmatique de groupe abélien cyclique d'ordre fini et d'anneau quotient). Il a été rencontré par les étudiants ayant suivi un module d'arithmétique en deuxième année à l'UM2, ainsi que par les étudiants issus des classes préparatoires aux écoles d'ingénieur.

III.1. Définir ce qu'est une relation d'équivalence sur un ensemble et les classes d'équivalence associées. Donnez quelques exemples.

III.2. Donner la définition d'une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

III.3. Définir l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quelle est sa structure ?

→ Analyse a priori

L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut être défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de la relation sur $\mathbb{Z}$: $xRy \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$. Une manière moins formelle d'exprimer cela est la suivante : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence « être congrus modulo *n* », ou encore « avoir le même reste dans la division euclidienne par $n \in \mathbb{N}^*$». C'est une manière plus commode et opératoire d'introduire cette notion. Alors que la première définition permet de décider si deux éléments appartiennent à la même classe, la division euclidienne permet de plus de décider dans quelle classe sont ces éléments (les entiers de *0* à *n-1* étant le système privilégié de représentants qui est choisi).

C'est à l'aide de la division euclidienne que l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a été défini à l'Université Montpellier 2 en deuxième année de licence.

III.1. Il s'agit ici d'une définition de relation entre objets. La relation d'équivalence est de plus une notion de théorie des ensembles avec laquelle les étudiants devraient être familiers. En effet, c'est une notion qui a été théorisée en première année et qui est transversale à plusieurs autres notions : en géométrie élémentaire où le vecteur est défini comme classe d'équivalence de bipoints, en arithmétique (« être congrus modulo n » est une relation d'équivalence), en algèbre linéaire (les classes de similitudes pour les matrices sont intimement liées à la diagonalisation), etc. Elle est en fait rencontrée par les élèves dès l'école primaire dans toutes les tâches de classement d'objets, par exemple selon leur taille ou leur couleur ; elle contribue également à donner du sens au concept de nombre cardinal. C'est par ailleurs une notion indispensable à la théorie des groupes : en effet, une manière incontournable de présenter le groupe quotient est de le définir comme ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence modulo un sous-groupe, puis de le munir de lois induites qui seront bien définies si et seulement si le sous-groupe est distingué.

Il convient de regarder ici à nouveau l'articulation entre les aspects syntaxiques et sémantiques, ainsi que la pragmatique, notamment la capacité des étudiants à en fournir des exemples « concrets » (des modèles), qu'ils ont fréquentés dans leur cursus. L'on peut faire l'hypothèse que, à l'instar de la définition de groupe, un nombre significatif d'étudiants préférera utiliser le langage naturel, évitant ainsi l'explicitation des propriétés formelles.

Concernant la définition des classes d'équivalence, on s'attend à trouver une écriture ensembliste du type $\bar{a} = \{x \in E | x \sim a\}$ (définition habituellement donnée dans les manuels), ou une écriture en langage naturel comme « la classe de a est l'ensemble des éléments équivalents à a ».

Parmi les relations d'équivalence usuelles, on peut mentionner la relation d'égalité des produits en croix sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dont les classes sont les nombres rationnels, ou encore l'équipollence sur l'ensemble des bipoints d'un espace affine, dont les classes sont les vecteurs, ou tout simplement l'équivalence logique ou encore l'égalité. La relation de congruence modulo n permettant de définir les classes d'entiers modulo n (donc les éléments du quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) devrait être fréquemment citée, ayant été rencontrée au deuxième semestre de la deuxième année de licence. Les classes d'équivalence proposées devraient a priori être liées aux relations d'équivalence données. Nous devrions donc fréquemment retrouver les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n = 2, 3, \dots$ ou n générique.

III.2. Nous traiterons ici uniquement le cas de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, en lien avec la construction du quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui nous intéresse.

On s'attend ici à ce que les étudiants énoncent un théorème de division euclidienne, en assurant l'existence, sans formaliser davantage la nature de l'objet division euclidienne (dans le langage de la théorie des ensembles, c'est une application, voir ci-dessous) :

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = bq + r$, $|r| < |b|$.

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ avec l'unicité du couple (q, r)
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = bq + r$, $0 \leqslant r < |b|$.

On peut voir la division euclidienne comme une application de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dans $\mathbb{Z}^2$, qui à un couple (a, b) en associe un (unique) autre (q, r) ; ou alors comme un procédé, un algorithme, utilisé lorsque l'on met en œuvre le processus de division. Il est très probable que les étudiants assimilent la division euclidienne au théorème permettant d'en établir l'existence.

De plus, outre les erreurs de formulation liées à la syntaxe, l'on pourrait trouver des oublis : par exemple omettre de mentionner que l'élément b doit être non-nul, ou encore oublier la ou les valeurs absolues et écrire : «$0 \leqslant r < b$». Ceci peut être lié à une confusion entre la division euclidienne dans l'ensemble des entiers relatifs et la division euclidienne dans l'ensemble des entiers naturels où la valeur absolue est inutile.

III.3. En plus des définitions déjà évoquées, l'on pourra trouver des écritures ensemblistes du type « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ » qui seront plus ou moins explicitées. Il s'agit d'une définition dite en extension qui consiste à énumérer tous les objets satisfaisants la définition. Ce type de définition n'est pas toujours possible.

La formulation de la deuxième partie de la question peut sembler étrange : d'un point de vue rigoureusement mathématique, un ensemble seul n'a pas de structure (algébrique). Ce choix d'énonciation est cependant volontaire. En effet, le but de cette partie de la question est notamment d'interroger les conceptions des étudiants relativement à la notion métamathématique de structure : cette dernière joue-t-elle, à l'entrée du L3, un rôle organisateur (ou architectonique pour parler comme Bourbaki) des différentes classes d'objets et théories mathématiques (notamment algébriques) ? $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il conceptualisé comme un ensemble quotient muni d'opérations ? Si c'est le cas, les exemples paradigmatiques ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, +), ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, +, x) et ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, +, x), de groupe cyclique d'ordre *n*, d'anneau quotient et de corps fini (pour p un nombre premier) respectivement sont-ils disponibles ? De ce point de vue, préciser davantage la question aurait éventuellement induit une sorte d'effet Topaze en donnant trop d'indication sur la réponse attendue.

L'usage du terme *structure* n'est pas institutionnalisé : l'étudiant ne dispose pas d'une liste de structures données par l'enseignant, il confectionne sa propre liste et fait sens éventuellement de la notion de structure, qui n'est jamais mathématiquement définie (voir Hausberger 2013, paragraphe III), à travers sa propre analyse du discours, de nature méta, de l'enseignant. De ce fait, on peut faire l'hypothèse que l'on trouvera des réponses plus ou moins vagues ne faisant pas appel au vocabulaire des structures algébriques usuelles, du type : « c'est un quotient de l'ensemble des entiers par l'ensemble des multiples de n », ou encore « c'est le quotient de $\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$ », ou encore « c'est un quotient » ou « c'est une structure quotient ».

→ Résultats

III.1.

¤ *Définition d'une relation d'équivalence* :

Vingt-sept étudiants sur 40 ont tenté de donner une définition d'une relation d'équivalence. Aucun étudiant n'a donné une réponse correcte et complète (c'est-à-dire en explicitant formellement les propriétés lorsqu'elles sont nommées). Cependant, six étudiants énoncent une définition correcte en langage naturel du type : «*Une relation d'équivalence est une relation binaire symétrique, réflexive et transitive.*». Cinq étudiants énoncent formellement les propriétés d'une relation d'équivalence mais n'utilisent aucun quantificateur. Voici un tel exemple *: « Une relation d'équivalence est une relation vérifiant // $x \sim x$ // $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ // $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.* ». Contrairement à ce que nous aurions pu penser, aucune confusion avec la définition d'une relation d'ordre n'a été constatée. Nous notons dans cinq copies des confusions avec d'autres notions : deux étudiants évoquent l'associativité (« *une relation d'équivalence vérifie : // la transitivité, la symétrie, et est associative »),* un autre étudiant évoque les espaces vectoriels pour définir la relation d'équivalence (« *soit $g, g', g'' \in E$ un espace* vectoriel […] »), un autre confond relation d'équivalence et équivalence logique, enfin un étudiant définit une relation d'équivalence comme *« une partie de $E \times E$» (la relation binaire vue comme un graphe ?).* Presque un tiers des étudiants ayant répondu (8 étudiants sur les 27) donne une réponse sans faire une phrase. Nous en avons déjà cité deux. Un autre exemple est le suivant : « *relat d'équivalence, =transitive, réflexif, symétriques.*». Quatre étudiants donnent des réponses insuffisantes du type : « *1) transitive // 2) réflexive // 3) ?* ».

¤ *La définition de classe d'équivalence :*

Huit étudiants sur les 40 (soit 20 %) ont tenté de donner une définition d'une classe d'équivalence. L'un d'entre eux en donne une définition correcte et complète en utilisant le registre ensembliste comme suit : « *soit x un singleton. On note X sa classe d'équivalence // $X = \{y \in E | x \sim y\}$* ». Un étudiant donne une réponse se rapprochant d'une définition correcte en utilisant le langage naturel : « *Les classes d'équivalence d'un point x st tous y tq $x \sim y$*». Deux étudiants donnent une réponse peu claire ou maladroite : « *les classes d'équivalence sont les objets qui sont tous* *en relation entre eux.* » et « *Classe d'éq=* $\{a_i \in A/a_i \sim a_j\}$ ». Enfin il est à noter qu'un étudiant semble confondre classe d'équivalence et normes équivalentes[7]. Il écrit en effet : « *Une classe d'équivalence est un ensemble d'éléments où 2 éléments* x_1 *ou* x_2 *sont équivalents s'il existe* $c_1 > 0$ *et* $c_2 > 0$ *tq* $c_1x_1 \leq x_2 \leq c_2x_1$ ».

¤ *Les exemples de relation et de classe d'équivalence :*

Quatre étudiants entreprennent de donner un exemple de relation d'équivalence. Voici leur réponse :

- « *Exemple : $\sim$ est une relation d'équivalence sur* $L^1_{\square}(E, A, \mu)$ où $f \sim g$ si $f = g\mu - pp$ »

- « *L'espace projectif* $\mathbb{R}P^n$ *avec les classes d'équivalence associées (les suites vérifiant* $x_i = \lambda g_i$*)* ».

- « *" Appartiennent au même espace vectoriel" est une relation d'équivalence* »

- « *exple la relation* $\leqslant$ *sur* $\mathbb{R}$ *est une relation d'équivalence et* $\bar{x} = \{y \in E/y \leq x\}$ »

Les deux premiers exemples sont très élaborés. Le troisième exemple mériterait d'être précisé : faut-il comprendre la relation d'équivalence « appartiennent au même espace vectoriel E (fixé) » ou bien « appartiennent à un même espace vectoriel » ? Le dernier exemple est en revanche un exemple de relation d'ordre et non de relation d'équivalence, alors qu'aucune confusion n'apparaît dans la définition.

Citons également deux étudiants qui écrivent : « $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ », certainement en guise d'exemple de classe d'équivalence.

Il est étonnant que les seules relations d'équivalence correctes proposées soient des relations d'équivalence aussi élaborées, les relations d'équivalence élémentaires que nous avions proposées dans l'analyse *a priori* n'apparaissant pas. Les exemples mobilisables, cités effectivement par les étudiants, sont ceux rencontrés très récemment au premier semestre du L3 et probablement identifiés par l'enseignant en tant que tels.

III. 2. Vingt-trois étudiants ont proposé une définition de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ mais aucun n'a su donner une définition complète et correcte. Par exemple, aucun étudiant n'a placé une valeur absolue, ni pour r, ni pour b dans l'énoncé du théorème de division euclidienne ; tous les étudiants ont ainsi implicitement considéré la division euclidienne comme s'effectuant dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. De plus, aucun étudiant n'indique que le « diviseur » b dans $\mathbb{Z}$ doit être

[7] Deux normes N_1, N_2 définies sur un espace vectoriel E sont équivalentes si il existe deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que pour tout $x \in E$ $C_1.N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2.N_1(x)$.

non nul. Un seul étudiant indique les ensembles d'appartenance des différents éléments, de façon incorrecte : « $\forall(n,k) \in \mathbb{Z}^2, \exists(q,r) \in\ n = qk + r$ ». En revanche, certains le font partiellement : par exemple « *Soit A et B : la div euclid. est :* $\exists!\,(r,q) \in \mathbb{Z}^2$ // $0 \leqslant r < BA = qB + r$ ».

La plupart des étudiants donnent des réponses « synthétiques » comme celle-ci : « $a/b : a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$ », ne précisant, ni les ensembles, ni les quantificateurs. Cinq étudiants n'indiquent pas que le reste doit être positif ou nul.

Trois étudiants montrent une confusion dans la condition d'inégalité sur le reste : « *La division euclidienne d'un élément x de* $\mathbb{Z}$ *par un élément y de* $\mathbb{Z}$ *donne* (a,r)*où* $x = ay + r$ *avec* $0 \leqslant a < r$ ». En définitive, l'examen des copies fait apparaître sur ce point un faible contrôle des hypothèses du théorème ainsi qu'une faible aptitude à l'expression formelle.

Les résultats obtenus à cette question sont donc assez décevants. Un facteur explicatif pourrait être la prépondérance de la dimension outil de la division euclidienne, la tâche de définition mettant en avant la dimension objet. Dès le lycée, la division euclidienne est plutôt présentée comme un procédé effectif permettant une certaine décomposition. Le lien entre ce procédé et la définition formelle très générale se fera beaucoup plus tard (en troisième année de licence ou en première année de master). C'est probablement dans ce cadre très unifié que la division euclidienne accédera au statut d'objet. Le passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ est déjà la visée d'une telle généralisation, d'où en partie les difficultés rencontrées à donner une définition dans ce cadre élargi (par rapport à $\mathbb{N}$).

III.3.a) Trois aspects sont abordés dans cette question : le registre de représentation choisi dans la réponse, le type de conception des étudiants sur la nature de l'objet $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on peut inférer à partir des réponses données, et enfin la qualité de la réponse (correcte, incomplète, incohérente, etc.).

Nous nous intéressons d'abord au registre de représentation choisi par les étudiants. Les deux registres préférés pour cette question sont les registres ensembliste tel que « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\lambda \in \mathbb{Z}/(\lambda\,\mathrm{mod}n) \in \{0,\ldots,n-1\}\}$ » (cela concerne 12 étudiants sur les 31 qui ont répondu, soit 38,7%) et du langage naturel comme « *C'est l'ensemble des multiples de n* » (11 étudiants, soit 35,6% des étudiants qui ont répondu). Ainsi les trois quarts des étudiants qui ont répondu ont utilisé ces registres de représentation. Trois étudiants utilisent le registre algébrique comme « $k \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \Rightarrow k \equiv p[n]$ », et 3 étudiants utilisent au moins deux registres différents.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'analyser les types de conceptions présents relativement à cet ensemble. Nous nous sommes fiés à certains indices pour effectuer notre classification : il s'agit des signifiants utilisés par l'étudiant dans sa réponse. C'est en effet un des composants qui définissent un concept selon

Vergnaud (1990). Ils constituent donc de bons indicateurs pour déterminer le type de conceptions que les élèves ont à propos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: soit comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, soit comme un ensemble de classes d'équivalence. Mis à part les copies où il n'y a pas de réponse (« SR »), nous avons distingué 3 grandes catégories :

- les réponses dans lesquelles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ semble être considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$; l'on distingue les réponses où ceci est implicite (réponses du type « $\{0,\ldots,n-1\}$ », ou « *ensemble des "restes" modulo n ») ou* explicite : « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\lambda\in\mathbb{Z}/(\lambda\,\mathrm{mod}n)\in\{0,\ldots,n-1\}\}$ » ou « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est un sous-ensemble de* $\mathbb{Z}$*. Il est composé [...]* ».
- Les réponses dans lesquelles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne semble pas être considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$; l'on distingue les réponses où ceci est implicite (« $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}=\{\bar{0},\bar{1},\ldots,\bar{n}\}$ ») ou explicite (les réponses font généralement référence à des « classes » comme ici : « *C'est l'ensemble des classes d'équivalence modn des éléments de* $\mathbb{Z}$»).
- Les réponses trop « pauvres » où il n'est pas possible de décider, comme la réponse suivante : « *modulo [n]* ».

Nous obtenons les résultats suivants.

Conceptions	explicite/ implicite	Signifiants	**Nb d'étudiants**	**%**
Sous-ensemble de Z	explicite	Ss-ens/ss-gp	3	7,5
		Élém. ∈□	2	5,0
	implicite	Restes modulo	3	7,5
		Autres	2	5,0
«Classe» / «Quotient» / «Rel. d'Equiva-lence»	explicite	Classes/RE	8	20,0
		Congruence/Quo	2	5,0
	implicite	$\{\bar{0},\bar{1},\ldots\}$	7	17,5
Indéterminé			4	10,0
Sans Réponse (SR)			9	22,5
Total			40	100

Ces résultats montrent que chez 10 des 27 étudiants dont on a pu identifier une de ces deux conceptions, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Ce n'est pas étonnant, car le choix de représentants privilégiés a justement pour but d'identifier les classes à des éléments particuliers. L'intérêt de la conceptualisation des classes comme des sous-ensembles (notamment à travers l'homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$) ne sera visible pour l'étudiant que tardivement dans l'élaboration théorique.

Pour autant une conception en termes de classes d'équivalence n'implique pas nécessairement une réponse correcte à la question : en effet, au total, seuls 3 étudiants sur 40 sont capables de donner une définition satisfaisante de cet ensemble étudié l'année précédente, un quart en donnant une réponse incomplète.

III.3.b) Si l'on excepte les étudiants qui n'ont pas répondu (SR), nous avons classé les autres copies suivant que les réponses mentionnent que $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ est un groupe, un anneau ou un corps si (et seulement si) n est premier. Ces trois catégories constituent les réponses qui peuvent être considérées comme correctes bien que les lois considérées demeurent implicites. Certains étudiants mentionnent que $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ est toujours un corps ; d'autres réponses sont trop imprécises, comme « *structure d'ensemble quotient* ». Ceci représente les réponses qui ne peuvent pas être considérées comme correctes. Voici les résultats obtenus :

	Structure	Nb d'étudiants	%
Réponse correcte	Groupe	5	12,5
	Anneau	5	12,5
	Corps si n premier	5	12,5
Réponse incorrecte	Corps	2	5,0
	Autre	4	10,0
Réponse imprécise	« Quotient »	1	2,5
Sans Réponse (SR)		21	52,5

Nous observons ainsi que plus de la moitié des étudiants n'a pas répondu à cette question (21 étudiants sur 40). Aucun étudiant n'évoque à la fois que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe et un anneau, et parmi les réponses de « corps si et seulement si n est premier », une seule évoque dans le même temps la structure de groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et deux qu'il s'agit d'abord d'un anneau. Seuls 10 étudiants affirment que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède une structure de groupe ou d'anneau.

Parmi les autres réponses, 5 évoquent une structure de groupe, 5 une structure d'anneau, et 5 une structure de corps si (et seulement si) $n$est premier. Les autres étudiants ne répondent pas à la question (21 étudiants sur 40), ou donnent des réponses incorrectes (6 sur 40).

En définitive, bien que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ait été rencontré par nos étudiants, en tant que groupe et anneau, dans le cadre des enseignements d'arithmétique de l'année antérieure, cet objet semble trop peu familier aux étudiants pour pouvoir jouer le rôle d'exemple paradigmatique de groupe abélien cyclique d'ordre fini et d'anneau quotient. Ceci est renforcé par le fait que les étudiants n'ont pas produit à la première question les exemples de classes d'équivalence associées à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (« avoir le même reste dans la division euclidienne par *n* » ou « être congru modulo *n* »). Ainsi, on peut penser que le mode de pensée mathématique qui consiste à identifier une relation d'équivalence pertinente sur un ensemble donné et à considérer l'ensemble obtenu par « passage au quotient » n'est pas disponible chez les étudiants que nous avons interrogés.

3.5 Synthèse des résultats

Nous présentons ci-dessous une synthèse des principaux résultats qui se dégagent de nos analyses :

1. Le corpus recueilli met en lumière les difficultés des étudiants à articuler les définitions formelles abstraites avec les domaines concrets d'objets et les invariants opératoires auxquelles ces définitions renvoient, ce qui se manifeste en particulier par l'incapacité des étudiants à produire des exemples, à l'exception d'exemples complexes rencontrés récemment. Ceci est le cas en particulier pour les relations d'équivalence.

2. On observe dans un certain nombre de réponses l'absence de quantificateurs dans les définitions formelles, ce qui induit une incertitude sur le statut logique des lettres (variable libre, variable liée, élément générique, élément singulier), dont on peut faire l'hypothèse que ceci empêche les étudiants de s'engager dans les preuves, ou encore d'interpréter les résultats des calculs conduits. Ceci apparaît principalement dans les exercices sur les groupes.

3. Concernant l'exemple paradigmatique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, seuls 40% des étudiants interrogés donnent une définition renvoyant explicitement à la notion d'ensemble quotient, et ce quoique cet aspect soit « visible » dans la notation de cet ensemble. Nous faisons l'hypothèse que le point de vue « ensemble quotient » étant peu explicité en Algèbre Linéaire dans les cours de Licence 1ère et 2ème années, les étudiants ne disposent pas d'une référence permettant d'identifier cet aspect crucial. Ceci montre que pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ joue son rôle d'exemple paradigmatique, il est nécessaire de le retravailler dans cette perspective, d'en faire une reprise, en adaptant pour le niveau qui nous intéresse cette notion introduite par Larguier (2012). Par ailleurs, seuls 50% des étudiants répondent à la question sur la structure de l'ensemble. Ceci confirme ce que nous avions indiqué dans l'analyse a priori, à savoir que tant que le terme de structure n'est pas institutionnalisé, il ne joue pas son rôle organisateur.

4. L'analyse logique des exercices sur la notion de partie génératrice fait apparaître une complexité qui avait été sous-estimée lors de l'élaboration du questionnaire et qui peut expliquer pour partie les difficultés rencontrées par les étudiants. Nous faisons l'hypothèse que ceci vaut pour d'autres définitions axiomatiques pour lesquelles le nombre de termes primitifs est important. Ceci met

en lumière la pertinence de la prise en compte l'analyse logique des énoncés dans les analyses a priori des tâches proposées (Durand-Guerrier, 2013).

5. L'analyse lexicale effectuée sur la définition de groupe montre des liens conceptuels très forts chez les étudiants ; par exemple entre ensemble et loi de composition interne, ou encore entre existence d'un élément neutre et d'un symétrique pour tout élément. Mais ces liens ne suffisent pas pour autant à restituer la définition correctement (notamment à cause d'une mauvaise utilisation des quantificateurs) ce qui rejoint les résultats des travaux de Chellougui (2003)).

Conclusion

Nous nous proposions dans ce travail de conduire une première exploration sur la disponibilité chez les étudiants de troisième année de licence à l'université Montpellier 2 des prérequis nécessaires à l'apprentissage de la théorie abstraite des groupes. L'analyse épistémologique met en évidence le rôle fondamental de l'articulation entre définitions axiomatiques et exemples. Nos résultats montrent que cette articulation est peu disponible chez les étudiants que nous avons interrogés, y compris pour des notions relativement élémentaires comme celle de « relation d'équivalence ». On peut faire l'hypothèse que cette faiblesse dans la capacité à articuler définitions et exemples est un obstacle à la restitution de définitions axiomatiques formelles, les étudiants ne disposant pas des contrôles sémantiques fournis par les exemples. En outre, l'analyse logique montre une complexité réelle dans la construction effective des exemples dans le cas des définitions axiomatiques.

Il ressort de nos analyses que les étudiants sont mal préparés à aborder l'étude de la théorie abstraite des groupes, sous la forme habituelle où elle est enseignée en troisième année de licence à l'Université Montpellier 2.

Nos travaux se poursuivent suivant deux directions :

- Approfondissement de l'étude didactique de l'articulation entre définitions et exemples et propositions de pistes pour la travailler (thèse en cours de C. Spitalas).

- Étude épistémologique et didactique du processus de construction d'une théorie structurelle en faisant fonctionner dans le cadre de l'élaboration d'une mini-théorie (au sens de Tarski 1969) les dialectiques concret/abstrait, objet/structure, syntaxe/sémantique, définitions/preuves (Hausberger 2015b).

Annexes

A. Une proposition de réponse aux questions I.3.a) et I.4.b)

I.3. Dans chacun des cas suivants, la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez.

a) $E = M_n(\mathbb{R})$ *et* $A = GL_n(\mathbb{R})$.

La famille des matrices $(E_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ (où les coefficients de la matrice E_{ij} sont tous nuls, sauf à la place (i,j) où la valeur est 1) est une base de E.

Or A engendre chacune de ces matrices. En effet, notons $(P_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la famille de matrices de A définies par : $\forall i,j P_{ij} = E_{ij} + I_n$, où I_n est la matrice identité ; on vérifie immédiatement que ces matrices sont triangulaires inférieures (si i ⩾ j) ou supérieures (si i ⩽ j) de coefficients diagonaux tous non nuls, donc elles sont toutes dans A. On a alors : $\forall i,j\ E_{ij} = P_{ij} - I_n$, avec P_{ij} et I_n dans A, ce qui signifie que la famille $\{(P_{ij})_{i,j=1\ldots n}, I_n\}$ engendre la famille $(E_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ donc engendre E. Donc A est une famille génératrice de E.

I.4. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel : $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | tr(M) = 0\}$.

a) Expliquez rapidement pourquoi E est bien un espace vectoriel.

b) Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse.

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On a : $tr(M) = 0 \Leftrightarrow a + e + j = 0 \Leftrightarrow j = -a - e$.

D'où : $M \in E \Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}, M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & -a-e \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$

$$M = a(E_{11} - E_{33}) + bE_{12} + cE_{13} + dE_{21} + e(E_{22} - E_{33}) + fE_{23} + gE_{31} + hE_{32}$$

(où E_{ij} désigne la matrice usuelle de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1).

Or les matrices $(E_{11} - E_{33})$, E_{12}, E_{13}, E_{21}, $(E_{22} - E_{33})$, E_{23}, E_{21}et E_{32} sont toutes dans l'espace vectoriel E, et toute matrice dans E s'écrit comme combinaison linéaire de ces matrices.

Ce qui signifie précisément que la famille

$$\{(E_{11} - E_{33}), E_{12,}E_{13,}E_{21,}(E_{22} - E_{33}), E_{23,}E_{31,}E_{32}\}$$

est génératrice de E. Remarque : elle en est même une base.

B. Extrait du programme de classes préparatoires MP-MP*

MP

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs ; bases, dimension et rang ; formes linéaires, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Il comporte en outre quelques compléments d'algèbre et d'arithmétique : groupes cycliques, idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$, *anneau* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, *idéaux de l'anneau* $K[X]$.

La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations et des transformations géométriques...).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (issus de l'arithmétique ou de l'algèbre linéaire) ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. ALGÈBRE GÉNÉRALE

1- Groupes

a) Groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Structure des sous-groupes de $\mathbf{Z}$.

Relation de congruence modulo un entier $n > 0$, notation $a \equiv b$ modulo n. Compatibilité avec l'addition ; groupe quotient $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, morphisme canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Tout autre exemple de groupe quotient est hors programme.

Étant donné un élément a d'un groupe G, morphisme $k \mapsto ka$ (ou $k \mapsto a^k$) du groupe $\mathbf{Z}$ dans G ; noyau et image d'un tel morphisme. Le sous-groupe de G engendré par a est isomorphe à $\mathbf{Z}$ si ce noyau est réduit à $\{0\}$; il est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si ce noyau est $n\mathbf{Z}$.

Définition d'un groupe cyclique G (groupe fini admettant un générateur a) ; isomorphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur G, où n est l'ordre de G. Application au groupe $\mathbf{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité.

b) Groupes

Il s'agit d'introduire quelques notions de base sur les groupes et de les mettre en œuvre sur les groupes figurant au programme (groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$*, groupe linéaire, groupe orthogonal et leurs sous-groupes), en relation étroite avec l'algèbre linéaire et la géométrie. Il convient notamment d'étudier des exemples simples de réalisations géométriques de groupes finis par des groupes d'isométries.*

Définition du produit de deux groupes.
Définition d'une partie génératrice d'un groupe.

L'étude générale des groupes, ainsi que celle des groupes finis, est hors programme.
On donnera des exemples de parties génératrices issus de l'algèbre et de la géométrie.

2- Anneaux et corps

Les notions d'anneau quotient et d'anneau principal sont hors programme.

a) Idéaux d'un anneau commutatif

Définition d'un morphisme d'anneaux, d'un isomorphisme.

Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Définition d'un idéal d'un anneau commutatif A.

Définition de l'idéal Ax (ou xA) engendré par un élément x de A.

Dans un anneau intègre A, définition de la relation de divisibilité $x|y$.

Pour que x divise y, il faut et il suffit que $Ay \subset Ax$.

C. Relevé statistique de l'analyse conceptuelle de la définition de groupe

Copie	Langage	Ensemble/ Espace	L(CI)/ Opération	Asso-ciativité	Elém. neutre	Symétr./ Opposé	Commutat. "symétrie"	Distri-butivité	LCE	2 lois	Transi-tivité	Addition	Structure	TOTAL
2		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5		0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
6		1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	7
7	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
8	LN (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
9	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
10		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
11		1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
12		1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
13		0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5
14	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
15	LN (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
16	LM (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
17		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
19		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
20	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
21		1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5
22		0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
24		1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
25		1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	6
26		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
27	LM (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
28		0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	5
29		1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
30		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	6
31		1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4
33	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
34		0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
35		1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3
36		0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	4
37		1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	6
38		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
39	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
40		0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
TOTAL		23	30	25	29	28	3	3	2	2	1	1	1	

BIBLIOGRAPHIE

AZROU, N. (2013), Proof in Algebra at the University Level : Analysis of Students' Difficulties. In Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M.-A. (eds). *Proceedings of CERME 8 - Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, Antalya : Turkey (2013), Middle East Technical University Ankara Turkey, pp. 76-85.

BOURBAKI, N. (1948), L'architecture des mathématiques. Dans Le Lionnais F. (ed.) (1948, rééd. 1997) *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.

CAVAILLES, J. (2008), *Œuvres complètes de Philosophie des Sciences*. Paris : Hermann.

CHELLOUGUI, F. (2003), Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien, *Petit x* 61, p. 11-34.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *RDM* 19/2, La Pensée Sauvage.

COPI, I. (1954), *Symbolic logic*. New York : Macmillan.

CORI, R. & LASCAR, D. (1993), *Logique mathématique*. Collection Axiomes, Masson.

CORRY, L. (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. 2nd edition. Basel : Birkhäuser, 2004.

DORIER, J.-L., ROBERT, A., ROBINET, J. & ROGALSKI, M. (1994), L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions, dans Artigue, M. et al. *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France - Hommage à Guy Brouseau et à Gérard Vergnaud*. (1993), Grenoble : La Pensée Sauvage, 328-342

DORIER, J.-L. (ed.) (1997), *L'algèbre linéaire en question*, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditeur.

DURAND-GUERRIER, V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger les Recherches (HDR), Université Lyon 1, IREM de Lyon.

DURAND-GUERIER,V. (2008), Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics education* 40, 373-384.

DURAND-GUERRIER V. (2013), Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, dans A. Bronner et al. (eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Grenoble : La Pensée sauvage.

ECO U. (1980), Segno. Milan : A. Mondatori. *Le signe*. Traduction française 1988. Bruxelles : Editions Labor.

FREGE G. (1971), *Ecrits logiques et philosophiques*, Points Essais. Paris : Seuil.

GRANGER G.-G. (1994), *Formes, opérations, objets.* Collection mathesis, Vrin.

HAUSBERGER T. (2012), Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. Dans *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* - Actes du colloque EMF2012 (2012), 425-434.

HAUSBERGER T. (2013), On the concept of (homo)morphism : a key notion in the learning of abstract algebra, in Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M.-A. (eds). *Proceedings of CERME 8 - Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, Antalya : Turkey (2013), Middle East Technical University Ankara Turkey, pp. 2346-2355.

HAUSBERGER T. (2015a), *Vers une didactique du structuralisme : le cas de l'algèbre abstraite*. Article en préparation.

HAUSBERGER T. (2015b), *The 'theory of banquets': a mini-theory to teach mathematical structuralism*. Article en préparation.

KUHN, T. (1983), *La structure des révolutions scientifiques*. Collection Champs, Flammarion.

LAJOIE, C. & MURA, R. (2004) *Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient*, RDM Vol. 24/1, pp 45-80.

LARGUIER, M. (2012) *La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession en seconde,* Recherches en Didactique des Mathématiques, 31/1, 101-144.

MERRI, M. (2007), *Activité humaine et conceptualisation. Hommage à Gérard Vergnaud,* Presses Universitaires Toulouse le Mirail.

QUINE, W.V.O. (1950), *Methods of logic*, New York: Henry Holt. Traduction française Armand Colin, 1972.

ROBERT, A. (1987), De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahier de didactique des mathématiques* n°47, IREM de Paris 7.

ROGALSKI, M. (1995), Que faire quand l'enseignement d'un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech* n°169, pp. 127-162, Université Joseph Fourier, Grenoble.

RUSSEL, B. (1903) , *Les principes de la mathématique*, traduction française in Russel B. Ecrits de logique philosophique (1989). Paris : PUF

SINACEUR, H. (1991), Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? In *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, Trans-Europ-Repress

TARSKI, A. (1936a), Le concept de vérité dans les langages formalisés. Traduction Française G.G. Granger, in *Logique, sémantique et métamathématique*, 1972/1. Paris : Armand Colin, 157-269.

TARSKI, A. (1936b), Sur le concept de conséquence. Traduction Française G.G. Granger, in *Logique, sémantique et métamathématique*, 1972/1. Paris : Armand Colin, 141-152.

TARSKI, A. (1936c), *Introduction à la logique*. Traduction française 1969, Paris-Louvain : Gauthier-Dillard.

VERGNAUD, G. (1990), *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en didactique des mathématiques, 10/2.3, 135-170, Editions La pensée Sauvage.

VERGNAUD, G. (2002), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. PORTUGAIS (Ed.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.* Actes du colloque GDM 2001, 6-27.

WAERDEN, B.L. VAN DER (1930), *Moderne Algebra*. 2 vols. Berlin : Springer.

WITTGENSTEIN, L. (1921), Tractacus logico philosophicus. *Annalen der Naturphilosophie* ; Leipzig. Traduction Française par G.G. Granger (1993), Paris : Gallimard.

WUSSING, H (2007), *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Dover Publications.

VIVIANE DURAND-GUERRIER
THOMAS HAUSBERGER
CHRISTIAN SPITALAS
IMAG, UMR 5149, CNR-UM
Université Montpellier 2
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5
Viviane.Durand-Guerrier@univ-montp2.fr
Thomas.Hausberger@univ-montp2.fr
Christian.Spitalas@univ-montp2.fr