**SAMANTHA QUIROZ, FERNANDO HITT, RUTH RODRIGUEZ**

# EVOLUTION DES CONCEPTIONS DE FUTURS ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE

**Abstract. Evolution of prospective school teachers' conceptions on mathematical modelling.** This article related to a doctoral research project deals with the conceptual processes of mathematical modelling of elementary school preservice teachers in a Mexican educative institute. Based on the Theory of the Conceptual Fields, we analyze and explain the initial *conceptions* of the preservice teachers regarding to mathematical modelling. Through a methodology that combines the *lesson study* and the notion of *hypothetical learning trajectories* for organizing the lesson, we realize the evolution of conceptions in both different planning and implementing cycles. The study put forward an innovative theoretical-methodological approach as regards a collaborative inquiry between the researcher and the preservice teachers.

**Resumen. Evolución de las concepciones de futuros docentes de la primaria sobre la modelización matemática.** El presente estudio, realizado en una institución educativa mexicana en el marco de una tesis doctoral, trata sobre los procesos de conceptualización de la modelación matemática en la formación inicial de cinco docentes de educación primaria. El estudio se apoya en la Teoría de los Campos Conceptuales para analizar y explicar las *concepciones iniciales* ligadas a modelación matemática de los docentes en formación. Además, mediante una metodología que combina el *estudio de lecciones* y la noción de *trayectoria hipotética de aprendizaje* para la organización de la lección, se analiza la evolución de dichas concepciones en los diferentes ciclos de planeación e implementación. El estudio apuesta a un acercamiento teórico-metodológico innovador sobre la investigación en colaboración entre investigador y docentes.

**Résumé.**
Cette étude, menée dans le cadre d'une thèse, examine les processus de conceptualisation de la modélisation mathématique dans la formation initiale de cinq enseignantes du primaire, à partir de leurs leçons dans un établissement d'enseignement du Mexique. L'étude est basée sur la théorie des champs conceptuels pour analyser et expliquer les *conceptions initiales* des enseignants en formation liées à la modélisation mathématique. En outre, en utilisant une méthodologie qui combine *l'étude de leçon* et la notion de *trajectoire hypothétique d'apprentissage* pour l'organisation de la leçon, l'évolution de leurs conceptions dans les différents cycles de planification et de mise en œuvre est analysée. L'étude met l'accent sur une approche théorique et méthodologique innovante pour la recherche collaborative entre les chercheurs et les enseignants.

**Mots-clés**. Modélisation mathématique, conceptions, formation des enseignants, enseignement du premier degré.

---

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 20, p. 149 –179.

## 1. Introduction

La recherche dans le XXe siècle a mis l'accent sur l'analyse de l'erreur faite par les élèves et leur rôle dans l'apprentissage des mathématiques; la détection des obstacles épistémologiques et leur dépassement ont conduit à une meilleure compréhension des problèmes d'apprentissage des mathématiques (Brousseau, 1998; Goupille et Thérien, 1988). Les efforts visant à surmonter un obstacle épistémologique selon l'approche de Brousseau, se sont éloignés des propositions du "problem solving", en créant ainsi une nouvelle approche de situations problèmes, la TSD (Théorie des Situations Didactiques). En approfondissant autour de la compréhension de l'activité mathématique des mathématiciens, cela a donné lieu à la naissance d'un autre type d'approche « situations de recherche de classe » de Grenier et Payan (1998), où la modélisation mathématique a été au cœur de l´activité même. Ces situations ainsi que celles proposées par Brousseau ont promu l'importance de la co-construction des connaissances dans la classe de mathématiques et donc la nécessité pour les chercheurs de clarifier la notion de conception initiée par Brousseau (1976/1983). Ce processus de caractérisation a dû attendre le développement de la Théorie des Champs Conceptuels (TCC) de Vergnaud (1990), et la précision de la notion de conception (Balacheff et Gaudin, 2002, 2010).

D'une certaine façon, la résolution de situations problèmes a encouragé l'étude de la modélisation mathématique, dont la recherche est devenue un défi pour certains chercheurs dans l'enseignement des mathématiques (Niss, Blum et Galbraith, 2007; Pytlak, Rowland et Swoboda, 2011). Ainsi, à partir de la recherche d'une description du type de recherche (Kaiser, Blomhøj et Sriraman, 2006), ou sur les aspects détaillés concernant le type de processus cognitifs des élèves (Blum et Borromeo, 2009) ou de l'enquête sur le rôle de la technologie dans les processus d'apprentissage (Confrey et Maloney, 2007), les études sur ce sujet ont mis en évidence les questions clés pour la gestion dans les classes de différents niveaux d'enseignement.

La reconnaissance de l'éducation primaire comme pilier sur lequel la plupart des concepts mathématiques et de concepts sont formés a conduit à la création d'études qui mettent en évidence les multiples avantages que la modélisation prévoit spécifiquement chez les élèves de 6-12 ans. Y compris la promotion d'un lien clair entre les mathématiques et la réalité de l'élève, la recherche permanente pour la construction de la connaissance et le travail de discussion entre pairs (Aravena et Caamaño, 2009; Lombardo et Jacobini, 2009).

Bien que les chercheurs sont convaincus de l'importance de la modélisation mathématique en classe, les programmes scolaires n'ont pas suivi cette approche, non plus la formation des enseignants. Pourtant Doerr (2007), Lesh et Zawojewski (2007) et Rodriguez (2010) mettent l'accent sur la nécessité d'inclure l'étude de la modélisation mathématique dans la formation des enseignants, en insistent sur l'importance d'étudier les situations dans différents contextes comme l'a reconnu la mathématique réaliste depuis sa naissance (approche connu comme « Realistic Mathematics Education »).

Si la modélisation mathématique est considérée comme une notion qui doit être apprise par les enseignants dans leur formation, il est nécessaire, comme point de départ, de connaître les conceptions qu'ils possèdent comme fruit de leur expérience dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les travaux de Vergnaud (1990) permettent une première approche sur les conceptions et une précision pourra se dégager des travaux de Balacheff (2004) et Balacheff et Gaudin (2002, 2010) afin de fournir une plus grande clarté et de détails à ce processus.

Conformément à ce qui précède, les questions qui guident cette étude sont les suivantes :

- Quelles conceptions ont les futurs enseignants sur la modélisation mathématique dans la dernière session de ses études?

- Comment faire évoluer les conceptions des futurs enseignants concernant la modélisation mathématique dans un environnement collaboratif?

## 2. Cadre contextuel

La présente étude ayant été réalisée au Mexique, nous précisons ici les caractéristiques du système éducatif mexicain. L'enseignement primaire au Mexique se compose de six années de scolarité et s'adresse aux élèves âgés de six à douze ans. Les résultats des tests nationaux et internationaux dans l'évaluation des mathématiques à ce niveau n'ont pas été très favorables. Selon l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE, 2010), le Mexique est positionné au bas des pays affiliés par rapport aux acquis des élèves en mathématiques selon le test PISA 2003 (Programme international d'évaluation des étudiants). A noter cependant que l'évaluation PISA 2012 montre une amélioration pour le Mexique. L'évaluation nationale mexicaine du rendement dans les institutions scolaires (ENLACE) montre que 63% des élèves dans les écoles primaires au Mexique ont des connaissances rudimentaires, insuffisantes pour l'apprentissage des mathématiques (Ministère de l'Education Publique, 2011).

Dans le contexte mexicain, les enseignants de l'école primaire font leurs études à l'École Normale. Le programme de formation a été rénové avec la réforme du niveau supérieur en 1997. Donc, les futurs enseignants observés ont été diplômés sous cette réforme. Dans ce plan, deux cours concernent la didactique des mathématiques, où l'approche pédagogique proposée est constructiviste, et l'accent principal est mis sur la résolution de problèmes. Dans ces cours, la modélisation n'est pas abordée ; cependant, divers éléments de ces cours ne sont pas en opposition complète avec les questions abordées par les enseignants en formation, par exemple, le travail d'équipe et le rôle de l'enseignant comme guide des élèves dans leur processus d'apprentissage.

## 3. Cadre théorique

### 3.1. La modélisation mathématique

Si nous prenons en considération le travail de Pollak (1969, 2007), Blum et Niss (1990) Niss, Blum et Galbraith (2007); et Lesh et Zawojewski (2007), nous pouvons définir la modélisation mathématique comme un processus cyclique qui consiste à attaquer un problème en contexte et à construire un modèle mathématique qui permettra de donner une réponse au problème posé.

La description graphique du cycle de la modélisation a été présentée par différents auteurs en fonction de perspectives spécifiques. Cela inclut le travail de Blomhøj et Jensen (2003), qui ont été les premiers à décrire la modélisation comme un processus cyclique. Avec plus de détails, nous avons le graphique présenté par Blum et Leiss (2006) qui montrent d'un point de vue cognitive, les étapes de la modélisation. En accord avec les objectifs spécifiques de ce document, nous empruntons le modèle proposé par Rodriguez (2007, 2010) et montrons en détail chacune de ses composantes.

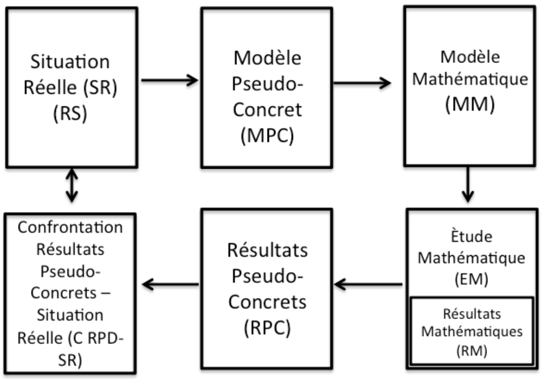


*Figure 1.* Cycle de la modélisation mathématique (Rodríguez, 2007, 2010)

a) Situation réelle. Le cycle commence avec la proposition d'une situation basée sur un contexte réel, où la manipulation des objets est importante. Les situations peuvent à leur tour être fondées sur des contextes pseudo-concrets, c'est à dire, des contextes qui décrivent la réalité.

b) Modèle Pseudo-Concret. Après la lecture du problème posé, les élèves réalisent une première approche vers un modèle mathématique en proposant un modèle pseudo-concret. Des abstractions, des simplifications et des hypothèses sont faites.

c) Modèle Mathématique. Ici, les élèves proposent un modèle mathématique qui modélise la situation réelle présentée. On reconnaît dans cette étape le modèle avec ses représentations graphiques, numériques et analytiques.

d) Étude Mathématique / Résultats Mathématiques. Les élèves travaillent avec le modèle mathématique déjà établi. C'est lors de ce cycle que les algorithmes émergent.

e) Résultats Pseudo-Concrets. Les résultats mathématiques doivent être analysés dans les termes où la situation réelle a été posée.

f) Confrontation Modèle-Résultats réels. Finalement, les élèves doivent valider leur réponse ainsi que le modèle face à la situation réelle et en vue de son amélioration dans des situations similaires.

Le parcours des étapes précédentes a montré l'impact sur le développement d'un certain nombre de compétences sur la modélisation mathématique. Celles-ci comprennent les compétences pour comprendre la situation et proposer un modèle mathématique, comme le signalent entre autres (Singer, 2007; et Maass, 2006). De plus, quelques initiatives liées à la modélisation mathématique dans le programme de formation des enseignants mentionnent l'étude de Blomhoj et Hoff Kjeldsen (2006), qui présentent une expérience significative dans l'apprentissage des mathématiques de la modélisation avec des enseignants en service. Leurs résultats montrent l'importance de continuer dans la direction de la formation initiale des futurs enseignants.

### 3.2. Analyse des conceptions sur la modélisation mathématique

L'étude sur l'acquisition d'une conception est au centre de la théorie des champs conceptuels (TCC), cadre théorique sur lequel repose la présente recherche. Du point de vue cognitif, l'apprentissage de la modélisation mathématique ne peut être réduit à sa définition, puisque la signification va être acquise à travers un ensemble de situations et de problèmes qui sont destinés à être résolus (Vergnaud, 1990).

Alors que la TCC a commencé comme une théorie visant l'étude des objets mathématiques, selon le même Vergnaud (1990) elle a été utilisée dans divers domaines comme la physique, l'histoire, la géographie et même la biologie. Notre propos est de montrer son efficacité dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, en étudiant des conceptions autour de la « modélisation mathématique » chez les enseignants du primaire en formation.

Selon Vergnaud (1990) une conception se compose d'une série de problèmes, d'un ensemble d'opérateurs et d'un système de signes. Le schème est la structure cognitive qui sert à résoudre une classe de problèmes donnés. Les schèmes s'expriment à travers diverses représentations symboliques telles que le langage, ou par des expressions écrites ou picturales (Vergnaud, 1990). L'importance de l'étude des conceptions en observant le sujet dans une classe de situations a été notamment reconnue par Brousseau (1998), Douady (1986) et Artigue (1988).

Dans notre étude, nous avons adapté l'approche théorique de Vergnaud, en considérant l'ensemble des situations à lesquelles les enseignants vont faire face, l'ensemble des opérateurs ainsi que les processus de communication, et les systèmes de signes associés aux situations. La structure cognitive produite par l'enseignant face aux situations forme la conception. Notre hypothèse est que le schème lié à la conception se développera à travers la pratique et par l'analyse de vidéos de la pratique en classe de mathématiques.

À cet égard, nous présentons une proposition pour étudier les conceptions des futurs enseignants par rapport à la modélisation mathématique en accord avec le cadre théorique :

a) Proposition d'une situation que l'on doit modéliser mathématiquement (Situation).

La situation choisie devrait être une activité intéressante et riche qui donne envie d'apprendre. Considérant ce qui précède, la situation devrait être sélectionnée comme la plus appropriée pour le programme d'enseignement d'un contenu mathématique donné. Afin de choisir un contenu spécifique pour cette recherche, on a réalisé une étude praxéologique des manuels pour identifier où l'on trouve le plus d'éléments du processus de modélisation mathématique dans une certaine leçon. Après l´étude praxéologique, le contenu choisi dans notre cas a été le "calcul de la probabilité d'occurrence dans une expérience aléatoire."

b) Analyse des schémas pendant la résolution de la situation. (Schémas).

Pour l'analyse d'un schème, Vergnaud (1990) propose l'étude des principaux éléments constitutifs: objectifs et sous-objectifs, concepts en acte et propositions qui sont prises comme vraies par les sujets, donc qui fonctionnent comme de véritables théorèmes (en action). Soutenus par des études qui mettent l'accent sur des conceptions non mathématiques, spécifiquement la recherche de Boyer et Vergnaud (1998), nous prenons en compte les propositions vraies (théorèmes en acte initiaux) des enseignants en formation quand ils ont fait un choix des activités pour la planification et la mise en œuvre d'une leçon. En outre, différents aspects trouvés dans la littérature analysée nous signalent des points critiques pour la modélisation mathématique, en correspondance avec les concepts en acte, à savoir : a) le rôle de l'élève, b) le rôle de l'enseignant, c) les contextes réels, d) les conceptions de l'élève, e) la collaboration, f) la logique de la réponse; g) la connaissance mathématique, h) les méthodes mises en œuvre. Nous recherchons quel objectif et quels sous-objectifs sont poursuivis par les enseignants en formation et sur quels concepts émergents leurs propositions s'appuient.

c) Étude des représentations symboliques (Représentations symboliques).

En faisant référence à l'ensemble des formes linguistiques et non linguistiques qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement, nous définissons le signifiant des conceptions. C'est lorsque s'expriment leurs représentations qu'il est possible de connaître les schèmes des sujets. Les productions des enseignants en formation, que nous avons prises en compte pour l'analyse des systèmes de modélisation mathématique, sont leurs expressions, leurs discussions et les arguments (formes linguistiques) ainsi que des annotations, des dessins et des diagrammes (représentations non linguistiques) qu'ils utilisent dans la planification et lors de la mise en œuvre de la leçon.

d) Reconnaissance de la façon dont les actions des enseignants sont perçues par eux-mêmes comme importantes (Structure de contrôle)

Ce quatrième élément vise à reconnaître les schèmes que les sujets mettent en marche avec une série de jugements visant la validité de ces actions. C'est grâce à cette structure de contrôle que les sujets estiment plausibles leurs hypothèses en utilisant certains schémas ou bien décident de les modifier (Balacheff, 2004; Balacheff et Gaudin, 2010). Dans notre investigation, nous cherchons les arguments des enseignants qui permettent la critique du choix des activités jugées importantes dans la planification de la leçon. Les décisions sont étayées par les expressions linguistiques que les sujets utilisent, en association avec des représentations symboliques.

Pour une présentation de l'analyse, les conceptions des enseignants en formation (à partir de maintenant nous allons les appeler simplement enseignants) seront situées dans chacune des étapes du cycle de modélisation mathématique précédemment décrit. Il est prévu qu'à partir de la situation (planification et mise en œuvre de la leçon en classe de mathématiques) les enseignants montrent par diverses représentations symboliques leurs schémas concernant chacune des parties du processus de modélisation. Les conceptions que les enseignants ont sans l'intervention du chercheur ont été nommées "conceptions initiales".

### 3.3 Choix des éléments pour étudier l'évolution des conceptions

Selon Vergnaud (1990) les changements de conceptions individuelles exigent des actes de médiation, en particulier l'utilisation de situations didactiques idéales qui encouragent les sujets à une rupture. Les idées de rattachement et les ruptures sont liées l'assimilation et l'accommodation selon Piaget.

Avec cette idée directrice, nous analysons l'évolution des conceptions sur la modélisation mathématique des enseignants confrontés à différentes situations qui provoquent des ruptures cognitives. Les situations correspondent à un objectif spécifique visant la réflexion sur les éléments cruciaux dans le processus de la modélisation mathématique et l'intégration de ces éléments dans leurs planifications de leçon.

### *3.3.1. Apprentissage en collaboration*

Pour Hitt (2003), en plus de la proposition d'une situation qui génère une rupture, le changement de conception nécessite un travail dans un environnement collaboratif (voir Figure 2). Pour exploiter cette idée avec une planification par cycles de co-construction, nous nous conformons à l'*Étude de leçon* (Lewis et Tsuchida, 1998) et dans l'organisation, nous utilisons une approche liée à une *Trajectoire hypothétique d'apprentissage* (Simon, 1995; Simon et Tzur, 2004). Il est imposé que la planification et la mise en œuvre de la leçon soient le fruit d'un travail de co-construction des 5 enseignantes en formation.

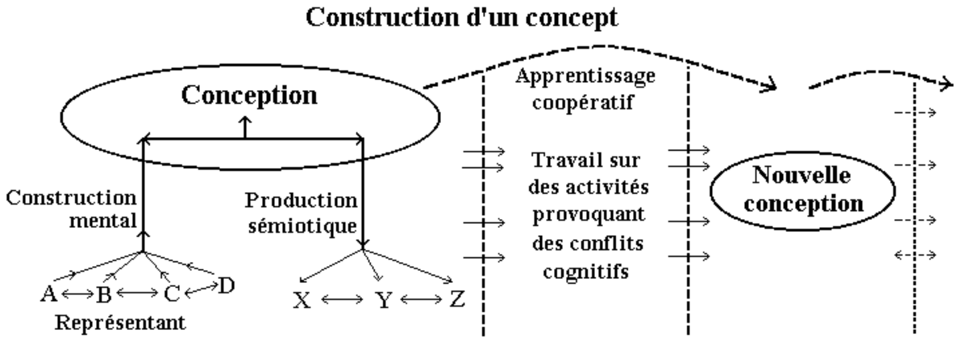


*Figure 2.* Évolution des conceptions (Hitt, 2003, p. 269)

### *3.3.2 Recherche collaborative*

Dans notre recherche, nous sommes intéressés à deux aspects importants de la recherche collaborative. Le premier, déjà signalé, a trait à la formation des enseignants sur le modèle de l'enseignement et de l'apprentissage appelé l'*Étude de leçon* (Lewis et Tsuchida, 1998):

> Les leçons de recherche sont soigneusement planifiées, généralement en collaboration avec un ou plusieurs collègues. Dans une école que nous avons étudiée, les quatre enseignants de troisième année se sont régulièrement réunis pendant plusieurs mois pour discuter comment promouvoir "l'initiative" des élèves dans l'étude des sciences. Quand ils ont conclu que poser des questions productives était une clé, les enseignants en sont venus à des stratégies visant à encourager de telles questions. Ils ont perfectionné leurs stratégies en visionnant mutuellement leurs leçons et en les discutant. A la fin, l'un des enseignants a présenté comme

*leçon de recherche* leur nouvelle approche à toute la faculté, tandis que les autres enseignants enregistraient la session et distribuaient des documents présentant les faits saillants de leurs mois de travail commun. (p. 14) [Traduit de l'anglais]

D'autre part, nous considérons la proposition faite par Simon (1995), Simon et Tzur (2004) pour l'organisation d'une leçon. Cette proposition prend un modèle appelé « Trajectoire hypothétique d'apprentissage » (THA de Simon, 1995):

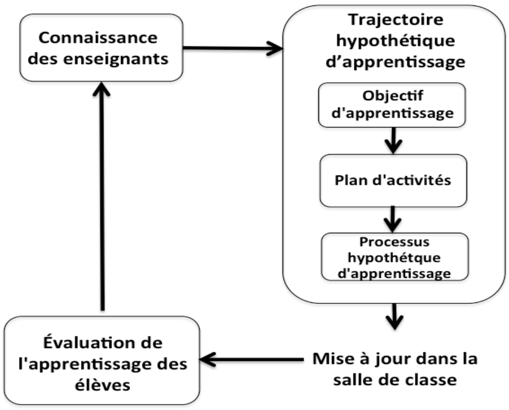


*Figure 3.* Cycle d'enseignement des mathématiques proposé par Simon (1995)

L'approche pédagogique de Simon (1995) et Simon et Tzur (2004) indique le développement d'un concept et les prévisions des enseignants des mathématiques sur le choix approprié d'organisation d'une leçon pour mieux promouvoir leurs activités d'apprentissage. Dans un cycle, comme celui indiqué sur la Figure 3, Simon (1995) montre que les connaissances des enseignants génèrent une THA, celle-ci provoque une transformation des objectifs et des activités ; ce processus d'apprentissage hypothétique, selon lui, aidera leurs élèves. Cependant, jusqu'à ce qu'on mette en pratique la THA dans la classe, l'enseignant peut réfléchir et donc évaluer la possible modification de la THA. Le cycle s'arrête lorsque l'enseignant estime que vraiment ses élèves ont atteint l'apprentissage visé.

### *3.3.3 Élaboration des situations*

En reprenant les notions définies ci-dessus, le processus d'évolution des conceptions a été prévu comme suit:

a) Planification conjointe (dans notre cas, une chercheuse avec cinq enseignantes en formation) d'une classe de mathématiques en connexion avec le calcul des probabilités d'un phénomène aléatoire.

b) Mise en œuvre de la leçon planifiée dans une école primaire par une enseignante en formation. Les quatre autres enseignantes et la chercheuse sont des observatrices dans la classe.

c) Réflexion sur ce qui s'est passé dans la classe, lors d'une autre réunion avec les cinq enseignantes. Au cours de cette séance d'échanges et de discussion, la chercheuse met en pratique une THA (de la part de la chercheuse) afin de créer des ruptures dans les conceptions initiales des enseignantes.

d) Mise en œuvre du plan de la nouvelle leçon dans une école différente par une deuxième enseignante d'école primaire. Les quatre autres enseignantes et la chercheuse observent.

e) Répétition du cycle (pour précision, voir section 3.3.1.3, 3.3.1.4 et 3.3.1.5) cinq fois, de sorte que chacune des cinq enseignantes puisse mettre en œuvre la leçon dans une école primaire.

### *3.3.4 Rôle de la chercheuse et des enseignantes dans la méthodologie*

Nous devons reconnaître qu'il existe trois acteurs principaux de la recherche: la chercheuse, les enseignantes en formation et les élèves des écoles primaires. Chacun de ces acteurs a différents objectifs, qui seront décrits en détail dans ce qui suit:

a) La chercheuse

Le principal objectif de la chercheuse est de promouvoir une évolution des conceptions des enseignantes en formation concernant la modélisation mathématique (voir Figure 4).

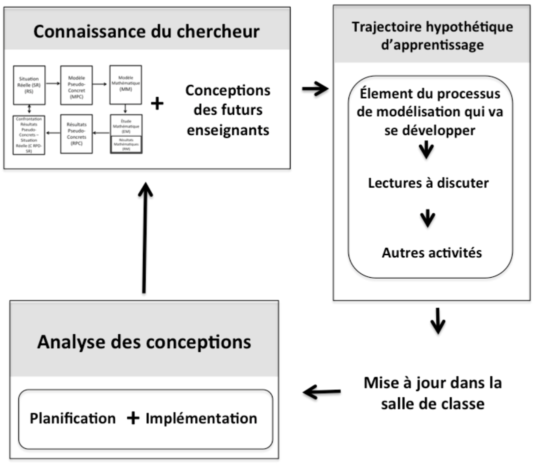


*Figure 4.* THA de la chercheuse

Pour atteindre cet objectif, la chercheuse a produit une THA, constituée de la lecture et la discussion de divers documents avec les enseignants en formation, de telle sorte que certains éléments du cycle de modélisation mathématique sont incorporés dans la planification. Après la première leçon, la chercheuse analyse ce qui est arrivé, pour déceler les conceptions des enseignantes et remodeler la THA en incorporant des éléments pertinents pour une réflexion autour de la modélisation mathématique.

b) Les enseignantes en formation

Le principal objectif des enseignantes est que les élèves apprennent à calculer la probabilité d'un phénomène aléatoire. Pour atteindre cette expérience, les enseignantes doivent générer une THA, où elles spécifient les activités qui doivent être utilisées avec les élèves du primaire, afin qu'ils apprennent à calculer la probabilité d'un phénomène aléatoire. Après l'expérience en classe a lieu une réunion où les cinq enseignantes réfléchissent et discutent de façon plus approfondie des éléments de la modélisation mathématique, qui doivent être intégrés dans la planification restructurée de la leçon suivante. Les enseignantes en formation reformulent leurs THA grâce à l'incorporation d'un plan d'activités pour la nouvelle leçon (voir Figure 5).

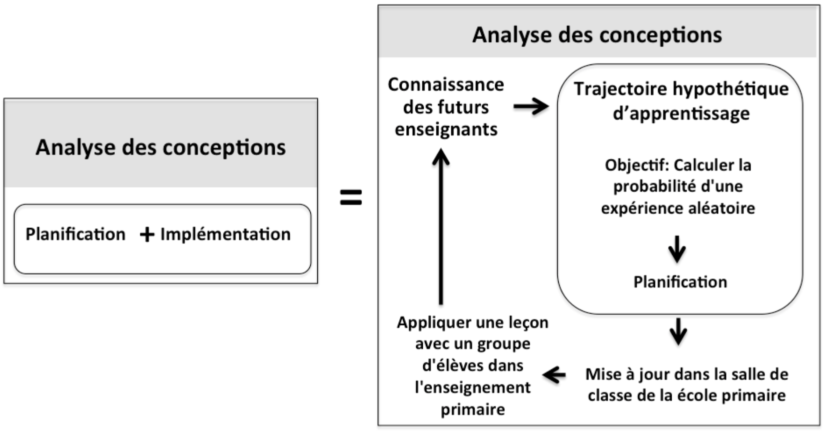


*Figure 5.* THA des enseignantes

### *3.3.5 Proposition de cycle imbriqué du travail pour l'évolution des conceptions des enseignantes*

Le cycle des enseignantes en formation est intégré dans le cycle de la chercheuse (boucle imbriquée). Le processus composé de deux cycles décrits ci-dessous sera nommé «Cycle de évolution des conceptions » (Figure 6).

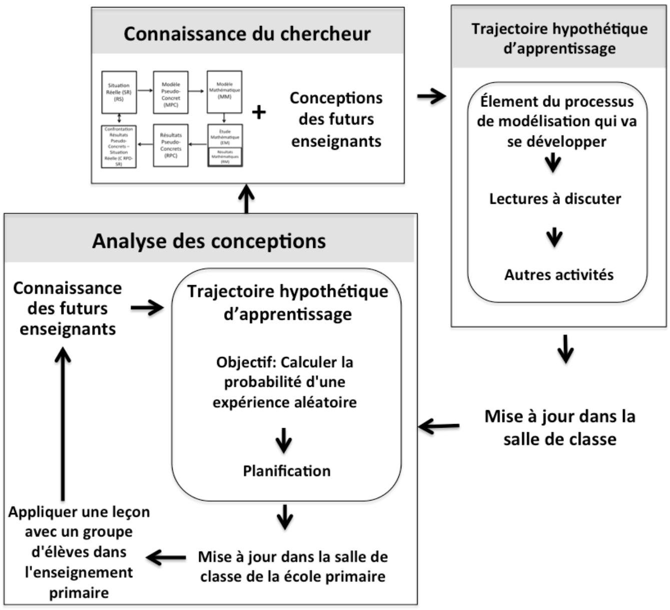


*Figure 6.* Cycle d´évolution des conceptions

Un total de cinq cycles est envisagé par la chercheuse selon la méthode de Lewis et Tsuchida. Ceux-ci produiront, tour à tour, les cycles imbriqués des enseignants en formation. L'analyse et l'échange d'idées dans chaque cycle est une proposition qui sous-tend le travail de la chercheuse, qui doit être relié en tout temps au travail des enseignantes, et c'est par ce travail de co-construction qu'il sera possible de faire évoluer les conceptions des enseignantes et ainsi, à améliorer l'enseignement à l'école primaire.

## 4. Objectifs

Les objectifs que poursuit cette investigation sont :

- Identifier et caractériser les conceptions initiales des enseignants en formation autour de la modélisation mathématique dans la dernière étape de leurs études pour obtenir le diplôme d'enseignant au primaire.
- Identifier et caractériser l'évolution de leurs conceptions initiales autour de la modélisation mathématique dans un milieu collaboratif.

## 5. Méthodologie

La présente recherche s'inscrit dans le cadre d'une méthodologie qualitative. Dans celle-ci, nous avons choisi comme échantillon cinq enseignants en formation qui répondent aux caractéristiques suivantes : être étudiant du dernier semestre du diplôme en éducation élémentaire et travailler comme enseignant auxiliaire dans une école primaire. L'École Normale sélectionnée a élu les cinq enseignantes en formation (toutes de sexe féminin) qui se sont finalement prêtées à l'étude.

Pour la prise de données, on a utilisé trois types d'instruments. Les deux premiers sont deux guides d'observation qui ont été élaborés, l'un pour le moment de la planification de chaque leçon et l'autre pour la mise en œuvre. Un troisième instrument consiste en une grille d'analyse de documents, spécifiquement faite pour la planification de la leçon. Enfin, on a eu recours à des entretiens semi-structurés lorsque cela était jugé nécessaire pour clarifier n'importe quel événement. Les instruments ont été validés par un jugement d'experts.

Les données recueillies ont été analysées en utilisant la stratégie proposée par Yin (2003), qui consiste à examiner, classer, catégoriser, tabuler, évaluer ou recombiner des observations toujours guidées par les propositions initiales de l'étude. Une triangulation a été faite pour confronter les observations directes avec les registres en utilisant la méthodologie et la théorie revisitée (Stake, 2005). La validation des conceptions présentées est réalisée en utilisant la technique montrée par Grenier et Payan (1998), qui consiste à confronter ses conceptions avec les faits observables, à la fois par la même chercheuse et à l'aide d'autres chercheurs si nécessaire.

Comme décrit dans le paragraphe précédent, l'approche de la recherche combine une étude des leçons (Lewis et Tsuchida (1998) avec les chemins hypothétiques d'apprentissage de Simon (2005). Grâce à l'aide de cette combinaison méthodologique, la présente recherche permet l'analyse de l'évolution des conceptions des enseignants en formation, à travers la mise en œuvre de la THA par le chercheur lorsque les enseignants planifient, conduisent une leçon et la restructurent pour une nouvelle application. Cinq cycles sont parcourus, comme indiqué sur la Figure 7.

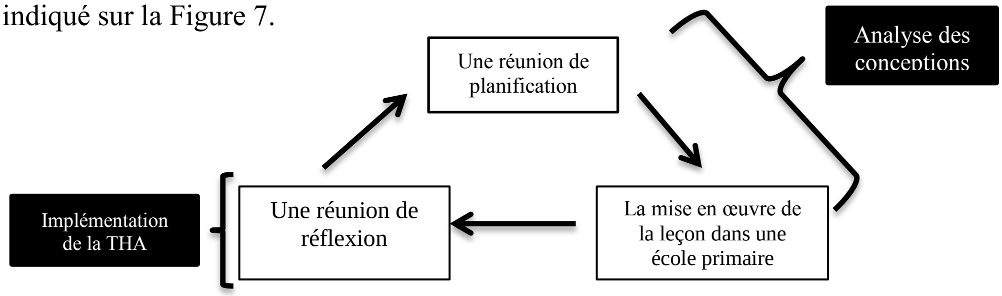


*Figure 7.* Plan de recherche

## 6. Présentation des résultats

Les résultats sont présentés en cinq étapes, correspondant aux cinq cycles décrits dans la section précédente. Dans chaque étape, on met l'accent sur l'analyse effectuée pour obtenir les conceptions autour de la modélisation mathématique de chacune des cinq enseignantes en formation (E1, E2, E3, E4, E5).

### 6.1 Premier cycle

Au cours de la première réunion, même si la chercheuse savait l'importance du diagramme de la modélisation mathématique, sa priorité était la découverte des conceptions initiales des cinq enseignantes en formation, c'est pourquoi sa première THA a été limitée à l'observation sans participation. Il fut possible de reconnaître que pendant le 1$^{er}$ cycle, le but poursuivi par les cinq enseignantes en tout temps a été de trouver la meilleure façon d'expliquer aux élèves ce qu'est la probabilité et comment on doit la calculer.

Dans une première intervention, l'enseignante 3 (E3) a proposé d'initier la leçon avec un problème lié à un contexte réel. Toutefois, sa proposition n'a pas réussi à être considérée dans la discussion, puisque E4 a proposé une activité qui permettrait à l'enseignante d'expliquer aux élèves ce qu'est la probabilité. L'activité sélectionnée par les cinq enseignantes consistait en l'adaptation d'un problème du manuel de l'élève autour du *lancement de pièces de monnaie*. L'activité a été menée comme suit dans la classe: « E1 a guidé le lancement des pièces de monnaie des élèves. E1 a fait un seul lancement, elle pensait que cela était nécessaire pour garder l'ordre et la discipline dans la salle. Son intention était d'expliquer clairement l'idée de la probabilité. »

Comme deuxième activité lors de la planification, E5 a proposé d'utiliser les dés que le manuel de l'élève propose. L'intervention d´E3 a été déterminante : *l'ordre et la durée de l'activité seront affectés négativement si les élèves sont autorisés à utiliser les dés*. Par conséquent, il a été décidé que seule l'enseignante responsable devrait montrer les caractéristiques d'un dé, en plus de poser le problème, de faire le calcul et de donner une explication. Dans les dialogues enregistrés, fréquemment on utilisait des expressions comme :

*E1: Comment pensez-vous que ce soit plus facile que l'enfant comprenne ? Pourrions-nous expliquer la probabilité avant?*

*E5: Nous pouvons mettre cinq exercices pour que cela soit plus clair ce qui est plus probable. Ils vont faire des erreurs, il sera donc nécessaire de répéter.*

De ce dialogue deux activités se dégagent pour la planification de la leçon qui avait été mise en œuvre par E1 en classe. E1 a montré aux élèves un dé en donnant une description de ses caractéristiques. A aucun moment la manipulation n'a été autorisée. En formulant des questions comme « *Si je lance, quel est la probabilité d'obtenir trois?* », E1 a expliqué comment calculer la probabilité pendant que les élèves observaient et écoutaient.

À la fin de la planification de la leçon, c'est encore E3 qui affirme que l'on pourrait demander aux élèves une réflexion concernant la relation avec la vie quotidienne. Les autres enseignantes ont donné leur accord et ont proposé des exemples de situations qui pourraient être nommés : paris, jeux de loterie, entre autres. Cette action dans la classe a été menée d'une manière superficielle.

Selon la discussion les enseignantes semblent poursuivre trois sous-objectifs. Premièrement, elles sont à la recherche d'une activité où l'enseignante peut expliquer les concepts aux enfants, deuxièmement elles cherchent à créer une activité où après l'explication, les élèves doivent faire des exercices ; et enfin il s'agit de promouvoir une petite réflexion (disons superficielle) pour se connecter à la vie quotidienne. Grâce aux dialogues mentionnés, nous avons précisé dans le tableau 4 les concepts en acte et les propositions prises comme vraies (théorèmes en acte) de la part des enseignantes dans ce 1^er^ cycle (Tableau 1):

| **Concepts en acte** | **Propositions considérées comme vraies (Théorèmes en acte)** |
|---|---|
| Rôle de l'enseignante | L'enseignante possède les connaissances.<br>L'enseignante donne des explications aux élèves. |
| Rôle de l'élève | L'élève ne possède pas de connaissances et il les accumule. |
| Rôle de l'enseignante<br>Connaissance mathématique | L'enseignant dirige les travaux autour du contenu mathématique.<br>La répétition est nécessaire pour s'approprier du contenu. |
| Rôle de l'enseignante<br>Conceptions de l'élève | L'enseignante met fin aux doutes et signale les erreurs des élèves. |
| Rôle de l'enseignante | Les élèves font des erreurs parce qu'ils ne possèdent pas les connaissances de l'enseignante |
| Contextes réels | L'enseignante explique la relation entre ce qui a été appris et divers contextes réels où son utilisation est possible. |

Tableau 1 *Concepts et propositions jugées vraies*

La façon de valider le bon choix des activités déterminait la structure de contrôle des enseignantes. Trois aspects ont été trouvés dans cette validation :

- *Durée de l'activité requise*. Si le temps nécessaire pour la mise en œuvre de l'activité est réduit, alors l'activité est faisable

- *Discipline*. L'activité ne doit pas déclencher le désordre dans la classe, le silence doit témoigner de cet aspect.

- *Rôle de l'enseignante*. L'enseignante doit toujours être active, en expliquant ses connaissances aux élèves.

À travers les réflexions présentées, nous montrons ci-dessous six conceptions initiales des enseignantes en formation, en les plaçant dans les différentes étapes de la modélisation mathématique (Figure 8).

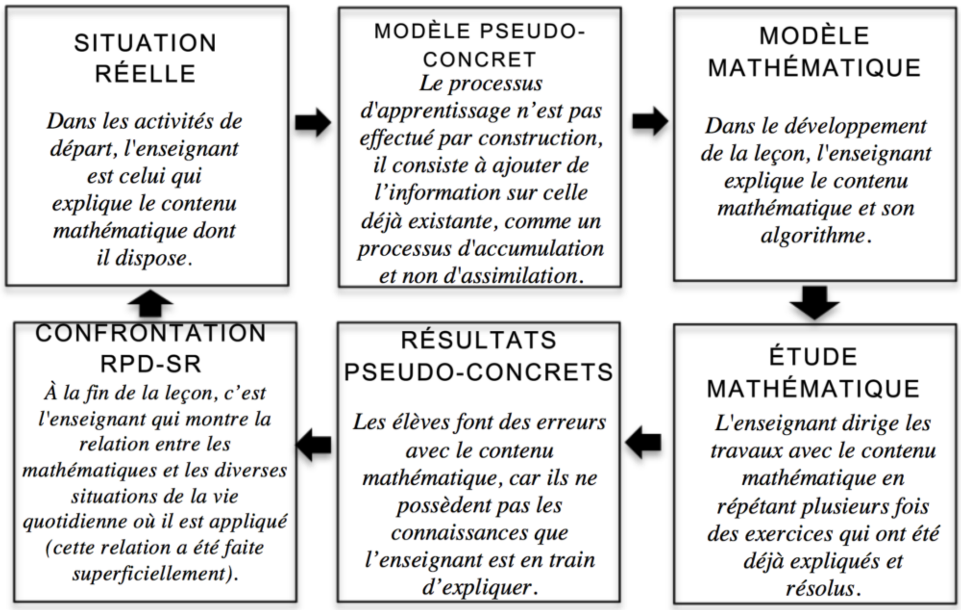


*Figure 8.* Conceptions initiales sur la modélisation mathématique

Ces conceptions initiales sont formées en accord avec l'expérience passée des enseignantes, en déterminant ainsi une structure cognitive comme signalé dans les premières sections sur notre adaptation de l'approche théorique de Vergnaud. Selon la méthodologie, une nouvelle situation se met en pratique avec l'intention de modifier et faire évoluer cette structure cognitive. Nous sommes conscients que la répercussion, même si elle s'insère dans une démarche de travail collaboratif, ne sera pas la même pour chaque enseignante.

### 6.2 Deuxième cycle

Dans le deuxième cycle, la chercheuse considère le diagramme général sur la modélisation ainsi que les conceptions initiales des enseignantes lors de la première réunion. Par conséquent, la THA était liée aux activités déjà choisies, en se concentrant en particulier sur l'activité de départ et sur l'importance de poser un problème de la vie réelle des élèves. On y parviendrait grâce à la réflexion sur ce qui avait été fait dans la phase d'enseignement lors du premier cycle et en s'appuyant sur la lecture et l'analyse des documents suivants :

- Introduction du livre de Niss, Blum et Galbraith (2007),
- Moins de craie, moins de discours, moins de symboles ... plusieurs contextes, plus d'action (Alsina, 2007)
- Modélisation mathématique, une conversation avec Henry Pollak (Pollak, 2007)

a) Poser une situation réelle

Lors de la deuxième réunion, il y a eu deux propositions sur l'amélioration de l'activité pour commencer la leçon. E2, E3 et E5 ont proposé comme départ un problème réel, en particulier à travers un jeu qui implique le hasard. En revanche, E1 et E4 argumentaient pour continuer à utiliser l'activité du premier cycle, où l'enseignante donne les explications.

Les principaux arguments de E2, E3 et E5 pour débuter la leçon avec un jeu étaient qu'il pouvait servir à motiver les élèves, car ainsi ils rencontreraient une situation quotidienne où appliquer ce qu'ils avaient appris. Les enseignantes ont également évoqué la diversité des situations qui pourraient permettre de parler de probabilité :

*E5: Je dis que nous pouvons poser un jeu au début, parce que toi tu l'amènes* [l'élève] *jusqu'à ce qui est la théorie, pas exclusivement la théorie, mais que toi tu l'amènes à l'ensemble de données, et non l'inverse comme quand tu expliques et qu'il applique. C'est ce qui s'était passé, nous avons voulu d'abord expliquer ce qu'est la probabilité et ensuite l'appliquer. Mais ce qui est correct, c'est que nous nous appuyions sur un jeu, c'est-à-dire une application, puis que les élèves questionnent le pourquoi.*

C'est le premier groupe d'enseignantes qui a montré les arguments plus convaincants. Par conséquent, E2 dans le 2e cycle d'enseignement a posé *«On marque 13 cartes avec des numéros de 1 à 13. On distribue deux cartes par équipe. Puis on lance deux dés et l'équipe qui a la somme des nombres sortis marque un point. Le dé est lancé 20 fois. La question posée aux enfants est : Pourquoi le sept gagne-t-il? »*

Nous pouvons remarquer un changement dans le but des enseignantes. Cette fois, elles ont cherché à favoriser l'apprentissage de la probabilité à partir d'un contexte quotidien de l'élève; cependant, après cela, c'est encore l'enseignante qui devrait expliquer le contenu mathématique. Les sous-objectifs qui ont guidé les enseignantes ont consisté dans le choix d'une situation problème où la probabilité est mise en jeu dans un contexte quotidien, suivi d'une explication par l'enseignante sur le contenu mathématique.

b) Réflexion sur la situation réelle

Le dernier élément du processus de modélisation a également subi des changements dans les discussions des enseignantes. Bien qu'elles aient déjà envisagé de promouvoir la réflexion sur l'apprentissage et le contexte de la vie quotidienne, cette fois-ci la question posée n'a pas été superficielle, puisque la question était liée au jeu. Ainsi, à la fin de la leçon, l'enseignante a demandé aux élèves: « Si nous recommencions le jeu, quel nombre choisiriez-vous? » Grâce à cette remise en question, il était prévu que la réponse mathématique permette une réflexion dans le contexte dans lequel la problématique a émergé.

Les concepts et propositions émergents pris comme vrais qui ont été modifiés sont présentés dans le Tableau 2. Il est important de signaler que ces modifications ont été réalisées par E2, E3 et E5.

| Concepts en acte | Propositions considérées comme vraies (Théorèmes en acte) |
|---|---|
| Contextes réels<br><br>Rôle de l'enseignante | Au début de la leçon, l'enseignante pose une situation problème basée sur un contexte quotidien pour l'élève et où le contenu mathématique soit inclus.<br>À la fin de la leçon, une réflexion entre la réponse mathématique et le contexte du problème posé est menée. |

Tableau 2 *Concepts et Théorèmes en acte modifiés dans le deuxième cycle*

On a observé que ce sont les enseignantes E2, E3 et E5 qui pour valider leurs décisions (structure de contrôle) ont avancé des raisons :
- Contexte réel. L'activité relie les mathématiques aux contextes quotidiens.
- Le rôle de l'enseignante doit toujours être actif, en expliquant les connaissances aux élèves.

Soulignons le fait que pour trois enseignantes le temps et la discipline comme structure de contrôle des enfants ont cessé d'être importants et qu'elles se sont concentrées sur des réflexions plus intéressantes. Nous présentons dans la Figure 9, les deux ruptures avec les conceptions initiales décrites plus haut. Nous utilisons la notation de Boyer et Vergnaud (2005).

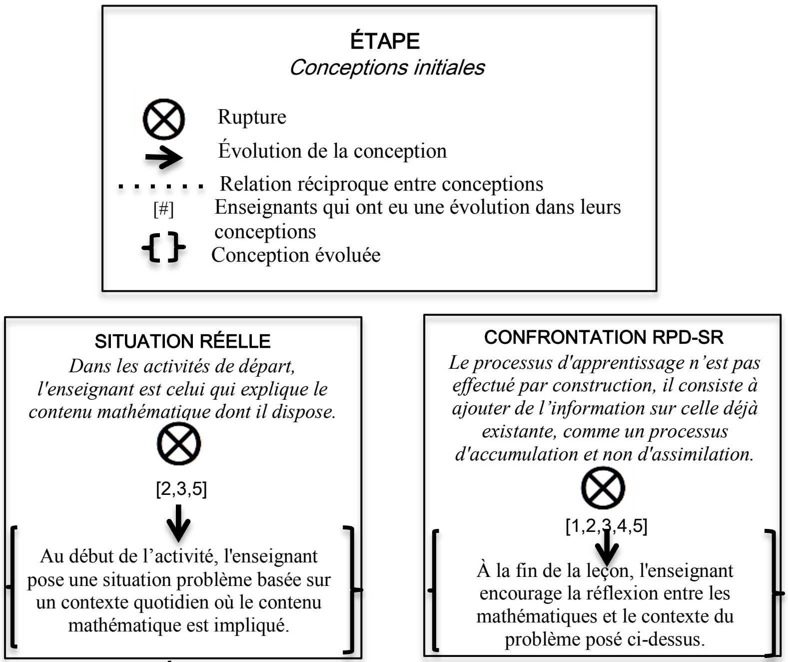


*Figure 9.* Évolution des conceptions lors du deuxième cycle.

À cause de la nouvelle situation expérimentée selon notre méthodologie, quelques enseignantes on modifié leur structure cognitive. Les enseignantes ont inséré cette nouvelle situation dans leur ensemble de situations et semblent avoir assimilé la nouvelle expérience pour faire évoluer leur conception.

### 6.3 Troisième cycle

Sur la base de l'évolution des conceptions qui se sont produites dans le cycle précédent, la chercheuse a mené une THA qui a cherché à répondre à un élément du processus de modélisation mathématique: « Création d'un modèle mathématique ». Plus précisément, la chercheuse a promu une réflexion sur les activités menées à l'école primaire à la lumière de la lecture et l'analyse des documents suivants:

- Modélisation mathématique : Peut-on l'enseigner et l'apprendre? (Blum et Borromeo, 2009).
- Analyse des praxéologies didactiques dans la gestion de processus de modélisation mathématique dans l'école enfantin (Ruiz-Higueras et García, 2011).

a) Création d'un modèle mathématique

La discussion lors de la planification a suggéré une nouvelle modification de la leçon initiale du plan. Quatre enseignantes (E1, E2, E3 et E5) ont signalé qu'après l'énoncé du problème, les équipes devraient disposer d'un laps de temps, pour les laisser chercher différentes démarches vers l'obtention d'une réponse. Les principales raisons qu'elles ont données sont :

*E4: Après le jeu, il faut trouver la façon de leur faire prendre conscience du numéro qui sort de plus dans le jeu. J'ai pensé que nous pourrions donner une feuille et poser la question : quel est le nombre qui sort le plus? Et pourquoi? Et, je ne sais pas, leur donner une feuille pour qu'ils essayent d'expliquer le « pourquoi » et alors il y aura différentes procédures et pas seulement celle que nous avons donnée.*

Bien que E4 ne soit pas complètement d'accord, elles ont décidé de permettre aux étudiants de proposer différentes procédures pour la résolution du problème à travers le jeu, plutôt que l'enseignante donne la réponse. Cela a été fait dans la leçon correspondant au 3$^{e}$ cycle par E3. Toutefois, après que les élèves ont généré diverses procédures, c'est l'enseignante qui devrait mentionner quelle procédure était l'idéale. Les concepts en acte et les propositions admises comme vraies qui ont changé pendant la discussion des enseignantes sont présentés dans le Tableau 3.

| **Concepts en acte** | **Propositions considérées vraies (Théorèmes en acte)** |
|---|---|
| Rôle de l'enseignante<br>Rôle de l'élève<br>Diversité de procédures | L'enseignante favorise la résolution du problème dans chaque équipe.<br>L'enseignante est à l'écoute des diverses procédures des élèves pendant la résolution du problème. |

Tableau 3 *Concepts et théorèmes en acte*

En analysant les arguments des enseignantes, il a été possible de trouver des éléments de contrôle, par exemple : Si l'activité favorise la diversité des procédures, on peut la choisir.

Dans la Figure 10, la rupture n'a pas été observée en ce qui concerne la création d'un cycle de modèle mathématique observée dans cette conception initiale.

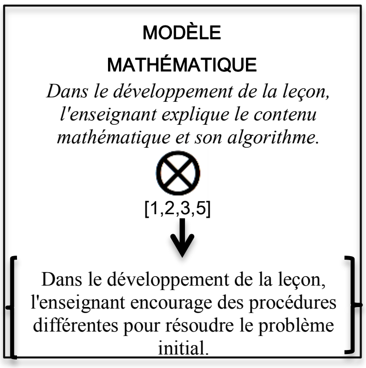


*Figura 10.* Évolution des conceptions dans le 3e cycle.

### 6.4 Quatrième cycle

A cette occasion, la chercheuse a exploré à trouver une THA autour d'une réflexion des enseignantes sur un point important : le processus d'apprentissage comme un processus d'assimilation plutôt que d'accumulation. Il était prévu que les enseignantes discutent du rôle de l'élève en tant que constructeur du modèle mathématique et du rôle actif de l'enseignant dans le travail d'accompagnement. D'autre part, on savait que cela aurait des implications pour le rôle de l'enseignante comme guide qui accompagne le processus d'apprentissage, et non comme pilote qui explique au préalable la procédure à suivre. Les lectures qui furent proposées pour favoriser une telle réflexion sont :

- Planification d'activités d'un cours sur l'acquisition des compétences dans la modélisation mathématique et utilisation de calculatrice à affichage graphique (Hitt et Cortés, 2009).
- Modélisation pour la vie : les mathématiques et l'expérience des enfants (Greer, Verschaffel et Mukhopadhyay, 2007).

a) Travail avec le modèle mathématique et situation du modèle pseudo-concrète.

Dans cette section, nous identifions une différence entre le moment de la planification et la mise en œuvre. Dans la planification, le principal a été fait par E3. La réflexion a conduit les enseignantes à reconnaître l'utilité d'analyser les idées des élèves par équipe et à proposer des moyens de surmonter les difficultés si nécessaire. De plus, les enseignantes avaient proposé qu'après la discussion en grand groupe, l'on puisse retourner au travail en équipe avant le processus d'institutionnalisation. Voici un extrait du dialogue entre les enseignantes :

*E5: Quand ils* [les élèves] *arrivent à visionner les combinaisons comme une procédure appropriée, tu pourrais leur dire de proposer diverses manières de faire des combinaisons et leur faire remarquer qu'ils peuvent le faire chacun à sa façon, sans imposer une méthode.*

*E3: Tu peux même faire le décompte total ; s'il ne coïncide pas avec ceux des élèves, il faut analyser pourquoi ils n'ont pas pu y arriver, et là il faut jouer notre rôle de facilitateur en demandant : « Écoutez les enfants, combien dois-je prendre pour obtenir 8 ? Combien de combinaisons ? »*

Encore une fois, les arguments ont été avancés par E1, E2, E3 et E5. L'enseignante 4 a montré de nombreuses inquiétudes et des doutes, car c'était elle qui devrait conduire la leçon à cette occasion.

Les concepts en acte et les propositions reprises comme vraies par les enseignantes sont les suivants (Tableau 4):

| **Concepts en acte** | **Propositions considérées vraies (Théorèmes en acte)** |
|---|---|
| Rôle de l'enseignante | L'enseignante guide le processus de construction des connaissances de l'élève. |
| Rôle de l'élève<br>Conceptions de l'élève | L'élève apprend dans un processus d'assimilation.<br>Les idées émergentes des élèves et la variété des procédures doivent être reprises par l'enseignante pour pouvoir guider l'apprentissage. |

Tableau 4 *Concepts et Théorèmes en acte*

Les aspects que les enseignantes ont considérés pour valider la sélection d'activités sont:

- L'activité permet aux élèves de construire leurs connaissances.

- L'activité favorise que l'enseignante puisse guider les processus d'apprentissage via leur construction.

Cependant, il est nécessaire de préciser ce qui est arrivé au moment de la mise en œuvre de la leçon par E4. Lors de l'application, E4 a demandé un travail d'équipe pour résoudre les problèmes qui découlaient du jeu, mais confrontée aux différentes réponses des élèves, E4 a décidé de donner la procédure correcte, de répondre aux questions et de donner le contenu mathématique. E4 n'a pas pris en compte la planification du groupe. Elle n'a pas écouté les idées des élèves et elle n'a pas déclenché une nouvelle discussion avant l'institutionnalisation.

Ainsi l'évolution des conceptions que nous montrons dans la suite, en décrivant les ruptures détectées, est reprise seulement par E1, E2, E3 et E5 au moment de la planification, mais pas par E4 au moment de la mise en œuvre de l'activité d'enseignement. Comme nous l'avons dit auparavant (à la fin de la section 6.1), une nouvelle situation est proposée pour favoriser un changement de structure cognitive chez l'enseignante (Figure 11), et ce changement pourra ou non se produire. Par analogie, les activités sont conçues par Brousseau dans sa TSD avec l'intention de faire en sorte que l'élève soit confronté à un obstacle épistémologique donné, mais cela ne garantit pas que l'élève surmonte cet obstacle.

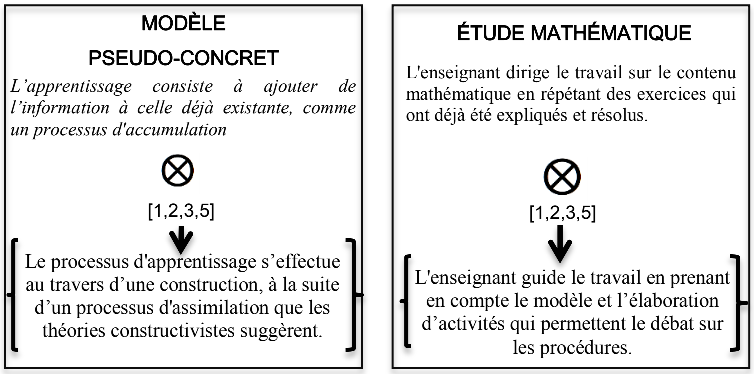


*Figure 11.* Évolution des conceptions pendant le 4e cycle.

### 6.5. Cinquième cycle

L'énorme écart entre ce qui était planifié et ce qui est arrivé dans le quatrième cycle a motivé à la chercheuse à planifier une THA incluant l'activité et des lectures :

- Proposer une discussion à propos de ce qui était planifié et ce qui s'est passé réellement dans la salle avec les élèves.
- Proposer une réflexion plus profonde sur l'importance des idées des élèves et leur prise en compte, à travers la lecture suivante: Les obstacles et les problèmes épistémologiques en mathématiques (Brousseau, 1999).
- S'appuyer sur la réflexion sur les réponses données par les élèves dans le 4e cycle, et garder l'intention de promouvoir l'idée qu'une conception n'est pas erronée, mais plutôt que c'est une connaissance mal adaptée à une situation donnée. Penser à la faire évoluer en utilisant la lecture : Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques (Joshua et Dupin, 1993).

a) Réflexion à propos de situation pseudo-concrète

Au cours de la discussion, les enseignantes ont d'abord parlé de ce qui est arrivé pendant l'application de la leçon 4 avec E4, notamment autour de sa décision de donner aux élèves la procédure correcte sans discussion. La réponse d'E4 était:

*E4: Puisque je n'ai pas eu de réponse correcte de la part des équipes, je n'ai pas su quoi faire et alors j'ai expliqué.*

Les enseignantes ont souligné la nécessité pour les enseignants en général de ne pas considérer les différents processus des élèves comme uniquement erronés, mais comme des conceptions qui pourraient évoluer avec leur aide. L'un des principaux arguments des élèves pour expliquer le numéro gagnant dans le jeu était « la mauvaise construction des dés ». Face à cette réponse, les enseignantes ont proposé:

*E3: Et parce que dès le début on peut donner différents dés à chaque équipe, et pour le 1$^{er}$ lancement, au lieu de faire nous-mêmes le lancer avec les grands dés, demander à une équipe de le faire et montrer son résultat. Puis à une autre équipe, encore une autre, en enregistrant les résultats ; comme ça, on ne peut pas incriminer les dés.*

Sur la mise en œuvre, E5 était attentive à chacune des recommandations planifiées pour le 4$^{e}$ et 5$^{e}$ cycle. Dans le plan de la leçon 5, les enseignantes mettent des indications précises sur les interventions de E5, spécifiant les activités déjà proposées dans les autres planifications.

Les concepts et les propositions prises comme vraies modifiées par les enseignantes sont indiquées dans le Tableau 5 suivant.

| **Concepts en acte** | **Propositions considérées comme vraies (Théorèmes en acte)** |
|---|---|
| Rôle de l'enseignante<br>Conceptions de l'élève | Les élèves ont des idées préconçues (conceptions) qui dirigent les procédures choisies pour répondre au problème.<br>C'est la tâche de l'enseignante de *faire changer* telles conceptions. |

Tableau 5 *Concepts et Théorèmes en acte*

Pour valider ces changements dans les activités, les enseignantes reprennent les mêmes aspects que dans la leçon précédente, mais dans la planification et surtout dans l'application en portant la plus grande attention aux points suivants :

- L'activité permet aux élèves d'acquérir des connaissances,
- L'activité favorise le guidage des processus d'apprentissage par l'enseignante.

La conception qui a évolué dans ce cycle est représentée sur la Figure 12.

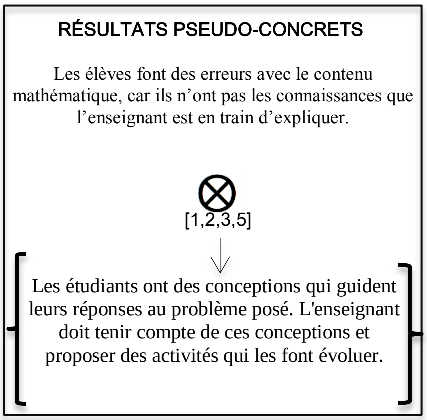


*Figure 12.* Évolution de conceptions pendant le 5e cycle.

### 6.6 Évolutions des conceptions

L'analyse réalisée dans le 1er cycle a montré que les enseignantes en formation avaient à propos de la modélisation mathématique six conceptions initiales, qui étaient très éloignées des postulats théoriques proposés. Pour les enseignantes, le processus d'apprentissage consistait à ajouter de l'information de façon accumulative dans la pensée des élèves, plutôt que de les faire participer à son évolution.

Le rôle de l'enseignante était de transmettre des connaissances en guise d'explication à l'élève, et celui de l'élève de les recevoir passivement. Les enseignantes concevaient les mathématiques comme un corpus statique de notions achevées qui doivent être transmises aux élèves. Dans cette perspective, les possibles points de vue des élèves étaient repris comme erronés et en conséquence l'enseignante devait directement les corriger.

Dans la dernière analyse du cycle, il a été possible de constater que les activités ont changé en raison d'une évolution des conceptions initiales des enseignantes. Les changements dans chaque cycle ont permis de déboucher à la fin sur une planification de la leçon complètement différente de ce qui avait été fait lors des cycles précédents.

Les conceptions finales des enseignantes montrent une plus grande affinité avec les buts de notre investigation sur la modélisation, selon le cycle proposé comme modèle général (voir Figure 13). Pour les enseignantes en formation, le processus d'apprentissage n'est plus lié à l'accumulation de l'information, mais plutôt à une construction où l'élève a besoin de déstabiliser ses idées initiales, d'assimiler et d'adapter ses structures mentales.

A partir de cette prémisse, les enseignantes ne donnent plus comme rôle à l'enseignante en charge de la leçon de faire exclusivement un exposé, mais leurs préoccupations sont plutôt liées à l'élaboration de situations qui guident le processus d'apprentissage des élèves. Ces situations commencent en partant d'un problème dans un contexte quotidien, avec comme but de déstabiliser les idées initiales des élèves, de permettre une pensée diversifiée en produisant dans un apprentissage collaboratif des procédures de résolution.

Dans l'élaboration des activités que les enseignantes ont réalisées, la discussion d'idées qui permettaient la création d'un modèle mathématique était planifiée. Les conceptions initiales des enseignantes en formation sur la modélisation mathématique ont évolué, ce qui leur a permis d'avoir une approche différente de la mathématique, comme quelque chose qui pourrait être construit et reconstruit par les élèves (Figure 13).

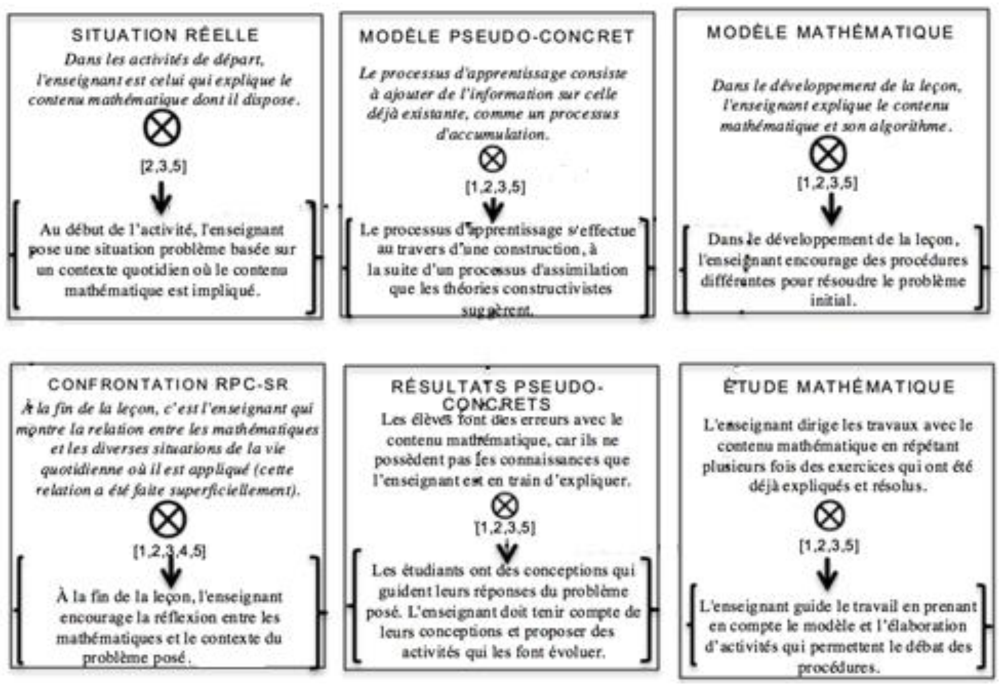


*Figure 13.* Conceptions finales des enseignantes pendant le 5e cycle.

Au fur et mesure que les conceptions des enseignants émergeaient, notre obligation était de construire une THA, où grâce à la réflexion de lectures *ad hoc* (par exemple Brousseau, 1999), leurs réflexions devenaient plus profondes autour des obstacles cognitifs et/ou épistémologiques. Ainsi, nous pouvons affirmer que sous cette programmation, nous avons promu des changements dans chaque cycle et en même temps, chaque THA nous a permis d'analyser l'évolution des conceptions des enseignantes.

Deux aspects clés sont mis en évidence pour le succès d'une THA. En premier lieu, travailler sur les éléments de « design » de leçons a permis aux enseignantes de mettre en œuvre un plan et de l'exécuter cinq fois ; à chaque fois a été observé, enregistré et analysé ce qui s'est passé. L'expérience d'observation des processus d'enseignement de leur propre leçon a soulevé des arguments significatifs en profondeur qui ont déclenché l'évolution de leurs conceptions dans chaque cycle.

Deuxièmement, le travail en collaboration avec discussion a permis l'émergence de ruptures dans les argumentations des enseignantes, un processus de validation s'est déroulé, comme un défi entre elles permettant une évolution des conceptions, ainsi que Hitt l'a établi (2003). Parfois, ces ruptures n'avaient pas été considérées par la chercheuse dans son THA originale. En prenant en compte leur langage dans leurs discussions, leurs planifications et la mise en œuvre, nous avons pu avoir une approche de leurs schémas.

Il est important de souligner que les ruptures constatées ne se sont produites en même temps pour toutes les enseignantes. Par exemple E4 dans le 4$^{e}$ cycle, malgré le dialogue continu, n'a pas pu faire évoluer ses idées, comme cela est apparu à son tour d'enseigner la leçon planifiée en équipe.

## 7. En manière de conclusion

Le processus de conceptualisation dans l'apprentissage est un axe de recherche majeur en didactique des mathématiques. Cependant, ce processus a été peu étudié quand il s'agit de la formation des enseignants. Dans cette recherche nous présentons les conceptions initiales qu'ont cinq futures enseignantes de l'enseignement primaire, pour guider leur façon de planifier et réaliser une leçon sur un contenu mathématique du programme.

Une nouveauté de cette recherche, liée à notre premier objectif d'investigation est l'utilisation de la TCC de Vergnaud (1990), des travaux de Brousseau sur la TSD (1976/1983) et de ceux de Balacheff et Gaudin (2002, 2010) pour une analyse détaillée des conceptions initiales sur le processus de modélisation mathématique des enseignantes de notre échantillon. Ainsi que cela est stipulé dans notre cadre théorique, nous avons fait une adaptation de ce que Vergnaud, Balacheff et Gaudin signalent comme conception, en prenant en compte les « *situations et expérience du groupe face à la leçon dans la classe de mathématiques* » au lieu de l'« *ensemble de problèmes* ».

L'étude conclut que les conceptions initiales qu'avaient les futures enseignantes de l'enseignement primaire ont guidé la façon de planifier et réaliser leurs activités quotidiennes dans l'enseignement des mathématiques. L'analyse du premier cycle a montré que les enseignantes stagiaires avaient six conceptions initiales de la modélisation mathématique très éloignées de leurs postulats théorico-pratiques. Ainsi, il a été reconnu que la première planification a mis l'accent sur la transmission de l'information (en limitant la manipulation d'objets afin d'éviter la perte de temps) et sur un lien superficiel entre le calcul de probabilités et ses applications dans la vraie vie.

Une autre nouveauté, liée à la méthodologie, a été l'utilisation de l'« *Étude de leçon* » (Lewis et Tsuchida, 1998). Les « *Trajectoires hypothétiques d'apprentissage* » (Simon, 1995; Simon et Tzur, 2004) ont fourni une base théorique et méthodologique permettant d'expliquer l'évolution des conceptions des enseignantes en formation. Le deuxième objectif de notre recherche est ainsi pris en compte. L'étude sur l'évolution des conceptions initiales dans les divers éléments de la modélisation a été constamment prise en charge selon le modèle par cycles de Rodriguez (2007, 2010).

Les résultats présentés permettent de conclure que les conceptions de quatre des cinq enseignantes en formation ont subi un changement extraordinaire et stable. Toutefois, l'évolution de la cinquième enseignante (E4) a été moindre, ou plus lente. Dans le 5e cycle en effet, elle a eu l'opportunité de reconsidérer ses conceptions initiales qui avaient semblé solidement ancrées, ce qui l'a conduite à un changement qui pourrait n'être qu'éphémère (on ne sait pas).

L'évolution des conceptions des futures enseignantes concernant la modélisation mathématique s'est reflétée dans la conception et la mise en œuvre des différentes activités, en particulier dans la 5e leçon du 5e cycle. Dans ce cycle s'est concrétisée la création d'un environnement qui a permis la manipulation d'objets, l'expérimentation, l'émergence de conjectures et la validation dans un processus de communication.

Il convient de noter que la formation initiale des enseignants au Mexique laisse très peu de place à une réflexion critique. L'enseignement est fondé sur la transmission des connaissances et il y a peu d'ouverture vers une pratique d'enseignement où la construction des connaissances mathématiques soit prise en charge par les élèves.

Nous croyons que nos résultats, en plus de satisfaire aux objectifs énoncés dans notre recherche, ouvrent un chemin vers la co-construction de connaissance entre le chercheur et les enseignants, en proposant une dialectique entre l'expérience prioritaire de l'enseignant qui nourrit le chercheur, et les éléments théoriques du chercheur qui permettent la réflexion des enseignants. Peut-on considérer notre expérience comme une contribution en faveur de la présence de la recherche collaborative en formation des enseignants ?

**Remerciements.** Nous remercions le groupe de recherche GRUTEAM de l'UQAM pour l'aide que ses membres ont apportée pendant un stage de recherche de l'auteure principale effectué en 2014.

## 8. Références

Andrews, P., et Hatch, G. (2012). A comparison of Hungarian and English Teachers' Conceptions of Mathematics and Its Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(1), 31–64.

Aravena, M. D., et Caamaño, C. E. (2009). Mathematical models in the secondary Chilean education. Dans M. Blomhoj et S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159–176). Dinamarca: Roskilde University.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *9*(3), 241–285.

Balacheff, N. (2004). Marco , registro y concepción. *EMA à explciter* , *10*(1), 181–204

Balacheff, N., et Gaudin, N. (2002). Students conceptions : an introduction to a formal characterization, *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz,* 65 (1), 1–21.

Balacheff, N. et Gaudin N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. Dans Hitt, F., Holton D. and Thompson P. (Eds.), *Research in College Mathematics Education*, Volume VII, p. 207- 234

Blomhøj, M. et Hoff Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), 38(2), 163-177.

Blum, W., et Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling : Can It Be Taught And Learnt? *Mathematical Modelling*, *1*(1), 45–58.

Blum, W. et Leiss, D. (2005)."Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. Paper for the CERME4 2005, WG 13 Modelling and Applications.

Blum, W., et Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Boyer, C ey Vergnaud, G. (1998). *Conceptualication de la reproduction végétale à l'école primaire*. (Thèse de doctorat) Université Paris VII.

Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1999). Les obstacles épistêmologiques et les problèmes en mathêmatiques. *Recherches en Didactique des Mathématicques*, *4*(2), 165–198.

Confrey, J., et Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. Dans Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 57-68). Berlin:Springer.

Da Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. Dans J. P. Da Ponte et J. F. Mateos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Lisbon: University of Lisbon.

Doerr, H. M. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. Dans Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 69-78). Berlin:Springer.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et didactique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *7*(2), 5–31.

Ernest, P. (1988). The impacts of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the art* (1st ed., pp. 249–254). Londres, Inglaterra.

Golafshani, N. (1998). Teachers' conceptions of mathematics and their instructional practices. *Philosopy of Mathematics Education Journal*, *18*(1), 1–14.

Goupille C. et Thérien L. (Éds). (1988). Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. CIAEM39. Sherbrooke: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.

Greer, B., Verschaffel, L., et Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: mathematics and children's experience. Dans Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 89-98). Berlin:Springer.

Grenier, D. et Payan, C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques, 18* (1), 59-99.

Hernández, R., Baptista, P., et Fernández, C. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*(1), 255–271.

Hitt, F., y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Educación e Internet*, *10*(410), 41–55.

Kaiser, G., Blomhøj, M., et Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), *38*(2), 82–85.

Lesh, R. et Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester , Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lewis, C., et Tsuchida, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river. *American Educator*, *1*(1), 1–8.

Lombardo, D. H., et Jacobini, O. R. (2009). Mathematical modelling: From classroom to the real world. Dans M. Blomhoj et S. Carreiro (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (1º ed., pp. 35–46). Dinamarca: Roskilde University.

Maass, K. (2006). What are modelling competencies ? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), *38*(2), 113–142.

Ministère de l'Education Publique. (2011). *Plan de Estudios 2011* (1º ed., p. 92). México.

Niss, M., Blum, W. et Galbraith, P. (2007). Introduction. Dans Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3-32). Berlin:Springer.

Pollak, H. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *2*(2), 393–404. doi:10.1007/BF00303471

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling- A conversation with Henry Pollak. Dans Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 109-120). Berlin:Springer.

Pytlak M., Rowland T. et Swoboda E. (2011) Application and modelling. *Proceedings of the 7th congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Poland.*

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d ' élèves en Terminale S. Sciences-New York*. (Thèse de doctorat) Université Joseph Fourier Grenoble I.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4-1), 191–210.

Ruiz-Higueras, L. et García F. (2011). Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la fromación de maestros. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier

(Eds.), Un panorama de la TAD (pp. 431-464). CRM Documents, vol, 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemática.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education. 26*(2), 114-145.

Simon, M. et Tzur R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning : An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Singer, M. (2007). Modelling both complexity and abstraction: A paradox? In Blum, W., Galbrait, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 225-232). Berlin:Springer.

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (3º ed., pp. 443–466). California: Sage Publications.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and coneptions: a synthesis of the research. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York, Estados Unidos de América: Macmillan.

Organisation de Coopération et de Développement Économiques. [OCDE]. (2010).L´étude PISA.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique Des Mathématiques*, *10*(2), 133–170.

Yin, R. (2003). *Case Study Research* (p. 116). California: Sage Publications.

Samantha Quiroz <samanthaq.rivera@gmail.com>;
Departamento de Matemáticas
Tecnológico de Monterrey

Fernando Hitt <hitt.fernando@uqam.ca>;
Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal

Ruth Rodriguez <ruthrdz@itesm.mx >
Departamento de Matemáticas
Tecnológico de Monterrey