LAURENT VIVIER

NOTE DE LECTURE SUR *APOS THEORY, A FRAMEWORK FOR RESEARCH AND CURRICULUM DEVELOPMENT IN MATHEMATICS EDUCATION*

---

1. Présentation générale

La théorie APOS, pour Action, Processus, Objet, Schéma[1], est une théorie du développement cognitif. Elle a été élaborée par Ed Dubinsky dans les années 1980 (Dubinsky, 1984). L'idée fondamentale est de développer un modèle de l'apprentissage des notions mathématiques en s'appuyant sur le constructivisme de Piaget et notamment sur le mécanisme mental d'abstraction réfléchissante (*reflective abstraction*) que la théorie APOS décline. La théorie ne prétend pas rendre compte des apprentissages autres que ceux relatifs aux notions mathématiques.

À la suite de Dubinsky, de nombreux chercheurs ont contribué au développement de la théorie APOS. C'est une théorie connue et reconnue internationalement (APOE en espagnol), mais qui ne semble que peu représentée dans les recherches en France[2]. Les auteurs de ce livre sont des chercheurs qui ont beaucoup contribué au développement de la théorie, aux États-Unis d'Amérique, en Israël et au Mexique.

Le livre (Arnon et al., 2014) présente l'état actuel de la théorie, les auteurs précisent souvent que la théorie est encore en construction, en évolution, que des points sont encore à éclaircir. De nombreux exemples sont présentés. Ils sont principalement issus des thèmes sur lesquels la théorie s'est construite : les fonctions, les fractions, les rationnels en écriture décimale (*repeating decimals*), l'algèbre linéaire, les groupes. Les références internes à l'ouvrage sont nombreuses et utiles. Dans ce livre, on peut déceler plusieurs blocs :

---

[1] *Action*, *Process*, *Object*, et *Schema* en anglais. Un terme avec une majuscule désigne exclusivement la structure mentale.

[2] Les seules références en France que j'ai pu trouvées sont l'article de Trigueros et Oktaç (2005), un atelier du colloque DIDIREM animé par Maria Trigueros (2009) et une session de l'atelier 7 du colloque en hommage à Michèle Artigue animé par Maria Trigueros et Asuman Oktaç – (Trigueros & Oktaç, 2012) pour le poster en espagnol, la session d'atelier n'a pas fait l'objet d'une publication.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 20, p. 207 - 214.

- une partie *introductive* incluant le développement de la théorie et les fondements piagétiens (chapitres 1 et 2),
- une présentation de la théorie (chapitres 3, 4, 7 et 8),
- des utilisations de la théorie en recherche (chapitre 6) et dans l'enseignement des mathématiques (chapitre 5 et, plus spécifiquement pour le premier degré sur le thème des fractions, chapitre 9),
- une partie conclusive incluant des réponses aux questions fréquentes (chapitre 10), et une rapide conclusion de 5 pages (chapitre 11),
- les références dont une très intéressante bibliographie annotée (chapitre 12) des principales références de la théorie APOS ; un index est également présent, moins utile pour une version électronique.

Le livre est écrit en spirale, en revenant régulièrement sur des notions introduites rapidement pour discuter de certains points plus en profondeur ce qui permet de bien comprendre le fonctionnement de la théorie. Par exemple, la notion de « Schéma » est avancée rapidement dès le chapitre 3 et est reprise plus en détail au chapitre 7. Néanmoins, il me semble que les retours récurrents à la théorie de Piaget entravent parfois la dynamique du livre. Les fondements sont bien expliqués au chapitre 2, mais les auteurs reviennent régulièrement sur les liens avec la théorie de Piaget ce qui ne contribue finalement pas toujours à la compréhension de la théorie.

Il est à noter également le chapitre 5 qui propose une pause dans la présentation de théorie pour exposer le cycle ACE (*Activities*, *Class discussions*, *Exercises*) d'enseignement ainsi que le langage de programmation ISETL utilisé. Ce langage de programmation[3] est avancé avec sa spécificité (proche du langage des mathématiques), mais la présentation, un peu longue et quasi-exclusive, est un peu gênante : ne peut-on pas atteindre les mêmes objectifs avec d'autres langages ? De plus, un usage en algèbre linéaire est développé mais en s'appuyant non pas sur les corps usuels comme **R** ou **C** mais sur les anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Même si cela n'est pas mentionné, on comprend bien pourquoi : il est possible d'énumérer tous les cas et l'informatique est alors performante. Mais la spécificité de ce travail en mathématiques discrètes n'est pas discutée. Les auteurs avancent l'intérêt d'écrire des programmes en référence à la théorie APOS afin de favoriser les transitions entre *stages*[4]. Si l'on suit aisément les auteurs sur ce point, il est surprenant qu'il

[3] Il peut être téléchargé à : http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/isetl.

[4] *Stage* est le terme anglais (qui peut se traduire par « stade ») utilisé pour désigner les structures mentales, Action, Processus, Objet, Schéma. Ce terme insiste sur la progression entre ces quatre structures mentales, chaque *stage* est un passage obligé pour accéder au suivant.

soit développé un thème, *repeating decimals*, pour lequel on donne les programmes tout faits aux étudiants. Est-ce par méconnaissance des algorithmes[5] ou parce que ces algorithmes, hors curriculum, demanderaient du temps pour être compris et appris ?

Par ailleurs, le cycle ACE s'appuie sur le travail collaboratif entre pairs. Sans que ce soit contradictoire avec les idées de Piaget, des références aux travaux de Vygotsky auraient été bienvenues (il n'est cité qu'une seule fois, de manière anecdotique, pour la ZPD, en page 96).

Si le livre me paraît toutefois réussi sur le plan des objectifs fixés, il est important de savoir qu'il ne s'agit pas exclusivement d'un livre de recherche. Le cœur d'une lecture centrée sur la recherche est constitué des chapitres 3, 4 et 7 (qui doivent être lus dans cet ordre) pour la compréhension de la théorie ainsi que du chapitre 6 sur la méthodologie de recherche (mentionnant le rôle très important des entretiens) et du chapitre 2 pour les fondements piagétiens. On peut néanmoins déplorer le manque d'une relecture fine de l'ensemble, avec parfois des discussions sur des items mathématiques qui ne sont pas les bons, ou encore la répétition d'une même séquence de programmation alors qu'il doit manifestement y avoir des modifications. Cela gêne la compréhension.

À la suite, je présente, en commentant, la théorie APOS avec les structures et mécanismes mentaux (section 2) et la décomposition génétique (section 3). Je finis cette note de lecture par une discussion sur le chapitre 8, proposant l'introduction d'un nouveau *stage* pour les processus infinis.

2. Structures et mécanismes mentaux

La présentation de la théorie, l'organisation en *stages* ainsi que la décomposition génétique, pourrait laisser penser qu'il s'agit d'une théorie fortement linéaire et donc éloignée de la réalité des apprentissages. Les auteurs mettent en garde contre cette interprétation linéaire de APOS, certains éléments viennent étayer cette mise en garde, notamment certains mécanismes mentaux liés aux Processus et aux Schémas.

Les structures mentales, aussi appelées *stages*, sont : Action, Processus, Objet et Schéma. Des niveaux (*levels*) sont parfois considérés entre deux *stages*, sans que l'on en perçoivent bien la nécessité ou l'intérêt car il s'agit souvent d'avoir des critères pour savoir si un sujet est au début d'un *stage*, sans développer aucun aspect du *stage* suivant, en cours vers le *stage* suivant ou presque au *stage* suivant. Le critère principal est le nombre d'occurrences des deux *stages* en question dans

[5] Dans leurs travaux, Rittaud et Vivier (soumis) ont retrouvé la présentation de ces algorithmes au XVIII^e siècle (Marsh, 1742). On peut en voir une présentation dans Vivier (2015, partie 2, section 4).

les entretiens. En revanche, ces niveaux entre *stages* prennent tout leur sens lorsqu'ils sont liés aux notions mathématiques, comme au chapitre 9 sur les fractions. Si les *stages* sont des passages obligés dans l'apprentissage, les niveaux, eux, ne le sont pas (les auteurs avancent également le fait que le passage par un niveau peut être très rapide et donc non visible).

Le *stage* de l'Action est caractérisé par l'effectivité des actions sur des objets, qu'ils soient concrets ou abstraits – on suit une *recette* pas à pas, étape par étape, sans rien changer, sans sauter d'étape. La faculté de penser les actions, sans les effectuer, est spécifique du *stage* du Processus (***intériorisation***[6] des actions). La possibilité d'agir sur un Processus est le signe d'une ***encapsulation*** de ce Processus en Objet (reprenant Sfard (1991) et son concept de *réification*, les auteurs affirment qu'il s'agit de l'étape la plus difficile).

Un Objet peut être ***désencapsulé*** pour retrouver le Processus (comme une fonction f que l'on désencapsule pour retrouver le processus qui permet de calculer $f(x)$).

Un Processus peut être ***inversé*** (*reversal*) comme lorsque l'on cherche l'antécédent d'un nombre par une fonction.

La ***coordination*** est le mécanisme mental par lequel deux Processus donnent lieu à un troisième Processus. Les auteurs donnent l'exemple de la composition de deux fonctions : pour accéder à fog (on doit appliquer le Processus de f à l'Objet g), on désencapsule les Objets f et g, on coordonne les deux Processus pour avoir un nouveau Processus que l'on encapsule dans le nouvel Objet fog.

Il est à noter que deux niveaux d'Objets sont considérés sans que, malheureusement, cela soit explicite : un niveau d'exemple, comme la fonction $f(x)=3x+5$, et un niveau plus général, l'Objet fonction.

Il est assez difficile de comprendre ce qu'est un Schéma et il faut tous les exemples du chapitre 7 pour y parvenir (fonction, espace vectoriel et plan cartésien). Un Schéma peut être thématisé (la ***thématisation***) pour devenir un Objet sur lequel on peut faire des Actions (cela peut relancer une séquence APOS), mais une seule étude est présentée sur ce mécanisme mental.

Un Schéma est un ensemble cohérent de structures mentales organisées qu'un sujet a construit et qu'il peut appliquer à une situation. Cela est approfondi au chapitre 7 où la notion de triade de Piaget est reprise pour mieux comprendre le développement des Schémas : au niveau *intra*, les structures A-P-O sont isolées les unes des autres, perçues de manière séparée (par exemple, considération d'un seul type de fonctions) ; au niveau *inter*, des liens sont faits entre A-P-O avec des

[6] Les mécanismes mentaux sont écrits en gras et italique à leur première occurrence, dans une version francisée, le terme en anglais est mentionné lorsque les mots sont éloignés.

regroupements (par exemple, il est possible de construire de nouvelles fonctions à partir de fonctions connues) ; au niveau *trans*, le Schéma devient cohérent, la portée du Schéma est perçue (cela permet de considérer des anneaux ou des espaces vectoriels de fonctions).

La notion de Schéma est, dans la théorie, ce qui permet de rendre compte du dynamisme de la construction des connaissances, en référence aux notions de rééquilibration, assimilation et accommodation de Piaget. Un Schéma peut ***assimiler*** d'autres Objets ou d'autres Schémas. La section 7.6 présente une intéressante ***coordination*** de deux Schémas pour en former un nouveau sur le thème des graphiques en analyse.

La figure suivante (page 18 dans le livre) synthétise l'ensemble de ces structures et mécanismes mentaux, hormis ceux impliquant les Schémas, ce qui est dommage. Mais bien entendu, la présentation qui est proposée ici est beaucoup trop rapide, et il est nécessaire de lire plus en détail le livre pour comprendre finement et fidèlement la théorie APOS.

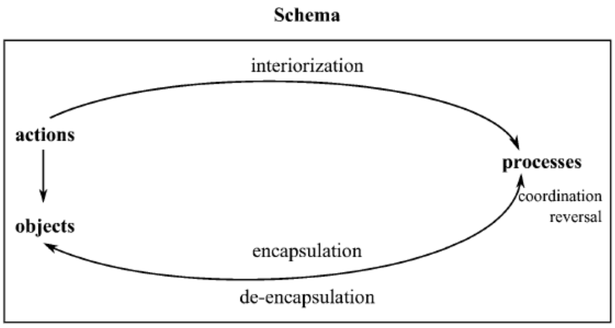

Figure : structures et mécanismes mentaux

3. Décomposition Génétique

APOS n'a pas pour but de classer les étudiants, d'ailleurs une des hypothèses fondamentales de la théorie est que tout individu peut apprendre n'importe quelle notion mathématique pourvu que les prérequis soient construits. Il s'agit d'une théorie qui cherche à identifier les processus cognitifs d'apprentissage. Comment, à partir des structures et mécanismes mentaux exposés de manière générale peut-on apprendre une notion mathématique ?

C'est le rôle d'une décomposition génétique : proposer une organisation, un modèle hypothétique, en Action, Processus, Objet permettant de rendre compte des apprentissages. De même qu'il n'y a pas une unique manière d'apprendre, il n'y a pas unicité d'une décomposition génétique pour une notion. Il s'agit d'un instrument pour le chercheur, pour tester et prédire, ainsi qu'un outil pour élaborer des séquences d'enseignement.

L'objectif est d'obtenir une décomposition génétique (voire plusieurs mais une seule recherche fait état de deux décompositions génétiques, en algèbre linéaire) qui permette de comprendre comment la majorité des individus apprend une certaine notion mathématique. Après l'élaboration d'une décomposition génétique préliminaire ou *a priori*, elle est mise à l'épreuve par une étude expérimentale. Cette dernière peut confirmer la décomposition génétique, l'infirmer ou, et c'est le cas le plus général, montrer la nécessité de la réviser, de l'adapter. Un exemple important est constitué par le thème des limites de fonctions où, après expérimentation, il s'est avéré qu'il fallait considérer deux processus ($x \to a$ et $f(x) \to l$ avec la composition du premier par f).

Les décompositions génétiques sont parfois exposées avec un diagramme et parfois sans. On ne comprend pas pourquoi. Le diagramme est utile pour embrasser rapidement la décomposition génétique, mais on ne sait pas comment en construire un pour représenter une décomposition génétique.

4. Totalité : un nouveau *stage* ?

Je trouve que certaines affirmations de l'ouvrage mériteraient d'être discutées plus en détail car d'autres interprétations pourraient être suggérées. Cette réserve ne remet pas en question la théorie exposée dans le livre, elle invite à une discussion locale, normale dans le fonctionnement scientifique, et je laisse le lecteur se faire lui-même son idée.

Je vais juste développer une discussion sur le chapitre 8 qui est un peu à part dans l'ouvrage car il fait état d'une idée récente. Pour les notions mathématiques impliquant l'infini, un *stage* entre Processus et Objet serait à considérer. Les auteurs nomment ce *stage Totalité*. Ce *stage* marquerait le passage d'un infini potentiel à un infini actuel. Cette idée provient notamment des recherches sur le thème des *repeating decimals* que je développe sur le cas spécifique de 0,999… et de sa comparaison avec 1 :

- Action : 0,999… est perçu avec un nombre fini de chiffres (les actions doivent être réellement effectués), d'où l'inégalité par la structure des décimaux ;
- Processus : on ajoute toujours un « 9 » à droite, ça ne s'arrête jamais, donc on s'approche de 1 mais sans jamais l'atteindre, d'où l'inégalité.
- Objet : 0,999… est perçu comme un Objet sur lequel on peut faire des Actions comme (0,999…×10 – 0,999…) / 9 pour obtenir 1.

Le nouveau *stage*, Totalité, consisterait à, avant de pouvoir considérer 0,999… comme un Objet, pouvoir considérer la *totalité* des décimales.

Pour ma part, je ne pense pas que la théorie ait besoin d'un nouveau *stage* pour le thème des rationnels. La question me semble plus être de savoir quel Objet est encapsulé. L'encapsulation de ce processus mène, naturellement, à l'objet période[7]. C'est un Objet effectif que des étudiants sont capables de considérer par eux-mêmes (Vivier, 2015, partie 2, section 4). On se retrouve alors avec un Schéma, au niveau intra, qui est constitué par des écritures décimales auxquelles on accole à droite une période. Ce Schéma serait à coordonner avec les autres Schémas numériques pour pouvoir aboutir à l'Objet nombre visé.

Cela est dit très rapidement et nécessiterait d'être approfondi. Mais je pense que la complexité est en partie masquée par l'insertion d'un nouveau *stage* qui ne paraît pas nécessaire, pour ce thème des rationnels, à la lecture de ce chapitre. La coordination des Schémas devrait permettre de rendre compte de la complexité et aussi des erreurs comme $0,\overline{5}+0,\overline{7}=1,\overline{2}$ par une assimilation dans un Schéma des nombres décimaux (ou « à virgule »).

Je voudrais aussi pousser plus loin la réflexion : qu'en est-il des nombres réels ? On remarque que, si les recherches avec APOS se centrent sur les nombres rationnels, avec une préoccupation importante constituée par leurs écritures décimales illimitées périodiques, rien n'est dit sur les nombres réels. En particulier, quel Processus permettrait d'atteindre le stage de l'Objet pour un nombre réel ?

Le Processus ne peut consister en l'ajout successif des décimales d'un nombre réel définies par ce nombre (i.e. la suite $E(10^n x)/10^n$) car cela suppose d'avoir le nombre comme Objet. À partir de l'écriture décimale, j'envisage deux possibilités :

1. le fait d'ajouter des décimales à droite, aléatoirement ou arbitrairement. Mais que construisons-nous ? est-ce un Processus au sens de APOS ? quelles actions peut-on imaginer sur ces Processus ?
2. le fait de considérer une suite de Cauchy, ou deux suites adjacentes, avec un contrôle des décimales (i.e. des erreurs), ce qui permet d'avoir effectivement un Processus, et de savoir que l'on construit un Objet lié à ces suites (la limite).

Cela serait à approfondir et peut-être que, dans le cas général des nombres réels, le nouveau *stage Totalité* prendrait tout son intérêt, car il n'y aurait plus d'interférence avec l'objet période.

[7] À ce propos, on peut voir une différence dans les notations : 0,333… insiste plus sur le Processus alors que $0,\overline{3}$ insiste plus sur l'Objet.

Bibliographie

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory, a Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Springer.

Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts, *Korkeakoulujen Atk-Uutiset*, 2, 41–47.

Marsh, J. (1742). *Decimal arithmetic made perfect; or, the management of infinite decimals displayed*, London.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematic*s, 22, 1–36.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 10, 157 – 176.

Trigueros, M. (2009). Modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires, *Actes du colloque DIDIREM, Approches plurielles en didactique des mathématiques*, Université Paris Diderot, LDAR, 83-101.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2012). Análisis teórico de conceptos del álgebra lineal y su uso didáctico apoyado en situaciones de modelación, *Colloque en hommage à Michèle Artigue, atelier 7, Didactique de l'analyse et des mathématiques de niveau post-obligatoire*, 51-53. <https://sites.google.com/site/colloqueartigue/short-proceedings>

Vivier, L. (à paraître). *Sur la route des réels*, note d'Habilitation à Diriger les Recherches.

LAURENT VIVIER
Institut de Modélisation et Mathématiques de Montpellier (I3M), Université de Montpellier
Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr