

RAQUEL BARRERA-CURIN, CAROLINE BULF, FABIENNE VENANT

**DIDACTIQUE, SÉMANTIQUE ET MÉTAPHORES : ANALYSE DE
LANGAGES EN CLASSE DE GÉOMÉTRIE**

Abstract. Didactic, Semantic and Metaphors: Analysis of Languages in Class of Geometry. This work focuses on the role taken by different forms of language during the first academic experience of symmetry by young children, in the context of primary school in France. We pay special attention to. A situation of introduction of symmetry in a class of CE1 (grade 7 or 8 years) was observed to this purpose. This paper aims to provide our analysis of this situation, which are grounded into a didactical theoretical framework enriched with semantic, discursive and metaphoric-conceptual analysis tools. This original approach allows us to understand the symmetry in all its complexity and to analyze finely the inter-influence of three dimensions (acting-talking-thinking) that characterize both the mathematical activity of the students and of the teacher.

Résumé. Ce travail s'intéresse au(x) rôle(s) que tiennent différentes formes de langage lors de la première rencontre explicite des élèves avec le concept scolaire de la symétrie, dans le contexte de l'école primaire en France. Nous nous appuyons pour cela sur l'observation d'une situation d'introduction de la symétrie dans une classe de CE1 (élèves de 7 ou 8 ans) en France. L'objectif de l'article est de rendre compte de nos analyses qui s'appuient sur un cadre théorique didactique enrichi d'outils d'analyse sémantiques, discursifs et métaphorico-conceptuels. Cette approche originale nous permet d'appréhender la symétrie dans toute sa complexité et d'analyser de façon fine l'inter-influence de trois dimensions (*agir-parler-penser*) qui caractérisent selon nous l'activité mathématique des élèves mais aussi celle de l'enseignant.

Mots-clés. Langages, apprentissage, géométrie, symétrie, métaphores, modes de fréquentation, agir-parler-penser.

Introduction

L'étude du rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques a été peu souvent objet d'étude en tant que tel dans les travaux de didactique des mathématiques français bien que cette question soit depuis longtemps au cœur de nombreux travaux anglo-saxons (voir paragraphe 1.1). La thèse de Laborde (1982) a été une des rares à aborder frontalement cette question à l'aune des cadres théoriques français. Toutefois depuis quelques années en France, ce courant s'inverse et des travaux de plus en plus nombreux cherchent à comprendre son rôle dans les mécanismes complexes d'apprentissage des mathématiques au-delà de son rôle en tant que *media* (Bronner et Al. 2013) (Barrier et Mathé 2014). Notre travail de recherche s'inscrit dans le prolongement de certains de ces travaux de recherche

récents issus du champ de la didactique des mathématiques (voir paragraphes 1.1, 1.2 et 1.4) ainsi que de celui de la linguistique (voir paragraphes 1.3 et 1.4). Nous avons choisi de nous intéresser à la première rencontre explicite des élèves avec le concept *scolaire*¹ de la symétrie, dans le contexte de l'école primaire en France. Nous nous appuyons pour cela sur l'observation d'une situation d'introduction de la symétrie dans une classe de CE1 (élèves de 7 ou 8 ans) en France. Nous nous intéressons plus particulièrement aux processus de co-construction des connaissances liées à ce concept en accordant une attention particulière au langage, sous ses différentes formes (parlée, gestuelle, visuelle...). Pour cela, nous avons développé un cadre d'analyse qui tire son originalité de l'articulation de nos différentes approches : didactique, sémantique et métaphorico-conceptuelle.

La symétrie² est un concept mathématique que l'élève rencontre très tôt : dès l'école maternelle à travers des situations mettant en jeu implicitement des figures isométriques (Gorlier 1981 ; Rouche 1999 ; Grelier 2013) mais aussi en dehors de l'école du fait de sa dimension culturelle. De nombreuses recherches mettent en évidence l'existence chez le jeune enfant d'une forme d'intuition d'axe de symétrie, avant même toute rencontre scolaire avec la symétrie (Piaget & Inhelder 1977). D'autres travaux (Thompson 1917 ; Weyl 1952 ; Keller 2004, 2006) accordent à la symétrie un rôle crucial dans l'histoire de la construction de la pensée aussi bien mathématique que philosophique, psychologique ou esthétique. La symétrie est un concept mathématique dont les dimensions socioculturelles suscitent encore de nombreux intérêts et interrogations, notamment lorsqu'il s'agit d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques (Grenier 1988 ; Miyakawa 2005 ; Lima 2006 ; Bulf 2008 ; Chesnais 2009).

La première partie de l'article est consacrée à la description de l'articulation que nous faisons de différents positionnements théoriques, parfois considérés comme incompatibles d'un point de vue épistémologique. Ces positionnements mettent en jeu les objets suivants :

- l'apprentissage, vu comme un double processus d'*adaptation* (dimension individuelle) et d'*acculturation* (dimension sociale) ;
- la *langue*, vue comme un système de signes linguistiques et code permettant la communication ;

¹ D'après le dictionnaire de Reuter (2013 p.33), les concepts scolaires sont les concepts « construits et travaillés dans l'espace scolaire » et se distinguent des concepts « scientifiques » qui sont « élaborés dans les disciplines de recherche » ou les concepts « quotidiens de la vie de tous les jours ».

² Dans cet article, nous parlons de symétrie pour symétrie axiale.

- le *langage*, vu comme une activité dialogique et située mettant en jeu non seulement la *langue et ses codes écrits ou verbaux* mais aussi se manifestant sous différentes formes (visuelle, gestuelle, ...).

La deuxième et troisième partie de l'article sont consacrées à la restitution des analyses de la situation de classe observée, illustrant la mise en fonctionnement de nos articulations théoriques et méthodologiques, d'horizons différents mais complémentaires.

1. Nos positionnements théoriques : didactique, linguistique et métaphorico-conceptuel

Dans la partie 1.1, nous expliciterons notre conception de l'apprentissage. Nous détaillerons comment celle-ci prend ses racines dans le cadre de la Théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) mais se trouve enrichie par nos récents travaux (Bulf, Mathé & Mithalal 2014, 2015) qui accordent aux échanges langagiers une part tout aussi importante qu'à la situation en jeu et la confrontation du sujet au milieu. Pour cela, nous avons choisi de mobiliser l'outil *Modes de Fréquentation* introduit par Bulf, Mathé et Mithalal (2014) dont nous décrirons l'intérêt comme outils d'analyse dans un contexte d'enseignement-apprentissage de la symétrie dans la partie 1.2. Dans la partie 1.3 nous proposerons d'enrichir cet outil en incluant une analyse linguistique et sémantico-discursive (Jacquet, Venant et Victorri 2005, Kerbrat-Orecchioni 2005). Nous reviendrons alors sur ce que nous entendons par *activité langagière, langue et langages*. Enfin dans la partie 1.4, nous ajouterons une dernière dimension à notre cadre d'analyse, celle d'une analyse métaphorico-conceptuelle des échanges langagiers se produisant grâce aux caractéristiques métaphoriques qui émergent des objets mathématiques (Barrera-Curin 2013, Nuñez & Margethis 2014). Cette dernière dimension se fonde sur l'idée que « notre système conceptuel ordinaire, selon lequel nous pensons et agissons, est fondamentalement de nature métaphorique » (Notre traduction. Lakoff & Johnson 1980 p. 454) :

But our conceptual system is not something we are normally aware of. In most of the little things we do every day, we simply think and act more or less automatically along certain lines. Just what these lines are is by no means obvious. One way to find out is by looking at language. Since communication is based on the same conceptual system that we use in thinking and acting, language is an important source of evidence for what that system is like. (Lakoff & Johnson 1980 p. 454)

L'objectif de la première partie de cet article est donc d'explicitier nos positionnements théoriques et leur articulation qui fondent notre cadre d'analyse afin d'appréhender – en étroite relation avec la langue et les échanges langagiers – la nature de l'objet mathématique en jeu, la symétrie, dans toute sa complexité aussi bien logique que sémantique.

1.1. Apprendre en géométrie : un double processus d'adaptation et d'acculturation

De nombreux travaux anglo-saxons, tels que ceux de Sfard (2001, 2012), Kieran, Forman et Sfard (2001), Moschkovich (2010) ou Morgan (2013) mettent en avant la prise en compte des contextes sociaux, historiques et culturels et accordent au langage un rôle prédominant et crucial dans le processus de construction de connaissances mathématiques. La Théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) se distingue au sens où on peut, en référence aux travaux de Bessot (2011) et à la distinction *connaissances/savoir* (Brousseau 1998 ; Lappara & Margolinas 2010), reconnaître au processus d'apprentissage qu'elle se propose de modéliser, une dimension individuelle et une dimension sociale :

Brousseau s'oppose aux thèses constructivistes en définissant l'apprentissage comme un double processus :

- un processus d'adaptation (assimilation et accommodation) à un milieu qui est porteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres : notions de milieu et de situation didactique,

- et un processus d'acculturation par l'entrée dans les pratiques d'une institution : notion de contrat et d'institutionnalisation. (Bessot 2011 p.32)

Autrement dit la dimension individuelle renvoie au caractère a-didactique de la situation en jeu dans laquelle le sujet met en jeu ses connaissances pour résoudre un problème et la dimension sociale renvoie au processus d'acculturation qui prend effet à travers les processus dits « complémentaires », selon Lappara et Margolinas (2010) de dévolution (mise en place de la situation et négociation du contrat en réglant la part d'implicite) et d'institutionnalisation. Il en résulte une construction négociée et partagée du savoir visé :

[...] enseigner un savoir suppose (quel que soit le choix pédagogique) un processus de contextualisation : ce que l'élève rencontre en situation est d'abord une connaissance. Mais les connaissances fonctionnent en premier lieu dans le régime de l'implicite, elles sont contextualisées, très dépendantes de la situation. Le processus qui fait changer de statut la connaissance en la faisant évoluer graduellement vers un régime de savoir est le processus d'institutionnalisation, qui passe par des formulations, des validations, une décontextualisation, une mémorisation, etc. (*Ib.*, p.146)

Dans Bulf, Mathé et Mithalal (2015), nous nous rapprochons des courants anglo-saxons tout en conservant notre ancrage dans la TSD en mettant au jour que les interactions langagières peuvent jouer un rôle essentiel au-delà de leurs rôles dans les processus de dévolution et d'institutionnalisation :

[...] au-delà de leurs fonctions habituellement identifiées pour le déroulement de la situation didactique et des effets de contrat prévisibles, les interactions langagières

orales jouent ainsi un rôle fondamental dans la dynamique de constitution de chacun des niveaux de milieu. Ce rôle ne nous semble devoir être considéré ni comme prééminent, ni subordonné, mais bien comparable et du même ordre que celui de la boucle action-rétroaction du système [sujet<>milieu]. [...] les négociations sur et dans le langage ont permis de modifier les attentes de l'élève ; elles ont en outre modifié leur rapport au savoir et participé de la négociation des significations qu'ils assignent au savoir en construction. (Bulf, Mathé & Mithalal 2015 pp.29-30)

Dans la recherche que nous rapportons ici, notre positionnement théorique s'inscrit dans la continuité de ces derniers travaux (Bulf, Mathé et Mithalal 2014, 2015) et concilie également ces deux points de vue sur l'apprentissage que nous admettons opérant de façon concomitante et dialectique : nous partageons le point de vue individuel de l'apprentissage qui est derrière l'idée d'apprendre en résolvant des problèmes et celui dit social qui accorde à la manifestation de différentes formes de langage un rôle tout aussi crucial que celui de l'adaptation au milieu. Nous adoptons ce positionnement théorique car il nous semble particulièrement convenir au contexte d'enseignement-apprentissage de la géométrie dans lequel s'inscrit cette recherche. En effet, le domaine de la géométrie privilégie la manipulation et les tracés (lors de la résolution d'un problème), et nécessite une forme spécifique et partagée de désigner les objets (qui renvoie au caractère éminemment social des savoirs scolaires). En outre, la spécificité et la complexité de l'appréhension d'objet géométrique (comme le concept de *droite* par exemple) résident dans le fait qu'un même signe (par exemple, une trace graphique – *un trait* – une trace visuelle – *un geste représentant une ligne droite de façon perpendiculaire ou horizontale au sol* – ou un mot – *une droite*) peut à la fois désigner l'objet matériel et/ou l'objet théorique ; la signification étant dans l'emploi (Wittgenstein 1953). Ainsi partageons-nous, dans le contexte spécifique d'enseignement-apprentissage de la géométrie, cette approche wittgensteinienne de l'apprentissage (construction collective, sociale, d'une forme de vie partagée) selon laquelle le langage – et les différentes formes qu'il peut prendre au cœur des interactions – tiennent un rôle essentiel (Mathé 2012). Nous reviendrons sur ce point dans la partie 1.3 en explicitant davantage nos références aux travaux de Bernié (2002) et Jaubert et Rebière (2012) qui, dans une perspective vygotkienne, considèrent que le langage est un outil de construction, négociation et transformation des significations.

En résumé et en référence aux derniers travaux cités, nous admettons qu'enseigner et apprendre la géométrie en contexte scolaire consiste à inscrire l'activité de l'élève dans un « ensemble social caractérisé par des modes d'agir-parler-penser » (Bernié 2002 p.81) « spécifiques d'un niveau donné, relativement à des objets de savoir donnés, dans un processus à la fois adaptationniste et social » (Bulf, Mathé et Mithalal 2014 p.32). Nous cherchons à rendre compte de la mise en relation de ces trois dimensions (agir-parler-penser) se manifestant dans et par l'activité géométrique (lors de la résolution d'un problème) : qu'entend-on par agir, parler et

penser d'une figure symétrique ? Comment les élèves entrent-ils dans la résolution d'un problème portant sur la symétrie ? De quelle manière mobilisent-ils leurs connaissances ? Comment décrire l'évolution de leurs manières d'agir, de parler et de penser d'une figure symétrique au cours d'une activité riche en interactions entre élèves et enseignant ? Notre but est donc de présenter l'activité géométrique des élèves, en prenant en compte conjointement ces trois dimensions et en mettant en évidence les mécanismes de leur évolution en tant qu'unité.

1.2. Les Modes de Fréquentation d'une figure symétrique

Nous recourons à une méthodologie d'analyse déjà éprouvée dans (Bulf, Mathé et Mithalal 2014) qui se déroule en deux temps. Dans un premier temps, nous menons une analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser de figure symétrique (détaillée dans la partie 2.2) puis, dans un second temps (partie 3), nous utilisons un outil d'analyse *a posteriori* baptisé *Modes de Fréquentation* afin de décrire l'activité géométrique des élèves en résolution de problèmes, relativement à un objet de savoir (ici figure symétrique). Nos analyses articulent les trois dimensions agir-parler-penser sans lien de subordination et se réalisent sous le regard de nos approches didactique, linguistique et métaphorico-conceptuelle que nous présenterons de façon détaillée dans les sections suivantes.

L'objectif de l'analyse *a priori* telle que nous la proposons ici, en termes de agir-parler-penser, est de fournir des indices ou balises pour structurer l'analyse *a posteriori*. Méthodologiquement, notre analyse *a priori* se veut épistémologiquement proche de celle menée dans le cadre strict de la TSD au sens où nous menons une analyse mathématique des concepts en jeu qui n'a pas un sens prédictif mais causal ; nous réfléchissons à l'activité potentielle des élèves en fonction des valeurs des variables didactiques de la situation. Toutefois, nous enrichissons ce modèle d'analyse en la présentant selon trois dimensions (agir-parler-penser), pensées comme une unité. Pour cela, et nous serons amenées à le détailler davantage dans la partie 2 de l'article, nous nous appuyons sur des résultats de travaux en didactique de la géométrie qui donnent déjà des éléments pour caractériser l'inter-influence entre ces trois pôles et nous aident donc à décrire l'activité géométrique potentielle des élèves dans la situation observée :

- d'une part, nous admettons l'inter-influence entre la façon qu'ont les élèves de percevoir les figures géométriques et leur manière d'agir dessus avec des instruments. En effet les travaux de Duval et Godin (2005) et Duval (2005) – et plus globalement de ceux du groupe de Lille³ – mettent en évidence différentes façons

³ De par leur appartenance institutionnelle, nous désignons par le groupe de Lille les membres du groupe de recherche qui a fonctionné à l'IUFM du Nord pas de Calais : Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Joël Jore, Bachir Keskessa, Régis

d'appréhender une figure qui dépendent de la tâche proposée et des instruments mis à disposition. Plus particulièrement, Duval (2005) décrit le développement de processus cognitifs articulant la visualisation et le langage en géométrie. Il définit en particulier le processus de « déconstruction dimensionnelle » des formes qu'il situe au cœur du processus de visualisation et du développement du raisonnement en géométrie :

« La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme $nD/2D$, en unités figurales d'un nombre de dimension inférieure à celui de cette forme. Ainsi, la figure d'un cube ou d'une pyramide ($3D/2D$) est décomposée en une configuration de carrés, triangles, etc. (unités figurales $2D/2D$). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales $1D/2D$). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en « points » (unités $0D/2D$). En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités $1D/2D$ (tracés sécants ou tracés formant un coin (« sommets », « angles », ...)). (*Ib.*, p. 20).

En outre pour Duval, la déconstruction dimensionnelle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive.

- d'autre part, nous nous appuyons sur l'analyse logique des concepts mathématiques en jeu au sens de Barrier, Hache et Mathé (2014) ou Barrier, Chesnais et Hache (2014). Cette analyse permet de décrire les relations d'inter-influence entre les trois pôles (agir-parler-penser) qui forment ainsi un « tout ». Ce type d'analyse s'exprime par la traduction des relations en termes de prédicats (au sens de la logique des prédicats) et met l'accent sur l'arité de ces prédicats, c'est-à-dire le nombre (unaire, binaire, ternaire, ...) et la nature (point, ligne ou surface, au sens décrit par Duval dans le paragraphe précédent) des objets qui sont mis en relation. Ainsi, dans le contexte de notre objet d'étude qui porte sur des papillons (qui rappelons-le sera décrit dans la partie 2), la relation de symétrie peut, selon le stade de déconstruction dimensionnelle atteint, être considérée comme une relation unaire (par exemple, si les élèves comparent des ailes de papillon afin de produire un papillon symétrique, ils peuvent reconnaître un papillon effectivement symétrique dans sa globalité sans distinction de sous-éléments), binaire (par exemple, s'il s'agit de la mise en correspondance terme à terme de sous-éléments des ailes d'un même papillon en fonction de critères de forme ou de taille) ou ternaire (si par exemple trois éléments sont mis en relation : un élément d'une aile de papillon est mis en relation avec un élément d'une autre aile par rapport à une zone frontière représentée par les bords des rectangles à l'intérieur desquels ces ailes ont été dessinées).

- et enfin, nous référons aux résultats de travaux en didactique de la géométrie qui ont étudiés spécifiquement le concept de symétrie (voir les travaux déjà cités en

Leclercq, Christine Mangiante-Orsola, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere.

introduction de l'article ; Vergnaud 2002 ; Bulf, Marchini & Vighi 2013 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclerq 2013) qui nous donnent des éléments pour décrire *a priori* le rapport des élèves à cet objet mathématique.

Donnons maintenant un exemple dans le contexte de la situation étudiée (qui sera développé dans la partie 2) afin d'illustrer ce premier volet de notre méthodologie d'analyse. D'après les références que l'on vient de donner, nous pouvons décrire un mode d'agir-parler-penser *a priori* de figure symétrique lors de la première phase de la situation (annexe 1) de la manière suivante : *la mise en correspondance terme à terme de sous-éléments (de dimension 2 : éléments de surface du papillon comme un bout d'ailes par exemple ou de dimension 1 : contours de surface délimitant un bout d'ailes ou les antennes) d'un même papillon en fonction de critères visuels de forme ou de taille (les façons de parler peuvent être : exactement pareil-pas pareil, même forme, plus grand que, plus petit que, de chaque côté, etc.). Cette mise en relation entre ces deux éléments se fait par rapport à l'axe de symétrie qui n'est pas reconnu en tant que tel mais plus comme une zone frontière délimitant la moitié d'un papillon ; nous pouvons ainsi parler de relation ternaire. L'élève se suffit de la perception pour attribuer des valeurs à ces critères de comparaison dont la façon de parler dépend donc de la façon de voir et d'agir (et réciproquement).*

Une fois déterminés, les différents modes d'agir-parler-penser *a priori* (mais il n'est pas nécessaire d'être exhaustif), donnent ainsi des balises pour l'analyse *a posteriori* nous permettant de repérer en contexte – lors du déroulement de la situation – les manifestations effectives des façons d'agir-parler-penser un objet mathématique. Les modes de Fréquentation, outils d'analyse *a posteriori*, cherchent à décrire un rapport du sujet à l'objet mathématique en jeu, ici figure symétrique, qui évolue au cours d'une situation. Les observables portent donc sur ce que font et disent les élèves et l'enseignant (gestes, regard, signes, langage oral, etc.) en repérant la dimension des objets en jeu (2D, 1D ou 0D) et leur relation (comme décrit précédemment c'est-à-dire à partir des différentes références données pour décrire l'analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser : les travaux de Duval, ceux spécifiques à la symétrie, l'analyse logique, etc.). Nous avons choisi de parler plutôt de Modes de Fréquentation (que de modes d'agir-parler-penser *a posteriori*) car ils ne sont pas figés, ils sont contextuels et se caractérisent par leur perpétuelle évolution au fil du déroulement. Et conformément à notre cadre théorique décrit dans la partie 1, cette évolution s'exprime d'une part d'un point de vue intra-personnel (caractère a-didactique de la situation) et inter-personnel (par son rapport aux autres et les éventuelles co-existences ou confrontations entre différents Modes de Fréquentation). Cette double dynamique d'évolution et de transformation des Modes de Fréquentation (considérée comme concomitante et dialectique) est précisément ce qu'on cherche à décrire, en partant donc de l'hypothèse que c'est l'inter-influence

entre les trois dimensions (agir-parler-penser) qui sont moteur de cette double dynamique.

En résumé, l'outil d'analyse Modes de Fréquentation favorise une description et une analyse *a posteriori* de l'activité géométrique de l'élève que l'on décrit selon trois dimensions indissociables (agir-parler-penser). On cherche à exprimer les relations d'inter-influences qui sont à l'origine du caractère dynamique des Modes de Fréquentation de l'objet mathématique en jeu ; l'analyse logique reste un outil privilégié pour décrire ces relations. Si l'on reprend l'exemple cité précédemment : *la relation binaire repérée dans l'action par le fait que les élèves mettent en correspondance deux sous-éléments du papillon de façon perceptive selon des critères de forme ou de taille amènera le sujet à parler par exemple « de la forme de son aile d'un côté puis de l'autre » (et réciproquement, cette façon de parler amène à considérer une relation binaire dans l'action)*. Nous décrivons là un Mode de Fréquentation de figure symétrique à un moment donné mais l'intérêt de l'analyse réside bien dans le fait de voir comment ces façons d'agir et de parler vont évoluer, s'inter-influencer et influencer les autres Modes de Fréquentation co-existant. Les valeurs des variables didactiques de la situation évoluant au cours de la séance (annexe 2), les façons d'agir sur le milieu vont donc également évoluer, faisant ainsi évoluer les façons de parler et de penser (et réciproquement). Ce sont donc toutes ces transformations, qui résultent à la fois d'une adaptation au milieu et d'une acculturation à des pratiques géométriques scolaires, que nous cherchons à décrire.

Pour étudier plus finement les relations entre les trois dimensions (agir-parler-penser), nous combinons une analyse linguistique (Jacquet, Venant et Victorri 2005), centrée sur les procédés sémantiques utilisés et sur la polysémie du vocabulaire géométrique, avec une analyse discursive (Kerbrat-Orecchioni 2005) à la fois fonctionnelle et hiérarchique. Ce double regard permet d'établir la structure du discours selon différents niveaux d'analyse (lexique, interactions, structures, enchaînements) ainsi que les relations entre ces différents niveaux. Nous détaillons ces compléments d'approches dans la partie suivante 1.3.

1.3 Activité langagière, langue et langages

Notre position sur le langage est très fortement influencée par les travaux de Bernié (2002), Jaubert et Rebière (2012) commenté par Hache (2013). Dans la lignée de ces travaux, nous nous intéressons au langage en tant qu'« outil de construction, de négociations et transformations des significations » (*Ib.* 2013, p.3), « témoin d'une activité de réorganisation de ce que l'on comprend du monde » et « source d'apprentissage » (Jaubert et Rebière 2012, p.4). Par activité langagière, nous désignons le processus de construction des significations et des savoirs, dans et par le langage. Nous donnons au langage le sens général de « faculté que les hommes possèdent d'exprimer leur pensée et de communiquer entre eux au moyen d'un

système de signes conventionnels vocaux et/ou graphiques constituant une langue » (TLFI⁴). L'activité langagière elle-même se traduit par des « reformulations, des mises à distances successives, la construction du discours de preuve et le travail de l'énoncé reconnu. » (*Ib.* 2012, p.4)

Pour jouer ce rôle, le langage met en œuvre la langue : « réservoir intériorisé des signes partagés par une communauté » (Hache 2013, p.2). Notre proposition est de passer par une description fine de ce qui se passe au niveau de la langue, une analyse linguistique, pour éclairer les processus en jeu au niveau de l'activité langagière. Nous prenons également en compte le fait que « le langage verbal n'est pas le seul outil producteur de sens » (Jaubert et Rebière 2012, p.4) et couplons l'analyse purement linguistique avec une analyse des langages mettant en jeu des gestes ou des éléments visuels. Nous parlons alors de formes de langage –gestuelle ou visuelle pour désigner ces modes de communication qui s'appuient sur des signes non verbaux (nous développerons également ce point dans la partie 1.4).

L'activité langagière et la construction de nouveaux savoirs sollicitent « des déplacements de positionnement énonciatifs qui engagent la transformation de la classe en communauté discursive disciplinaire » (Jaubert et Rebière 2012, p.5). Cette hypothèse énonciative forte donne une grande importance au contexte dans la construction des significations et des savoirs. C'est pourquoi l'étude linguistique que nous proposons s'inscrit dans le cadre théorique de la linguistique énonciative (Benveniste 1974 ; Ducrot 1972 ; Culioli 1983). L'objet d'étude en est précisément l'énonciation, « cette mise en fonctionnement de la langue par un acte individuel d'utilisation » (Benveniste 1974, p.12). Il s'agit, étant donné un énoncé, de caractériser ce qui en fait un acte de communication et donc de prendre en compte l'acte et la manière d'énoncer aussi bien que la situation (temps, lieu). Cette analyse linguistique est à la fois sémantique et lexicale. Elle vise à caractériser les unités lexicales jouant un rôle important dans les énoncés, ainsi que le rôle du contexte. Le regard ainsi porté sur la langue et son utilisation, aussi bien du point de vue individuel qu'interindividuel, vient nourrir l'outil Mode de Fréquentation décrit dans la partie 1.2. L'analyse fine des observables langagiers aussi bien des élèves que de l'enseignant permet en effet de compléter les éléments issus de l'analyse didactique faite *a priori*. Il s'agit de décrire plus précisément le rapport du sujet à l'objet mathématique en jeu, mais aussi, et surtout, les éléments associés au langage qui caractérisent l'évolution des Modes de Fréquentation au cours de la situation. Notre analyse linguistique se situe aussi bien au niveau lexical que sémantique.

⁴ TLFi : Trésor de la langue française informatisé, <http://atilf.atilf.fr/tlf.htm>. Consulté le 12 février 2016

Au niveau lexical, une importance particulière est donnée à l'étude des marqueurs de l'énonciation, les termes qui ne sont compréhensibles que par rapport à l'acte d'énonciation. Les indices auxquels nous nous intéressons visent à faire le lien entre l'énoncé (ce qui est dit) et l'énonciation (l'acte de dire), et à établir les caractéristiques de l'énonciation. Ce sont par les exemples les termes par lesquels un locuteur se définit comme sujet, comme les embrayeurs (Jakobson 1957) ou les déictiques. Il peut s'agir de marqueurs lexicaux comme *je, maintenant, ici, là-bas*, qui mettent l'accent sur le lieu, l'objet de référence ou la façon de situer le référent dans l'espace, ou, au contraire, de marqueurs qui renvoient à ce qui a été dit avant ou après. On cherche donc à distinguer les termes déictiques (qui renvoient à la situation), anaphorique (qui renvoient à ce qui a été dit avant) et cataphorique (qui renvoient à ce qui va être dit après). L'utilisation des temps verbaux fait aussi l'objet d'un intérêt particulier. Dans l'énoncé « Je suis absente tout l'après-midi », on distingue par exemple le temps de l'énonciation (quelques secondes) et le temps linguistique (plusieurs heures). Du point de vue sémantique, nous travaillons dans la lignée de « la construction dynamique du sens », cadre théorique initialement proposée par de Victorri et Fuchs (1996), en nous intéressant à la façon dont un terme prend son sens au sein d'un énoncé. Cette théorie considère que le sens d'une unité linguistique dans un énoncé donné est le résultat de l'interaction entre un apport sémantique constant associé à cette unité, *son noyau de sens*, et le contexte d'énonciation de cette unité. Par contexte d'énonciation, nous entendons aussi bien le co-texte, c'est-à-dire les autres unités linguistiques présentes dans l'énoncé que la situation extralinguistique dans laquelle cet énoncé est proféré. L'analyse subséquente consiste donc à repérer les termes sémantiquement marquants dans les énoncés et à mettre au jour les interactions qu'ils entretiennent avec le contexte.

Celles-ci sont de deux types : d'une part l'influence des autres unités linguistiques, y compris syntaxiques, présentes dans l'énoncé et d'autre part les phénomènes sémantiques présidant aux changements ou à la création de sens. Pour cela, l'attention est portée sur les relations lexicales, comme la synonymie et l'antonymie et les processus sémantiques de changement de sens comme la métonymie ou la paraphrase. Cette analyse sémantique a un double objectif :

- d'une part, caractériser *a priori* la polysémie des unités linguistiques en jeu (les différents sens possibles « hors énoncé » et les liens qu'ils entretiennent entre eux). Par exemple, dans la situation présentée ici, on s'intéresse particulièrement aux noyaux de sens et champs lexicaux des mots *symétrie* et *symétrique*. En particulier, dans une lignée vygotkienne, l'analyse des sens courants de ces mots est mise en relation avec les sens mathématiques dégagés par l'analyse logique et permet ainsi une analyse *a priori* plus complète et plus fine.

- et, d'autre part, mettre au jour les contraintes dans la construction du sens de cette unité au sein d'un énoncé (Venant 2008). On élargit ici le cadre d'étude, en repérant non seulement les unités relevant des champs lexicaux établis *a priori*, mais également les phénomènes de création de sens en contexte pouvant mener à une utilisation *a posteriori* d'unité lexicale issue de champs voisins. La langue est vivante et elle nous fournit aussi beaucoup de processus permettant de créer des nouveaux sens en contexte, toujours apparentés au noyau de sens mais s'en éloignant sensiblement. Ainsi, dans la séquence d'enseignement que nous avons observée, l'enseignante emploie le terme *coller* pour inviter les élèves à superposer des figures symétriques : « quand on les colle, on voit bien que les ailes en dessous dépassent ». Ce sens ne fait pas à proprement parler partie des sens prévisibles pour *coller* mais découle de l'interaction du contexte et du noyau de sens de ce verbe. L'analyse de la polysémie de *coller* permet par exemple de relever et d'analyser ce détournement de sens. Le phénomène utilisé relève de la métonymie, c'est-à-dire que l'enseignante désigne la totalité de l'action (retourner les figures puis les superposer) par le seul processus final (*coller* au sens de *plaquer*). L'émergence en contexte de ce sens inhabituel pour *coller* reflète, au sein du discours, l'émergence d'un nouveau Mode de Fréquentation de figure symétrique. Une dynamique sémantique est mise au jour : dans une phase précédente de l'activité, le mot *coller* est en effet employé aussi bien par les élèves que par l'enseignante, dans le sens cette fois de « rapprocher et joindre deux choses ensemble ». L'analyse de cette dynamique constitue un accès par le langage à la dynamique d'évolution des Modes de Fréquentation correspondants.

Cependant, puisque c'est l'activité langagière, et surtout son rôle dans la négociation des Modes de Fréquentation, qui nous intéressent, il convient de prendre en compte le fait « que les énoncés ne se présentent pas comme des phrases ou des suites de phrases mais comme des textes. Or un texte est un mode d'organisation spécifique qu'il faut étudier comme tel en le rapportant aux conditions dans lesquelles il est produit. Considérer la structure d'un texte en le rapportant à ses conditions de production, c'est l'envisager comme discours ». (Grawitz 1990). Bien qu'il n'y ait pas unanimité en linguistique autour de la notion de discours, notre ancrage dans la linguistique énonciative nous a naturellement mené vers les travaux de Kerbrat et Orecchienni (2005). Nous retenons de ces auteurs l'idée de nous appuyer sur la description linguistique pour dégager la dynamique et la structure du discours aussi bien d'un point de vue hiérarchique (décomposition en unités de discours et articulations de ces unités) que fonctionnelle (repérer les moments de négociation, caractériser les rôles joués par les locuteurs, dégager les thèmes et les moments de recomposition des objets de discours). Ce type d'analyse permet par exemple de repérer et de mieux comprendre les moments de formulation des consignes, les effets de sens produits par le déroulement même de l'interaction langagière, l'induction d'attente chez les apprenants ou encore la gestion de la subjectivité. Le but ultime

de l'analyse est ici de comprendre comment la dynamique langagière s'inscrit dans la double dynamique d'évolution et de transformation des Modes de Fréquentation et son rôle dans le processus d'inter-influence entre les trois dimensions (agir-parler-penser) qui en est le moteur.

Enfin, nous décrivons maintenant dans la partie 1.4, la dernière dimension de notre cadre d'analyse, celle d'une analyse métaphorico-conceptuelle des échanges langagiers se produisant grâce aux caractéristiques métaphoriques qui émergent des objets mathématiques (Barrera-Curin 2013 ; Nuñez & Margethis 2014).

1.4 Une approche métaphorico-conceptuelle des échanges langagiers

L'agir-parler-penser en tant qu'unité (Jaubert et al. 2012) permet de rendre compte de l'activité mathématique de l'élève et de l'enseignant au cœur d'une communauté scolaire au sein de laquelle leurs agir-parler-penser s'articulent dans la co-construction « d'un positionnement énonciatif attendu » (*Ib.* 2012). En conséquence, la prise en compte de cette unité inspire fortement une analyse des échanges verbaux concernant le langage parlé comme « outil de négociation » et la langue comme « réservoir intériorisé des signes partagés par une communauté » (*Ib.* 2012). De fait nos analyses didactiques préalables concernent des actions matérielles qui s'accompagnent souvent de l'analyse des dits échanges verbaux (Barrera-Curin 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal 2015).

Néanmoins, tel que nous l'avons précisé dans la section précédente, l'analyse des échanges verbaux ne suffit pas pour approcher la production de sens des objets de savoir ; elle mérite d'être articulée avec une analyse de langages, plus précisément, de formes de langage mettant en jeu des gestes, des éléments visuels ou encore des métaphores. Ce positionnement enrichit notre interprétation de cette unité qui est l'agir-parler-penser une figure symétrique et nous invite à observer le rôle médiateur résultant de l'articulation de différentes formes de langage lors de l'émergence, production, évolution ou transformation d'un Mode de Fréquentation tout au long du processus de conceptualisation. De ce fait et étant donné le contexte mathématique en question – la géométrie – et le contexte proposé par la situation proposée exploitant la relation entre *figure symétrique* et *un papillon* (situation que nous présentons en détails dans la section 2), nous affinons notre approche au cœur de laquelle le processus de conceptualisation subjacent à l'activité mathématique des élèves et de l'enseignant se produirait et évoluerait grâce à une articulation de différentes formes de langage (Cosnier 1982). De manière générale, l'intervention de différentes formes de langage ainsi que leur articulation seraient favorisées par les caractéristiques métaphoriques susceptibles d'émerger des objets mathématiques en jeu.

Nos travaux précédents s'intéressant au rôle de ces caractéristiques métaphoriques (Barrera-Curin 2009 ; 2013) – émergeant en interaction dans et par la manifestation

de différentes formes de langage –, rendent compte de comment l'émergence ou la production de métaphores participe au processus de conceptualisation et à l'articulation de différentes notions mathématiques et extra-mathématiques. En conséquence, nous postulons qu'une approche métaphorico-conceptuelle (Lakoff & Johnson 1980 ; Lakoff & Nuñez 2000) enrichit l'analyse des échanges langagiers se produisant au cœur des interactions entre élèves et enseignant.

Cette approche articule quelques-uns des éléments théoriques provenant de deux fondements épistémologiques différents :

- Premièrement, des éléments issus d'un cadre socioculturel et sémiotique (Vygotski 1934/1997 ; Bartolini Bussi & Mariotti 2008) où des signes – dont le langage oral, les gestes, les représentations, les artefacts... – constituent des chaînes sémiotiques (Presmeg 2002 ; Walkerdine 1990) rendant compte du caractère fonctionnel ou médiatique des langages dans le processus d'apprentissage des mathématiques. Dans ce cadre, l'analyse du processus de conceptualisation dépend essentiellement de l'analyse des moyens permettant de l'acquérir. Cette analyse implique nécessairement la prise en compte du contexte social et culturel dans lequel le processus générant l'activité mentale humaine se développe — et cela en ce qui concerne la production des objets de savoir — mais aussi en ce qui concerne le contexte situé et immédiat dans lequel élèves et enseignant rencontrent ces objets culturellement produits. Dans ce contexte, nous soulignons l'importance d'un travail collaboratif dans le processus de conceptualisation étant donné que l'activité cognitive est potentialisée grâce aux échanges entre des individus qui intentionnellement collaborent pour accomplir une tâche ou pour arriver au but visé (Bartolini Bussi & Mariotti 2008).

- Deuxièmement, des éléments issus d'un cadre cognitivo-linguistique, notamment de celui s'intéressant au phénomène appelé *conceptual metaphors* (Lakoff & Johnson 1980) étroitement lié à un processus de *embodied conceptualization* jouant un rôle fondamental dans le processus de conceptualisation en mathématiques (Nuñez & Marghetis 2014) :

Metaphors are not just rhetorical devices but powerful cognitive tools that help us to build or grasp new concepts, as well as solving problems in efficient and friendly ways (Soto-Andrade & Santander 2011, p. 736)

Dans ce cadre, la métaphore, en le disant de façon métaphorique, serait une flèche qui pointe d'un objet à un autre (Soto-Andrade 2006, p. 124). Elle opère donc un transfert de sens, d'un domaine, dit domaine source, à un autre, dit domaine cible. En suivant Lakoff et Johnson (1980), « l'essence d'une métaphore est qu'elle permet de comprendre quelque chose (et d'en faire l'expérience) en termes de quelque chose d'autre » (*Ib.* p. 151). Cela nous conduit à mettre en valeur l'existence de liens étroits entre les objets mathématiques, leurs propriétés, leur structure... et les

caractéristiques de ces objets pouvant émerger ou être produites de façon métaphorique et se manifester grâce à la mise en œuvre de différentes formes de langage.

Tous les éléments mentionnés ci-dessus et leur rapport aux langages se rencontrent au cœur du processus de médiation et à ses manifestations possibles tout au long du processus de conceptualisation en mathématiques (Chiu 2001 ; Kilhamn 2011 ; Lakoff & Nuñez 2000 ; Presmeg 1992).

Dans le contexte particulier de notre recherche, nous ajoutons aux éléments d'analyse *a priori* préalablement présentés, les possibilités d'articulation de différentes formes de langage – parlée, visuelle, gestuelle, métaphorique – et les possibilités de médiation qu'elles favorisent lorsqu'il est question d'agir-parler-penser l'objet mathématique en jeu, soit la symétrie, une transformation géométrique fortement présente dans la culture française. Au cœur de cette analyse nous mettons en relation des mondes différents pouvant être intra ou extra mathématiques et nous cherchons à déterminer ce que les formes de langage en question peuvent apporter en tant que médiateurs pour activer les objets mathématiques en jeu (Davis & Mowat 2010).

D'une part, l'articulation de différentes formes de langage au cours du processus de conceptualisation de figure symétrique peut s'accompagner de l'émergence ou de la production de métaphores associées aux transformations géométriques : verbaliser la mise en relation entre deux objets symétriques en termes de *retournement*, *réflexion*, *miroir*, *superposition*, *pliage*, *équilibre* ; exprimer ces mises en relation à l'aide de gestes et de mouvements pour éventuellement soutenir le langage parlé, *retourner la main*, *effectuer un effet miroir avec les deux mains*, *l'acte de pointer simultanément deux objets d'un côté et de l'autre d'une zone frontière*, *plier et déplier les mains*, etc. D'autre part, les caractéristiques métaphoriques qui émergent de l'objet *figure symétrique* favorisent la manifestation d'interprétations culturelles permettant de justifier l'existence d'une relation de symétrie entre deux objets : *les ailes d'un papillon doivent être symétriques pour que le papillon puisse voler*.

Bien que ces métaphores soient associées aux propriétés et à la structure des objets mathématiques, elles restent situées et susceptibles d'émerger, d'être produites ou encore d'être transformées au cours de l'évolution et de la confrontation des Modes de Fréquentations de figure symétrique.

En conséquence, lorsqu'il s'agira de l'analyse *a posteriori* du déroulement effectif de la situation, nous mettrons en lumière la contingence de l'émergence ou de la production des différentes formes de langage. Par exemple, lors des interactions, les manifestations des caractéristiques métaphoriques pouvant émerger des objets mathématiques peuvent implicitement être imposées par l'enseignant – considéré comme *expert* lors de l'utilisation de métaphores de par ses connaissances des objets

mathématiques en jeu –, lorsqu'il cherche à échafauder un nouveau langage théorique chez ses élèves (Sfard 1994 ; Lakoff & Johnson 1999 ; Roth & Lawless 2002).

En outre, les élèves – *novices* – et l'enseignant, pourraient, par exemple, évoquer les mêmes métaphores mais les utiliser de façons différentes. Pour les premiers, les métaphores seraient un point de référence pouvant intervenir lors de l'entrée dans un problème mathématique et aussi lors de la justification de leurs réponses. Pour les experts, les métaphores serviraient plutôt comme des échafaudages leur permettant de connecter des idées mathématiques différentes (Kilhamn 2011). Le travail des experts se situe ainsi dans un processus de mathématisation verticale (Hershkowitz & al. 1996) au cours duquel l'attention est dirigée des relations aux propriétés et des propriétés (*defining or generative properties*) aux caractéristiques des objets mathématiques (Mason 2008). En termes de Lakoff et Nuñez (2000), nous pourrions aussi parler de *grounding* ou *linking* métaphores.

Finalement, puisque les caractéristiques métaphoriques associées à la structure et aux propriétés des objets mathématiques peuvent favoriser l'émergence d'une forme de langage gestuelle, il nous semble intéressant d'observer l'éventuelle production d'un processus narratif qui coordonnerait cette forme de langage à la conceptualisation du concept mathématique en jeu (Roth & Lawless 2002). De ce fait, ces gestes métaphoriques, si nous reprenons les mots de Roth and Lawless (2002), seraient préalables à l'expression du langage théorique en jeu tout en l'enrichissant :

from this we conjecture that certain gestures literally embody abstract concepts in two ways. First, in their materiality, gestures enact topological features of a conceptual entity that does not exist in object form. Secondly, the body of the speaker produces the gesture, literally embodying a signifier for the concept. Consequently, while students construct verbal expressions of abstract concepts, gestures and perceptually available entities take on a complementary representational function that adds additional dimensions to communication above and beyond isolated utterances. As such, communication is best understood as being distributed over three different modalities, thereby easing cognitive demands and freeing resources for evolving new forms of theoretical language. (Roth & Lawless 2002 p. 299)

1.5 Synthèse du cadrage théorique

Pour résumer, nos positionnements théoriques (parties 1.1 à 1.4) nous amènent à concevoir l'apprentissage en classe de géométrie comme un double processus d'adaptation et d'acculturation. Nous caractérisons l'activité géométrique des élèves selon le triplet (agir-parler-penser) formant un tout indissociable. Nous avons choisi de construire un cadre d'analyse autour de l'outil Modes de Fréquentation en y ajoutant une dimension sémantique, discursive et métaphorico-conceptuelle

permettant une analyse plus fine de l'activité géométrique de l'élève en résolution de problème au plus près de nos préoccupations : Quelle dynamique d'émergence, d'évolution et de transformation des Modes de fréquentation de figure symétrique au cours de la situation proposée ? Quelle(s) articulation(s) et inter-influences entre les différentes dimensions agir-parler-penser dans un contexte de résolution de problème ? De façon plus concrète, tout au long de la situation mise en œuvre, nous cherchons – grâce à l'analyse de différentes formes de langage (parlée, gestuelle, *etc.*) – ce qui se joue, se construit et se transforme au cours des interactions entre élèves et enseignant.

Nous cherchons à mettre au jour et à caractériser les différentes phases du discours et les rôles joués par les différents interlocuteurs dans la situation observée. Étudier les manières de parler nous conduits à définir le langage parlé comme un lieu de signification et négociation (Jaubert & Rebière 2012), un lieu qui est enrichi, de façon permanente, par d'autres formes de langage. Nous proposons, en conséquence, une analyse transversale, prenant en compte toutes ces formes de langage et renforçant ainsi l'unité des trois dimensions considérées ; celle-ci se réalise au niveau langagier et inclue une analyse métaphorico-conceptuelle à partir des caractéristiques métaphoriques susceptibles d'émerger des objets mathématiques en jeu (Barrera-Curin 2013, Nuñez & Marguetis 2014). Ces caractéristiques peuvent, tel que nous l'avons déjà mentionné, échafauder la production du langage théorique visé chez les élèves (Sfard 1994 ; Roth & Lawless 2002) grâce à l'émergence, par exemple, des gestes ou des métaphores qui lui seraient préalables.

Notre méthodologie d'analyse se déroule en deux temps :

- une analyse *a priori* (partie 2) en termes de modes d'agir-parler-penser, enrichie d'une analyse lexico-sémantique (étude de la polysémie des mots par exemple) et métaphorico-conceptuelle ;
- une analyse *a posteriori* (partie 3) en termes de Modes de Fréquentation de figure symétrique, enrichie d'une analyse sémantique et discursive, et métaphorico-conceptuelle.

L'analyse *a priori* a pour objectif de nous donner des indices pour retrouver en contexte les manifestations effectives des façons d'agir-parler-penser un objet mathématique afin de nous permettre de décrire les inter-influences entre ces trois dimensions dans ce contexte de résolution de problème géométrique. Dans la section 3 de l'article, nous présentons les analyses de deux moments de la séance observée. Le premier moment (partie 3.1) porte sur l'émergence et la négociation d'un premier Mode de Fréquentation de figure symétrique et, le deuxième, sur la dynamique d'évolution vers un nouveau Mode de Fréquentation de cet objet mathématique, idoine et partagé (partie 3.2). Nous rendons ainsi compte de la dynamique

d'évolution et d'articulation de significations se produisant dans et par les langages tout au long de la séance.

2. Éléments d'analyse préalable et d'analyse *a priori* de la situation

La situation didactique qui a inspiré notre recherche a été expérimentée dans une classe de CE1 (élèves entre 7 et 8 ans) à Bordeaux et a pour objectif de provoquer la rencontre avec l'objet mathématique *figure symétrique*. Cette situation a été choisie par l'enseignante qui l'a empruntée à l'ouvrage de Fénichel, Pauvert et Pfaff (2004). Nos analyses portent sur deux des trois phases de la situation réalisées par l'enseignante et ses élèves pendant deux séances de 45 minutes. Nous précisons que nous n'avons ni proposé ni analysé la situation de façon préalable à sa mise en œuvre. Nous avons choisi d'analyser cette séance dite de « classe ordinaire » car elle s'est avérée intéressante et pertinente dans le cadre de notre recherche de par l'objet mathématique en jeu ainsi que par la richesse des échanges langagiers repérés *a posteriori* correspondant à ceux qui seraient susceptibles d'émerger dans toute séance de classe ordinaire. L'objectif général de la situation est d'approcher de manière perceptive (non instrumentée) le fait que la symétrie se définit par rapport à une droite (figure constituée de 2 parties et position de la droite par rapport à ces deux parties). Nous décrivons brièvement les enjeux de ces deux phases dans la partie 2.1. L'analyse *a priori* que nous proposons dans la partie 2.2 se veut conforme au positionnement théorique présenté dans la partie 1 et accorde donc une place essentielle à la manifestation de différentes formes de langage au cœur des modes d'agir-parler-penser des élèves et de l'enseignante.

2.1 Déroulement de la situation observée et premiers éléments d'analyse *a priori*

Phase 1 : des moitiés de papillon distinguables visuellement

L'enrôlement des élèves dans la séance observée se fait par une discussion collective à partir de l'affichage de deux photographies de papillons au tableau. Il s'agit de discuter simplement de leurs ressemblances et de leurs différences, et non pas de faire déjà émerger l'idée de symétrie. Chaque élève reçoit ensuite deux feuilles distinctes avec des moitiés de papillons distinguables visuellement (annexe 1) : les variables didactiques de cette première phase portent sur la forme des ailes et la longueur des corps des papillons. Tous les papillons sont inscrits dans des rectangles de mêmes dimensions, identifiés soit par un chiffre soit par une lettre. La tâche de l'élève consiste à retrouver perceptivement les deux moitiés constituant un même papillon et à noter les résultats dans un tableau (un modèle du tableau est laissé affiché, les élèves ont à leur charge de le recopier et de le compléter dans leur cahier de brouillon). Le fait de laisser les deux moitiés de papillon sur une même feuille, sans autoriser les élèves à découper ou à plier, aurait favorisé l'apparition de stratégies basées uniquement sur des critères visuels portant sur la forme et la taille,

or cela n'a pas été le choix de l'enseignant qui a préféré distribuer directement deux feuilles distinctes et a autorisé le recours aux ciseaux. La mise en commun s'organise alors à partir des propositions des élèves.

Phase 2 : des moitiés de papillon non distinguables visuellement

La deuxième phase de la situation (annexe 2) a pour but de mettre en évidence l'inefficacité des procédures visuelles permettant pourtant de réussir la tâche dans la phase 1. Les élèves reçoivent la moitié gauche d'un papillon et leur tâche consiste à retrouver parmi six moitiés droites laquelle permet de former le bon papillon. Cette fois, les valeurs des variables didactiques retenues ne permettent plus de discriminer visuellement les moitiés de papillon : les ailes ont une forme et une taille proches et les longueurs des corps des papillons semblent identiques. Une première mise en commun permet de mettre en échec les procédures purement visuelles et approximatives pour avancer vers l'utilisation de la transparence du papier comme le moyen permettant de rencontrer la procédure souhaitée de retournement puis de superposition.

Dans la section suivante, nous décrivons *a priori* des modes d'agir-parler-penser (selon la méthodologie décrite dans la partie 1) dans le contexte de cette situation, en fonction des connaissances géométriques des élèves à ce niveau scolaire.

2.2 Une analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser de figure symétrique

Conformément à ce que nous avons annoncé dans la partie 1, en prenant appui sur les travaux de Duval (2005) et plus généralement sur ceux du groupe de Lille ainsi que d'autres travaux portant sur la symétrie (déjà cités précédemment), nous considérons qu'il existe différentes conceptions de la symétrie qui n'impliquent pas la même vision de la figure en jeu (ici la figure est *un papillon*) et que la mobilisation de tel ou tel instrument relève d'une façon spécifique de voir la figure (et réciproquement). En outre, tel que Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013) le précisent, les rapports aux figures géométriques résultent des pratiques déjà produites dès l'école maternelle et peuvent trouver leur origine, par exemple, dans un travail avec des instruments mais aussi dans la reproduction de figures par assemblage, superposition ou juxtaposition. Ces rapports peuvent se produire bien plus tôt et évoluent puisqu'il y a toute une expérience sensible et donc un rapport intuitif et métaphorique au monde extra-scolaire que nous ne pouvons ignorer ici compte tenu du fait que la figure en jeu (un papillon) est empruntée à la vie réelle.

Nous pouvons décrire *a priori* des modes d'agir-parler-penser de figure symétrique, dans le contexte de la situation de classe observée :

- Un exemple de mode d'agir-parler-penser *a priori* (phase 1, annexe 1):

Dans le contexte de la phase 1 de la situation (annexe 1), *penser* une figure symétrique revient à porter un regard spécifique sur les figures en jeu, ici des moitiés de papillon, rendant compte d'un mode d'appréhension de la figure et des propriétés la constituant (Perrin et al. 2013). Nous pouvons reprendre l'exemple déjà cité dans la partie 1 qui consiste *en la mise en correspondance de sous-éléments correspondants (soit de dimension 2 si on considère des éléments de surface du papillon comme un bout d'ailes par exemple soit de dimension 1 si on considère des contours de surface délimitant un bout d'ailes par exemple ou encore les antennes) à partir de deux moitiés d'un même papillon, en fonction de critères visuels de forme ou de taille. L'élève se suffit de la perception pour attribuer des valeurs à ces critères de comparaison (éventuellement en juxtaposant les deux moitiés de papillon) dont la façon de parler dépend donc de cette façon de voir et d'agir (et réciproquement).*

Sans détailler l'intégralité de l'analyse lexicale des termes *symétrie* et *symétriques* telles que nous l'avons menée *a priori*, disons simplement qu'elle permet de dégager différents sens courants, pour *symétrie*. Celui d'entre eux, qui correspond le mieux au mode d'agir-parler-penser décrit ici peut être caractérisé, par exemple, par cette définition issue de TLFi : « En parlant d'objet animé ou inanimé : **Correspondance exacte** de forme, de grandeur, de position entre les éléments d'un même ensemble **de part et d'autre** d'un axe, un plan ou un point. ». C'est ce sens que l'on retrouve dans des expressions comme *la symétrie d'un visage* ou *d'un cristal* ou encore lorsque l'on parle d'objets *se faisant symétrie* (sur une cheminée par exemple). Ce sens également est caractérisé par les champs lexicaux de l'exactitude et de la similitude. On parlera ainsi de *belle symétrie*, de *symétrie parfaite* ou encore de *symétrie imparfaite*. Ce sens se construit en effet beaucoup par antagonisme avec l'antisymétrie, et ainsi que la définition le décrit, sur des critères de forme, de grandeur et de position.

En termes d'analyse *a priori*, on peut donc supposer qu'à ce stade de l'activité, les élèves sont encore fortement ancrés dans le langage courant, même si l'activité de comparaison qu'on leur demande de verbaliser s'inscrit plus dans le domaine mathématique (il est assez rare d'avoir à expliciter dans la vie courante pourquoi on ressent quelque chose comme relevant ou non de la symétrie). On s'attend donc à voir émerger dans le discours des élèves et de l'enseignante des comparaisons du type « *plus grand que / plus petit que* ». Cette analyse *a priori* prendra tout son intérêt *a posteriori* car permettra de pointer les décalages de sens en fonction des unités linguistiques repérées. En outre, pour faire le lien entre analyse lexicale et logique, on peut anticiper que les termes employés tout en relevant du langage courant rendront compte du fait que la relation de symétrie est conçue de façon binaire ou ternaire (selon que la zone frontière entre les deux moitiés de papillon est prise en compte dans le discours) et pourront donc prendre des formes telles que : « exactement pareil de chaque côté » « même forme » « même taille » ou renvoyer

directement à une relation de comparaison. Il s'agit ici d'une première approche vers la métaphore de l'*équilibre* pour exprimer ce qui serait symétrique. Les formes de langage exprimées par les élèves ou par l'enseignante, associées à l'émergence de cette métaphore – parlée, telle que mentionnée ci-dessus ou gestuelle, *l'acte de pointer simultanément deux objets d'un côté et de l'autre d'une zone frontière, effectuer un effet miroir avec les deux mains...* – viendraient agir comme des *médiateurs* articulant ainsi le mode d'agir-parler-penser décrit ici avec celui que nous présentons par la suite.

- Un autre exemple de mode d'agir-parler-penser *a priori* (phase 2, annexe 2):

Compte tenu du nouveau milieu, le mode d'agir-parler-penser décrit précédemment ne peut plus suffire *a priori* pour résoudre la tâche. On peut alors décrire un autre mode d'agir-parler-penser : celui-ci consiste cette fois à reconnaître une figure symétrique (autrement dit un papillon en entier) si et seulement si la moitié d'un papillon est superposable avec une autre moitié, considérée comme sa retournée. Cette façon d'agir ne consiste plus à tenir compte que de certains sous-éléments mais de **tous** les éléments de la figure qui sont mis en correspondance « totale » par cet acte de superposition (contrairement au précédent mode d'agir-parler-penser *a priori*). Il s'agit donc cette fois de prendre en compte tous les éléments de dimension 1D et 0D puis de vérifier que le tout, constituant donc une surface (de dimension 2D), forme bien un papillon. Cette mise en relation des éléments est définitivement ternaire car la superposition n'aura de sens que si celle-ci se fait le long de l'axe de symétrie (représenté ici par l'un des côtés du rectangle qui encadre les papillons).

Cette conception de la symétrie s'éloigne sensiblement des sens courants repérés par l'analyse lexicale. Il s'agit en fait d'une transition d'un concept courant vers un concept plus savant, plus abouti mathématiquement. On peut cependant imaginer que cette transition va s'appuyer sur un sens courant différent de celui décrit dans le précédent mode d'agir-parler-penser. La nécessité d'intégrer les deux moitiés symétriques en un tout passe par la mise en œuvre du sens premier de « symétrie » en tant que « Rapport harmonieux de grandeur, de forme, de position que les différentes parties d'un ensemble ont entre elles et avec leur tout ». L'avancée vers le concept savant se fera aussi par l'intégration au champ lexical de la symétrie de nouveaux mots comme « *superposer* » ou « *retourner* » peu impliqués dans les usages quotidiens. Dans ce contexte, des gestes faisant appel à une *réflexion* viendraient soutenir ou encore fonder le langage parlé des élèves ou de l'enseignante. Ces gestes – *retourner la main, plier et déplier les mains...* – seraient susceptibles d'émerger grâce aux caractéristiques structurales des objets mathématiques en jeu permettant de *se représenter ou de se créer une image métaphorique de la symétrie comme une transformation et du symétrique comme une superposition exacte*.

Tel que nous l'avons déjà mentionné dans la section précédente, les caractéristiques métaphoriques de l'objet figure symétrique viennent favoriser la manifestation

d'interprétations culturelles extra-mathématiques qui permettraient d'approcher une relation de symétrie entre deux objets (les métaphores traversent les frontières disciplinaires !). En conséquence, l'articulation de ces caractéristiques – équilibre, pli, réflexion... – favoriserait l'explicitation de mises en relation entre les papillons dessinés et les caractéristiques des ailes des papillons réels leur permettant de voler.

L'analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser de figure symétrique, nous donne ainsi des points de repères nous permettant d'identifier les mouvements de négociations et de transformations de significations du concept de figure symétrique au regard de ces trois dimensions, au cours de la résolution du problème posé. Autrement dit, nous sommes en mesure maintenant de repérer les différents composants des Modes de Fréquentation de figure symétrique au cours de la situation proposée et d'étudier leur dynamique d'évolution, ce qui est l'objet de la partie 3.

3. Dynamique d'évolution d'un Mode de Fréquentation de figure symétrique

Nous détaillons ici l'émergence et la négociation d'un premier Mode de Fréquentation de figure symétrique (durant la phase 1) pour ensuite nous attarder sur la dynamique d'évolution vers un nouveau Mode de Fréquentation de cet objet mathématique (durant la phase 2), témoignant ainsi de la construction et des négociations de significations se produisant tout au long de la séance.

3.1 Négociation d'un Mode de Fréquentation de figure symétrique

Au cours de la première phase de la situation (annexe 1), un premier Mode de Fréquentation de figure symétrique émerge. L'objectif de cette section et de le décrire et d'explicitier les mécanismes de sa co-construction et de son évolution. La tâche, rappelons-le consiste à appairer deux moitiés de papillon, l'une désignée par un chiffre, l'autre par une lettre. La co-construction du Mode de Fréquentation en question se produit dès la mise en correspondance d'une lettre avec un chiffre dans le tableau suggéré par l'enseignante. Le Mode de Fréquentation de figure symétrique que nous allons présenter et caractériser ici n'est pas le seul à émerger durant les phases de recherche individuelles ou de mise en commun, mais si nous avons choisi de nous attarder sur celui-ci c'est parce qu'il va être négocié et partagé avec les autres élèves et va servir de base pour la suite du travail (et donc la phase 2).

Lors de la première mise en commun, après la première phase de recherche de la phase 1, l'enseignante relève dans le discours, une situation problématique afin de montrer la nécessité de revenir sur l'agir :

89⁵ Ens. : tu as trouvé le C, bon... Alors apparemment [elle montre le tableau], là vous êtes d'accord à peu près tous sur ces lettres-là, d'accord sauf ici [elle pointe le cinq qui a été associé à B et à C] on sait pas trop... Alors, ben, comment vous avez fait, comment vous pouvez être surs que c'est bien la bonne moitié de papillon... [...]

97 Ens. : parce que j'aurais pu faire ça aussi [elle met la moitié cinq contre une autre moitié] et dire que c'était la bonne euh, j'aurais pu dire bon beh c'est bon ça ressemble à..., c'est un papillon, non ?

98 Élèves : oui...

99 Ens. : j'ai mis le cinq avec le A, et en fait c'est un c'est un bon, c'est le bon, moi je peux dire que c'est le bon, c'est un papillon, hein ? [des élèves demandent la parole, elle continue à parler sans s'interrompre]

En évoquant le faire dans le dire, elle revient explicitement sur la nature des objets de discours dont il est question : les moitiés de papillon et non plus les lettres et des chiffres qui ont servi jusqu'à présent à les désigner de façon métonymique. S'engage alors une négociation des critères de validation pour des nouveaux modes d'agir. L'enseignante pousse les élèves à changer de vision et à passer d'une vision perceptuelle globale (*c'est bon ça ressemble à...*, *c'est un papillon, non ?*) à une vision plus locale portant sur les contours de surface, les lignes. L'emploi du verbe faire (*comment vous avez fait ?*) centre le discours sur l'action et a pour but d'engager les élèves dans une verbalisation des procédures et critères qu'ils ont employés :

109 Yann : je sais, maitresse !

110 Ens. : qu'est-ce qui a la même forme ?

111 Él : les papillons et les lettres, non.

C'est la première fois dans la séance qu'apparaît explicitement le critère de *même forme*. L'enseignante porte discrètement l'emphase sur ce terme en le reprenant de façon interrogative (*qu'est-ce qui a la même forme ?*). Son but est de faire parler les élèves sur des critères portant non seulement sur la taille mais également sur la forme. On relève cependant une indétermination sémantique sur le mot *forme*. Le contexte trop réduit empêche de lever l'ambiguïté de l'expression *c'est la même forme*, beaucoup de sens sont possibles aussi bien pour *c'est* que pour *forme*. Nous observons d'ailleurs une interprétation possible donnée par un élève en ligne 111 qui propose son interprétation de *c'est* (il répond à la question *qu'est ce qui a la même forme*). Il donne à *c'est* un sens global dans le contexte général de la tâche et énumère les parties à mettre en correspondance. Chez lui, la métonymie est encore bien ancrée. Il y a d'une part les *papillons*, terme qui désigne les moitiés de papillon

⁵ Dans tous les extraits de verbatim, nous soulignons les éléments significatifs des échanges développés dans l'analyse.

repérées par un chiffre, et d'autre part les *lettres*, terme désignant les moitiés désignées par une lettre.

Un élève, Yann, demande alors à passer au tableau car il n'a pas d'autre moyen que de convoquer son mode d'agir pour décrire son mode de penser et le négocier avec la classe.

112 Ens. : lève la main... Yann ?

113 Yann : ben en fait, moi, bah, ce qui a la même forme c'est que, imaginons, (il se lève et vient au tableau) en fait c'est si on le met par exemple ce papillon, cette moitié de papillon avec la A (il met la moitié cinq contre une autre moitié pendant qu'il parle) je suis d'accord que ça fait bien un papillon.

114 Ens. : mais oui.

115 Yann : mais le seul problème, c'est que en fait c'est pas du tout le même dessin.

116 Ens. : c'est pas le même dessin. C'est-à-dire...

Yann développe l'idée qu'il ne suffit pas de travailler sur l'allure générale du papillon : *d'accord ça fait bien un papillon [...] mais c'est pas du tout le même dessin*. La reformulation de *même forme* (ligne 113) en *même dessin* (ligne 116) correspond à un glissement discursif de l'objet papillon vers sa représentation 2D. Cela met en évidence le fait que les objets mathématiques peuvent faire émerger dans le discours la structure d'expériences physiques, corporelles et perceptuelles dont ils héritent (Nuñez & Marguetis 2014) et qui se manifestent en tant que *médiatrices* lors de la production sociale de l'objet mathématique en jeu.

La négociation de « nouveaux » critères de comparaison s'appuie sur un Mode de Fréquentation précédemment accepté, mettant en jeu des critères de taille et de forme. Yann reprend par exemple la comparaison des tailles (*c'est plus grande*) pour avancer dans son discours et raffiner ce critère en *exactement les mêmes*. Cette précision d'ordre lexical traduit un changement dans l'agir, puisqu'il s'agit désormais de réaliser une comparaison *en tout élément* de la partie considérée (ici les ailes et les antennes) :

117 Yann : et bien, [il montre des parties du dessin] elle déjà c'est plus grande voilà et puis elles ont pas les mêmes antennes. Alors moi j'ai barré [il fait le geste de barrer la moitié 5].

118 Ens. : oui...

119 Yann : à chaque fois j'ai essayé. Et à un moment je suis tombé sur le 5 [il remet ensemble les moitiés A et 5]. Je l'ai fait et là j'ai vu que c'était exactement les mêmes antennes, exactement les mêmes ailes [il montre en même temps sur le dessin] et j'ai dit c'est là.

120 Ens. : d'accord, c'est les mêmes antennes et les mêmes ailes où ?

121 Yann : euh, ici par exemple, c'est les mêmes antennes [il passe plusieurs fois son doigt sur chaque antenne] et là ben il a les mêmes ailes parce que là, y a ça [il passe son doigt sur une partie de l'aile] mais aussi au moment, je pense qu'avec certains peut-être qu'ils sont tombés dans le piège du numéro 2.

De nombreux déictiques accompagnent cette nouvelle façon de parler, ainsi que des gestes symétriques par rapport à la zone où sont collées les deux moitiés de papillon. Ces gestes décrivent une nouvelle façon d'agir qui prend en compte des éléments très locaux se correspondant exactement d'un côté et de l'autre. La relation ternaire est *incorporée* : l'axe de symétrie est pris en compte dans les gestes puisqu'il marque la zone de séparation des deux côtés considérés mais sa désignation n'est pas encore effective dans le langage oral. Le mode d'agir de Yann débouche sur un enrichissement lexical (*exactement*) traduisant une nouvelle façon de penser les figures symétriques. Il s'agit désormais de la mise en relation de deux objets de dimension 1D ou 0D par rapport à une zone frontière définie. Nous observons ainsi une intrication très forte entre les dimensions agir, parler et penser, débouchant sur l'émergence et la négociation d'un Mode de Fréquentation de figure symétrique médié par des nouvelles structures d'expériences physiques, corporelles, perceptuelles et langagières. En résumé, ce premier Mode de Fréquentation peut être caractérisé de la manière suivante : *deux figures séparées et juxtaposées par l'action de découpage ou de pliage par rapport à l'un des côtés des rectangles mis bord à bord. Il s'agit d'une comparaison visuelle, voire gestuelle en les pointant du doigt, de sous-éléments de surface (1D ou 0D) correspondants par des critères portant sur la forme et la taille que l'on met en relation (relation binaire ou ternaire incorporée) par rapport à une zone (d'un côté et de l'autre). Les manières de parler rendent compte de cette relation : même forme, plus grande..., exactement les mêmes ailes, exactement les mêmes antennes, etc.*

Ce Mode de Fréquentation de figure symétrique a été négocié et adopté par l'ensemble des élèves de la classe. Il est cependant destiné à évoluer tout au long de la séance pour finalement inclure la notion de superposition qui est l'objectif de la séance. Dans la section suivante, nous cherchons à caractériser cette dynamique d'évolution toujours selon les trois dimensions agir-parler-penser caractérisant l'activité géométrique des élèves.

3.2 Vers un autre Mode de Fréquentation de figure symétrique stabilisé

Un moment fort de cette dynamique correspond au passage à la phase 2 de la situation (annexe 2). L'enseignante propose la nouvelle tâche et la décrit oralement :

242-244 Ens. : donc je vais vous distribuer un pauvre papillon qui a perdu sa moitié [elle montre la moitié à la classe] on n'a donc qu'un demi papillon, qu'une moitié de papillon et il va falloir retrouver... la moitié // Il va falloir retrouver d'accord parmi toutes ces moitiés [elle montre et c'est sur une autre feuille] il va falloir

trouver celle qui / y en a qu'une celle qui va avec cette moitié /// Donc je répète je vais d'abord vous donner une moitié de papillon, il va falloir retrouver la bonne moitié qui va avec cette moitié.

Le milieu a changé mais reste dans le contexte des papillons. Il est maintenant composé d'une moitié gauche et de six moitiés droites possibles qui se ressemblent de façon globale et locale. Le Mode de Fréquentation de figure symétrique construit et partagé dans la tâche précédente va être mis en défaut car il ne peut plus suffire *a priori* pour résoudre cette nouvelle tâche. Il va donc être intéressant de voir comment *le agir* et *le parler* s'inter-influencent grâce à l'articulation de différentes formes de langage afin de pouvoir produire une (nouvelle) manière partagée d'agir-parler-penser de figure symétrique dans ce nouveau contexte (et milieu).

Confrontation de résultats divergents

On relève tout d'abord une première rétroaction perceptive d'un élève. Elle ne sera ni reprise ni relancée mais suggère un problème à venir :

250 El : là c'est tous les mêmes.

En effet si ce sont tous les mêmes comment les différencier en appliquant les critères de forme et de taille précédemment négociés ? Cette première rétroaction n'est pas suffisante mais elle permet aux élèves de s'engager dans la résolution de la tâche. Aussi le Mode de Fréquentation actuel de figure symétrique permet-il de résoudre la tâche de façon individuelle mais ne permet pas de départager les différentes réponses. Ce qui pose problème c'est la confrontation de tous les résultats divergents. Cette confrontation se fait dans le langage parlé :

254 à 263 Él. : c'est le F

Él. : non

Él. : si c'est le F

Él. : t'as vu

Él. : c'est le C, le C !

Él. : montre

Él. : le A

Él. : le E

Él. : le F

Él : non c'est pas le F [face caméra : l'élève a découpé la moitié de papillon et l'a mise à côté des autres moitiés des autres papillons, semble tester une à une les moitiés]

Él. : c'est le E

Él. : le F

Él. : le E

Él. : le A

Ens. : là vous êtes un peu moins sûrs quand même

À ce stade, les élèves partagent un même Mode de Fréquentation de figure symétrique, il s'agit pourtant de le remettre en cause puisqu'il ne permet pas de se mettre d'accord sur la bonne réponse. Leur moyen d'argumenter consiste à mobiliser les mêmes modes d'agir et de parler que précédemment : couper le long du bord rectangulaire, juxtaposer et comparer localement par rapport à des critères de forme et de taille (mise en relation de deux éléments locaux par rapport à une zone) afin que ce soit exactement pareil.

278 Él1. : [à la camera] parce que le E, tu vois là [elle suit du doigt le contour de l'aile du papillon C puis fait le même geste plus rapide sur la moitié de départ], ça va être comme ça et le F c'est plus petit [elle juxtapose la moitié du papillon sur la moitié F] là c'est plus petit

279 Él2. : [à la camera] c'est pas parce qu'elle est petite, c'est parce que là [pointe du doigt], c'est rond et puis là c'est droit [compare la moitié de départ avec la moitié F] c'est plus droit que ici [et montre la moitié F] c'est plus droit que ici

Les lignes 278 et 279 montrent à la fois comment évoluent les Modes de Fréquentation et le fait que cette évolution n'est pas simultanée. En effet, le premier élève a compris qu'il faut désormais raisonner sur des éléments plus locaux que des ailes ou des antennes. Ses critères sont encore en évolution. Il mêle des critères de forme (*comme ça*) et des critères de taille (*là c'est plus petit*). Le second est plus avancé dans son évolution. Il a compris que la taille n'est plus pertinente dans ce contexte pour comparer les éléments (*c'est pas parce qu'elle est plus petite*), mais qu'il faut travailler sur la forme (*c'est plus rond*). Bien que son vocabulaire soit plus précis (*rond, droit* au lieu de *c'est comme ça*), il est incapable, tout comme son camarade, de désigner les éléments à comparer. Les deux élèves recourent donc à des déictiques et des gestes (*ça, là, c'est, ici*).

On se demande alors : qu'est-ce qui va faire avancer/changer/transformer les choses ?

Remise en cause du précédent Mode de Fréquentation de figure symétrique

C'est l'enseignante qui va, dans et par une articulation de formes de langage (parlée et gestuelle), mettre en défaut le Mode de Fréquentation actuel de figure symétrique en tant que moyen de contrôle. Elle cherche à engager les élèves dans une verbalisation différente de celle de la première phase. Il ne s'agit plus comme précédemment de décrire un mode d'action (*Comment vous avez fait ?*) mais d'élaborer des critères de validation (*Comment être sûr ?*).

301 Ens. : d'accord, sauf que... attends deux secondes... tout à l'heure quand on mettait nos moitiés de papillon... [elle fait en même temps le geste avec ces mains en les retournant et en les mettant ensemble] [...] on voyait bien que, ce pauvre papillon, il a l'air d'avoir du mal à voler, d'accord ? Alors que là finalement, si on met, si on décide de, pourquoi pas de mettre, d'accord, notre moitié avec la F, bon, c'est peut-être un petit peu plus rond mais en tout cas notre papillon, bah il pourrait arriver quand même... Ça nous fait un papillon... [des élèves lèvent la main...] alors comment être sûr que c'est bien celui là / ? Comment être sûr que c'est bien ces moitiés ? [Plusieurs élèves lèvent la main] Parce que c'est quand même moins visible que tout à l'heure, on n'est pas très sûr...

Cette mise en défaut du précédent Mode de Fréquentation passe, dans le discours, par l'installation progressive d'un doute, très marqué lexicalement par les expressions *pas sûr, avoir l'impression, moins visible*. L'enseignante appuie son propos sur une autre métaphore qui émerge du concept de « symétrie ». Ses gestes mettent en évidence le fait que la symétrie est une transformation (réflexion) : *elle fait en même temps le geste avec ses mains en les retournant et en les mettant ensemble*. Cette métaphore – implicitement évoquée par les gestes de l'enseignante – cherche à influencer le discours des élèves pour coordonner la suite de leur communication. L'enseignante impose ainsi, par ses gestes, une caractéristique métaphorique qui émerge de l'objet mathématique en jeu – *la symétrie est une réflexion, la symétrie d'une figure résulte d'une réflexion* – lorsqu'elle cherche à introduire ou à échafauder comme le dirait Sfard (1994), un nouveau langage théorique chez ses élèves. En d'autres mots, il s'agit d'introduire une nouvelle manière de *fréquenter* une figure symétrique.

En outre, le fait que la pensée commune ignore les frontières disciplinaires – que les métaphores traversent facilement (Soto-Andrade 2006) (Rouche 2006) – influence spontanément les gestes de l'enseignante (experte), la conduisant à évoquer une métaphore inversée (*il a l'air d'avoir du mal à voler*) mettant en relation les propriétés mathématiques des figures symétriques avec des caractéristiques culturellement reconnues du papillon *réel* qui peut voler puisque ses ailes possèdent « exactement les mêmes caractéristiques ». En d'autres mots, la capacité du papillon à voler repose sur le fait d'avoir une paire d'ailes identiques. L'enseignante cherche ainsi à souligner, de façon implicite qu'un contrôle visuel sur l'ensemble du papillon ne suffit plus. La métaphore du vol lui sert à expliciter son propos (*parce que tout à l'heure le papillon quand on le formait si c'était pas le bon il volait pas*). Le critère d'exactitude des formes sur des ailes de même taille est difficile à vérifier de façon globale (*on a l'impression que c'est pas la même forme*). Les élèves novices, aussi bien en matière de symétrie que de métaphore, ne réussissent pas à la suivre ; ils ne peuvent pas accéder à cette articulation entre ces deux *mondes* puisqu'ils ne se sont pas encore appropriés les propriétés des figures symétriques déjà appropriées par l'enseignante. Cela oblige l'enseignante à reformuler son propos de façon explicite

(*c'est moins visible que tout à l'heure*). La référence temporelle vient insister sur le fait que le milieu a changé et qu'il faut donc s'adapter.

308 Ens. : ... alors Anna nous dit que, c'est ce qu'on a dit tout à l'heure, alors on a dit qu'il faut que ce soit la même taille et la même forme, d'accord, Oussine nous a parlé de la forme, Anna elle nous parle de la taille, il faut que ce soit la même forme et la même taille. Comment on pourrait vérifier maintenant, comment on peut être sûr...

Les élèves sont moins à l'aise pour réaliser dans l'agir et dans le dire la tâche demandée. En effet, cela se traduit par un changement de mode discursif chez l'enseignante. Elle passe d'un discours interactionnel, avec une fonction négociatrice du langage à un discours didactique entièrement à sa charge. Les rôles discursifs sont modifiés. Les élèves étaient jusqu'à présent des interlocuteurs dans une conversation animée et modérée par l'enseignante. L'enseignante devient maintenant l'oratrice principale et elle donne au langage parlé une fonction plus illocutoire, c'est-à-dire destinée à faire agir les élèves. Elle veut en effet les amener à trouver un nouveau moyen de contrôle et initie en cela une évolution du Mode de Fréquentation de figure symétrique selon les trois dimensions :

- au niveau du *parler*, elle commence par consolider les acquis lexicaux de la phase 1, c'est-à-dire les mots *taille* et *forme*. Elle utilise pour cela un procédé sémantique consistant à donner aux élèves la paternité de ce vocabulaire : *Oussine nous a parlé de la forme*, *Anna elle nous parle de la taille*. Les élèves n'ont de fait jamais prononcé ces mots (ils ont parlé de *plus petit*, *plus rond* ou *comme ça*) qui ont été introduits par l'enseignante. Ce procédé sémantique lui permet de faire entrer ce nouveau vocabulaire dans la communauté discursive de la classe. C'est aussi une façon de souligner que le vocabulaire pour parler de la symétrie est acquis et que l'enjeu de la tâche se situe dans une autre dimension.

- au niveau du *penser*, la réintroduction du mot *papillon* qui avait été éludé aussi bien par les élèves que par l'enseignante dans la phase précédente, marque un changement d'objet fréquenté. On a travaillé jusqu'à présent sur le maniement des moitiés de papillon à mettre en correspondance, les désignant la plupart du temps par leurs symboles (*on va mettre le A avec le 3*). Ce retour au mot *papillon* est le marqueur lexical du fait que l'on va désormais penser les figures symétriques comme formant un tout.

- ce changement dans le *penser* à des répercussions au niveau de l'*agir*, puisque pour valider que deux moitiés de papillon forment un tout, on ne peut plus procéder de façon visuelle et locale comme précédemment (*c'est quand même moins visible que tout à l'heure*). On cherche désormais à savoir, à être sûr que deux moitiés sont symétriques et on part donc à la recherche d'un nouveau moyen d'action sur lequel faire reposer cette validation.

L'enseignante provoque ainsi l'émergence d'un nouveau moyen d'agir unifiant les Modes de Fréquentation précédemment rencontrés. Elle les récapitule dans un premier temps (*Oussine il nous a parlé de la forme, Anna elle nous parle de la taille*) avant de les unifier (*il faut que ce soit la même forme et la même taille*). Elle fait dans le même temps évoluer le mode de rétroaction. On a focalisé sur ce qui permettait de dire que deux moitiés de papillon ne se correspondaient pas, maintenant on part à la recherche d'un mode de vérification d'un bon appariement (*Comment on peut être sûrs ?*). Le domaine de validité du précédent Mode de Fréquentation ne nécessitait pas ce degré de précision, or, dans ce nouveau milieu, ces moyens d'agir sur la figure (mise en relation de deux sous-éléments de la figure) ne suffisaient plus.

309 Ens. : parce que tout à l'heure le papillon quand on le formait si c'était pas le bon il volait pas, celui-là on a l'impression parce que c'est pas la même forme, mais comment on pourrait faire ? [Anna précise que c'est la même forme dans ce cas-ci]

310 Ens. : oui, c'est la même forme, c'est ce qu'on a dit. Lisa?

311 Lisa : on découpe les ailes...

Il faut donc trouver un nouveau moyen d'agir qui prenne en charge ce degré de précision (nouveaux moyens de contrôle). Toutefois ce nouveau moyen d'agir a du mal à émerger et n'apparaît pas spontanément chez les élèves. L'enseignante les amène alors de façon artificielle à adopter la façon d'agir d'un élève.

317 Ens. : Alors, regarde ce qu'elle a fait Lisa, elle a posé une moitié du papillon sur l'autre moitié et elle a regardé si ça allait exactement, en soulevant si ça se posait exactement sur l'autre [elle manipule, superpose les deux petits moitiés de papillons] si les traits étaient exactement au même endroit dessous. Essayez de faire ça... si ça nous permet de voir si c'est la bonne moitié.

Il s'agit cette fois de mettre en relation tous les éléments de la figure (1D et 0D) dans une relation de superposition (*ça se posait exactement*), afin de valider le tout (2D) ainsi formé (*C'est la bonne moitié*). On voit bien ici le jeu de déconstruction-reconstruction des éléments de la figure ($2D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 0D$, autrement dit des allers-retours entre les unités figurales de différentes dimensions) et leur nouvelle mise en relation qui nécessite une nouvelle façon d'agir dessus : *tourner, retourner, poser exactement l'un sur l'autre, superposer*.

340 Ens : on regarde les traits, d'accord ? S'ils vont, s'ils se... alors on appelle ça se superpose, c'est-à-dire si les traits se posent exactement sur les autres, d'accord ? Et pour bien voir qu'est-ce qu'on pourrait faire ? On pourrait regarder...

341 Ens : on voit bien que si on le colle, on voit bien que, chut ! on voit bien que les ailes en dessous elles dépassent d'accord, donc on, écoutez bien, pour que ce soit, d'accord, la bonne moitié il fallait on dit que ça se superpose, c'est à dire que ça se pose exactement dessus et qu'il n'y ait rien qui dépasse. D'accord.

Ainsi les différents éléments des précédents Modes de Fréquentation de figure symétrique ont-ils servi de points d'appui, d'échafaudage pour l'émergence et la construction d'un nouveau Mode de Fréquentation de figure symétrique pour résoudre cette tâche. En résumé, ce nouveau Mode de Fréquentation se caractérise de la façon suivante : *il s'agit de superposer une figure et sa retournée en contrôlant par rapport au bord du rectangle (l'axe de symétrie est considéré en acte) et de faire correspondre par cette relation de superposition (relation ternaire) tous les sous-éléments de la figure ($2D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 0D$). La façon d'en parler évolue et les termes de superposer, (re)tourner, tous les traits, exactement, dessus, dessous accompagnent ces façons d'agir (et de penser) ; on ne parle plus de forme ou de taille car ces éléments caractéristiques sont englobés par l'idée plus générale de « tous les éléments » qui se superposent.*

Conclusion

Notre recherche émerge d'un intérêt partagé autour de l'articulation de différentes formes de langage au cours du processus de co-construction de connaissances géométriques à l'école. L'élaboration d'un cadre d'analyse commun constitue l'un des premiers apports substantiels de cette recherche. En effet notre cadre d'analyse résulte d'une approche originale qui articule des outils didactiques, linguistiques et métaphorico-conceptuels. La mise en relation de différents cadres théoriques issus de différents champs disciplinaires est parfois jugée incompatible d'un point de vue épistémologique, comme ici concilier langue et langage, ou encore les points de vue individuel et social de l'apprentissage ; dans cet article nous avons essayé de mettre en évidence la richesse d'analyse qu'apporte justement ce type de décloisonnement théorique. Notre méthodologie d'analyse repose alors sur la confrontation d'une analyse *a priori* (en termes d'agir-parler-penser une figure symétrique enrichie d'une analyse lexico-sémantique et métaphorico-conceptuelle) et *a posteriori* (en termes de Modes de Fréquentation d'une figure symétrique enrichie d'une analyse sémantique et discursive et métaphorico-conceptuelle) dont nous avons largement décrit la spécificité et la complexité des rouages dans cet article.

Nos questions de recherche portent sur la dynamique d'émergence, d'évolution et de transformation des Modes de Fréquentation de figure symétrique au cours d'une situation d'enseignement de la symétrie axiale dans un contexte emprunté à la vie réelle (celui des papillons). Notre objectif est de décrire le plus finement possible les relations d'inter-influences entre les différentes dimensions que nous accordons à l'activité mathématique d'un élève (autrement dit selon les trois dimensions : agir-parler-penser) en résolution de problème, grâce à l'analyse des différentes formes de langage reconnues : orale, gestuelle et visuelle. Notre positionnement théorique articule une composante sociale, médiée entre autres par des échanges langagiers, aux processus de construction d'objets mathématiques par la confrontation des élèves à un milieu didactique. En conséquence, tout au long de la situation analysée

et au cœur des interactions entre élèves et enseignante, nous cherchons à mettre au jour ce qui se joue, se co-construit, se produit et se transforme dans et par la mise en œuvre de différentes formes de langage. Plus particulièrement, déjà *a priori*, nos analyses didactiques enrichies par les apports des analyses linguistiques et métaphorico-conceptuelles mettent en évidence la pluralité du champ des possibles quant aux façons de parler, et leur relation avec les façons d'agir, au delà de l'adaptation au milieu. Cela constitue un apport essentiel de notre travail et nous conduit à prendre en compte, aussi bien théoriquement qu'expérimentalement, les moyens langagiers, linguistiques et procéduraux qui participent à l'émergence et à la production de nouvelles connaissances chez des élèves de première année du primaire. Dans ce contexte, le regard que nous portons *a posteriori*, sans hiérarchie ni sur les formes de langage manifestées ni sur la tâche réalisée, nous a permis de décrire finement à travers les manifestations effectives des modes d'*agir-parler-penser* en situation, l'activité mathématique des élèves en lien avec celle de l'enseignante.

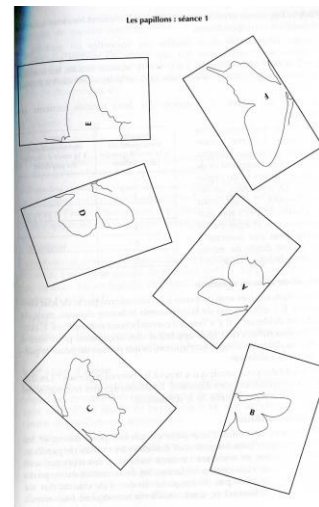
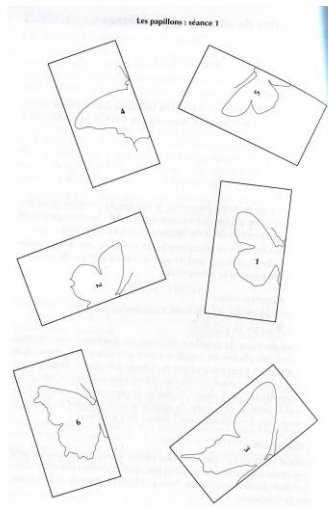
Plus précisément, notre approche met en évidence que l'analyse sémantique et l'analyse des caractéristiques métaphoriques se manifestant sous différentes formes de langage, aussi bien orale que gestuelle, renforcent la finesse de l'analyse logique, angle d'analyse qui fonde l'unité entre les différentes dimensions qui caractérisent les Modes de Fréquentations d'une figure symétrique. Par exemple, lors de la première phase de la situation, nos analyses décrivent comment les différentes façons d'*agir-parler-penser* s'inter-influencent pour converger vers un Mode de Fréquentation de figure symétrique partagé : *une figure est symétrique si deux sous-figures distinctes (2D) sont juxtaposées et/ou si des sous-éléments significatifs (1D ou 0D) sont mis en relation par des critères portant sur la forme ou la taille (relation binaire ou ternaire incorporée par des gestes). Les mots exactement et côté sont significatifs de cette mise en relation, de même que les termes : mêmes ailes ou antennes ou plus grande que/plus petite que, etc.*

Nous observons également comment les différents éléments propres à la manifestation des premiers Modes de Fréquentation de figure symétrique servent d'échafaudage pour la co-construction d'un nouveau Mode de Fréquentation, celui-ci se manifestant lorsque les élèves sont confrontés à la résolution d'une nouvelle tâche (et à un nouveau milieu) dans la deuxième phase de la situation. Des nouvelles façons de *parler* et d'*agir* sont, de façon concomitante, négociées dans et par la mise en œuvre de différentes formes de langage, et participent de la construction d'un nouveau Mode de Fréquentation de figure symétrique idoine (retournement puis superposition de l'une des moitiés de papillon).

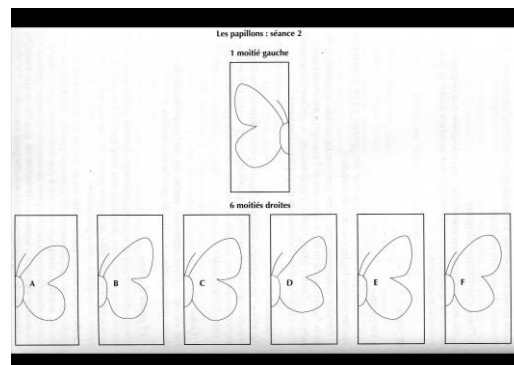
Ainsi, comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, un des points forts de nos analyses est de mettre en lumière l'intrication forte, sans lien de subordination, entre les caractéristiques de la situation (le caractère adidactique de la situation), les

caractéristiques métaphoriques des concepts géométriques et les jeux de langages et de la langue. C'est sur cette intrication que repose le rôle de médiation de l'enseignante et celui des processus de négociation, permettant ainsi l'évolution des Modes de Fréquentation autour de l'objet mathématique en question. Nos analyses, en plus d'aborder sous un jour nouveau des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage dans un contexte de résolution de problème géométrique, ouvrent également d'autres perspectives de recherche. Le caractère spécifique et complexe de la géométrie influence fortement la nature de nos résultats : qu'en est-il dans un autre contexte que celui de la géométrie ? De même nous accordons un rôle essentiel aux caractéristiques sociales et culturelles dans l'étude des phénomènes observés : qu'en est-il dans un autre contexte culturel ? Nous avons d'ores et déjà commencé à explorer cette dernière question en comparant le déroulement de cette situation dans deux contextes différents : celui que nous venons décrire dans cet article, en France, avec celui d'une classe québécoise (Barrera-Curin, Bulf et Venant à venir). Les premiers résultats obtenus sont très encourageants et nous confortent sur la pertinence de ce que nous avons appelé précédemment le décroisement théorique de nos outils d'analyse. Nous poursuivons nos recherches afin d'approfondir, d'une part, l'étude des processus de médiation mis en œuvre dans et par le langage sous toutes ses formes, au cours de la co-construction d'un savoir mathématique et, d'autre part, l'influence du contexte culturel.

Annexe 1 : Extraits des supports (échelle non respectée) de la première phase de la situation (Fénichel & Al. 2004 pp.139-142)



Annexe 2 : Extraits des supports (échelle non respectée) de la seconde phase de la situation (Fénichel & Al. 2004 pp.139-142)



Bibliographie

- BARRERA CURIN R. I. (2009), Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique, *Petit x*, **85**, 5-26.
- BARRERA CURIN R. I. (2013), *Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).
- BARRERA CURIN R. I., BULF C. & VENANT F. (à venir), France-Québec comparaison on language practices in geometry class in primary school, *Proceeding of 13th International Congress on Mathematical Education (ICME) Hamburg, 24-31 July 2016*.
- BARRIER T., CHESNAIS A. & HACHE C. (2014), Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – Revue de Recherches en Education* **54**, 175-193.
- BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.-C. (2014), Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N* **93**, 13 – 37.
- BARRIER T. & MATHÉ A.-C. (2014) (Coord.), Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques, *Spirale, revue de recherches en éducation*, **54**.
- BARTOLINI BUSSI M. G. & MARIOTI A. (2008), Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed), *Handbook of international research in mathematics education* (2è éd). New York and London: Routledge.
- BENVENISTE E. (1974), *Problèmes de linguistique générale II*, Paris : Gallimard.
- BERNIÉ J.-P. (2002), L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?, *Revue Française de Pédagogie* **141**, 77 – 88.
- BESSOT A. (2011), *L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations*. In : C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 29 – 56.
- BRONNER A., BULF C., CASTELA C., GEORGET J.-P, LARGUIER M., PEDEMONTE B., PRESSIAT A. & RODITI E. (Coord) (2013), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BULF C. (2008), *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

BULF C., MARCHINI C. & VIGHI P. (2013) Le triangle-Acrobate : un jeu géométrique sur les isométries en CE1 : intérêt et limites, *Grand N* **91**, 43-70.

BULF C., MATHE A.-C. & MITHALAL J. (2015), Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **35.1**, 7-36.

BULF C., MATHE A.-C. & MITHALAL J. (2014), Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education* **54**, 29-48.

CHESNAIS A. (2009), *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

CHIU M. (2001), Using Metaphors to Understand and Solve Arithmetic Problems: Novices and Experts Working With Negative Numbers, *Mathematical Thinking and Learning* **3(2-3)**, 93 – 124.

COSNIER J. (1982), *Communications et langages gestuels*. In Cosnier, Coulon, Berrendonner, Orecchioni (Ed.), *Les voies du langage, communications verbales, gestuelles et animales*, Paris : Dunod, 255 – 304.

CULIOLI A., (1983-1984), *Transcription du séminaire de DEA*, Paris VII, DRL et Poitiers.

DAVIS B. & MOWAT E. (2010), Interpreting Embodied Mathematics Using Network Theory : Implications for Mathematics Education, *Complicity : An International Journal of Complexity and Education* **7-1**, 1 – 31.

DUCROT O. (1972), *Dire et ne pas dire. Principes de sémantique linguistique*, Paris : Hermann.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **10**, 5 – 53.

FÉNICHEL M., PAUVERT M. & PFAFF N. (2004), *Donner du sens aux mathématiques, Tome 1, Espace et géométrie*. Paris : Bordas.

GORLIER S. (1981), Deux activités à l'école maternelle sur le temps et l'espace, *Grand N* **23**, 53-61.

- GRAWITZ M. (1990), *Méthode des sciences sociales*. Paris : Éditions Dalloz.
- GRELIER J.-F. (2013), *Apprentissages géométriques* : <http://www.apprentissages-geometriques.com/> consulté le 26 Juin 2015.
- GRENIER D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*, thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1 (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).
- HACHE C. (2013), Langage mathématique à la transition primaire/collège. Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève, *Arpeme*, 452 – 463.
- HERSHKOWITZ R., PARZYSZ B. & VAN DOR MOLEN J. (1996), Space and Shape. In Bishop et al. (eds), *International handbook of mathematics education I*, Rotterdam : Kluwer, 161 – 204.
- JAUBERT M. & REBIÈRE M. (2012), *Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative*. In : forumlecture. ch, Plate-forme internet sur la littéracie. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf (consulté le 06 Juin 2015)
- JACOBSON R. (1957), *Shifters, Verbal Categories and the Russian Verb*. Cambridge : Mass.
- JACQUET G., VENANT F. & VICTORRI B. (2005), Polysémie lexicale. In Sémantique et traitement automatique du langage naturel. Hermès, 99 – 132.
- KELLER O. (2004), *Aux origines de la géométrie : le paléolithique et le monde des chasseurs cueilleurs*, Paris : Vuibert.
- KELLER O. (2006), *Une archéologie de la géométrie : la figure et le monde : peuples paysans sans écriture et premières civilisations*, Paris : Vuibert.
- KERBRAT-ORECCHIONI C. (2005), *Le discours en interaction*. Paris : Armand Colin.
- KIERAN C., FORMAN E. & SFARD A. (2001), Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* **46-1/3**, 1-12.
- KILHAMN C. (2011), *Making sens of negative numbers*. Thèse de doctorat, University of Gothenburg.
- LABORDE C. (1982), *Langage naturel et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état. Université Joseph Fourier, Grenoble.

LAKOFF G. & JOHNSON M. (1980), *Metaphors we live by*, Chicago : University of Chicago Press.

LAKOFF G. & JOHNSON M. (1999), *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to western thought*, New York : Basic Books.

LAKOFF G. & NUÑEZ F. (2000), *Where Mathematics comes from?* New York : Basic Books.

LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2010) Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques* **145-146**, 141-160.

LIMA I. (2006), *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs – Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

MASON J. (2008), Being mathematical with and in front of learners : Attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. In T. W. (series) & B. J. (Eds), *International Handbook of mathematics teacher education* **4**, Rotterdam : Sense Publishers, 31 – 56.

MATHE A.-C. (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **32-2**, 195-228.

MIYAKAWA T. (2005), *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de la symétrie orthogonale*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

MORGAN, C. (2013), Language and Mathematics: a field without boundaries. In *Proceedings of the eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, 2013, Antalya, Turkey, 50-67.

MOSCHKOVICH J. (ED.) (2010), *Language and Mathematics Education : Multiple Perspectives and Directions for Research*. Charlotte, NC : Information Age Publishing.

NUÑEZ R. & MARGHETIS T. (2014), *Cognitive Linguistic and the Concept(s) of Number*, In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds), *The Oxford Handbook of Number Cognition*.

PIAGET J. & INHELDER B. (1947), *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris : PUF (édition 1977).

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C & LECLERCQ R. (2013), Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM* **90**, 5 – 41.

- PRESMEG, N. C. (1992), Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **23**, 595 – 610.
- PRESMEG, N. C. (2002), Beliefs about the nature of mathematics bridging of everyday and school mathematical practices. In G. Ledger, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds), *Beliefs : A hidden variable in mathematics education ?* Dordrecht : Kluwer, 293 – 312.
- ROTH W. M. & LAWLESS D. V. (2002), Scientific investigations, metaphorical gestures, and the emergence of abstract scientific concepts, *Learning and Instruction* **12**, 285 – 304.
- ROUCHE N. (1999), *Formes et Mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Nivelles (Belgique) : CREM.
- ROUCHE N. (2006), L'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte. Synthèse du colloque : l'apprentissage des mathématiques considéré comme un tout, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **supplement 11**, 3 – 16.
- SFARD A. (1994), Reification as the birth of metaphor, *For the learning of mathematics* **14.1**, 44 – 55.
- SFARD A. (2001), There is More to Discourse than Meets the Ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics* **46-1/3**, 13- 57.
- SFARD A. (2012), Almost 20 years after: Developments in research on language and mathematics. Review of J. N. Moschkovich (Ed.) (2010) Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, Onligne First Article (November 2012).
- SOTO-ANDRADE J. (2006), Un monde dans un grain de sable : métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **11**, 123 – 147.
- SOTO-ANDRADE J. & SANTANDER P. (2011), Conceptual metaphors and grundvortellungen : a case of study, *Proceedings of CERME 7*, 735 – 744.
- THOMPSON A. W. (1917), *On growth and form*, Cambridge university press (édition 1992).
- VENANT F. (2008), Représentation géométrique et calcul dynamique du sens lexical : application à la polysémie de livre, Larrivée P. (ed.) *Représentations du sens lexical, Langages* **172**, 30-54.

VENANT F. & VICTORRI B. (2001), *La synonymie comme accès à la structure sémantique du lexique adjectival et verbal du français*. Dans Soutet O. (dir.), *La synonymie*. Paris, Presses de l'Université de Paris-Sorbonne.

VERGNAUD G. (2002), *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance* in. Portugais (Ed.) *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation, colloque GDM 2001*.

<http://smf4.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/ConfMontrealmai2001.pdf> (consulté le 06 Juin 2015)

VICTORRI B. & FUCHS C. (1996), *La polysémie, construction dynamique du sens*. Paris : Hermès.

VYGOTSKI L. S. (1934), *Pensée et langage*, Paris : La Dispute (3ème éd., 1997).

WALKERDINE V. (1990), *Mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*, London: Routledge.

WERTSCH J. V. & ADDISON STONE C. (1995), *The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions*. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge University Press.

WEYL H. (1952), *Symétrie et mathématique moderne*, Paris : Flammarion (édition 1964).

RAQUEL BARRERA-CURIN

Université du Québec à Montréal, département Éducation et Formation
Spécialisées

barrera.raquel@uqam.ca

CAROLINE BULF

Université de Bordeaux, LAB-E3D, EA7441

caroline.bulf@u-bordeaux.fr

FABIENNE VENANT

Université du Québec à Montréal, département des Mathématiques

venant.fabienne@uqam.ca