

VINCENT MARTIN ET MATHIEU THIBAUT

REGARDS QUÉBÉCOIS SUR SEPT DÉCENNIES DE RECHERCHE LIÉE
À L'APPRENTISSAGE ET À L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS

Abstract. Quebec perspectives on Seven Decades of Research on Teaching and Learning Probability. In this literature review, we present research from around the world as well as from Quebec that focused on the development of probabilistic reasoning, and on learning, and teaching of probability. We organize this review into three chronological periods: piagetian, postpiagetian, and contemporary. Through this historical overview, we can see an evolution in research moving from a majority of works issued from psychology field, primarily aimed to describe and understand the probabilistic reasoning and conceptions of individuals to research that are now mostly developed in the field of education which are related to learning, and teaching of probability in the school context. We are concluding by outlining gray areas related to teaching and learning probabilities which deserve to be enlighten in future research.

Résumé. Dans cette recension d'écrits, nous présentons de nombreux travaux de recherche internationaux et québécois qui ont porté sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités. Nous organisons cette recension en trois périodes chronologiques : piagétienne, postpiagétienne et contemporaine. Ce survol historique nous permet de constater une évolution dans les travaux de recherche : passant d'une majorité de travaux issus du domaine de la psychologie, qui visent surtout à décrire et comprendre les raisonnements et les conceptions probabilistes d'individus vers des travaux qui sont maintenant surtout issus du domaine de l'éducation et qui portent sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités dans le contexte scolaire. Nous terminons en exposant quelques zones d'ombres reliées à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités qui méritent d'être éclairées par la recherche de demain.

Mots-clés. Recension, didactique des mathématiques, psychologie, raisonnement probabiliste, probabilités, apprentissage, enseignement.

Introduction

Depuis plus d'un demi-siècle, de nombreuses recherches ont été réalisées sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités (Bordier, 2001; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997; Jones & Thornton, 2005; Watson, 2006). Comme le soulignent Jones et Thornton (2005), ces recherches sont essentiellement issues de deux domaines, soit le domaine de la psychologie (dont la psychologie cognitive, développementale et béhavioriste) et celui des *mathematics education*. À cela, nous ajoutons le domaine de la didactique des mathématiques, qui se distingue des *mathematics education* à plusieurs égards (Kieren & Sierpiska, 2000), et dont sont issues des recherches franco-européennes et québécoises sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités. Ces deux champs de recherche (psychologie et éducation, renvoyant à la fois aux *mathematics education* et à la didactique des mathématiques) font émerger deux orientations de recherche (Jones & Thornton, 2005) : d'un côté, les recherches en psychologie décrivent la manière dont les individus pensent sur le plan probabiliste à différents âges et dans différents contextes tandis que, de l'autre côté, les recherches en éducation tentent d'influencer directement ou indirectement la manière dont les individus apprennent les probabilités et raisonnent sur le plan probabiliste.

Plusieurs recensions anglophones des travaux de recherche liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités ont été réalisées dans un contexte international. D'abord, Shaughnessy (1992) a réalisé une importante recension des écrits scientifiques sur l'enseignement des probabilités et des statistiques (stochastique). Par la suite, des écrits comme ceux de Borovcnik et Peard (1996), de Jones et Thornton (2005), de Jones, Langrall et Mooney (2007) ainsi que de Batanero (2014) ont permis de poursuivre le travail de recension entamé par Shaughnessy (1992), à chaque fois avec des angles un peu différents.

La présente recension prend appui sur ces grandes recensions, c'est-à-dire qu'elle vise à exposer, dans les grandes lignes, l'enchaînement et les orientations de nombreux travaux anglophones réalisés de par le monde. Cependant, elle se distingue par son caractère francophone et par un effort d'intégration des travaux québécois et français.

1. Considérations méthodologiques

À travers cette démarche de recension des écrits liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités, nous avons fait ce que Jesson, Matheson et Lacey (2011) appellent une recension traditionnelle de l'étendue des travaux (traditional scoping review), qui vise à dégager un aperçu de l'état actuel des recherches et des connaissances à propos d'un sujet particulier dans le but de pointer ou d'identifier

des zones d'ombres dans la discipline que de nouvelles recherches pourraient chercher à éclairer.

Ce faisant, nous avons eu recours à une méthode de sélection des écrits qui s'apparente à l'échantillonnage en « boule de neige » (Beaud, 2016; Mongeau, 2011) pour cibler des ouvrages incontournables et à partir desquels nous avons identifié de nouveaux textes pertinents. Selon Beaud (2016), l'échantillonnage en boule de neige (snowball sampling) « est une technique qui consiste à ajouter à un noyau d'individus (des personnes considérées comme influentes, par exemple) tous ceux qui sont en relation [...] avec eux, et ainsi de suite » (p. 268). Concrètement, nous avons lu des textes et nous avons regardé leurs références bibliographiques. De celles-ci, nous avons tiré de nouveaux textes que nous avons lus et dont nous avons scruté les références bibliographiques. Nous avons répété cette démarche à plusieurs reprises en cherchant à la rendre la plus systématique possible, sans toutefois prétendre à l'exhaustivité.

De plus, en considérant le grand nombre d'écrits ayant abordé cette question, nous avons ensuite fonctionné par choix raisonnés pour arriver à rapporter dans ce texte des écrits issus des champs de la psychologie et de l'éducation, qui ont été rédigés en français et en anglais, qui ont été publiés à travers les différentes périodes et au sein de différentes équipes de recherche, et donc, qui représentent une diversité ou une variété géographique et institutionnelle.

2. Recension historique des travaux de recherche liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités

En prenant exemple sur les travaux de Jones et Thornton (2005), nous organisons en trois périodes notre recension des différents travaux de recherche liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités. Ces périodes correspondent à la période piagétienne (1950 à 1970), la période postpiagétienne (1970 à 1990) et la période contemporaine (1990 à nos jours). À l'intérieur de ces périodes, nous avons organisé chronologiquement les différents travaux recensés, et ce, sans chercher à présenter de confrontation entre ceux-ci. Ceci constitue un choix reposant sur la volonté de recenser largement des travaux sur sept décennies pour mettre en relief de grandes tendances dans les travaux portant sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités. Ces tendances seront présentées dans la section dédiée à la discussion sur l'évolution des travaux de recherche.

2.1. Période piagétienne (1950 à 1970)

Cette première période, qui s'étend de 1950 à 1970, est dite période piagétienne puisqu'elle a été marquée par les travaux des chercheurs Piaget et Inhelder (1951).

Ces travaux ont non seulement influencé des travaux de recherche en psychologie durant cette période, mais également des travaux de recherche dans les deux périodes subséquentes.

Piaget et Inhelder (1951) sont parmi les premiers chercheurs à s'être penchés sérieusement sur la question de l'apprentissage des probabilités. Ainsi, leurs travaux réalisés en Suisse sur la genèse de l'idée de hasard chez l'enfant ont permis de définir le développement de la pensée probabiliste en trois stades. Durant la période intuitive ou préopératoire (avant 7-8 ans), il y a absence d'une pensée probabiliste systématique, car les enfants ne sont pas en mesure de faire la distinction entre des événements aléatoires (possibles) et des événements déterminés (certains). Durant la période opératoire concrète (entre 7-8 et 11-12 ans), l'enfant arrive à faire cette distinction, en même temps que des formes élémentaires d'estimations probabilistes se développent, mais la difficulté réside dans la manière de dresser tous les cas possibles. L'enfant se trouve alors aux prémises de la quantification des probabilités. Finalement, durant la période opératoire formelle (11-12 ans et plus), le construit formel du concept de probabilité se développe simultanément au concept de rapport, qui est jugé essentiel à la compréhension des probabilités. L'enfant parvient alors à quantifier les probabilités.

Même si la focalisation a surtout été faite sur le travail de Piaget et Inhelder (1951) durant cette période, Jones et Thornton (2005) soulignent que d'autres études psychologiques ont examiné pendant ces années le raisonnement d'individus sous différents types de renforcements, alors qu'ils faisaient des prédictions des résultats d'expériences aléatoires (Gratch, 1959 ; Offenbach, 1965 ; Siegel & Andrews, 1962 ; Stevenson & Zigler, 1958). Dans l'ensemble, les travaux de cette période ont essentiellement porté sur le développement du raisonnement probabiliste chez certains individus, plutôt qu'à l'idée d'apprentissage et d'enseignement des probabilités dans le cadre scolaire comme ce fut le cas dans les deux périodes suivantes.

2.2. Période postpiagétienne (1970 à 1990)

Cette deuxième période, qui s'étend de 1970 à 1990, est dite période postpiagétienne. En effet, cette période est marquée de plusieurs travaux qui s'inscrivent dans la continuité des travaux de Piaget tout en étant empreints d'un fort intérêt pour la notion de conceptions probabilistes, ainsi que des travaux reliés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités.

2.2.1. Travaux sur les conceptions probabilistes

Durant cette période, de nombreux travaux de recherche ont émergé au regard des raisonnements déployés par des individus dans un contexte où intervient le hasard. Ainsi, des conceptions notamment liées aux notions de chance, de probabilité et de

rapport à l'aléatoire ont été observées et documentées à travers l'étude de ces raisonnements. Autour de ces conceptions, qui apparaissent comme des raisonnements probabilistes particuliers, la nomenclature est variée : conceptions erronées (*misconceptions*), conceptions primitives, conceptions spontanées, fausses conceptions, intuitions, heuristiques, biais, etc. (Shaughnessy, 1992). La plupart des termes employés pour décrire ces conceptions sont connotés négativement, puisqu'elles traduisent en quelque sorte un raisonnement qui serait doté d'un manque, d'une lacune ou d'une simplicité excessive par rapport à un savoir de référence. Même si nous reconnaissons les difficultés que celles-ci peuvent engendrer pour l'apprentissage des probabilités, nous choisissons d'aller dans le même sens que Savard (2008) et de les qualifier de conceptions probabilistes. Cette appellation neutre à l'égard de ces raisonnements probabilistes particuliers s'avère adéquate, selon nous, dans la mesure où ces conceptions probabilistes sont assez communes, qu'elles peuvent se développer, se complexifier, s'effacer, se modifier ou évoluer au gré des expériences et des enseignements vécus. De plus, elles peuvent s'avérer viables et opératoires dans certains contextes, mais pas dans d'autres.

D'abord, les psychologues israéliens Kahneman et Tversky ont été les précurseurs d'un ensemble de travaux en psychologie et en éducation (Kahneman & Tversky, 1972 ; 1982 ; Tversky & Kahneman, 1971 ; 1973 ; 1974) qui ont porté sur les conceptions probabilistes avec leurs importants travaux sur le raisonnement en contexte d'incertitude (*reasoning under uncertainty*). Leurs travaux de recherche sont liés aux heuristiques et biais en probabilités (Kahneman, Slovic & Tversky, 1982), c'est-à-dire des opérations mentales rapides et intuitives. Ces auteurs se basent sur l'idée que les raisonnements des individus, souvent statistiquement naïfs (*statistically naive*), sont influencés par certaines heuristiques menant à des biais en probabilités. D'abord, ces chercheurs ont travaillé sur la conception de disponibilité ou d'accessibilité (*availability heuristic*), par laquelle un individu a tendance à estimer les probabilités d'un évènement sur la base de la facilité avec laquelle des exemples particuliers de l'évènement peuvent lui venir à l'esprit, par la facilité de rappel, de construction ou d'association. Ils ont également travaillé sur la conception de représentativité (*representativeness heuristic*), qui amène une personne à croire que les résultats d'une expérience aléatoire seront forcément représentatifs de la population parente. Dans l'ensemble, ces auteurs ont montré que ces heuristiques peuvent aider à déterminer les probabilités dans certains contextes, mais que souvent, elles mènent à des biais ou à des conceptions erronées relatives aux probabilités.

Plusieurs travaux de recherche ont été réalisés à la suite des travaux de Kahneman et Tversky. Pensons par exemple à Falk (1983), un chercheur israélien dont les travaux ont entre autres porté sur des biais reliés aux probabilités conditionnelles, notamment l'effet de l'axe du temps (*Falk phenomenon*), qui amène à déterminer la probabilité d'un évènement à partir du principe de causalité, d'apparence temporelle

unidirectionnelle, sans considérer la structure probabiliste de la situation. Allant dans le même sens, Gras et Totohasina (1995a ; 1995b) se sont eux aussi intéressés, quelques années plus tard, à certaines conceptions d'élèves du secondaire en France relativement aux notions de chronologie, de causalité et de probabilité conditionnelle.

Pensons également aux recherches de Konold (1989 ; 1991), dont les travaux ont débuté dans cette période et se sont poursuivis dans la période suivante (Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier & Lipson, 1993 ; Konold, 1995). Ce chercheur états-unien a travaillé particulièrement sur une heuristique connue sous le nom de l'approche du résultat (*outcome approach*). Dans cette approche, l'individu tente de prédire le prochain résultat d'une situation aléatoire, plutôt que de considérer l'ensemble des résultats possibles ainsi que les probabilités qui leur sont associées.

De leur côté, les travaux de l'équipe de Fischbein (Fischbein, 1975 ; Fischbein & Gazit, 1984 ; Fischbein, Nello & Marino, 1991 ; Fischbein, Pampu & Minzat, 1970) ont fourni une alternative à la vision développementale de Piaget et Inhelder (1951). Fischbein a cherché à mieux comprendre quand et comment les élèves peuvent apprendre des contenus probabilistes. En effet, ce chercheur roumain s'est opposé aux idées voulant que l'acquisition des concepts probabilistes survienne à l'intérieur de trois stades rigidement circonscrits selon l'âge et que les enfants ne puissent pas comprendre le concept de hasard avant l'âge de sept ans. Il a même voulu prouver qu'un enseignement systématique comme celui rapporté dans le travail de Fischbein, Pampu et Minzat (1969), c'est-à-dire une séquence d'enseignement organisée en leçons pour aborder des notions centrales en probabilités (comme celles de fraction, d'évènement, de rapport, de variabilité, par exemple), pouvait permettre à des élèves d'acquérir les concepts de hasard et de probabilité avant le stade opératoire formel mentionné par Piaget et Inhelder (1951).

Les travaux de Fischbein se basent sur l'idée d'intuition, qui consiste en une évaluation globale et non explicite d'une situation faisant appel au sens commun. Cet auteur a identifié deux types d'intuitions : les intuitions primaires sont des croyances dérivées d'expériences individuelles sans le besoin d'un quelconque enseignement systématique, alors que les intuitions secondaires sont des croyances restructurées résultant d'un enseignement reçu à l'école. Les intuitions primaires peuvent donc aider ou nuire à l'apprentissage. Fischbein (1975) considère que les intuitions primaires de l'enfant ne peuvent être modifiées sans un enseignement systématique et il soutient que les interprétations déterministes et celles liées au hasard peuvent coexister, ce qui fait que les individus vacillent souvent entre les deux, reflétant ainsi leur manque de compréhension. Il avance donc que l'aspect intuitif du raisonnement probabiliste est relativement pauvre et que la formation d'intuitions probabilistes secondaires est particulièrement importante au regard de l'enseignement des mathématiques. Ces travaux réalisés par l'équipe de Fischbein durant la période

postpiagétienne ont eu un grand impact sur les travaux subséquents sur les probabilités, notamment en établissant pour la période contemporaine un contexte favorable aux activités d'enseignement et de réflexions curriculaires liées aux probabilités.

Bien que les travaux sur les conceptions probabilistes aient émergé durant la période postpiagétienne, plusieurs chercheurs ont continué à les documenter dans la période contemporaine. C'est notamment le cas de Fischbein, qui a également fait des contributions significatives par d'autres travaux publiés dans la période contemporaine (par exemple Fischbein & Schnarch, 1997; Lecoutre & Fischbein, 1998). Par souci de cohérence organisationnelle, nous présentons quelques-uns de ces travaux directement en prolongement de la présente section dédiée aux travaux sur les conceptions probabilistes durant la période postpiagétienne.

Au tournant de la période contemporaine, les travaux réalisés au Québec par Rouan (1990) ont visé à décrire et comprendre les conceptions probabilistes présentes chez des élèves marocains de niveau collégial (18-19 ans). Ce faisant, ce chercheur a observé que des élèves manifestent la conception du contrôle du hasard, reliée à une croyance que la pratique et l'expérience de jeux de hasard et d'argent permet de contrôler ou d'influencer les résultats d'une expérience aléatoire à partir d'habiletés et de stratégies (Rouan, 1990 ; Rouan & Pallascio, 1994). Ainsi, les résultats de cette étude suggèrent que l'enseignement des probabilités qui a été offert aux étudiants les a amenés à raisonner de façon déterministe, c'est-à-dire en pensant que le hasard est décidé à l'avance. De ce fait, les élèves n'arrivent pas à comprendre les caractères d'imprévisibilité et de variabilité du hasard.

Dans des travaux sur ce qu'ils nomment les jugements probabilistes dans des situations aléatoires, Lecoutre et ses collaborateurs (Lecoutre, 1992 ; Lecoutre & Durand, 1988 ; Lecoutre, Durand & Cordier, 1990 ; Lecoutre & Fischbein, 1998) ont travaillé sur la présence et l'évolution de différentes conceptions probabilistes au sein de différents contextes chez les jeunes. Par ses travaux, la chercheuse française a notamment étudié la conception d'équiprobabilité, qui se manifeste lorsqu'on considère que des événements sont équiprobables alors qu'ils ne le sont pas, ce qui a engendré d'autres travaux sur cette conception (par exemple Marsolais, 1997). Lecoutre a également abordé la conception de conjonction (*conjunction fallacy*) proposant que la probabilité d'un événement en interaction simultanée avec un autre événement apparaisse, sous certaines conditions, plus probable que la probabilité de voir survenir ce même événement individuellement.

Fischbein et Schnarch (1997) ont développé des études longitudinales qui montrent que certaines conceptions erronées (*misconceptions*) sont renforcées avec le temps. Cela signifie que, en vieillissant, les élèves adhèrent de plus en plus fortement à certaines croyances erronées, par exemple la conception de dépendance, qui découle des effets de récence positif ou négatif (*negative and positive recency effects*). Cette

conception porte à croire que les résultats passés d'une expérience aléatoire influencent les résultats futurs. D'une part, l'effet de récence positif est basé sur l'idée de continuer dans la même tendance après une séquence. D'autre part, l'effet de récence négatif est basé sur l'idée qu'il y a nécessairement une équilibration entre les fréquences des différents résultats possibles à travers de nombreux essais. Dans ce sens, les élèves ayant participé à la recherche de Fischbein et Schnarch (1997) sont devenus convaincus avec le temps qu'il est plus probable qu'une pièce de monnaie tombe sur « pile » après une série de « face », comme si la pièce de monnaie devait respecter un certain équilibre. Ces chercheurs indiquent aussi que les élèves doivent faire évoluer leurs intuitions. Alors, puisque les conceptions erronées seraient renforcées avec le temps, ceux-ci jugent qu'il est impératif de s'y intéresser davantage lors de l'enseignement pour favoriser une évolution de celles-ci vers des conceptions qui sont conformes aux savoirs établis.

Les travaux de Dupuis et Rousset-Bert (1998) se sont aussi penchés sur les conceptions de dépendance. Plus particulièrement, ces chercheurs français se sont questionnés quant à l'effet du recours aux représentations (comme les arbres et les tableaux) sur la compréhension que développent les élèves de fin du secondaire (terminale) quant au concept d'indépendance en probabilité. Leurs résultats illustrent que, lorsque des élèves disposent de plusieurs outils de représentation mis en correspondance, l'appui visuel leur permet de mieux identifier si des événements sont dépendants ou indépendants.

Les travaux de Lahanier-Reuter (1999) ont quant à eux porté sur l'étude de diverses conceptions du hasard découlant de modes de connaissances distincts. Cette auteure a donc cherché à préciser l'écart entre les connaissances sur le hasard produites par le mode de la connaissance scientifique et celles générées par celui de la pensée commune. Pour ce faire, elle a considéré trois groupes d'apprenants français de niveau primaire (10 ou 11 ans), de terminale (18 ans en moyenne) et universitaires. À travers des observations de séquences d'enseignement et d'apprentissage, elle a constaté que cet écart entre les modes scientifiques et de sens commun entraîne certains conflits de sens entre apprenants et enseignants, ainsi que des dysfonctionnements importants et fréquents du point de vue des connaissances mathématiques.

Un peu plus tard au Québec, Dubois (2002) a étudié ce qu'il nomme le phénomène des fausses conceptions en probabilités et statistique chez de jeunes adultes. Ce faisant, il a été en mesure de mettre en lumière la faible évolution des fausses conceptions des étudiants du collégial à la suite d'un enseignement des probabilités et statistique. Selon l'auteur, cela peut constituer un problème pour le développement d'un raisonnement probabiliste puisque les fausses conceptions semblent demeurer relativement ancrées dans le processus cognitif de jeunes adultes, et ce, malgré un enseignement systématique.

Poirier et Carbonneau (2002) ont présenté l'impact d'un conte probabiliste dans le cadre d'une activité avec des élèves du primaire au Québec. Le conte est basé sur l'aventure d'un chevalier qui doit traverser une série d'obstacles pour aller délivrer une princesse. L'issue de chacune des épreuves dépend du hasard et, bien entendu, le chevalier surmonte chacune des embûches. Voilà pourquoi les auteures affirment que : « le conte renforce l'élève dans sa pensée magique » (*Ibid.*, p. 12). Bien que l'objectif du conte était de faire réfléchir les élèves sur un résultat qui dépend du hasard dans une approche fréquentielle, cette activité est plutôt venue renforcer certaines conceptions probabilistes des élèves, plutôt que de les ébranler. Dans ce cas, le contexte d'enseignement, bien que stimulant, a nui au développement d'un raisonnement probabiliste chez les élèves.

Lors de discussions philosophiques avec de futurs enseignants du primaire au Québec, Roy (2005) a fait ressortir certaines conceptions du hasard, c'est-à-dire les idées que se font des personnes à propos du hasard. Il ressort de cette étude que les conceptions du hasard de ces futurs enseignants influencent leur compréhension des phénomènes quotidiens. Par exemple, la conception du hasard d'un participant à l'étude semble se manifester lorsqu'il dit qu'il y a du hasard lorsque quelque chose survient alors que cela avait une « mince probabilité d'arriver » (Roy, 2005, p. 201). Cette conception du hasard pourrait l'amener à croire qu'il n'y a pas de hasard dans un jeu s'il n'arrive rien d'exceptionnel ou de très rare.

En terminant cette section, nous soulignons que plusieurs écrits ont cherché à synthétiser l'avancement de la recherche au regard des conceptions probabilistes au fil des années. Par exemple, au tournant de la période contemporaine, Shaughnessy (1992) a réalisé un important travail de recension des écrits dans lequel ont notamment été exposées les études ayant porté sur les conceptions probabilistes. Plus récemment, Savard (2014) a présenté un travail de synthèse sur les conceptions présentes chez des individus dans le développement d'un raisonnement probabiliste. Elle y pointe entre autres le fait que si plusieurs conceptions ont été bien documentées par des travaux de recherche dans les dernières décennies, plusieurs mériteraient d'être mieux comprises et gagneraient donc à faire l'objet d'une attention plus soutenue dans l'avenir.

2.2.2. Travaux sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités

Durant cette période, de nombreuses recherches ont été réalisées dans le champ de l'éducation à la suite ou en réponse aux travaux de Piaget et de Fischbein.

Les travaux de Steinbring (1984; 1989; 1991) prennent appui sur une analyse épistémologique de la nature des stochastiques. Ces travaux ont notamment permis de mettre en lumière les formes empirique et théorique des probabilités et la relation mutuelle existant entre le hasard et les probabilités (Steinbring, 1984; 1991). Dans ce sens, ce chercheur allemand atteste que l'apprentissage des probabilités débute

par des jugements personnels à propos d'une situation aléatoire, suivis de comparaisons entre la situation empirique et le modèle théorique, pour enfin que ces comparaisons puissent mener à une généralisation et une caractérisation plus précise de la situation aléatoire.

De son côté, Green (1983 ; 1988 ; 1989 ; 1990) a réalisé en Angleterre une vaste étude auprès d'élèves de 11 à 16 ans afin de vérifier les travaux de Piaget et Inhelder (1951). Plus spécifiquement, il a cherché à connaître ce que ces élèves savaient à propos des concepts de probabilité et du vocabulaire qui s'y rattache. Ses travaux ont amené le chercheur à conclure que : 1) le concept de rapport est essentiel pour une compréhension du concept de probabilité ; 2) les élèves ont de la difficulté à comprendre et à utiliser le vocabulaire associé aux probabilités (certain, probable, etc.) ; et 3) un enseignement systématique est nécessaire pour complexifier leurs conceptions liées aux probabilités.

Pour leur part, Garfield et Ahlgren (1988) ont mis en lumière trois grandes difficultés que rencontrent la majorité des élèves dans l'apprentissage des probabilités, aux États-Unis. D'abord, ils jugent que de nombreux élèves ont une difficulté latente avec le concept de nombres rationnels et avec le raisonnement proportionnel, qui sont utilisés dans le calcul, la présentation et l'interprétation des probabilités. Ensuite, ils constatent que plusieurs notions probabilistes apparaissent en conflit avec les expériences des élèves et leur manière de voir le monde. Enfin, ils soutiennent que plusieurs élèves développent un désintérêt pour les probabilités, en fonction de la nature théorique de l'enseignement auquel ils ont été exposés. Au regard de ces difficultés, ces auteurs formulent des recommandations pour l'enseignement, entre autres l'idée d'utiliser des activités concrètes et la simulation, de reconnaître et de confronter des erreurs communes des élèves dans l'apprentissage des probabilités et finalement, de créer des situations qui se rattachent au quotidien des élèves et qui font intervenir des raisonnements probabilistes. De plus, ils proposent que l'élève soit impliqué dans ses apprentissages, en participant à des activités qui font intervenir des situations aléatoires, ce qui peut notamment être possible à l'aide des technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement (TICE).

En résumé, les travaux de la période postpiagétienne ont permis de dresser un paysage cognitif, pédagogique et didactique cohérent lié aux probabilités. Ainsi, ils ont constitué une base pour le développement curriculaire relatif aux probabilités survenu dans plusieurs pays qui a culminé durant la période suivante. Ces travaux ont également fourni les infrastructures nécessaires aux recherches subséquentes qui ont cherché à répondre aux nouveaux défis liés à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités.

2.3. Période contemporaine (1990 à nos jours)

Cette troisième période, dite période contemporaine, a débuté en 1990 et se poursuit jusqu'à nos jours. Elle est marquée par la réalisation d'une série de réformes curriculaires à l'échelle mondiale entre autres liée aux mathématiques scolaires. Ces réformes ont mené à l'émergence des probabilités et de la statistique comme domaine mathématique d'importance à l'école (Batanero, 2014; Jones & Thornton, 2005; Jones *et al.*, 2007). Dans ce sens, on voit dans cette période se multiplier les travaux de recherche liés à des modèles développementaux ou explicatifs, à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités dans différents niveaux scolaires, à la formation en enseignement des probabilités ainsi que ceux liés à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent. Ne pouvant rapporter l'ensemble des recherches réalisées dans cette période, puisqu'elles sont encore plus nombreuses et diversifiées que dans les deux autres périodes, nous choisissons de mentionner certains exemples de travaux de recherche survenus au cours des 25 dernières années et qui se démarquent par leur importance ou leur originalité.

2.3.1. Travaux liés à des modèles développementaux ou explicatifs

L'émergence de travaux utilisant des modèles pour décrire les différents niveaux de complexité dans les raisonnements probabilistes des élèves constitue, selon Jones *et al.* (2007), un des changements d'orientation les plus importants pour les travaux de recherche sur les probabilités durant cette période.

Les travaux de l'équipe états-unienne de Jones et de ses collègues (Jones *et al.*, 1997 ; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1999 ; Jones, Langrall, Thornton, Mooney, Wares, Jones, Perry, Putt & Nisbet, 2001) ont permis de définir six concepts-clés du raisonnement probabiliste : 1) l'ensemble des résultats possibles ; 2) la probabilité expérimentale d'un événement ; 3) les probabilités théoriques d'un événement ; 4) la comparaison de probabilités ; 5) les probabilités conditionnelles ; 6) l'indépendance. Leurs travaux ont également mené à l'élaboration d'un cadre de référence du développement probabiliste en quatre niveaux (subjectif, transitionnel, informel quantitatif et numérique) qui ne sont pas reliés à des âges de développement.

Les travaux de l'équipe australienne de Watson et de ses collègues (Watson, 2000 ; Watson, 2006 ; Watson, Collins & Moritz, 1997 ; Watson & Kelly, 2004 ; Watson & Moritz, 2003) ont porté, entre autres, sur l'idée du hasard chez de jeunes enfants et des adultes, notamment sur les idées de variation et d'équité (*fairness*), en plus de travailler au développement d'un modèle d'évaluation du développement de concepts liés aux probabilités et à la statistique (Watson, 2006). Ces travaux se sont également penchés sur le concept d'échantillon, plus spécifiquement sur les conceptions en lien avec l'effet de la taille de l'échantillon de futurs enseignants du

secondaire (Watson, 2000) et sur le développement de la compréhension du concept d'échantillon par des élèves du primaire et du secondaire (Watson & Moritz, 2000).

Encore en Australie, Way (2003) a décrit trois stades de développement probabiliste chez les élèves du primaire : pensée non probabiliste, pensée probabiliste émergente et quantification des probabilités. Elle établit les caractéristiques pour chaque stade de développement ainsi qu'aux transitions qui permettent de passer d'un stade à l'autre. Ses résultats l'amènent à proposer des recommandations en enseignement, par exemple de proposer des activités appropriées aux élèves selon leur stade de développement pour favoriser une progression dans leurs apprentissages.

2.3.2. Travaux sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités

Pendant la période contemporaine, de très nombreux travaux ont porté sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, qui sont majoritairement structurés relativement aux trois approches probabilistes.

D'abord, l'approche théorique est traitée la plus régulièrement et est donc considérée comme l'approche classique (Albert, 2006). Dans cette approche, dont l'origine remonte à Laplace (1825/1995), la probabilité se calcule à partir du rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles d'un événement quelconque lorsque tous les cas sont jugés équiprobables. Dans la lignée de cette approche théorique, Kolmogorov propose en 1933 une théorie mathématique basée sur l'axiomatisation des probabilités et est ainsi devenu un des fondateurs des probabilités à l'ère moderne (Chaumont, Mazliak & Yor, 2004). Ces travaux mathématiques russes ont ensuite été traduits en anglais (Kolmogorov, 1933/1956). Ensuite, l'approche fréquentielle¹, provenant des travaux de von Mises (1928/1952), mesure la fréquence relative d'un événement particulier à la suite d'une série de données observées. Ainsi, une fréquence relative stabilisée se dégage à travers la réalisation d'essais, ainsi que par la compilation et l'organisation de leurs résultats, afin d'arriver à tendre vers la probabilité de voir se produire un événement possible. Cette approche permet donc d'établir des liens entre le domaine de la statistique et le domaine des probabilités. Enfin, l'approche subjective (Chernoff, 2009 ; Savard, 2008) ou personnaliste (Hacking & Dufour, 2004) prend ses racines dans les travaux de Lindley (1980), appuyés sur le théorème de Bayes. Cette troisième approche consiste pour un individu ou un groupe d'individus à évaluer numériquement la force ou le degré d'une croyance à travers une analyse plus ou moins intuitive de l'information dont il dispose. Dans les travaux qui seront présentés subséquemment, certaines approches sont parfois favorisées, mais on y note aussi une mise en relation entre les approches pour en faire ressortir la complémentarité de chacune dans le développement de la pensée probabiliste.

¹ Dans les écrits consultés, cette approche est qualifiée de différentes manières, notamment d'approche fréquentiste, expérimentale, expérimentielle ou empirique.

Batanero et Serrano (1999) ont comparé en Espagne le sens de l'aléatoire chez des élèves du secondaire répartis en deux groupes d'âge (14 et 17 ans), et ce, à travers l'identification des propriétés mathématiques que ceux-ci associent à des séquences aléatoires et déterministes, ainsi que des distributions bidimensionnelles. Les résultats de cette recherche indiquent que l'âge et le niveau d'instruction ont peu d'influence sur les conceptions des élèves à propos des phénomènes aléatoires. Cela signifie que la pensée probabiliste des élèves ne semble pas avoir évolué malgré les apprentissages des probabilités développés dans les cours de mathématiques. Ces deux chercheurs soutiennent donc qu'il est important de tenir compte des conceptions des élèves à travers l'enseignement des probabilités si on espère une évolution de celles-ci.

Des travaux français initiés par Brousseau, Brousseau et Warfield (2002), puis poursuivis par Briand (2005 ; 2007) ont mis l'accent sur l'importance de faire simuler les élèves avec une machine simple, soit une bouteille contenant des billes blanches et noires, mais conçue de façon à ce que le contenu de la bouteille ne soit pas dévoilé entièrement puisqu'on ne peut voir qu'une bille par tirage (avec remise). Cette approche fréquentielle amène ainsi les élèves à simuler un nombre restreint de tirages directement à partir de la machine simple, puis à utiliser un ordinateur pour simuler rapidement un plus grand nombre de tirages. En réponse au constat du fort accent mis sur l'approche théorique dans le programme et dans des manuels scolaires du secondaire au Vietnam, Vu Nhu (2005 ; 2009) a établi une comparaison institutionnelle entre la France et le Vietnam. Elle s'est inspirée des travaux de Brousseau et de Briand pour réaliser une étude didactique sur l'introduction dans l'enseignement mathématique vietnamien de l'approche fréquentielle. Pour ce faire, elle a élaboré une ingénierie didactique dans laquelle elle a cherché à amener les élèves à développer un outil de décision avec conscience dans un problème d'incertitude aléatoire en abordant la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le degré de certitude dans leurs liens avec les probabilités.

Le travail de Zimmermann (2002) a permis d'examiner le rôle de l'enseignement des probabilités, à l'aide des TICE, sur l'évolution des raisonnements et des croyances d'élèves du secondaire aux États-Unis. La simulation d'expériences aléatoires donne l'opportunité aux élèves d'en dégager un modèle mathématique pour développer leur compréhension des probabilités. Dans cette recherche, la calculatrice à affichage graphique a permis aux élèves, après avoir simulé une expérience aléatoire un grand nombre de fois dans un temps restreint, d'observer la stabilisation de la fréquence relative.

Les travaux de Henry (par exemple, 1999 ; 2000 ; 2001 ; 2009 ; 2010) ont porté sur l'approche fréquentielle. Après avoir mis en lumière la construction du domaine des probabilités dans l'Histoire (Henry, 1999 ; 2001 ; 2009), ce chercheur a décrit l'évolution de l'enseignement secondaire en statistique et probabilités en France. Il

a notamment fait ressortir que davantage d'importance est accordée à l'approche fréquentielle depuis les programmes scolaires français des années 90 (Henry, 2000; 2010). Toutefois il a affirmé qu'il subsiste une « confusion entre fréquence expérimentale et probabilité conçue alors à tort comme une fréquence limite » (Henry, 2000, p. 52)². De plus, il faut mentionner ses travaux concernant la modélisation en probabilités, qui s'effectue en adoptant une approche fréquentielle pour expérimenter une situation aléatoire, créer un modèle, puis le simuler (Henry, 1999 ; 2001).

Prenant appui sur ces travaux, Parzys (2007 ; 2009 ; 2011) a amené une réflexion inscrite dans l'approche fréquentielle pour simuler et modéliser diverses situations aléatoires. D'ailleurs, cette modélisation prend forme en partie grâce à la simulation à l'aide de TICE (Batanero, Henry & Parzys, 2005 ; Henry & Parzys, 2011 ; Parzys, 2007 ; 2009).

Corter et Zahner (2007) se sont penchés sur l'utilisation de représentations visuelles (schéma, arbre, liste de résultats possibles, tableau et diagramme de Venn) dans des problèmes en probabilités résolus par des étudiants universitaires aux États-Unis. Leurs résultats montrent que les étudiants utilisent spontanément des représentations visuelles qui diffèrent selon le type de problème. Ces chercheurs ont conclu quant à l'importance de la visualisation pour le développement du raisonnement probabiliste.

Au Québec, Savard (2008) a réalisé une thèse en lien avec le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités dans une classe du primaire. Ce travail a mis en lumière le fait qu'un enseignement des probabilités dans lequel sont convoqués en alternance les contextes personnels, socioculturels et mathématiques peut permettre aux élèves de complexifier leurs conceptions probabilistes et de développer une pensée critique à l'égard des jeux de hasard et d'argent.

Au Canada, les travaux de Chernoff (2009) ont porté sur les perceptions du hasard et des probabilités associées qu'ont les futurs enseignants du primaire et du secondaire par rapport à des séquences de cinq tirages de pile ou face interprétées en fonction des revirements (*switches*) et des séquences ininterrompues de résultats

² Le terme « probabilité fréquentielle » est couramment utilisé dans le système scolaire au Québec, ayant été introduit dans les programmes scolaires des années 2000. Ce glissement sémantique d'une fréquence relative stabilisée vers une probabilité fréquentielle se retrouve dans plusieurs ressources québécoises : dans les documents ministériels, dans des articles professionnels et scientifiques, dans les manuels scolaires et dans les ressources numériques (comme Netmaths, par exemple). Une réflexion épistémologique sur la nature des probabilités et leur définition nous apparaît donc nécessaire, et ce, à la fois au regard des contextes socioéducatif et scientifique québécois.

identiques (*longest run*). Les résultats de son étude basée sur l'approche subjective laissent entendre que les réponses généralement reconnues comme incorrectes dans ce type de tâche ne sont pas nécessairement dépourvues d'un raisonnement probabiliste juste.

Une équipe québécoise constituée entre autres de Theis et Savard soutient l'idée que les probabilités pourraient être enseignées selon une approche fréquentielle, contrairement à l'approche théorique qui est habituellement favorisée par les enseignants (Theis & Savard, 2010b ; Savard, Freiman, Theis & Larose, 2013). Ces chercheurs considèrent que l'enseignement dispensé ne mise pas suffisamment sur l'institutionnalisation. Ils suggèrent alors que les discussions en grand groupe pourraient permettre d'institutionnaliser les connaissances développées dans les activités utilisant le simulateur de probabilités. De plus, sans que cela nous informe sur le développement du niveau de conceptualisation des probabilités chez les élèves, les auteurs soutiennent qu'une telle discussion peut amener ces derniers à partager leurs croyances et leurs conceptions erronées qui pourront alors être confrontées. Dans l'enseignement des probabilités, le vocabulaire utilisé par les élèves peut être problématique puisque ceux-ci ne distinguent pas nécessairement des expressions telles que *hasard*, *chance* et *probabilité* (Larose, Bourque & Freiman, 2010). De plus, l'enseignement des probabilités devrait davantage exploiter des situations authentiques (Grenon, Larose, Bourque et Bédard, 2010).

Martin a étudié la contribution et la compréhension de deux élèves jugées en difficulté en mathématiques dans la résolution d'une situation-problème probabiliste au sein d'équipes hétérogènes dans une classe du primaire au Québec (Martin, 2010 ; Martin & Theis, 2009 ; 2011). Dans un contexte similaire, Martin (2014) s'est ensuite intéressé aux interventions didactiques faites par deux enseignants du primaire dans l'enseignement des probabilités auprès d'élèves jugés en difficulté en mathématiques. Cette recherche montre que les deux enseignants ont rencontré des difficultés à la fois dans la gestion de la variabilité dans les essais, dans la prise en compte de la loi des grands nombres et dans l'articulation des approches fréquentielle et théorique (Martin et Theis, sous presse). De ces travaux, il ressort notamment que l'apprentissage des probabilités est possible à travers la résolution de tâches complexes plaçant en complémentarité les approches fréquentielle et théorique (Martin & Mai Huy, 2015).

Thibault (2011a ; 2011b) s'est penché sur la manifestation et l'évolution de certaines conceptions probabilistes chez des élèves québécois du secondaire dans une séquence d'enseignement des probabilités basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent. En plus des manifestations ponctuelles des conceptions de 30 élèves de quatrième secondaire (15-16 ans), le processus de complexification conceptuelle a été analysé pour deux cas d'élèves particuliers. Il semble que ce processus prend beaucoup de temps et peut être engendré par des multiples facteurs d'ébranlement.

Par exemple, le recours aux TICE comme des simulateurs d'expériences aléatoires (Maheux & Thibault, 2012 ; Thibault, 2015) semble potentiellement riche pour ébranler les conceptions des élèves par une approche fréquentielle.

Après ses nombreux travaux dans la période postpiagétienne, Konold a soulevé une réflexion sur l'idée que la fréquence relative stabilisée dans une expérimentation serait une estimation de la vraie probabilité (*true probability*) que l'on ne peut pas connaître (Konold, Madden, Pollatsek, Pfannkuch, Wild, Ziedins, Finzer, Horton & Kazak, 2011). Par exemple, en lançant un objet irrégulier comme un os³, il est impossible de calculer les probabilités théoriques d'atterrir sur l'une ou l'autre des faces, alors l'approche fréquentielle permettrait à long terme que la fréquence relative tende vers la vraie probabilité. Les chercheurs suggèrent de simuler physiquement une expérience aléatoire pour laquelle on ne peut pas calculer la probabilité théorique, puis d'utiliser les TICE par la suite pour permettre de voir la fréquence relative se stabiliser rapidement.

2.3.3. Travaux liés à la formation à l'enseignement des probabilités

Durant la période contemporaine, de nombreux travaux se sont intéressés à la formation à l'enseignement des probabilités en prenant appui sur les travaux développés relativement à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités.

Les travaux de l'équipe espagnole formée par Batanero et ses collaborateurs ont fait ressortir des besoins pour la formation à l'enseignement des probabilités, que ce soit en identifiant des difficultés des enseignants ou en faisant ressortir des manques dans la formation des enseignants (Batanero, Contreras, Fernandes & Ojeda, 2010 ; Batanero & Díaz, 2012 ; Batanero, Godino & Roa, 2004). Il en ressort des situations de jeu paradoxales qui peuvent être utilisées comme outils didactiques dans la formation des enseignants. Ces chercheurs soulignent d'ailleurs la spécificité de la préparation à enseigner les probabilités puisqu'il faut prendre en considération à la fois les attitudes, les croyances, les connaissances probabilistes et les connaissances professionnelles des enseignants.

Les travaux de Theis et Savard (2010a ; 2010b) font ressortir les façons dont un simulateur de jeux de hasard et d'argent a été utilisé dans des classes du secondaire au Québec. Il semble que les enseignants participant à cette recherche-action sont parvenus à montrer aux élèves du début du secondaire que les jeux de hasard et d'argent sont défavorables aux joueurs à long terme, ce qui n'aurait pas été possible, selon les auteurs, dans une approche de type papier-crayon. Cependant, toujours

³ En France, il y a eu beaucoup d'expériences pédagogiques autour du jet d'une punaise de bureau et Parzys (2011) mentionne aussi le lancer de cauri, qui est une sorte de coquillage africain, pour forcer à adopter une approche fréquentielle en raison de l'impossibilité de calculer les probabilités théoriques associées aux différents événements.

selon les auteurs, ces enseignants n'ont pas eu recours au plein potentiel du simulateur⁴, notamment pour faire le lien entre la fréquence relative stabilisée et la probabilité théorique ou pour établir un raisonnement probabiliste quantitatif. Theis et Savard (2010b) font alors ressortir des perspectives à considérer pour la formation des enseignants, en mentionnant par exemple que les discussions en lien avec le simulateur soient reprises en grand groupe pour enrichir et consolider les apprentissages réalisés dans les simulations.

Pour sa part, Rioux (2012) a étudié l'évolution des projets de formation de futurs enseignants au primaire du Québec à partir d'une séquence de situations probabilistes. La notion de projet de formation est vue à la fois comme un projet visé, qui est relatif à l'anticipation des compétences professionnelles qui doivent être développées durant la formation initiale à l'enseignement, ainsi que comme un projet programmatique, qui est relié à l'anticipation des activités de formation requises pour développer ces compétences professionnelles. La séquence qui a été réalisée a notamment permis d'inciter les étudiants à recourir à une approche stochastique et à porter un jugement probabiliste qui prend en compte la complexité conceptuelle des situations. Dans ce contexte, l'auteure a donc constaté une complexification et un élargissement des projets de formation de certains étudiants à la fois par une prise en compte progressive de l'élève et du savoir (en plus de leur propre posture d'enseignant) ainsi qu'à travers un passage d'une anticipation empreinte d'une illusion de certitude du futur proche vers une anticipation créative d'un futur proche à inventer et porteur de nombreux possibles.

2.3.4. Travaux liés à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent au Québec

Les jeux de hasard et d'argent sont pratiqués par l'Homme depuis bien longtemps, l'origine remontant chez les Égyptiens vers 3500 av. J.-C. (David, 1962). L'origine des probabilités est toutefois plus récente, surtout si on compare avec d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre et la géométrie, puisque le premier problème de probabilités connu, intitulé *pari du chevalier de Méré*, prend place dans une situation de jeux de dés en 1654 (Barbin & Lamarche, 2004 ; Derriennic, 2003). Cependant, ce n'est que récemment que d'abondantes recherches en lien avec le jeu excessif⁵ ont donné naissance à un champ de recherche. Ces recherches suggèrent qu'il existe un réel problème de jeu dans la société québécoise.

⁴ Ce simulateur est disponible à l'adresse <http://anniesavard.com/simulateur/>. Il s'agit d'un simulateur développé par *Netmaths* pour un projet de recherche dirigé par François Larose (Université de Sherbrooke).

⁵ Il est à noter qu'on retrouve aussi dans les textes scientifiques les expressions « jeu pathologique », « jeu compulsif » ou « *gambling problem* ».

Plusieurs études en psychologie liées aux probabilités ont été réalisées dans les deux dernières décennies au Québec. Par exemple, l'équipe de Ladouceur s'est intéressée au hasard et au fléau social engendré par le jeu excessif (Ladouceur, 2004 ; 2005 ; Ladouceur, Ferland & Fournier, 2003 ; Ladouceur, Ferland & Vitaro, 2004 ; Ladouceur, Sylvain & Boutin, 2000a ; Ladouceur, Sylvain, Boutin & Doucet, 2000b). Ils ont observé que certaines croyances amenaient des pensées erronées chez des personnes en situation de jeu, ce qui rejoint les travaux sur les conceptions mentionnés précédemment. Puisque le joueur ne réalise pas toujours que le jeu repose sur le hasard ou à partir d'une compréhension inadéquate du hasard, il peut tomber dans le piège du jeu excessif en pariant excessivement. Cet aspect psychologique vient embrouiller la pensée du joueur et fait apparaître des conceptions qui ne respectent pas les savoirs probabilistes établis. Par exemple, plus de 70% des joueurs se fient aux résultats des tirages précédents pour prédire le prochain tirage lors du lancer d'une pièce de monnaie, alors qu'il y a une indépendance entre les tours (Ladouceur *et al.*, 2000b).

Aussi, d'autres études québécoises en psychologie suggèrent que les connaissances mathématiques des adultes ne sont pas suffisantes pour rationaliser leurs comportements dans une situation de jeu (Benhsain, 2002 ; Benhsain, Taillefer & Ladouceur, 2004). Les résultats de ces études amènent l'idée que les joueurs ne parviennent pas à recourir à leurs connaissances mathématiques, comme l'indépendance entre les tours, pour éviter d'adopter des comportements irrationnels. Leurs conceptions erronées semblent être prédominantes sur leurs connaissances mathématiques. Cependant, il semble qu'une compréhension adéquate des notions probabilistes peut réduire les risques de voir une personne participer irrationnellement à des jeux de hasard et d'argent sans être consciente du risque réel de perdre (Benhsain, 2002 ; Benhsain *et al.*, 2004 ; Ladouceur *et al.*, 2000b).

3. Discussion sur l'évolution des travaux de recherche

Dans la section précédente, nous avons fait un survol des différents travaux réalisés au cours des sept dernières décennies autour des questions du développement du raisonnement probabiliste ainsi que de l'apprentissage et de l'enseignement des probabilités. Nous allons maintenant émettre différents constats au regard de cette recension, et ce, en faisant référence aux travaux de Shaughnessy (1992) et Jones *et al.* (2007).

Dans sa recension des écrits scientifiques sur l'enseignement des stochastiques, Shaughnessy (1992) a présenté une liste de souhaits (*wish list*) des recherches futures pour la décennie qui devait suivre. Par la suite, Jones *et al.* (2007) ont évalué le corpus des travaux recensés entre 1992 et 2007 à la lumière des souhaits émis par Shaughnessy, puis ils ont à leur tour énoncé d'éventuelles pistes de recherche pour

répondre aux besoins de recherche. Dans les prochains paragraphes, nous ferons de même en évaluant les travaux recensés dans ce texte au regard de certaines propositions faites par Shaughnessy (1992) et Jones *et al.* (2007), en faisant ressortir huit constats.

3.1. Diversité des travaux recensés

Un premier constat qui ressort de notre recension est lié à la diversité géographique et culturelle des travaux recensés, ainsi qu'à la présence de nombreux travaux francophones. Autant Shaughnessy (1992) que Jones *et al.* (2007) ont souligné le besoin de voir se réaliser des recherches interculturelles (*cross-cultural studies*). Dans notre recension, nous avons intégré de nouveaux travaux anglophones comme les travaux canadiens de Chernoff (2009), par exemple. Nous avons également ajouté plusieurs travaux francophones réalisés au Québec (par exemple Martin, 2010 ; 2014 ; Rioux, 2012 ; Savard, 2008 ; Thibault, 2011a) et en France (par exemple Henry, 2010 ; Henry & Parzysz, 2011 ; Lahanier-Reuter, 1999 ; Parzysz, 2011), ainsi que les travaux vietnamiens de Vu Nhu (2005, 2009). Ceci constitue une valeur ajoutée par rapport aux recensions de Shaughnessy (1992) et de Jones *et al.* (2007), dans lesquelles seuls quelques chercheurs francophones étaient considérés, et ce, seulement lorsque leurs travaux étaient publiés en anglais (par exemple Brousseau *et al.*, 2002). Ainsi, les travaux que nous avons recensés attestent d'une diversité géographique et culturelle, mais ils ne portent pas sur les influences culturelles pour l'apprentissage ou l'enseignement des probabilités.

3.2. Accumulation de recherches à visée éducative

Par l'organisation en périodes de quelques exemples forts de travaux de recherche ayant porté sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, nous pouvons constater une évolution et des tendances. Au départ, il n'y avait que des travaux de recherche issus du domaine de la psychologie et qui visaient surtout à décrire et comprendre les raisonnements probabilistes d'individus. Ces travaux ont alimenté des recherches en éducation, qui sont peu à peu apparues et ont porté attention à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités dans différents systèmes scolaires. Avec le temps, l'accumulation de ces recherches à visée éducative a non seulement permis d'alimenter le processus de développement de différents curriculums scolaires à travers le monde, mais a également favorisé l'émergence d'une réflexion sur la formation à l'enseignement des probabilités dans les universités.

3.3. Prise en compte du système scolaire et de la formation des enseignants

Dans les travaux ancrés en éducation sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, il semble y avoir une évolution à travers les périodes d'une centration

sur l'élève et ses apprentissages vers une prise en considération de l'enseignant et de son enseignement et jusqu'à un regard sur les curriculums scolaires et sur la formation universitaire des enseignants. Ce constat dénote une progressive refocalisation des travaux centrés sur l'élève vers des travaux au cadre plus large, ce qui apparaît contraire à un souhait conjointement exprimés par Shaughnessy (1992) et par Jones *et al.* (2007). En effet, ceux-ci ont exprimé le besoin de poursuivre les recherches sur les aspects métacognitifs du raisonnement probabiliste. Selon nous, de telles recherches pourraient soutenir une réflexion sur l'apprentissage des probabilités par des élèves, notamment dans le but d'alimenter la formation à l'enseignement et par extension, pour constater les effets de la formation bonifiée.

3.4. Conceptions des enseignants par rapport aux probabilités

En ce sens, nous pouvons également voir un changement de tendance face aux travaux répertoriés dans les recensions précédentes. Effectivement, Shaughnessy (1992) a énoncé le souhait de voir davantage de recherche être réalisée au regard des connaissances et des croyances sur les probabilités des futurs enseignants et des enseignants en exercice. Pour leur part, Jones *et al.* (2007) ont rapporté, en écho aux propos de Stohl (2005), que peu de travaux ont permis de répondre à ce souhait. À titre d'exemple, ils évoquaient par exemple les travaux de Begg et Edwards (1999). Or, nous observons l'émergence de nouveaux travaux liés aux conceptions des probabilités des enseignants, c'est-à-dire relatifs au regard porté par les enseignants sur les probabilités et leur enseignement. Au Québec, nous pouvons penser aux travaux de Roy (2005), qui a fait ressortir certaines conceptions du hasard chez de futurs enseignants du préscolaire et du primaire, ainsi qu'aux travaux de Rioux (2012), qui a étudié l'évolution des projets de formation de futurs enseignants au primaire du Québec à partir d'une séquence de situations probabilistes. Nous pouvons également citer les travaux de Martin (2014 ; Martin & Theis, sous presse), qui ont montré certaines difficultés que rencontrent des enseignants du primaire avec l'articulation des approches fréquentielle et théorique, à la fois dans la gestion de la variabilité dans les essais et dans la prise en compte de la loi des grands nombres. D'autres travaux comme ceux de Batanero *et al.* (2010) témoignent de l'aspect contre-intuitif de certaines situations aléatoires qui mettent en évidence une persistance des conceptions erronées chez certains enseignants. Pour nous, la pertinence de ces travaux n'est pas d'accuser les enseignants en mettant en lumière leurs difficultés vécues dans l'enseignement des probabilités. Il s'agit plutôt d'argumenter le besoin de formation initiale et continue relativement à cette branche des mathématiques dans la perspective de favoriser le développement professionnel des enseignants dans ce contexte.

3.5. Problématique sociale des jeux de hasard et d'argent

Dans les travaux ancrés en psychologie, il semble s'être opéré une évolution de l'étude des raisonnements probabilistes déployés par des individus vers l'étude des raisonnements probabilistes mis de l'avant par des individus dans des contextes de jeux de hasard et d'argent. L'émergence de ce type de travaux apparaît cohérent par rapport aux pistes de recherche identifiées par Shaughnessy (1992) et par Jones *et al.* (2007). En effet, ceux-ci ont conjointement plaidé en faveur de travaux relatifs au développement d'une pensée ou d'un jugement critique face aux probabilités et aux informations stochastiques rencontrées au quotidien par le citoyen. Dans les dernières années, nous observons un accroissement des travaux liés à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent au Québec, malgré que la plupart des travaux recensés soient issus du domaine de la psychologie. Toutefois, certains travaux en didactique des mathématiques abordent également cette question. Par exemple, le travail de Savard (2008 ; 2010) illustre bien l'émergence récente d'un courant de recherche situé à l'intersection des domaines de l'éducation et du travail social ou de la psychologie et se trouvant relié à la fois à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités et à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent. Ainsi, selon Savard (2010), c'est dans un contexte scolaire que les élèves doivent prendre conscience des risques à participer à des jeux de hasard et d'argent puisque les jeunes se croient invincibles face au jeu dans un contexte quotidien.

3.6. Rôle de l'école face au jeu excessif

L'ampleur du problème du jeu excessif auprès des adolescents québécois (Martin, Gupta & Derevensky, 2007) demeure considérable, malgré une baisse de participation observée dans les dernières années (Camirand, 2014). On peut penser que l'école, en particulier par le biais des cours de mathématiques, doit assumer sa part de responsabilité pour contrer ce fléau social en sensibilisant les élèves aux probabilités de gagner dans les jeux de hasard et d'argent. Aussi, l'école doit permettre le développement de compétences mathématiques et de compétences citoyennes comme la pensée critique et la prise de décision (Savard, 2008). Or, il semble possible d'établir un lien entre le travail de Lahanier-Reuter (1999) et l'idée d'une institution scolaire agissant comme un vecteur d'éducation citoyenne au regard de la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent. Cette chercheuse a montré la présence, chez des apprenants, d'un écart entre les connaissances sur le hasard produites par le mode de la connaissance scientifique et celles générées par celui de la pensée commune. Elle a également mis en lumière que de cet écart entre les conceptions scientifique et commune des probabilités peuvent découler certains conflits de sens au sujet des probabilités et des dysfonctionnements importants et fréquents sur le plan des connaissances mathématiques. Ainsi, si l'école vient agir

pour réconcilier – ou du moins réduire les écarts existants entre – ces deux conceptions des probabilités, nous croyons que cela constitue un exemple de ce que Savard appelle le développement de compétences mathématiques par l'école pour amener les élèves à acquérir des compétences citoyennes comme la pensée critique et la prise de décision face à des situations aléatoires.

3.7. Mise en relation de l'apprentissage et de l'enseignement

Une autre tendance pouvant être observée dans les travaux de recherche de la période contemporaine est que les conceptions probabilistes sont moins étudiées de façon isolée, comme c'était généralement le cas durant la période postpiagétienne. Désormais, ces conceptions sont plus souvent mises en relation avec l'enseignement dans lequel elles ont émergé. Pensons par exemple aux travaux de Thibault (2011a), qui a développé et mis en œuvre une séquence d'enseignement des probabilités, puis a porté un regard sur les effets de cette séquence en termes d'émergence de certaines conceptions probabilistes chez des élèves du secondaire au Québec. Prenons également les travaux de Savard (2008), qui, avec une séquence d'enseignement visant à amener des élèves du primaire à développer une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités, constituent un autre exemple de recherche ayant récemment porté sur les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage des élèves.

Or, ceci va dans le sens de Shaughnessy (1992), qui a souhaité un accroissement des recherches visant à étudier les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage des élèves, notamment au regard de leurs intuitions et de leurs conceptions probabilistes. À cet égard, Jones *et al.* (2007) ont remarqué l'émergence de nombreux travaux s'inscrivant dans cette perspective, évoquant par exemple les recherches de Jones *et al.* (1999) et de Zimmermann (2002). Nous allons donc dans le même sens en reconnaissant que de nouveaux travaux sont réalisés concernant les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage des élèves.

3.8. Recours aux TICE

Par ailleurs, autant Shaughnessy (1992) que Jones *et al.* (2007) ont réclamé un étoffement du corpus des travaux abordant la question du recours aux TICE pour le développement du raisonnement probabiliste. D'ailleurs, Jones *et al.* (2007) disaient, il y a près d'une décennie, que « la recherche portant sur l'influence de la technologie sur les conceptions probabilistes des élèves commençait à peine à émerger » (p. 946, traduction libre). Ainsi, si nous pouvons constater que cette réflexion sur l'usage des TICE était déjà présente en 1992 et qu'elle s'est poursuivie en 2007, il faut cependant souligner qu'il y a eu une véritable explosion technologique dans les dernières années et qu'en conséquence, une explosion de la recherche sur les TICE semble s'être opérée. Alors qu'il y a quelques décennies, de telles initiatives étaient

relativement rares et relevaient de l'innovation par rapport au quotidien de la classe (par exemple les travaux de Pratt, 2000), les TICE sont désormais de plus en plus présentes et utilisées dans les milieux scolaires. Ainsi, il semble y avoir une tendance récente dans les travaux à regarder les usages effectifs ou potentiels des TICE déjà présentes au quotidien, que ce soit au regard de l'expérience d'apprentissage offerte aux élèves (par exemple Batanero, Godino & Canizares, 2005 ; Stohl & Tarr, 2002) ou au regard de la formation à l'enseignement des probabilités (par exemple Bu, 2008 ; Stohl & Hollebrands, 2008 ; Theis & Savard, 2010a ; 2010b). Ce regard porté sur le recours aux TICE pour la formation à l'enseignement des probabilités nous apparaît particulièrement récent.

4. Implications pour des recherches ultérieures

Le regard rétrospectif porté sur les travaux de Shaughnessy (1992) et de Jones *et al.* (2007) nous permet de constater que certaines des recommandations énoncées ont trouvé écho dans les recherches récentes, mais que d'importantes zones d'ombres scientifiques subsistent autour de l'apprentissage et de l'enseignement des probabilités. Parmi ces zones d'ombres qui mériteraient à nos yeux d'être éclairées par la recherche de demain, nous identifions quatre pistes de recherche.

4.1. Exploration des contenus probabilistes de ressources didactiques

Il nous semble impératif d'explorer les contenus probabilistes des ressources didactiques généralement utilisées pour l'enseignement des probabilités, étant donné que cet objet a été peu étudié par les travaux que nous avons recensés. En effet, il semble que de nombreux enseignants ont tendance à baser leur enseignement sur un manuel scolaire ou sur des ressources en ligne (par exemple, Netmaths, Sésamath, ChallengeU, Khan Academy, etc.). Il serait donc utile de mieux connaître le contenu probabiliste de ces ressources qui sont utilisées de nos jours pour enseigner les probabilités au primaire et au secondaire.

4.2. Étude des pratiques effectives d'enseignement des probabilités

Dans le même sens, nous considérons indispensable de poursuivre l'étude des pratiques d'enseignement des probabilités, afin d'établir un lien entre ce qui est proposé dans les ressources didactiques et ce qui est réellement fait par les enseignants. D'ailleurs, Martin (2014) a mis en exergue la rareté des travaux de recherche sur l'enseignement ou les pratiques d'enseignement des probabilités. Nous croyons que, dans cette perspective, des pistes intéressantes pourraient être examinées. En effet, il s'avère important de chercher à mieux connaître la place occupée par l'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire. Par exemple, au Québec, l'enseignement des probabilités est prescrit tout au long du

cheminement scolaire d'un élève de 6 ans à 17 ans. Toutefois, étant donné que cet enseignement n'occupe pas une place prépondérante dans les programmes de formation de l'école québécoise au primaire et au secondaire, il est possible de se questionner sur la place réelle accordée à cet enseignement dans les classes.

D'une part, il conviendrait d'explorer les contenus probabilistes abordés dans l'enseignement (le « quoi ») et le ou les moments durant lesquels se fait l'enseignement des probabilités (le « quand »). D'autre part, il importe également de se questionner sur la manière dont sont enseignées les probabilités (le « comment ») et sur les retombées ou les effets de cet enseignement (le « pourquoi ». Cette dernière considération fait écho à un des constats énoncés dans la section précédente, à savoir qu'il peut être pertinent d'opérer une mise en relation de l'apprentissage et de l'enseignement, plutôt que de regarder l'enseignement de manière isolée, sans prendre en considération l'apprentissage qui en est corolaire.

Dans ce sens, nous pensons que cette étude conjointe du « quoi », du « quand », du « comment » et du « pourquoi » de l'enseignement des probabilités pourrait par exemple se faire à travers une réflexion didactique sur l'articulation des approches probabilistes théorique et fréquentielle dans l'enseignement des probabilités ou encore par une réflexion sur la mise en relation de la statistique et des probabilités. Que ce soit par une étude de l'enseignement ordinaire en classe ou par la mise en œuvre d'une ingénierie didactique ou d'une expérimentation didactique, il conviendrait alors de porter attention aux raisonnements développés par les élèves dans ce contexte d'incertitude, notamment en fonction de leur processus de conceptualisation des notions probabilistes en jeu, par exemple les concepts d'échantillon et de variabilité ainsi que la loi des grands nombres. De telles recherches nous apparaissent pertinentes à la fois pour les niveaux primaires et secondaires dans une perspective de comparaison, mais également dans une perspective de transition entre ces deux institutions scolaires, afin de favoriser un arrimage des deux univers.

4.3. Approfondissement des différents usages des TICE

Il nous apparaît crucial de réaliser des travaux qui permettront un approfondissement des différents usages des TICE qui se font et qui pourraient être faits pour le développement du raisonnement probabiliste. C'est d'ailleurs ce que suggèrent Kissane et Kemp (2010), qui ont souligné que, malgré certaines recherches qui font intervenir les TICE dans l'enseignement des probabilités, il subsiste un manque de recherches ayant recouru aux diverses possibilités d'utilisation des TICE, que ce soit des calculatrices, des logiciels ou des sites Internet. En conséquence, nous sommes convaincus de l'importance de poursuivre les travaux de recherche visant à faire l'étude de l'utilisation des TICE pour l'apprentissage et l'enseignement des probabilités ainsi que pour la formation à l'enseignement des probabilités. De telles

recherches pourraient notamment examiner des avantages et des défis de l'utilisation des TICE, des enjeux et des difficultés qui lui sont inhérents, ainsi que ses retombées.

4.4. Regard sur la formation à l'enseignement des probabilités

Nous jugeons finalement qu'un important travail de recherche est également nécessaire relativement à la formation à l'enseignement des probabilités. En effet, le faible accent mis sur les probabilités dans la formation à l'enseignement a été souligné par des auteurs de différents pays (par exemple Batanero *et al.*, 2010 ; Begg & Edwards, 1999 ; Theis, 2012). Ainsi, étant donné les besoins de formation actuels, il nous semble que cet effort scientifique pourrait être orienté à la fois sur la formation initiale et sur la formation continue. Celui-ci permettra notamment de mieux connaître le contenu spécifiquement dédié à l'enseignement des probabilités dans la formation à l'enseignement, et éventuellement, pour travailler à son amélioration. En ce qui concerne la formation continue, davantage d'initiatives pourraient être offertes aux enseignants en exercice. En conséquence, il serait bénéfique de mener davantage de recherche-action (Guay, Dolbec & Prud'homme, 2016) et de recherche collaborative (Bednarz, 2013) concernant l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, ce qui va dans le sens d'une proposition de Shaughnessy (1992), qui en a appelé d'une collaboration entre les chercheurs et les enseignants pour développer une meilleure compréhension de l'apprentissage et de l'enseignement des probabilités. En plus de mener à la production de nouveaux savoirs scientifiques, ces recherches pourraient stimuler le développement professionnel des enseignants qui y participeront et ceux-ci pourraient alors devenir des agents multiplicateurs dans leur milieu. Pour alimenter ces initiatives de formation, il existe déjà des ressources didactiques utiles qui peuvent être considérées. En effet, plusieurs ouvrages ont été publiés sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire, avec des sections réservées aux probabilités (par exemple Van de Walle et Lovin, 2007 ; 2008a ; 2008b) alors que d'autres ouvrages se consacrent entièrement à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités (par exemple, Glaymann & Varga, 1973 ; Glaymann, 1976a ; Glaymann, 1976b).

Conclusion

En terminant, il convient de souligner qu'il y a dix ans, au regard de l'impressionnante quantité des travaux contemporains, Jones et Thornton (2005) ont conclu leur travail de recension d'écrits en énonçant la remarque suivante : « Le verdict reste inconnu quant à savoir si les recherches de la période contemporaine ont permis d'apporter les soutiens nécessaires aux apprenants et aux enseignants » (p. 83, traduction libre). Aujourd'hui, nous ne sommes pas plus convaincus que ces recherches trouvent écho dans les salles de classe du primaire jusqu'à l'université,

malgré quelques signes d'amélioration encourageants. En effet, malgré la présence accrue des probabilités dans la plupart des curriculums des écoles primaire et secondaire (Batanero, 2014 ; Henry, 2010 ; Jones *et al.*, 2007), ce qui est notamment le cas au Québec (Caron, 2002 ; Gattuso & Vermette, 2013 ; Savard & DeBlois, 2005), la qualité de leur apprentissage et de leur enseignement dans les classes reste largement méconnue. Ce constat ne se limite certes pas au domaine des probabilités, mais il n'en est pas moins préoccupant pour autant, si ce n'est que pour l'importance cruciale que revêt le développement d'un raisonnement probabiliste éclairé chez les citoyens en devenir. En conséquence, bien du chemin reste à faire, mais celui-ci s'annonce aussi riche qu'intrigant.

Bibliographie

- ALBERT J. (2006), Interpreting probabilities and teaching the subjective viewpoint, dans *Thinking and reasoning with data and chance* (Éds. Burrill & Elliott), 417-433. NCTM, Reston.
- BARBIN E. & LAMARCHE J.-P. (2004), *Histoires de probabilités et de statistiques*, Ellipses, Paris.
- BATANERO C. (2014), Probability teaching and learning, dans *Encyclopedia of mathematics education* (Éd. Lerman), 491-496. Springer, Dordrecht.
- BATANERO C., CONTRERAS J.M. FERNANDES J.A., & OJEDA M.M. (2010), Paradoxical games as a didactic tool to train teachers in probability, Actes de l'*International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.
- BATANERO C., & DÍAZ C. (2012), Training school teachers to teach probability: reflections and challenges, *Chilean Journal of Statistics* **3.1**, 3-13.
- BATANERO C., GODINO J.D. & CANIZARES M.J. (2005), Simulation as a tool to train pre-service school teachers, Actes de *First ICMI African Regional Conference*.
- BATANERO C., GODINO J.D. & ROA R. (2004), Training teachers to teach probability, *Journal of Statistics Education* **12.1**.
- BATANERO C., HENRY M. & PARZYSZ B. (2005), The nature of chance and probability, dans *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (Éd. Jones), 15-37. Springer, New York.
- BATANERO C. & SERRANO L. (1999), The meaning of randomness for secondary school students, *Journal for Research in Mathematics Education* **30.5**, 558-567.
- BEAUD, J.-P. (2016). L'échantillonnage, dans *Recherche sociale. De la problématique à la collecte de données* (Éds. Gauthier & Bourgeois), 251-288. Presses de l'université du Québec, Sainte-Foy.

- BEDNARZ N. (Éd.) (2013), *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, L'Harmattan, Paris.
- BEGG A. & EDWARDS R. (1999), Teachers' ideas about teaching statistics, Actes de *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*.
- BENHSAIN K. (2002), *Conceptions erronées des jeux de hasard selon le niveau de connaissances en statistiques*, Mémoire de Maîtrise, Université Laval.
- BENHSAIN K., TAILLEFER A. & LADOUCEUR R. (2004), Awareness of independence of events and erroneous perceptions while gambling, *Addictive behaviors* **29.2**, 399–404.
- BORDIER J. (2001), Les règles normatives des jugements sur la probabilité, *Bulletin de l'AMQ* **41.3**, 28-38.
- BOROVNIK M. & PEARD R. (1996), Probability, dans *International Handbook of Mathematical Education* (Éds. Bishop & alii), 239-287, Kluwer, Dordrecht.
- BRIAND J. (2005), Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple, *Recherches en didactique des mathématiques* **25.2**, 247-282.
- BRIAND J. (2007), La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe, *Petit x* **75**, 7-33.
- BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. & WARFIELD V. (2002), An experiment on the teaching of statistics and probability, *Journal of Mathematical Behavior* **20**, 363-411.
- BU L. (2008), Computer simulation: engaging preservice mathematics teachers in in-depth investigations of a simply complex problem, Actes de *Society for Information Technology & Teacher Education International Conference*.
- CAMIRAND H. (2014), Jeux de hasard et d'argent, dans *Enquête québécoise sur le tabac, l'alcool, la drogue et le jeu chez les élèves du secondaire, 2013. Évolution des comportements au cours des 15 dernières années* (Éds. Traoré et alii), 149-182, Institut de la statistique du Québec, Québec.
- CARON, F. (2002), Splendeurs et misères de l'enseignement des probabilités au primaire, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 85-96.
- CHAUMONT L., MAZLIAK L. & YOR M. (2004), Quelques aspects de l'oeuvre probabiliste, dans *L'héritage de Kolmogorov en mathématiques* (Éds. Charpentier & alii), 55-79. Belin, Paris.

- CHERNOFF E. (2009), *Subjective probabilities derived from the perceived randomness of sequences of outcomes*, Thèse de Doctorat, Simon Fraser University.
- CORTER J.E. & ZAHNER D.C. (2007), Use of external visual representations in probability problem solving, *Statistics Education Research Journal* **6.1**, 22-50.
- DAVID F.N. (1962), *Games, gods and gambling: The origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era*, Griffin, Londres.
- DERRIENNIC Y. (2003), Pascal et les problèmes du chevalier de Méré, *Gazette des mathématiciens* **97**, 45–71.
- DUBOIS P. (2002), *Étude du phénomène des fausses conceptions en probabilités et statistiques chez des jeunes adultes québécois*, Mémoire de Maîtrise, Université du Québec à Montréal.
- DUPIUS C. & ROUSSET-BERT S. (1998), De l'influence des représentations disponibles sur la résolution de problèmes élémentaires de probabilité et sur l'acquisition du concept d'indépendance, *Annales de didactiques et de sciences cognitives* **6**, 67-87.
- EVEN R. & KVATINSKY T. (2010), What mathematics do teachers with contrasting teaching approaches address in probability lessons?, *Educational studies in mathematics* **74.3**, 207-222.
- FALK R. (1983), Experimental models for resolving probabilistic ambiguities', Actes du *Seventh international conference on the psychology of mathematics*, 319-325.
- FISCHBEIN E. (1975), *The intuitive source of probabilistic thinking in children*, Reidel, Dordrecht.
- FISCHBEIN E. & GAZIT A. (1984), Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?, *Educational studies in mathematics* **15**, 1-24.
- FISCHBEIN E., NELLO M.S. & MARINO M.S. (1991), Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents, *Educational studies in mathematics* **22.6**, 523-549.
- FISCHBEIN E., PAMPU I. & MINZAT I. (1970), Comparison of ratios and the chance concept in children, *Child development* **41.2**, 377-389.
- FISCHBEIN E. & SCHNARCH D. (1997), The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education* **28.1**, 96–105.

GARFIELD J. & AHLGREN A. (1988), Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research, *Journal for Research in Mathematics Education* **19.1**, 44-63.

GATTUSO L. & VERMETTE S. (2013), L'enseignement de statistiques et probabilités au Canada et en Italie, *Recherches et perspectives - Statistique et Enseignement* **4.1**, 107-129.

GLAYMANN M. (1976a), Les probabilités à l'école élémentaire, *Educational Studies in Mathematics* **6.4**, 389-393.

GLAYMANN M. (1976b), Où le premier n'est pas toujours premier... pièce probabiliste en trois actes pour des enfants de 10 ans, *Educational Studies in Mathematics* **7.1**, 83-88.

GLAYMANN M. & VARGA T. (1973), *Les probabilités à l'école*, Cedic, Paris.

GRATCH G. (1959), The development of the expectation of the non-independence of random events in children, *Child Development* **30**, 217-227.

GRAS R. & TOTOHASINA A. (1995a), Chronologie et causalité, sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. Méthodologie et corollaires de la mise en évidence de ces conceptions, *Recherches en didactique des mathématiques* **15.1**, 49-95.

GRAS R. & TOTOHASINA A. (1995b), Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des implications : implications - similarité - corrélation, *Educational studies in mathematics* **28**, 337-33.

GRATCH G. (1959), The development of the expectation of the non-independence of random events in children, *Child Development* **30**, 217-227.

GREEN D.R. (1983), A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16, Actes de *First International Conference on Teaching Statistics*, 766-783.

GREEN D.R. (1988), Children's understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years, Actes de *Second International Conference on Teaching Statistics*, 287-291.

GREEN D.R. (1989), School's pupil's understanding of randomness, dans *Studies in mathematics education. The teaching of statistics* (Éd. Morris), 27-39, Unesco, Paris.

GREEN D.R. (1990), A longitudinal study of pupil's probability concepts, Actes de *Third international conference on teaching statistics*, 320-328.

GRENON V., LAROSE F, BOURQUE J. & BÉDARD J. (2010), The impact of using pupils' daily practices as well as computerized simulators as a teaching medium on

motivation and knowledge construction regarding probabilities among high school pupils, Actes de *International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

GUAY M.-H., DOLBEC A. & PRUD'HOMME L. (2016), La recherche-action, dans *Recherche sociale. De la problématique à la collecte de données* (Éds. Gauthier & Bourgeois), 539-578. Presses de l'université du Québec, Sainte-Foy.

HACKING I. & DUFOUR M. (2004), *L'ouverture au probable. Éléments de logique inductive*, Armand Colin, Paris.

HENRY M. (1999), L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, *Repères-IREM* **36**, 15-34.

HENRY M. (2000), Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités, *Gazette des mathématiciens* **84**, 49-56.

HENRY M. (2001), *Autour de la modélisation en probabilités*, Presses Universitaires Franc-Comtoises, Paris.

HENRY M. (2009), Émergence de la probabilité et enseignement : définition classique, approche fréquentiste et modélisation, *Repères-IREM* **74**, 67-89.

HENRY M. (2010), Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités, *Statistique et Enseignement* **1.1**, 35-45.

HENRY M. & PARZYSZ B. (2011), Simulating random experiments with computers in the classroom: Indispensable but not so simple, Actes de *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME7)*.

JESSON J.K, MATHESON L. & LACEY F.M. (2011), *Doing your literature review. Traditional and systematic techniques*, SAGE Publications, Londres.

JONES G.A., LANGRALL C.W. & MOONEY E.S. (2007), Research in probability: responding to classroom realities, dans *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Éd. Lester), 909-956, Information Age Publishing Inc, Charlotte.

JONES G.A., LANGRALL C.W., THORNTON C.A. & MOGILL, A.T. (1997), A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability, *Educational studies in mathematics* **32.2**, 101-125.

JONES G.A., LANGRALL C.W., THORNTON C.A. & MOGILL, A.T. (1999), Students' probabilistic thinking in instruction, *Journal for research in mathematics education* **30.5**, 487-519.

JONES G.A., LANGRALL C.W., THORNTON C.A., MOONEY E.S., WARES A., JONES M.R., PERRY B., PUTT I.J. & NISBET S. (2001), Using students' statistical thinking to inform instruction, *Journal of mathematical behavior*, **20.1**, 109-144.

- JONES G.A. & THORNTON C.A. (2005), An overview of research into the teaching and learning of probability, dans *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (Éd. Jones), 65-92, Springer, New York.
- KAHNEMAN D., SLOVIC P. & TVERSKY A. (1982), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, Cambridge University Press, Cambridge.
- KAHNEMAN D. & TVERSKY A. (1972), Subjective probability: A judgment of representativeness, *Cognitive psychology* **3**, 430-454.
- KAHNEMAN D. & TVERSKY A. (1982), On the study of statistical intuitions, *Cognition* **11**, 123-141.
- KIEREN T. & SIERPINSKA A. (2000), Mathematics education & didactique des mathématiques: Is there a reason for living separate lives?, Actes de *Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group (CMESG)*, 61-79.
- KISSANE B. & KEMP M. (2010), Teaching and learning probability in an age of technology, Actes de *Fifteenth Asian Technology Conference in Mathematics*.
- KOLMOGOROV A. N. (1956), *Foundations of the theory of probability*, Chelsea Publishing Company, New York. (2^e éd. anglophone, travail original publié en 1933)
- KONOLD C. (1989), Informal conceptions of probability, *Cognition and instruction* **6.1**, 59-98.
- KONOLD C. (1991), Understanding students' beliefs about probability, dans *Radical constructivism in mathematics education* (Éd. von Glasersfeld), 139-156, Kluwer, Dordrecht.
- KONOLD C. (1995), Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics, *Journal of Statistics Education* **3.1**, 1-9.
- KONOLD C., MADDEN S., POLLATSEK A., PFANNKUCH M., WILD C., ZIEDINS I., FINZER W., HORTON N.J. & KAZAK S. (2011), Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability, *Mathematical Thinking and Learning* **13.1**, 68-86.
- KONOLD C., POLLATSEK A., WELL A., LOHMEIER J. & LIPSON A. (1993), Inconsistencies in students' reasoning about probability, *Journal for Research in Mathematics Education* **24.5**, 392-414.
- LADOUCEUR R. (2004), Comportements de jeu et jeu pathologique, *Atout hasard. Bulletin d'information du Centre québécois d'excellence pour la prévention et le traitement du jeu* **6.2**.

LADOUCEUR R. (2005), Connaissances en mathématiques et jeux de hasard et d'argent, *Atout hasard. Bulletin d'information du Centre québécois d'excellence pour la prévention et le traitement du jeu* **7.1**.

LADOUCEUR R., FERLAND F. & FOURNIER P.M. (2003), Correction of erroneous perceptions among primary school students regarding the notions of chance and randomness in gambling, *American Journal of Health Education* **34.5**, 5-10.

LADOUCEUR R., FERLAND F. & VITARO F. (2004), Prevention of problem gambling : Modifying misconceptions and increasing knowledge among Canadian youths, *The Journal of Primary Prevention* **25.3**, 329-335.

LADOUCEUR R., SYLVAIN C. & BOUTIN C. (2000a), Le jeu pathologique, *Revue Québécoise de Psychologie* **21.1**, 21-35.

LADOUCEUR R., SYLVAIN C., BOUTIN C. & DOUCET C. (2000b), *Le jeu excessif - Comprendre et vaincre le gambling*, Les Éditions de l'Homme, Montréal.

LAHANIER-REUTER D. (1999), *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*, Presses universitaires de France, Paris.

LAPLACE P.S. (1995), *Philosophical essay on probabilities*, Springer-Verlag, New-York. (Travail original publié en 1825)

LAROSE F., BOURQUE J. & FREIMAN V. (2010), The effect of contextualising probability education on differentiating the concepts of luck, chance and probabilities among middle and high school pupils in Quebec, Actes de *International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

LECOUTRE M.-P. (1992), Cognitive Models and Problem Spaces in "Purely Random" Situations, *Educational studies in mathematics* **23.6**, 557-568.

LECOUTRE M.-P. & DURAND J.-L. (1988), Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire, *Educational studies in mathematics* **19.3**, 357-368.

LECOUTRE M.-P., DURAND J.-L. & CORDIER J. (1990), A Study of two Biases in Probabilistic Judgments: Representativeness and Equiprobability, *Advances in Psychology* **68**, 563-575.

LECOUTRE M.-P. & FISCHBEIN E. (1998), Évolution avec l'âge de «misconceptions» dans les intuitions probabilistes en France et en Israël, *Recherches en didactique des mathématiques* **18.3**, 311-331.

LINDLEY D.V. (1980), *Introduction to probability and statistics from the Bayesian viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge.

MAHEUX J.-F. & THIBAUT M. (2012), Le rôle de l'évidence : une expérience en probabilité avec la technologie, Actes de *Rencontre Interuniversitaire Recherche en Enseignement des Mathématiques*.

MARSOLAIS C. (1997), *Les conceptions équiprobabilistes d'élèves québécois du secondaire*, Mémoire de Maitrise, Université du Québec à Montréal.

MARTIN I., GUPTA R. & DEREVENSKY J. (2007), Participation aux jeux de hasard et d'argent, dans *Enquête québécoise sur le tabac, l'alcool, la drogue et le jeu chez les élèves du secondaire* (Éd. Tremblay), 125-144, Institut de la statistique du Québec, Québec.

MARTIN V. (2010), *Quand rien n'est sûr, tout est possible : l'apprentissage des probabilités chez des élèves à risque*, Éditions Bande didactique, Montréal.

MARTIN V. (2014), *Étude des interventions didactiques dans l'enseignement des probabilités auprès d'élèves jugés ou non en difficulté en mathématiques en classes ordinaires du primaire*, Thèse de Doctorat, Université de Sherbrooke, Québec.

MARTIN V. & MAI HUY K. (2015), Une réflexion didactique sur des activités pour penser l'enseignement-apprentissage des probabilités et des statistiques à l'école primaire, *Bulletin AMQ* **55.3**, 50-67.

MARTIN V. & THEIS L. (2009), L'apprentissage des probabilités à travers la résolution d'une situation-problème au troisième cycle, *Vivre le primaire (compléments en ligne)* **22.2**, 1-8.

MARTIN V. & THEIS L. (2011), La résolution d'une situation-problème probabiliste en équipe hétérogène: le cas d'une élève à risque du primaire, *Nouveaux Cahiers de la Recherche en Éducation* **14.1**, 49-70.

MARTIN V. & THEIS L. (sous presse), L'articulation des perspectives fréquentielle et théorique dans l'enseignement des probabilités : regard sur un changement de posture chez un enseignant du primaire, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*.

MONGEAU, P. (2011), *Réaliser son mémoire ou sa thèse. Côté jeans et côté tenue de soirée*. Presses de l'Université du Québec, Québec.

OFFENBACH S.I. (1965), Studies of children's probability learning behavior 11: Effect of method and event frequency at two age levels, *Child Development* **36**, 952-961.

PARZYSZ, B. (2007), Expérience aléatoire et simulation : le jeu de croix ou pile. Relecture actuelle d'une expérimentation déjà un peu ancienne, *Repères-IREM* **66**, 27-44.

- PARZYSZ, B. (2009), De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation, *Repères-IREM* **74**, 91-103.
- PARZYSZ, B. (2011), Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités, *Annales de didactiques et de sciences cognitives* **16**, 127-147.
- PIAGET J. & INHELDER B. (1951), *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Presses universitaires de France, Paris.
- POIRIER L., & CARBONNEAU A.-M. (2002), Expérimentation d'un conte probabiliste dans une classe multi-âges du premier cycle du primaire, *Instantanées mathématiques* **38.3**, 4-12.
- PRATT D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for research in mathematics education* **31.5**, 602-625.
- RIOUX M. (2012), *Évolution des projets de formation de futurs enseignants au primaire au contact de situations probabilistes*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal.
- ROUAN O. (1990), *Conceptions probabilistes chez des élèves de 18-19 ans*, Mémoire de Maîtrise, Université du Québec à Montréal.
- ROUAN O., & PALLASCIO R. (1994), Conceptions probabilistes d'élèves marocains du secondaire, *Recherches en didactique des mathématiques* **14.3**, 393-428.
- ROY A. (2005), *Manifestations d'une pensée complexe chez un groupe d'étudiants-maîtres au primaire à l'occasion d'un cours de mathématiques présenté selon une approche philosophique*, Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal.
- SAVARD A. (2008), *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision*, Thèse de Doctorat, Université Laval.
- SAVARD A. (2010), Simulating the risk without gambling: Can student conceptions generate critical thinking about probability?, Actes de l'*International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.
- SAVARD A. (2014), Developing probabilistic thinking: What about people's conceptions?, dans *Probabilistic thinking* (Éds. Chernoff & Sriraman), 283-297, Springer, New York.
- SAVARD A. & DEBLOIS L. (2005), Un cadre théorique pour éclairer l'apprentissage des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision à l'égard des jeux de hasard et d'argent, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 61-76.

SAVARD A., FREIMAN V., THEIS L. & LAROSE F. (2013), Discussing virtual tools that simulate probabilities: What are the middle school teachers' concerns?, *McGill Journal of Education* **48.2**, 403-423.

SHAUGHNESSY J.M. (1992), Research in probability and statistics: Reflections and directions?, dans *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning* (Éd. Grouws), 465-494, Macmillan, New York.

SIEGEL S. & ANDREWS J.M. (1962), Magnitude of reinforcement and choice behavior in children, *Journal of Experimental Psychology* **63**, 337-341.

STEINBRING H. (1984), Mathematical concepts in didactical situations as complex systems: the case of probability, dans *Theory of mathematics education (TME: ICME 5): occasional paper 54* (Éds. Steiner & Balacheff), 56-88, IDM, Bielefeld.

STEINBRING H. (1989), La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste. Une conception épistémologique pour l'analyse du processus d'enseignement, *Annales de didactiques et de sciences cognitives* **2**, 191-215.

STEINBRING H. (1991), The theoretical nature of probability in the classroom, dans *Chance encounters: probability in education* (Éds. Kapadia & Borovcnik), 135-168, Kluwer, Amsterdam.

STEVENSON H. & ZIGLER E.F. (1958), Probability learning in children, *Journal of Experimental Psychology* **56**, 185-192

STOHL H.L. & HOLLEBRANDS K.F. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology, Actes de l'*International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI Study 18).

STOHL H.L & TARR J.E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools, *Journal of mathematical behavior* **21**, 319-337.

THEIS L. (2012). Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du primaire et du préscolaire? À la recherche des mathématiques dans une séquence sur l'enseignement des probabilités, dans *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques* (Éds. Proulx & alii), 181-204, Presses de l'Université du Québec, Québec.

THEIS L. & SAVARD A. (2010a), Linking probability to real-world situations: How do teachers make use of the mathematical potential of simulation programs?, Actes de l'*International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

THEIS L. & SAVARD A. (2010b), Recours à un simulateur pour enseigner les probabilités: quels défis et occasions pour des enseignants du début du secondaire?, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 263-272.

- THIBAUT M. (2011a), *Apprentissage des probabilités chez des élèves du secondaire dans une séquence d'enseignement basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent : émergence de conceptions*, Mémoire de Maitrise, Université du Québec à Montréal.
- THIBAUT M. (2011b), *Apprentissage des probabilités pour des élèves du secondaire dans une séquence d'enseignement basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent : émergence de conceptions*, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 105-114.
- THIBAUT M. (2015), *Utiliser les mathéma-TIC pour enseigner les probabilités*, *Revue Envol (GRMS)* **165**, 9-13.
- TVERSKY A. & KAHNEMAN D. (1971), *Belief in the law of small numbers*, *Psychological Bulletin* **76.2**, 105-110.
- TVERSKY A. & KAHNEMAN D. (1973), *Availability: a heuristic for judging frequency and probability*, *Cognitive psychology* **5**, 207-232.
- TVERSKY A. & KAHNEMAN D. (1974), *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, *Science* **185**, 1124-1131.
- VAN DE WALLE J. & LOVIN L.H. (2007), *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage. Tome 1*, ERPI, Montréal.
- VAN DE WALLE J. & LOVIN L.H. (2008a), *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage. Tome 2*, ERPI, Montréal.
- VAN DE WALLE J. & LOVIN L.H. (2008b), *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage. Tome 3*, ERPI, Montréal.
- VON MISES R. (1952), *Probabilities, statistics and truth*, William Hodge, Londres. (Travail original publié en 1928)
- VU NHU T.H. (2005), *La notion de probabilité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques au lycée*, Mémoire de master, Université de pédagogie de Hochimihn Ville, Vietnam.
- VU NHU T.H. (2009), *Une étude didactique de l'introduction dans l'enseignement mathématique vietnamien de notions statistiques dans leurs liens avec les probabilités*, Thèse de doctorat, Université Joseph-Fournier – Grenoble I, France.
- WATSON J.M. & KELLY B.A. (2004), *Expectation versus variation: students' decision making in a chance environment*, *Canadian journal of science, mathematics and technology education* **4.3**, 371-396.
- WATSON J.M. & MORITZ J.B. (2000), *Development of understanding of sampling for statistical literacy*, *Journal of mathematical behavior* **19.1**, 109-136.

WATSON J.M. & MORITZ J.B. (2003), Fairness of dice: a longitudinal study of students' beliefs and strategies for making judgments, *Journal for research in mathematics education* **34.4**, 270-304.

WATSON J.M. (2000), Preservice mathematics teachers' understanding of sampling: intuition or mathematics, *Mathematics teacher education and development* **2**, 121-135.

WATSON J.M. (2006), Assessing the development of important concept in statistics and probability, dans *Thinking and reasoning with data and chance* (Éds. Burrill & Elliott), 61-75, NCTM, Reston.

WATSON J.M., COLLIS K.F. & MORITZ J.B. (1997), The development of chance measurement, *Mathematics education research journal* **9.1**, 60-82.

WAY J. (2003), *The development of children's notions of probability*, Thèse de Doctorat, University of Western Sydney

ZIMMERMANN G. (2002), *Students' reasoning about probability simulations during instruction*, Thèse de Doctorat, Illinois State University.

VINCENT MARTIN

Université du Québec à Trois-Rivières

Campus Drummondville

vincent.martin@uqtr.ca

MATHIEU THIBAUT

Université du Québec à Montréal

uqammathieuthibault@gmail.com