RAYMOND DUVAL ET FRANÇOIS PLUVINAGE

APPRENTISSAGES ALGEBRIQUES

« *Le nombre est dans l'art comme dans la science. L'algèbre est dans l'astronomie, et l'astronomie touche à la poésie ; l'algèbre est dans la musique, et la musique touche à la poésie.*

L'esprit de l'homme a trois clés qui ouvrent tout : le chiffre, la lettre, la note. »

Victor Hugo (1840). *Les Rayons et les Ombres* (extrait de la fin de la Préface)

PREMIERE PARTIE : POINTS DE VUE SUR L'ALGEBRE ELEMENTAIRE ET SON ENSEIGNEMENT

Abstract. Standpoints on elementary algebra and its teaching. This first article of a series of two presents on teaching elementary algebra different standpoints, not always easy to reconcile with each other; a second article will cover activities to promote the learning of algebra. The expectations expressed by the institution on this learning are determined by the common uses of algebra in everyday or professional life, such as the introduction and use of formulas in a spreadsheet. But the results observed at the end of compulsory schooling are clearly insufficient. From a cognitive standpoint, the phased curriculum of algebra does not appear satisfactory, especially not taking into account the difference between symbolic writing and the natural language. The historical view shows, before the use of algebraic notation, the use of algorithmic processes significantly more advanced than the beginnings of algebra, so difficult to transpose in education; but it also points out that following the invention of printing, writing algebraic and relative numbers have arisen simultaneously, which deserves consideration for teaching algebra. Our analysis of the treatment required by algebraic problem solving first highlights the role of the functional designation, next to the direct designation, and the crucial importance of a commonly misunderstood operation, namely that of renaming considered objects. Then arose the fundamental semiotic distinction for analyzing the specific cognitive functioning for processing complete expressions in algebra, namely between a sign and its occurrences.

Résumé. Ce premier article d'une série de deux expose sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire des points de vue différents, pas toujours faciles à concilier les uns avec les autres ; un second article portera sur des activités destinées à favoriser l'apprentissage de l'algèbre. Les attentes exprimées par l'institution concernant cet apprentissage sont déterminées par les usages répandus de l'algèbre dans la vie courante ou professionnelle, comme par exemple l'introduction et l'usage de formules dans un tableur. Mais les résultats observés à l'issue de la scolarité pour tous sont manifestement insuffisants. Du point de vue cognitif, les progressions mises en place dans les programmes d'enseignement de l'algèbre n'apparaissent pas satisfaisantes, méconnaissant notamment l'écart entre l'écriture

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 117 -152.

symbolique et la langue naturelle. Le regard historique montre, avant l'usage de l'écriture algébrique, l'emploi de traitements algorithmiques sensiblement plus avancés que ceux des débuts de l'algèbre, donc difficilement transposables dans l'enseignement ; mais il signale aussi qu'à la suite de l'invention de l'imprimerie, l'écriture algébrique et les nombres relatifs ont surgi simultanément, ce qui mérite considération pour l'enseignement de l'algèbre. Notre analyse des traitements exigés par les résolutions algébriques de problèmes met tout d'abord en évidence le rôle de la désignation fonctionnelle à côté de la désignation directe et l'importance cruciale d'une opération usuellement méconnue, à savoir celle de redésignation des objets en jeu. Puis est posée la distinction sémiotique fondamentale pour analyser le fonctionnement cognitif propre aux traitements d'expressions complètes en algèbre, à savoir celle entre un signe et ses occurrences.

Mots-clés. Algèbre élémentaire, Formules, Désignation directe, Désignation fonctionnelle, Redésignation, Occurrences d’un signe.

Introduction

La complexité des problèmes soulevés par l’enseignement de l’algèbre élémentaire nous a conduits à envisager une étude en deux volets sur ce sujet. Cet article qui présente le regard porté sur l’algèbre depuis plusieurs points de vue constitue le premier volet. Il s’agit donc d’une analyse qui peut être qualifiée de préliminaire en termes d’ingénierie didactique (Artigue, 1987, pp. 287 et 288). Le lecteur ne s’étonnera donc pas de trouver dans cet article peu de références aux nombreux documents didactiques portant sur l’algèbre. Le second volet de notre étude s’appuiera davantage sur de telles citations, puisqu’il portera sur des activités d’enseignement visant à favoriser l’apprentissage de l’algèbre pour tous les élèves.

1. Point de vue institutionnel sur l’enseignement de l’algèbre de 11 à 15 ans

1.1. Objectifs institutionnels et analyse cognitive de résultats d’évaluation

La pratique systématique d’évaluation des acquis est désormais bien implantée au niveau international. C’est ainsi que les enquêtes PISA, acronyme de “Programme for International Student Assessment”, ou en français « Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves », ont un retentissement évident au sein des institutions éducatives de nombreux pays. Ces enquêtes s’appliquent, dans trente pays membres de l’OCDE et de onze autres pays partenaires, aux jeunes de 15 ans, cet âge s’expliquant par l’objectif de PISA, qui est de déterminer « dans quelle mesure les élèves qui arrivent en fin d'obligation scolaire ont acquis certaines des connaissances et compétences essentielles pour pouvoir participer pleinement à la vie de nos sociétés modernes, en particulier en compréhension de l'écrit, en mathématiques et en sciences » (Rapport OCDE, 2011, version française, volume 1, p. 18). Les résultats qui retiennent surtout l'attention des responsables des systèmes éducatifs sont d'une part les niveaux de réussite globaux, d'autre part les taux de réussite à certaines des questions posées.

Mais une autre analyse des résultats de PISA peut consister en des comparaisons des réussites à certaines questions. En l'absence de tableaux de croisements des réponses à deux ou plusieurs questions, les résultats communiqués ne permettent pas de procéder à une telle comparaison de manière individuelle, mais ils permettent cependant des comparaisons globales qui sont déjà très révélatrices. Nous avons considéré les rapports les plus récents de PISA (ceux qui concernent les résultats de PISA 2009), mais ceux-ci continuent à s'appuyer largement sur les résultats déjà obtenus en 2003 et qui constituent donc des références toujours valides.

Considérons deux des questions extraites de l'enquête internationale PISA de 2003. Elles portent uniquement sur l'utilisation de formules. Dans la première, les lettres correspondent au codage des marges d'un tableau et doivent être mise en correspondance avec une formule.

- ***La meilleure voiture (Best car)*** proposait la formule suivante pour un niveau de qualité de véhicules :

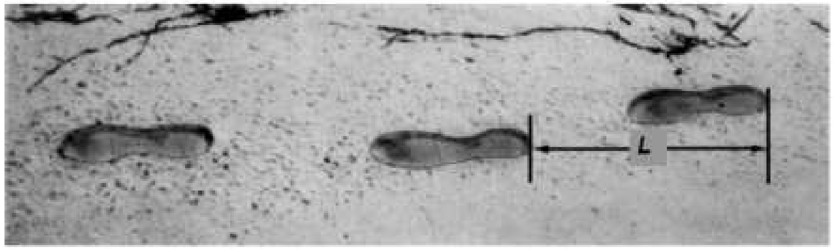
  $$(3 \text{ x } S) + F + E + T.$$

  Il s'agissait de faire son calcul pour les valeurs S=3, F=1, E=2, T=3 (valeurs à lire dans un tableau).

- ***Marche à pied (Walking)***

  La seconde question considérée est reproduite en Figure 1. Une formule y est indiquée, comportant un terme fractionnaire : $\frac{n}{L} = 140$.

MARCHE A PIED



L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas L est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule $\frac{n}{L} = 140$ donne un rapport approximatif entre n et L,

où :

n = nombre de pas par minute,

L = longueur de pas en mètres.

Question 1 : MARCHE À PIED *M124Q01 - 0 1 2 9*

Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

Figure 1. La question « Walking » de PISA 2003 dans sa version française

Le tableau 1 ci-après montre les taux de réussite à ces deux questions, obtenus dans quelques pays auprès d'élèves de 15 ans, c'est à dire après plusieurs années d'enseignement de l'algèbre. On observe une chute considérable de réussite entre les deux questions. Mais le phénomène important est que cette chute se produit pour les populations de pays différents, alors que l'organisation des systèmes éducatifs n'est pas la même dans ces pays. On touche là à un phénomène intrinsèque qui concerne l'introduction de l'algèbre, ou tout au moins l'utilisation de formules. Et peut-être la difficulté est-elle plus importante que ne le laisse paraître ces tableaux. Car, d'un point de vue cognitif, les acquisitions institutionnellement visées au terme de trois ou quatre années d'enseignement de l'algèbre impliquent la réussite à ces deux questions, et non pas seulement à l'une ou à l'autre. Or, comme nous l'avons signalé, les résultats communiqués ne nous permettent pas de savoir quel pourcentage obtient une telle double réussite.

Pays, avec indication de l'effectif interrogé	Taux de réussite
	The best car ➘ Walking
Finlande (56 989)	**76% ➘ 41%**
France (712 101)	**74% ➘ 43%**
Brésil (1 850 984)	**49% ➘ 14%**
USA (3 153 480)	**75% ➘ 28%**

Tableau 1. Résultats observés dans quatre pays

Bien évidemment, l'interprétation de cette chute peut donner lieu à une discussion critique des questions posées. Ainsi on ne fera pas la même analyse de cette chute si l'on pense que ce sont deux questions différentes ou au contraire que les différences, non mathématiques, dans la manière de présenter les données d'un problème, sont négligeables. De même, on peut se demander si ce sont des questions d'algèbre. Car elles portent sur l'utilisation de formules. Et on peut se demander si l'enseignement de l'algèbre aide vraiment les élèves à utiliser des formules, en dehors des mathématiques, sur des données observées dans la réalité ou si, au contraire, cet apprentissage peut être fait indépendamment de l'enseignement de l'algèbre. Nous reviendrons plus loin sur toutes ces questions. Pour l'instant, nous resterons sur le constat massif que l'enquête PISA permet de mettre en évidence.

1.2. Les programmes d'un enseignement pour tous les élèves : trois impasses caractéristiques

La fonction d'un programme d'enseignement est d'organiser une progression pour l'acquisition, sur plusieurs années, d'un complexe de connaissances. Pour l'algèbre il s'agit bien sûr du complexe de connaissances que sont les équations et les inéquations comme méthodes de résolution de problèmes. Ce qui implique une certaine maîtrise du calcul littéral et algébrique. L'organisation de l'enseignement repose sur un découpage de ce complexe de connaissances en différentes notions, techniques, qui vont alors constituer des objectifs pour chaque année d'enseignement d'un cycle. Deux points sont donc essentiels dans l'analyse d'un programme. Il y a le choix d'un complexe de connaissances : il dépend des attentes sociales et des profils curriculaires de formation. Par exemple, enseigner l'algèbre à tous les élèves est-il vraiment nécessaire ? Question tout à fait légitime, vu l'importance des impasses systématiquement observées, mais qui n'est pas d'actualité. Et il y a le point de vue pris en compte pour découper un complexe de connaissance choisi ainsi que la méthode d'analyse mise en œuvre pour effectuer ce découpage. Ce point de vue est évidemment le point de vue mathématique, même si on l'assortit de considérations pédagogiques ou didactiques à l'intention des professeurs. *La méthode de découpage est généralement une analyse en connaissances mathématiquement pré-requises.*

Ainsi, quels que soient les programmes d'introduction à l'algèbre, on retrouve toujours les mêmes impasses caractéristiques sur trois points stratégiques pour la compréhension non pas de « l'élève », mais de centaines de milliers d'élèves : l'introduction de lettres-caméléons, l'écrasement des niveaux d'organisation dans les écritures symboliques et l'oubli de l'écart cognitif entre les écritures symboliques et la langue naturelle. Dans ce qui suit, nous prenons l'exemple du document officiel de 2008 « Du numérique au littéral », en vigueur en France jusqu'en 2015 pour l'organisation d'un enseignement de l'algèbre sur quatre ans, de la 6$^{\text{ème}}$ à la 3$^{\text{ème}}$. En 2015, une consultation a été proposée sur des projets de programmes (Projet de programme pour le Cycle 4 – 9 avril 2015, consultable en ligne sur le site officiel du ministère de l'éducation nationale http://eduscol.education.fr/cid88456/consultation-sur-les-programmes-des-cycles-2-3-et-4.html), mais nous ne voyons pas que ces projets introduisent de sensibles modifications en ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre et les sujets connexes (e. g. les nombres) que nous envisageons dans cette étude.

1.2.1 Le problème des « *différents usages des lettres* » en relation avec « *les différents statuts du signe* = »

Tout d'abord, le texte officiel de 2008 « Du numérique au littéral » met en avant les « différents usages des lettres ». Il en distingue quatre, comme spécifiques de l'algèbre : *variable*, *indéterminée*, *inconnue* et *paramètre*. Et un changement dans l'usage d'une lettre est lié (du moins pour les trois premiers usages) à un changement dans les « différents statuts du signe = » : « symbole exprimant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique », traduction d'« une identité pour rendre compte de l'universalité d'un énoncé toujours vrai », utilisation dans des énoncés « dont on se demande s'ils peuvent être rendus vrais », et utilisation comme symbole d'affectation. *Tout cela implique qu'une même lettre et qu'un même « symbole » dans l'écriture d'une équation peuvent avoir des statuts ou des significations totalement différents, voire « en rupture » les uns par rapport aux autres, sans que rien dans « l'expression algébrique » écrite (formule ou équation ?) ne l'indique.* On peut donc parler d'un symbole et de lettres-caméléons. Au moins pour tous ceux qui ne sont pas mathématiciens ou enseignants de mathématiques, ce qui est la situation des élèves de collège !

Le passage du numérique à un littéral où les lettres se prêtent à des usages polyvalents et sémantiquement incompatibles pose plusieurs questions. Comment introduire les lettres ? Faut-il introduire les lettres en privilégiant un statut, puis introduire progressivement les autres statuts ? Est-ce à partir de l'usage des lettres qu'on perçoit le statut du signe « = » ou est-ce l'inverse ? Cette dernière question s'impose d'autant plus qu'avec le calcul numérique le signe « = » « annonce un résultat ».

Le texte ne s'arrête pas à la première question. S'appuyant sur un exemple d'activité où il s'agit d'élaborer une formule, on se contente de la déclaration suivante : « il y a bien des façons de désigner le nombre de carreaux sur le côté (d'un carré) : par un symbole, par une lettre… Le choix de recourir à une lettre est le fruit d'une convention ». La suite montre que l'*on ne s'intéresse pas à l'opération de désignation à l'aide d'une lettre, opération qui est implicitement considérée comme triviale* pour deux raisons : on s'en tient à la désignation directe par un caractère évidemment conventionnel et on n'a pas à choisir l'objet que l'on va re-désigner. Or l'intérêt du recours à une lettre (un caractère pris dans un alphabet) n'est pas la désignation directe mais *la désignation fonctionnelle.* Et celle-ci implique le choix non pas d'une lettre mais de l'objet que l'on peut désigner directement de manière à pouvoir désigner un autre objet en fonction de l'objet désigné directement. Là est le seuil de l'utilisation algébrique des lettres. Et c'est un peu une boîte noire pour les élèves dans la « phase de mise en équation » pour la « résolution algébrique d'un problème». Car dire qu'elle « nécessite de repérer une grandeur qui va pouvoir s'exprimer de deux façons différentes », c'est en fait formuler deux exigences, qui apparaissent paradoxales au regard des pratiques de désignation dans la langue naturelle, sans donner aux élèves le moyen de prendre conscience de leur caractère spécifiquement mathématique.

L'impasse faite sur la diversité et la complexité des opérations de désignation apparaît dans la réponse à la seconde question. Le texte propose une progression sur quatre ans qui est entièrement centrée sur le statut des lettres : statut de variable en $6^{ème}$, d'indéterminée en $5^{ème}$, d'inconnue en $4^{ème}$ et de paramètre en $3^{ème}$ en liaison bien sûr avec les fonctions affines.

1.2.2 L'écrasement des niveaux d'organisation dans les écritures symboliques.

En « algèbre », les écritures symboliques articulent deux types différents de signes :

- D'une part les lettres et les chiffres, interprétables en termes de nombres, de grandeurs, de quantités, etc. Nous compterons également parmi les écritures numériques celles qui représentent un nombre négatif, tel (-1), ou des nombres particuliers, tels π ou $\sqrt{2}$.
- D'autre part les signes organisateurs d'expressions, c'est à dire d'unités de sens constituées par la combinaison d'au moins trois signes parmi les chiffres ou les lettres et les symboles suivants :
    - o les symboles d'opérations (+, – , $\times$ parfois noté par un simple point ou même sous-entendu, $\div$ ou / ou le trait de fraction horizontal, le décalage vertical pour les exposants),

- o les parenthèses, analogues à la ponctuation dans un texte, pour indiquer des priorités différentes des priorités opératoires usuelles pour ces symboles (exponentiation en premier lieu, multiplication et division ensuite, addition et soustraction enfin)
- o les symboles de relation (= , < , > , ≤ , ≥), permettant de constituer des expressions complètes.

On obtient ainsi trois types d'unités discursives de sens :

- les expressions articulées autour d'un symbole de relation et constituant des expressions complètes (équations, formules, inéquations) parce que susceptibles d'être vraies ou non par exemple : $x > 1$,
- les expressions articulées autour d'un ou plusieurs symboles d'opérations et constituant un membre d'équation ou de formule, c'est-à-dire l'ensemble de tous les signes qui figurent d'un même côté d'un symbole de relation, par exemple $a - 1$ dans $1 - (2 - a) = a - 1$,
- les expressions articulées par un seul symbole d'opération ou marquées par des parenthèses et constituant les termes, par exemple $(2 - a)$ dans l'expression précédente.

Les deux derniers types d'expressions discursives sont des expressions incomplètes (voir infra 3.2). *Ces trois types d'unités discursives correspondent à trois niveaux d'organisation des unités de sens utilisées en algèbre,* et cela se traduit par des opérations de traitement très différentes selon le niveau considéré.

Cette distinction apparaît partiellement dans le texte avec l'opposition entre ce qui est appelé la « résolution de l'équation ou des équations », ou encore le « fonctionnement du calcul littéral pour passer d'une égalité à une autre », et la « transformation d'expressions algébriques ». La résolution d'une équation porte sur la recherche des valeurs (une, plusieurs, aucune, toutes) pour laquelle l'équivalence postulée entre deux expressions d'une même chose est vraie. La transformation d'une expression algébrique (réduction, factorisation, développement, ...) porte sur les seules expressions articulées par des symboles d'opérations. Or dans ces deux cas le texte parle d' « outil de calcul formel » ou de « calcul formel » et fait l'impasse sur *la différence entre les opérations de substitution* que ces deux traitements mobilisent spécifiquement.

La résolution d'équation exige que l'on puisse faire passer des termes d'un membre à l'autre en conservant l'équivalence postulée entre deux expressions d'une même chose. Ainsi le texte donne l'exemple du passage d'une expression complète à une autre « $d = vt$ à $v = d/t$ ». Et on a vu que plus de la moitié de la population ne réussit pas ce passage après plusieurs années d'enseignement, quels que soient les pays ! La transformation d'une expression algébrique, considérée comme un « programme de calcul », consiste en des substitutions d'expression uniquement faites en s'appuyant uniquement sur les propriétés des opérations qui en articulent lettres et chiffres. Le statut des lettres n'y intervient pas comme dans la résolution des équations. Ce type de substitution requiert que l'on puisse, par exemple, reconnaître dans la forme d'écriture d'une expression l'organisation caractéristique d'une identité remarquable, On peut alors avoir des difficultés de visibilité, analogues à celles de la reconnaissance d'une sous-figure dans une figure. Enfin, il y a la substitution qui consiste en l'instanciation de lettres par des valeurs numériques qu'on leur donne afin de trouver la valeur d'une expression complète. Ce type de substitution est caractéristique de l'utilisation des formules et, en ce sens, il s'oppose à la résolution d'une équation. On peut d'ailleurs remarquer que dans ce texte on ne fait pas de réelle distinction entre élaborer une formule et utiliser une formule, alors que les opérations mobilisées sont respectivement la désignation fonctionnelle conduisant à des expressions articulées par des symboles d'opérations et l'instanciation des lettres qui rabat le calcul algébrique sur le calcul numérique.

1.2.3 L'oubli de l'écart cognitif entre écritures symboliques et langue naturelle.

Le paradoxe de l'enseignement de l'algèbre est qu'on ne peut pas se couper de la langue naturelle pour l'introduire, alors que son apport épistémologique et mathématique est au contraire de rompre complètement avec la langue. Il y a là une ambivalence cognitive qui hypothèque très sérieusement tous les choix didactiques, parce que l'écart cognitif entre les productions algébriques et les productions linguistiques — sur la manière de les lire et de discerner leur organisation, d'en dériver d'autres expressions complètes —n'est jamais pris en charge de manière pertinente. Or là se situe l'un des points clés pour faire prendre conscience de la rupture entre le « calcul numérique et le calcul algébrique ».

Il y a tout d'abord la méconnaissance de la variété des opérations de désignation directe et indirecte dans la langue naturelle. En regard, la désignation directe par des lettres paraît simple comme un codage, mais la désignation fonctionnelle qui est spécifique à l'utilisation des lettres en algèbre n'a pas d'équivalent dans la langue naturelle. Si on veut la formuler verbalement il faut recourir à une phrase et pas seulement à un syntagme nominal et encore moins à des substantifs ou à des déictifs. En outre, elle va à l'encontre de toutes les pratiques de désignation qui conduisent à l'élargissement du vocabulaire utilisable et non pas à sa réduction maximale pour désigner des objets. On retrouve donc ici l'impasse évoquée plus haut sur la complexité des opérations de désignation qui pourtant touchent directement au statut des lettres (1.2.1).

Il y a ensuite tous les problèmes que posent les passages entre la langue naturelle et tous les autres types de représentation utilisés en mathématiques, c'est à dire tous les problèmes de conversion. Ici, ils se traduisent par les phénomènes de non congruence qui surgissent entre les énoncés en langue naturelle et les écritures symboliques. Ceux concernant la mise en équations à partir d'énoncés de problèmes sont bien connus. Le texte des programmes semble vouloir les contourner en proposant des problèmes privilégiant l'élaboration de formules à partir de configurations géométriques décomposées en carrés que l'on peut dénombrer. Mais, étrangement, il recourt à des tâches de conversion inverse, en proposant des tâches de description verbale de l'organisation « structurale » des « expressions algébriques ». Intention louable puisque l'expression personnelle en langue naturelle est le moyen nécessaire pour une prise de conscience. Mais une telle description se heurte aux mêmes phénomènes de non congruence que la mise en équations des données d'un énoncé. Car ici il y a un conflit entre la perception de l'organisation d'une écriture autour des signes d'opération ou d'égalité, et sa compréhension mathématique. L'une est déterminée par des critères de symétrie à partir de certains symboles et l'autre est déterminée par la compréhension des propriétés des opérations ou des relations désignées par ces symboles. La description verbale ne peut atteindre son but que si elle accompagne une activité sur un autre type de représentation permettant de basculer de la perception centrée sur une disposition symétrique des signes à une perception centrée sur leur ordre opératoire.

2. Point de vue épistémologique sur l'émergence de l'algèbre

Comme nous venons de le voir dans un cas qui est certes particulier, mais qui correspond à une étude sensiblement plus poussée que dans les autres documents et ouvrages que nous avons pu consulter, les textes de programmes scolaires, les documents d'accompagnement et les manuels, ne portent pas la trace d'une prise de conscience des obstacles à franchir pour entrer dans le monde de l'algèbre élémentaire. Pour l'approche d'une question quelque peu délicate touchant à l'enseignement, comme l'est celle qui nous intéresse ici, l'éclairage qu'apporte l'histoire des mathématiques met souvent en lumière des phénomènes que l'on ne soupçonnait pas. Dans une perspective d'enseignement de l'algèbre, on peut par exemple se poser la question : Auxquelles, des équations ou des relations aujourd'hui exprimées par des formules, convient-il d'attribuer le bénéfice de l'antériorité ? Mais les historiens des mathématiques ne tranchent pas, car les unes et les autres apparaissent dans les traces les plus anciennes de l'activité mathématique.

2.1. L'antiquité : orientation vers des traitements algorithmiques

Les deux papyrus égyptiens qui font autorité en matière de traitements mathématiques sont le papyrus de Moscou, qui date d'environ 1850 ans avant J. C., et le papyrus Rhind rédigé environ 200 ans plus tard par le scribe Ahmès. Ces papyrus, présentés dans Mac Tutor par O'Connor et Robertson (2000), traitent tous deux de problèmes dont certains sont des résolutions d'équations alors que les autres mettent en jeu des relations.

Relevons toutefois que le spectre couvert pas les problèmes où des relations sont en jeu est nettement plus large que celui des résolutions d'équations. Celles-ci apparaissent à propos soit de problèmes numériques (e.g. ceux nommés *aha* : $x + x/n = a$, avec n et a donnés), notamment liés aux techniques de calcul ayant cours à l'époque en Egypte, soit de problèmes de proportions, tels les problèmes 1 à 6 du papyrus Rhind, où il est question de la quantité de grain nécessaire pour obtenir un certain nombre de miches de pain ou de pintes de bière.

Du côté des relations apparaissent des problèmes d'arpentages, de mesures diverses comme masses, volumes, en particulier ceux qui mettent en jeu des pyramides. Les scribes s'intéressaient également à des approximations, comme celles du nombre π (voir un cas en figure 2 : un disque de diamètre 9 et un carré de côté 8 ont des aires proches).

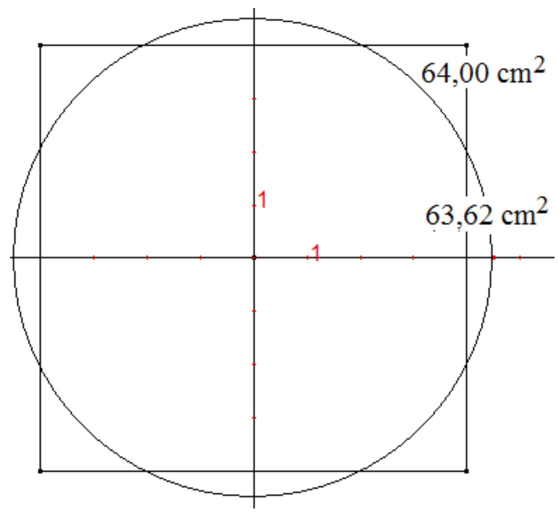


Figure 2. Carré et disque d'aires voisines

Bien sûr, tous les traitements présentés à propos de relations sont numériques, car il ne pouvait être question de calcul formel. Les papyrus montrent comment on traite telle question pour telles et telles valeurs numériques. Mais n'est-ce pas ainsi que l'on procède aujourd'hui encore, quand on montre des techniques opératoires à des élèves de l'école primaire ?

Les relations les plus simples sont faciles à exprimer sans recours à un quelconque symbolisme. Ainsi, le volume d'une pyramide est le tiers du volume du parallélépipède de même base et de hauteur égale ; cela se montre aisément dans le cas particulier du cube découpé en trois pyramides congruentes.

Sur la figure 3, on voit que les trois pyramides EABCD, EBCGF et ECDHG sont congruentes. Le cas général, envisagé par exemple par Démocrite (vers 460 – vers 370 av. J. C.), ainsi que celui des cônes, se démontrent plus difficilement.

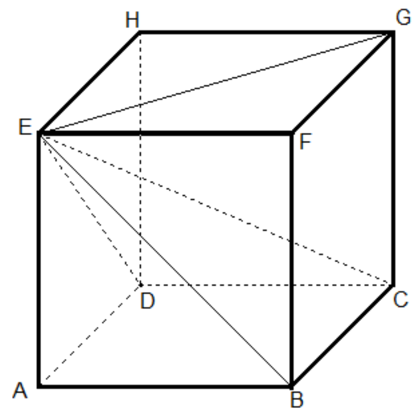


Figure 3. Pyramides égales dans un cube

Les scribes égyptiens s'attaquaient aussi à des relations plus compliquées. Par exemple, celle du tronc de pyramide (figure 4) considéré sur le papyrus de Moscou est représentative d'une situation qui dépasse le premier degré. La formule générale est dans ce cas :

$$\mathrm{V} = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Et ce que le papyrus explicite, c'est le calcul qui permet d'obtenir ce volume, pour les valeurs h = 6, a = 4 et b = 2.

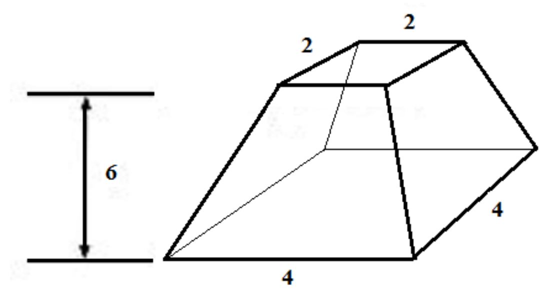


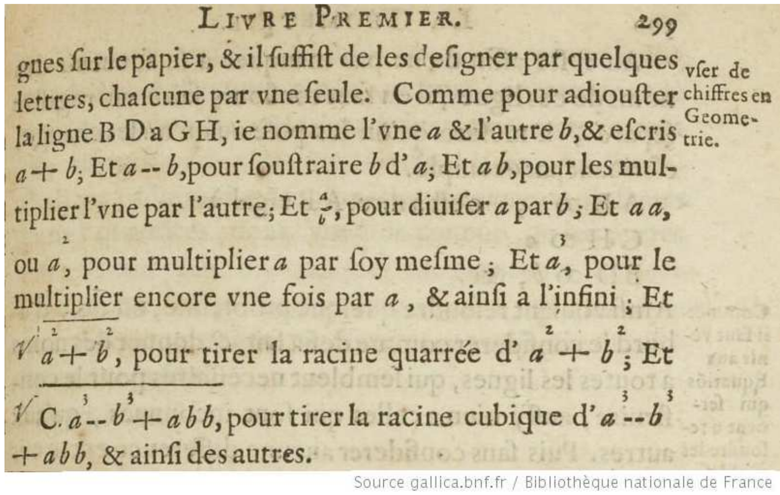
Figure 4. Tronc de pyramide du papyrus de Moscou

On voit sur les exemples indiqués que les papyrus indiquent très nettement une orientation algorithmique. Et ce n'est pas seulement propre aux papyrus égyptiens. Ainsi, des tablettes babyloniennes antérieures, puisque datées de 2000 av. J. C., contiennent des tables de carrés qui permettent le calcul d'un produit *ab* en n'ayant à effectuer que des sommes, des différences et des divisions par deux. Ce qui est mis en œuvre est l'identité que nous écrivons aujourd'hui $ab = [(a + b)^2 - (a - b)^2]/4$. Evidemment les tablettes ne présentent pas une telle écriture symbolique, mais indiquent sur des exemples numériques comment utiliser la table des carrés pour obtenir un produit. Par exemple, si je veux calculer 58×27, je vais consulter la table pour y trouver les carrés de 58 + 27 = 85 et de 58 – 27 = 31, lesquels sont respectivement 7225 et 961. Leur différence est 6264, que l'on divisera deux fois de suite par deux pour obtenir d'abord 3132 et finalement 1566, qui est bien le produit cherché.

Si certaines situations étudiées dans l'antiquité peuvent donner lieu à des propositions d'activités susceptibles d'intéresser des élèves actuels, certaines pouvant d'ailleurs être utilement conduites avec le recours à l'outil informatique comme le tableur, elles se situent le plus souvent à un niveau plus avancé que celui de l'entrée dans l'algèbre. Celle-ci est quant à elle orientée vers la manipulation et l'emploi de l'écriture symbolique, qui n'était nullement en gestation dans l'antiquité. Notre regard sur l'histoire doit plutôt se porter vers l'époque d'apparition de l'écriture symbolique.

2.2. Deux irruptions concomitantes : l'écriture symbolique et les nombres relatifs

L'écriture qui est aujourd'hui familière à tout utilisateur de mathématiques a été mise en place et s'est répandue en une durée de moins de 50 ans, entre 1591 et 1637, ce qui est extrêmement court. Les ouvrages du début de cette période sont d'une lecture pénible pour les non spécialistes, alors que la *Géométrie* de Descartes, dont la figure 5 ci-après reproduit un extrait où l'auteur considère la désignation par des lettres, est un texte qui ne demande pratiquement pas d'effort à un lecteur actuel, sinon pour l'identification de certaines graphies de l'époque (comme par exemple les formes de la lettre s). La date de 1591 est celle de la parution de l'œuvre *In Artem Analyticam Isagoge* de François Viète, dont les historiens s'accordent à considérer qu'elle marque la naissance de l'algèbre symbolique. La date de 1637 est celle de la publication du *Discours de la méthode* de René Descartes, suivi de la *Géométrie*, considérée par l'auteur comme un *essai* d'application de sa méthode.


LIVRE PREMIER. 299

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a+b$; Et $a--b$, pour ſouſtraire b d' a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\, a^3--b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d' a^3--b^3+abb, & ainſi des autres.

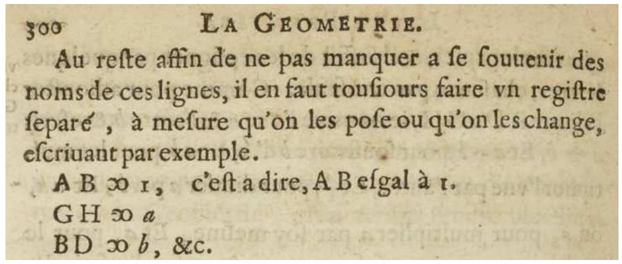
vſer de chiffres en Geometrie.

Figure 5. Reproduction d'un passage de la *Géométrie* dans le *Discours de la Méthode*

Voyons les points clés de l'apparition de notre écriture symbolique. Comme nous l'avons vu, les ingrédients de base de l'écriture symbolique sont évidemment des lettres et des nombres, accompagnés de symboles opératoires à valeur de conjonction, comme « + et – », et de symboles à valeur verbale, en premier lieu desquels figure le symbole d'égalité « = ». Une question naturelle est celle de l'apparition de ces signes. Et la réponse est de nature à surprendre : L'apparition de tous ces signes a précédé de peu la période qui nous a intéressés à propos de l'algèbre : entre 1489, date de publication de l'ouvrage *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, de Johannes Widmann, le premier à introduire les signes « + et – » pour l'addition et la soustraction, et 1557, date de parution du livre de Robert Recorde intitulé *The Whetstone of Witte*, introduisant le symbole d'égalité que nous utilisons.

Une considération de nature socioépistémologique amène à se dire qu'un tel mouvement doit correspondre à une évolution qui ne se limite pas aux mathématiques. Et nous sommes tentés d'invoquer à ce sujet l'invention de l'imprimerie, vers 1440 par Gutenberg, conduisant à substituer aux manuscrits des ouvrages obtenus grâce à des fontes de caractères normalisés.

Pour l'anecdote, notons toutefois que Descartes ne notait pas l'égalité par le symbole « = » mais par le symbole ∝ (le signe ∝ renversé), comme on le voit sur la figure 6, dans un passage par ailleurs extrêmement instructif. En effet, on peut y remarquer le mot « *registre* », souvent utilisé seul en didactique, en raccourci de « registre d'expression ».


300 LA GEOMETRIE.

Au reſte affin de ne pas manquer a ſe ſouuenir des noms de ces lignes, il en faut touſiours faire vn regiſtre ſeparé , à meſure qu'on les poſe ou qu'on les change, eſcriuant par exemple.

AB ∞ 1, c'eſt a dire, AB eſgal à 1.
GH ∞ *a*
BD ∞ *b*, &c.

Figure 6. Signe d'égalité chez Descartes

À présent, si l'on contemple les productions du XVIe siècle qui ont utilisé les signes introduits par Widmann ou Recorde, on ne peut manquer de remarquer, à côté de l'algèbre, l'œuvre de Simon Stevin dans le domaine numérique. Dans *La pratique d'arithmétique*[1], publiée en 1585, Simon Stevin introduisit les signes opératoires, plutôt que de se contenter d'utiliser uniquement des vocables latins.

Par exemple, Stevin énonce la règle des signes comme le *théorème* : « *plus multiplié par plus donne produit plus, & moins multiplié par moins donne produit plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produit moins.* » A titre de démonstration, Stevin propose un cas numérique représentant la situation générale. Il s'agit de (8 – 5)×(9 – 7), accompagné de quelques explications. L'opération ci-contre reproduit exactement la présentation de Stevin (1634, p. 39). On y observe en particulier la présence d'un signe – en début d'une ligne (- 56 + 35).

$$\begin{array}{r} 8 - 5 \\ 9 - 7 \\ \hline -56 + 35 \\ 72 - 45 \quad \\ \hline 6 \quad\quad\quad \end{array}$$

C'est pour des études de ce type que la paternité des nombres négatifs est attribuée à Stevin, par ailleurs connu pour sa contribution au système décimal de numération. Or, si les nombres négatifs ont ainsi cours dans les réflexions de Stevin, c'est en raison de sa vision géométrique des nombres. Sans aller jusqu'à la formalisation des nombres réels qui devra attendre le XIXe siècle, il considère que les nombres correspondent aux points d'une droite graduée. Il peut par exemple affirmer que √8 est un nombre (Ibid. p.9), puis généraliser : « *Thèse IV : Qu'il n'y a aucuns nombres*

[1] La consultation en ligne de ce texte dans une version posthume de 1634 augmentée par Albert Girard (Stevin, 1634) est recommandable. Mais tous les points signalés ici sont conformes à l'ouvrage original (Stevin, 1585), également consultable en ligne.

absurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds » (Ibid. p. 222). Auparavant, il aura affirmé que *nombre n'est point quantité discontinue* (Ibid. p.2) et que c'est à 0, et non pas à 1 comme les mathématiciens de la Grèce antique le posaient, qu'il faut accorder la propriété de ne pas se diviser en parties propres.

Des considérations de nature épistémologique qui précèdent, il résulte qu'il est essentiel d'envisager pour l'introduction de l'algèbre auprès de collégiens des activités mettant en jeu des nombres négatifs en même temps que des nombres positifs et non pas d'introduire les nombres négatifs dans des activités ultérieures. Les programmes de mathématiques français de 2008 n'étaient pas en conformité avec une telle préconisation, car ils introduisaient en classe de cinquième (le « grade 7 » de la désignation internationale des niveaux scolaires) des études d'écritures littérales et seulement un an plus tard en classe de quatrième (grade 8) le produit des nombres relatifs[2]. C'est ce produit, pierre d'achoppement signalée depuis longtemps déjà sur le chemin de l'acquisition des nombres réels (voir par exemple Glaeser, 1981), que nous allons à présent considérer.

2.3. Suivre Descartes pour multiplier les nombres relatifs ?

Le travail sur les formules et les équations s'appuie sur la mise en œuvre de toutes les règles opératoires sur les nombres relatifs. Notamment, les besoins d'utilisation de la distributivité du produit sur la somme, pour factoriser ou développer, sont très fréquents dans ce travail. Mais force est de constater que la présentation de cette distributivité dans l'enseignement mathématique est pour le moins légère. Dans les manuels scolaires de diverses époques et divers pays dont nous avons pu avoir connaissance, la distributivité du produit sur la somme ou bien est une règle affirmée sans aucune justification, ou bien est accompagnée d'une figure représentant deux rectangles de même hauteur accolés : la hauteur commune des rectangles étant par exemple désignée par a et les bases par b et c, cette figure justifie l'égalité

$$a\times(b + c) = a\times b + a\times c.$$

Pour les élèves qui la rencontrent à cette occasion, une telle présentation du produit de deux facteurs comme une aire n'est d'ailleurs pas nouvelle Ainsi, bien des manuels pour l'école primaire présentent des produits d'entiers comme des décomptes de carreaux assemblés en rectangles. Par exemple 3 rangées de 5 carreaux forment un rectangle de 15 carreaux, et si ce rectangle est vu comme constitué de 5 colonnes de 3 carreaux, on y voit une illustration de la commutativité de la multiplication : $3\times5 = 5\times3$.

[2] Il en est de même pour les propositions de programmes de 2015.

Mais le fait qu'une telle présentation du produit s'impose comme la seule vision géométrique de la multiplication peut être doublement catastrophique du point de vue didactique :

- D'une part, le produit de deux nombres représentant des grandeurs se trouve ainsi doté d'une dimension autre que celle de chacun ses facteurs. Les deux facteurs représentent des longueurs et leur produit représente une aire.
- D'autre part, cette représentation par des aires de rectangles est inadaptée au produit de nombres relatifs[3].

Une autre vision géométrique du produit de deux nombres doit donc être recherchée. La consultation du supplément de géométrie au *Discours de la Méthode* de René Descartes, précédemment cité, nous offre une piste pour cette recherche. Ce père de la géométrie analytique, dans le plan baptisé depuis par son nom : *plan cartésien*, considère que $c \times d$ est à c comme d est à 1 (Figure 7).

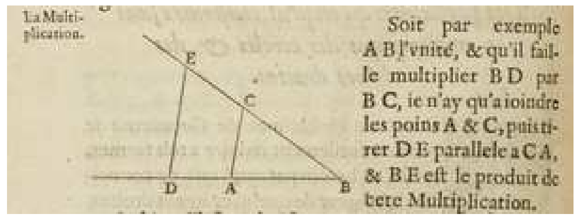


Figure 7. Extrait du Discours de la Méthode, p. 298

Le produit, tel qu'il résulte de la sorte du théorème de Thalès, n'est pas une aire mais une longueur comme chacun de ses facteurs. Dans la figure 7, seules sont représentées deux demi-droites, ce qui limite le produit à celui de deux facteurs positifs. Mais nous pouvons facilement étendre la construction au plan cartésien tout entier et rencontrer ainsi la fameuse *règle des signes* pour le produit des nombres relatifs. Un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra a été utilisé pour la figure 8) permet de représenter le produit de deux nombres a et b quel que soit leur signe. Les points A(a, 0) et B(b, 0) étant choisis sur l'axe des abscisses, on place le point B'(0, b), puis on trace le segment qui unit A au point V(0, 1) et enfin la parallèle à ce segment menée de B'. Cette parallèle rencontrera l'axe des abscisses au point

[3] On pourrait objecter ici la possibilité de mettre en place une convention de sens de parcours du bord des rectangles, d'une manière analogue à la pratique introduite à propos des intégrales définies. Mais la présentation de cette convention serait irréaliste pour les niveaux scolaires qui nous intéressent dans ce texte.

C(ab, 0). L'affichage dans ce logiciel a conduit à veiller à une bonne lecture en mettant entre parenthèses les valeurs de a et b lorsqu'elles sont négatives (cas de -2 sur la figure 8).

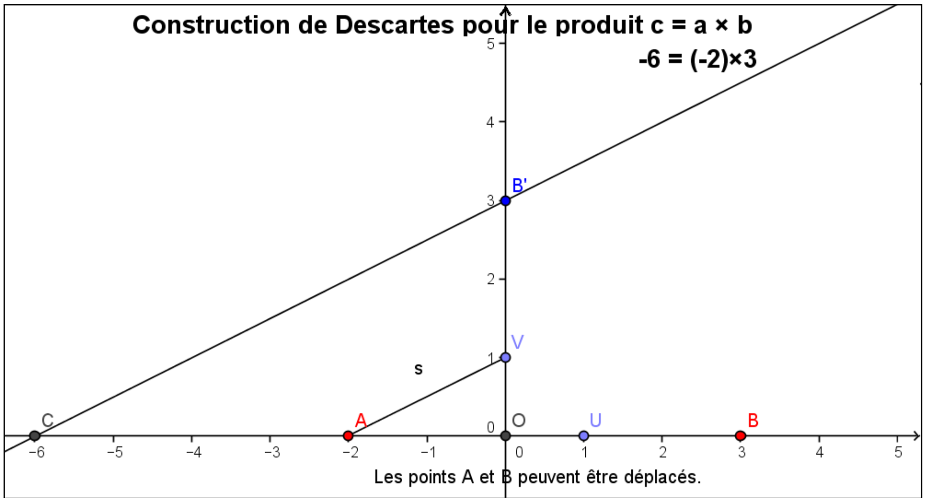


Figure 8. Représentation du produit de deux nombres a et b dans le plan cartésien

Mais la construction de Descartes ne met pas la distributivité du produit sur la somme autant en évidence que ne le fait le produit vu comme aire de rectangle.

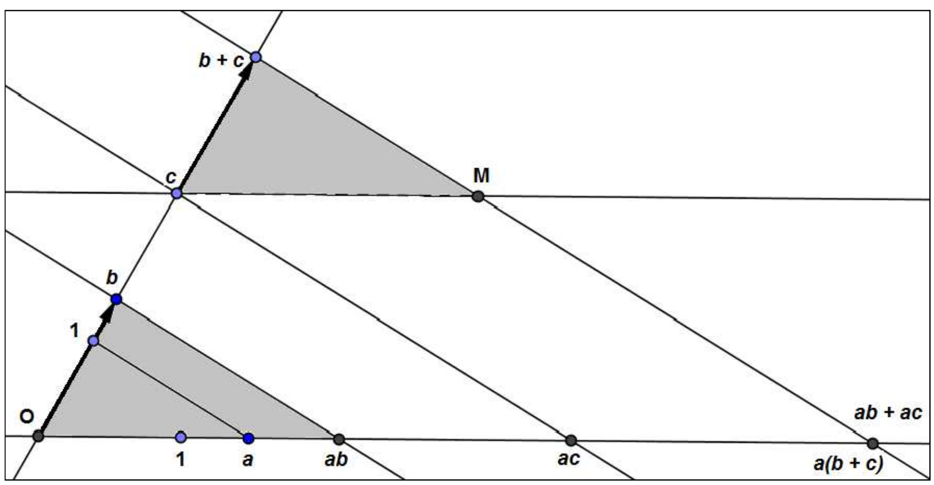


Figure 9. Distributivité $a(b + c) = ab + ac$ dans la construction de Descartes

La figure 9 illustre cette distributivité, passant par l'interprétation de la somme comme une translation : la flèche qui va de O à b est égale à celle qui va de c à $b + c$, et l'observation de la congruence des deux triangles grisés permettent de justifier que $a(b + c)$ et $ab + ac$ désignent le même point. Mais les expérimentations que nous avons pu conduire, jusqu'en formation de professeurs de mathématiques (Pluvinage et Flores, 2016) ont montré la difficulté de cette démarche. En revanche de même que la construction de Descartes, l'**homothétie** de rapport positif ou négatif présente le produit comme une longeur et conduit à une interprétation géométrique sensible de la règle des signes, tout en mettant en évidence la propriété de distributivité du produit sur la somme. Nous y reviendrons dans la seconde partie de notre étude, consacrée aux activités pour faire faire de l'algèbre.

3. Un point de vue de mathématiques appliquées : un herbier de formules et d'équations

Lors des examens auxquels nous avons procédé jusqu'ici, les divers traitements mathématiques auxquels il faut savoir recourir en algèbre élémentaire ont pu être rencontrés. Mais pour autant, nous restons désarmés sur des points cruciaux, par exemple la résolution d'un énoncé comme le suivant, conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

> L'âge de Lola : « *L'an prochain,* dit Lola, *j'aurai trois fois l'âge que j'avais il y a neuf ans, quand ma famille est venue habiter cet appartement.* » Quel âge a Lola aujourd'hui ?

Il s'agit d'un énoncé[4] dont l'étude est proposée dans l'ouvrage d'Ursini et al. (2005, p. 92) et sur lequel nous reviendrons. Les questions que nous nous posons ici sont : Un tel problème a-t-il sa place en tant qu'activité proposée à des débutants en algèbre ? Si oui, comment doter (tous) les élèves des outils pour le résoudre ? Il est évidemment exclu de vouloir répondre à partir de la considération d'un unique énoncé. Nous avons donc entrepris un tour d'horizon des types d'emploi de lettres dans des formules ou équations par des manuels scolaires et des ouvrages scientifiques. Ce tour d'horizon s'est concrétisé sous la forme de l'herbier de formules et d'équation suivant.

[4] L'énoncé original en espagnol est le suivant : *Dentro de un año, Amanda tendrá el triple de la edad que tenía hace nueve años. ¿Qué edad tiene Amanda ahora?* Dans son adaptation française, nous avons justifié la considération de neuf ans en arrière par un événement de l'époque, afin que l'énoncé n'apparaisse pas gratuit.

Aire d'un triangle à partir de base et hauteur correspondante	(1)	$A=\frac{bh}{2}$
Définition de vitesse	(2)	$v=\frac{d}{t}$
Consommation d'eau déduite de l'énergie électrique consommée (formule réglementaire)	(3)	$P=250\frac{X}{Z}$
Relation d'Euler pour les polyèdres convexes (généralisée en caractéristique d'Euler-Poincaré)	(4)	$s - a + f = 2$
Côté d'un triangle déterminé par les deux autres côtés et leur angle	(5)	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}$
Racine carrée d'un carré	(6)	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$
Distributivité du produit sur la somme	(7)	$a(b + c) = ab + ac$
Formule de la somme des premiers entiers naturels	(8)	$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, ou $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

Equation du premier degré	(9)	$ax + b = cx + d$
Equation du second degré	(10)	$ax^2 + bx + c = 0$
Equation d'une droite dans le plan cartésien	(11)	$y = ax + b$
Cercle dans le plan euclidien repéré	(12)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
Division euclidienne dans les entiers naturels	(13)	$a = bq + r$, avec $r < b$

Tableau 2. L'herbier de formules et d'équations.

Sans entrer dans les détails de la sélection que nous avons faite pour aboutir à cet herbier, disons simplement que nous souhaitions qu'y soient représentés les différents types d'interactions entre objets que l'on rencontre à un niveau mathématique élémentaire.

Ce double tableau comporte deux cadres. Le premier cadre est partagé en deux blocs, respectivement de cinq et trois formules, et le second cadre présente un bloc de cinq égalités.

- On peut considérer chacune des cinq premières formules constituant le premier bloc comme *une relation opératoire orientée vers un résultat*. Les instructions d'application accompagnant la formule (3)[5] dans le texte officiel qui la présente explicitent bien la démarche attendue pour son usage. Ici le signe d'égalité pourrait aussi bien être remplacé par une flèche. Il suffit de verbaliser la relation dénotée par ce signe pour voir qu'on peut l'exprimer par des verbes comme « donne », « fait », etc. Bien évidemment pour toutes les formules où le résultat figure dans le premier membre, autrement dit à gauche du signe d'égalité, ce verbe est à mettre au mode passif, comme « est obtenu par ». On notera que, formellement, *la quantité à calculer est toujours désignée une seule fois*. Dans les formules (1), (2), (3) et (5), le résultat à obtenir est de plus isolé au premier membre (ce n'est pas le cas dans la formule (4), où l'une quelconque des trois variables peut être calculée quand on connaît les deux autres). Il se peut que, dans une formule exprimant une relation opératoire, certaines variables apparaissent plusieurs fois, comme c'est le cas pour la formule (5), mais la variable qui correspond au résultat à obtenir n'apparaît qu'une fois.
- Au contraire, dans chacune des formules qui constituent le second bloc, il y a répétition de variables de part et d'autre du signe d'égalité. Ce que chacune de ces formules présente est *une relation d'identité entre deux expressions incomplètes* déterminées par les propriétés des opérations qui articulent des lettres et des nombres. *Une telle construction est propre à l'algèbre.* Il y a une certaine

[5] **Avis et communications** **Ministère de l'écologie et du développement durable**
Avis relatif à des délibérations des agences de l'eau AGENCE DE L'EAU ARTOIS-PICARDIE Délibération n° 2002-A-063 du 4 octobre 2002, NOR: DEVE0210424V
Article 9 Mesure indirecte des volumes prélevés
1. Calcul du prélèvement en fonction de l'énergie électrique consommée
Le volume prélevé est obtenu par application de la formule suivante : $P = 250 \times W/Z$ avec :
P : volume prélevé en mètres cubes durant la période soumise à redevance ;
W : énergie électrique consommée mesurée au compteur, exprimée en kWh ;
Z : hauteur théorique minimale d'élévation en mètres.
(J.O. du 12-29-2002, n 303, p. 60 059 texte 5)

ressemblance avec la construction de syntagmes nominaux à partir de propositions dans la langue naturelle, mais la comparaison s'arrête là.

On pourra noter que quatre emplois différents du signe d'égalité y apparaissent :

- *une relation d'affectation par définition* (formule (1) du tableau, définissant la vitesse). Une telle affectation est orientée. Dans certains langages informatiques, elle est rendue par le signe double « ≔ », l'objet défini figurant à gauche du signe et sa définition à droite.
- *une relation opératoire orientée vers un résultat, comme pour n'importe quel calcul numérique* ((3), (4), (5) et (6) du tableau).
- *une relation d'équivalence sémantique* qui porte non pas sur les objets représentés, mais sur la manière de les désigner. On retrouve ici la distinction introduite par Frege entre sens et référence. On touche ici à la difficulté majeure de la mise en équation : trouver deux manières différentes de désigner un même objet (des quantités, des grandeurs mesurées, etc.), c'est-à-dire trouver deux membres sémantiquement équivalents. Nous en avons vu un exemple à propos de la formule (3) d'aire d'un rectangle, appliquée de deux façons différentes à l'aire d'un triangle rectangle isocèle pour aboutir à la relation $b^2/4 = a^2/2$ entre l'hypoténuse b et le côté de l'angle droit a.

  Signalons au passage que le calcul fractionnaire avec la réduction à un même dénominateur relève d'une telle égalité formelle. Mais il nous semble que c'est une distinction rétroactive, que l'on a faite après l'avènement de l'algèbre et du calcul algébrique.

Ces différents emplois de l'égalité importent pour l'élaboration d'une formule, mais une fois celle-ci établie, libre cours est donné à tous les jeux qu'autorise l'égalité mathématique. C'est pourquoi d'ailleurs, songeant aux écueils signalés précédemment en 1.2.1, nous n'avons pas parlé à leur propos de statuts, mais d'emplois du signe d'égalité. A la différence de statuts qui sont établis, les emplois sont, comme nous le verrons plus avant (4.2.2), tributaires des activités réalisées. Par exemple, l'identité (8) de la distributivité peut donner lieu à deux lectures opératoires (développement et factorisation). Et au contraire, les utilisations possibles de la formule (2) définissant une vitesse amènent à la manipuler comme une équivalence, pour obtenir trois écritures *équivalentes* : v = d/t, d = vt et t = d/v. Ainsi, pour prédire l'heure d'arrivée de coureurs cyclistes roulant à 45 km/h et auxquels il reste 20 km à parcourir à 16h45, la réponse surgira directement de la substitution des valeurs 20 et 45 dans la dernière des trois écritures : t = 20/45, soit environ 0,44 h ou 27 minutes. L'égalité de définition, orientée, est ainsi devenue une équivalence pour cette utilisation.

4. Le fonctionnement sémio-cognitif requis pour comprendre en algèbre

La première question pour toute recherche sur un enseignement général de l'algèbre est celle de la décomposition d'un complexe de connaissances à acquérir. Car cette décomposition définit non seulement le cadre d'une progression sur plusieurs années mais le choix didactique des activités données aux élèves dans les classes à l'échelle de quelques semaines ou d'une année. Lorsqu'elle est considérée d'un point de vue mathématique, cette décomposition est toujours faite par la réitération d'analyse en connaissances mathématiquement pré-requises (Conférence Siemat[6] III, 2011) et les recherches se font localement dans le cadre de ce découpage. Or cela ne peut que conduire aux impasses bien connues que nous avons rappelées. Quelle autre décomposition proposer pour ce complexe de connaissances que sont la résolution des équations et leur utilisation dans la résolution de problèmes, objectif de l'enseignement général de l'algèbre ?

Les problèmes de compréhension que soulève l'introduction de l'algèbre viennent de ce que l'on introduit *un registre de représentation sémiotique dont le fonctionnement cognitif est en rupture complète* avec les modes de fonctionnement des registres de la langue naturelle et de la représentation décimale des nombres. Ce registre ne se caractérise pas par l'emploi de lettres mais par de multiples opérations de substitution entre mots, signes numériques (chiffres ou écritures spécifiques comme $\sqrt{2}$) et lettres. Nous disons ici « chiffres » pour écarter la désignation de nombres par des expressions littérales. Pour décrire le fonctionnement de ce registre, nous allons d'abord regarder la diversité des opérations de désignation que les passages entre mots, chiffres et lettres recouvrent, puis les deux types d'expressions produites, et les transformations de l'organisation des expressions produites. Nous évoquerons, pour finir, les opérations d'instanciations qui conduisent souvent à une utilisation et une compréhension indifférenciées des équations et des formules.

4.1. La diversité des opérations de désignation et les passages entre mots, chiffres et lettres.

Rappelons tout d'abord que désigner des objets est la première opération discursive propre au langage et plus généralement à tout registre discursif. La maîtrise de la langue naturelle commence non pas avec la connaissance du vocabulaire mais avec la pratique de la désignation directe et, surtout, de la désignation indirecte pour les

---

[6] Deux regards opposés sur les points critiques de l'enseignement de l'algèbre au collège. III SIEMAT, Sao Paolo, UNIBAN 21-25 juin 2011

objets qui échappent à une désignation directe. Or ce sont les opérations les plus fréquentes dans toute pratique discursive (*Sémiosis et pensée humaine* chap. II). Une désignation indirecte requiert que l'on construise une expression. Dans la langue naturelle l'expression construite prend la forme d'un syntagme nominal qui est une micro-description de l'objet que l'on veut désigner. Elle combine au moins deux termes référentiels avec des termes de liaison. Par exemple : « le prix *du* litre *d'*essence *à la* pompe *avant* la dernière crise pétrolière ». Ainsi l'énoncé du problème de Lola (*supra* 3) repose entièrement sur trois opérations de désignation indirecte : « l'âge de Lola l'an prochain, l'âge de Lola il y a neuf ans, l'âge de Lola aujourd'hui ».

4.1.1. Des opérations de *redésignation* indirecte à l'emploi de lettres

L'intérêt mathématique de l'emploi des lettres est dans l'opération indirecte de désignation qu'elle rend possible et non pas dans l'opération directe de désignation. La désignation fonctionnelle permet, en effet, de désigner des objets différents en utilisant une seule lettre et donc de réduire au minimum les opérations de désignations directes qui exigeraient chaque fois des lettres différentes. La désignation d'un objet se fait alors à partir de la désignation d'un autre objet. Par exemple, si x désigne l'âge de Lola x + 1 et x – 9 désigneront respectivement les âges de Lola dans un an et il y a neuf ans. La désignation fonctionnelle exige qu'il y ait une relation numérique entre les objets que l'on va désigner par la même lettre. Et cette relation va être marquée par un symbole d'opération. La désignation directe par une lettre ne présente qu'un intérêt général et limité d'abréviation : x, y, z pour les différents âges de Lola. Autrement dit, au lieu de chercher à avoir autant de désignations directes qu'il y a d'objets différents à désigner, selon le principe économique qui commande la communication orale et la pratique spontanée du langage, on cherche au contraire à les réduire au minimum possible.

On voit ici apparaître une première divergence entre la décomposition des connaissances faites du point de vue cognitif et celle faite du point du point de mathématique pour introduire l'algèbre. Elle porte sur l'emploi des lettres. Faut-il mettre l'accent d'abord sur la prise de conscience de l'opération de désignation fonctionnelle qu'il implique ou sur le rôle mathématique que l'on va donner à la lettre dans le choix d'un problème (variable et non pas inconnue ou indéterminée) ? La déclaration suivante, faite en première page du document officiel de 2008 (supra 1. 3), est à cet égard révélatrice du choix didactique systématiquement fait quand on s'en tient au seul point de vue mathématique : « La nécessité d'avoir à DESIGNER *le nombre de carreaux sur le côté* (un carré représenté par une figure de carreaux blancs et entouré d'un bord de carreaux grisés) justifie l'EMPLOI *d'une lettre* ». Autrement dit, on substitue une désignation directe par une lettre, qui ne pose aucun problème, à une désignation indirecte qui paraît d'autant plus complexe et coûteuse qu'il s'agit d'une micro-description :« *le* nombre *de* carreaux *sur le* côté (du carré dessiné) ». Ce faisant on néglige deux choses :

— On ne désigne pas, mais on REDESIGNE ce qui a déjà été désigné verbalement. Ce qui est la pratique couramment attendue dans les énoncés de problèmes proposés pour introduire l'emploi de lettres.
— L'intérêt et la difficulté de l'emploi d'une lettre commence avec la désignation fonctionnelle et non pas avec la désignation directe.

En négligeant ces deux points cognitivement essentiels, on prépare, pour la suite des apprentissages, des incompréhensions et des blocages qui surgiront comme le retour de ce que l'enseignement aura d'emblée refoulé.

4.2.2 Les différents types d'opérations de *redésignation* et les types d'objets désignés

Toutes les opérations de désignation directe ou indirecte que l'on fait dans la pratique élémentaire de l'algèbre, et donc que l'on demande de faire aux élèves, s'inscrivent dans une gamme de substitution sémantiques entre les mots, les chiffres et les lettres. La question des objets sur lesquels portent ces opérations est moins simple. D'un point de vue mathématique ce sont évidemment les nombres, ou des grandeurs, et des relations entre les nombres. D'un point de vue cognitif, deux données sont importantes pour répondre à cette question :

— les objets sont des nombres pris individuellement, ou des grandeurs déterminées, que l'on peut désigner par une écriture décimale ou par une lettre
— les objets sont des ensembles de nombres que l'on peut désigner soit par une liste indéfiniment ouverte de nombres, soit par une qualification terminologique (« les entiers ») soit par une micro-description (pour désigner par exemple un intervalle). La désignation d'une variable par une lettre requiert la prise de conscience du type d'objet.

A partir de ces données on voit que les opérations de *redésignation* peuvent porter sur trois types d'objets :

— *des nombres pris individuellement*, mais sans qu'on les ait désignés par des chiffres. Pour ce type d'objet, l'emploi d'une lettre permet de désigner un nombre encore inconnu ou, plus exactement, manquant dans les données d'un problème mais qui est désigné verbalement. Par exemple « l'âge de Lola»
— *une liste de ouverte de nombres* dont on peut poursuivre l'écriture décimale ou fractionnaire, (1, 2, 3, ..), Mais on peut aussi considérer un ensemble de nombres {1 , 3, 5,..}. Pour ce type d'objet l'emploi d'une lettre répond à une fonction de condensation. L'emploi d'une lettre pour désigner une variable répond à une fonction de balayage potentiel de tous les éléments de la liste condensée en une

lettre. Souvent on utilise la même lettre pour désigner la fonction de condensation et celle de balayage.

— *deux types de listes ouvertes de nombres,* que l'on peut développer en parallèle selon une relation qui les met en correspondance terme à terme. Un exemple de ce type d'objet est à chercher non pas dans l'histoire de l'algèbre, mais dans la naissance de la mécanique avec l'interprétation de valeurs recueillies sur l'augmentation de la vitesse et celle de la distance parcourue, dans des observations sur la chute des corps. Ici l'emploi d'une lettre répond aux deux fonctions de condensation et de balayage.

Pour ce qui concerne l'emploi des lettres, les deux premiers types d'objets relèvent d'une désignation directe. En revanche, le troisième type d'objet requiert la désignation indirecte fonctionnelle.

CHIFFRES	LETTRES	MOTS *(interface verbale, souvent muette ou oubliée, entre chiffres et lettres)*
Un nombre	**Redésignation directe** par une lettre	Désignation directe ou Désignation indirecte par micro-description
Une liste ouverte de nombres	**Condensation** en une lettre **Balayage des éléments** d'un ensemble de nombres	Désignation directe du **type nom propre** pour un ensemble de nombres ou pour un type de grandeur : vitesse, temps, aire..
Des listes dont la génération des nombres est corrélée	**Désignation fonctionnelle** par ***une combinaison opératoire lettre-chiffre*** *:* « 2n +1 » **Balayage** d'un ensemble de nombres	**Désignation directe d'une propriété** des nombres : « impair » **Désignation indirecte** par une micro-description (souvent relative à une quantité ou une grandeur)

Figure 10. Gamme des substitutions sémantiques mobilisées dans le registre algébrique

Nous avons ainsi obtenu une première décomposition, en termes d'opérations de désignation, du complexe des connaissances que sont les équations et les formules. Toute entrée dans l'algèbre requiert des opérations de *redésignation* de ce qu'on a d'abord désigné d'une autre manière en utilisant des chiffres et/ou des mots (le plus souvent des syntagmes nominaux). En d'autres termes, il y a deux entrées possibles pour les opérations de *redésignation*.

Sur le tableau ci-dessus, les opérations de *redésignation* requises, c'est à dire les passages à effectuer d'une colonne à l'autre, sont marquées par des flèches en traits plein. Les flèches en pointillés marquent les opérations inverses de ces redésignations, si l'on ose dire. D'une part, il y a *l'instanciation des lettres* en fonction du type d'objets qu'elles désignent. D'autre part il y a la question de *la qualification verbale des objets* déjà désignés par des chiffres ou des lettres. Ainsi toute amorce de la liste énumérative {1, 2, 3, …} est qualifiée par l'expression « les entiers naturels », que l'on suppose relever d'une mobilisation immédiate et élémentaire.

Et cela est particulièrement crucial pour la dernière ligne, celle qui concerne des listes corrélées et la désignation fonctionnelle. On remarquera la rupture cognitive entre les opérations de désignations littérales et les opérations de désignation verbale pour le troisième type d'objet. Les opérations de désignation littérale ne peuvent être que fonctionnelles, c'est-à dire indirectes, tandis que les opérations de désignation verbales peuvent être indifféremment directes ou indirectes.

Cette première analyse nous permet de soulever trois questions cruciales sur l'introduction de l'emploi des lettres dans le cadre de la résolution de problèmes. Car il y a là une première source de confusions cognitives, souvent rédhibitoires, tant pour les enseignants que pour les élèves.

(1) Résoudre un problème en utilisant des lettres implique plusieurs opérations de redésignation. Comment ne pas assimiler les opérations de désignation directe d'un nombre, de désignation d'un ensemble de nombres et la désignation fonctionnelle d'une relation entre des listes ouverts de nombres, *lorsque les données du problème sont décrites verbalement dans un énoncé se rapportant à une situation concrète ?*

(2) Avec quel type d'objet faut-il d'abord introduire les opérations de redésignation ? S'en tenir à la désignation d'UN nombre installe une association réflexe qui va bloquer la désignation d'une liste ouverte de nombre ou le balayage potentiel d'un ensemble de nombres. On retrouve là la question du statut des lettres qui, d'un point de vue cognitif, dépend entièrement de la prise de conscience des différentes opérations de redésignation par des lettres. Mais s'en tenir à la désignation d'une liste ouverte de nombre conduit à sous-estimer l'importance de la désignation fonctionnelle qui constitue l'apport décisif de l'emploi des lettres en algèbre.

(3) D'un point de vue sémio-cognitif, la redésignation d'une liste ouverte de nombre est une condensation et non pas une généralisation. D'un point de vue mathématique, lorsqu'on peut observer une régularité dans la progression de la liste ouverte de nombres, l'emploi d'une lettre est une généralisation. On ne

confondra évidemment pas la fonction sémio-cognitive de condensation, qui repose sur une opération de redésignation, et la démarche de généralisation qui relève d'un raisonnement de type inductif et qui appelle une justification. La distinction de ces deux fonctions est d'autant plus cruciale que dans beaucoup de tâches mathématiques, même élémentaires, elles se recouvrent. Et cela conduit à soulever une troisième question. Peut-on proposer les mêmes activités ou les mêmes situations d'apprentissage pour faire prendre conscience de la fonction de condensation dans l'emploi de lettres et pour faire entrer dans une démarche de généralisation ?

Nous reviendrons ultérieurement sur ces questions.

4.2. La distinction de deux niveaux d'organisation dans les expressions produites

Pour produire une formule ou une équation, il faut articuler en une seule expression deux expressions résultant chacune de l'une des opérations de redésignation que nous venons d'analyser (supra Figure 5). Ces expressions référentielles sont organisées autour des seuls symboles d'opérations. Ces expressions sont des *expressions incomplètes* qui forment soit un membre de l'équation, soit l'un des syntagmes opératoires constituant un membre d'équation. Ainsi dans l'herbier ci-dessus : d/t est un membre de la formule correspondant à la définition de la vitesse et $(x - x_0)^2$ est un syntagme opératoire de l'un des membres de l'équation du cercle dans le plan euclidien repéré.

L'articulation de deux expressions incomplètes en une expression complète repose sur une relation d'équivalence sémantique (elles désignent le même objet, un nombre, ou un ensemble de valeurs), ou sur une relation d'identité (elle est toujours vraie quelles que soient les valeurs de la variable). Cette relation est marquée par le signe « = » qui est le même, qu'il s'agisse d'une formule ou d'une équation, d'une simple équivalence sémantique ou d'une identité formelle. Cela évidemment soulève des problèmes de discernabilité et de changement de points de vue.

4.2.1 La double *redésignation* d'un même objet et le symbole « = »

Du point de vue cognitif, il y a une différence profonde entre ces deux niveaux d'organisation. Elle apparaît avec ce qu'on appelle classiquement la « mise en équation » des données d'un problème. *Elle requiert que l'on reconnaisse deux désignations différentes d'un même objet.* Par exemple l'énoncé du problème de Lola comporte une double désignation de l'âge de Lola l'année prochaine : « l'an prochain j'aurais trois fois l'âge que j'avais il y a neuf ans ». On a alors les deux syntagmes opératoires suivant : (x + 1) et 3(x – 9) qu'il faut évidemment ne pas confondre avec (x – 9) qui désigne l'âge de Lola il y a neuf ans. Cet exemple est très simple dans la mesure où la double désignation verbale est donnée dans la même phrase. Dans la plupart des énoncés, et surtout ceux demandant que l'on écrive un système d'équations, la double désignation est donnée dans des phases différentes de l'énoncé (Article du groupe math-français dans Petit x).

La double *redésignation* d'un même objet est évidemment la condition pour l'écriture d'une expression complète, que ce soit une formule ou une équation. Elle constitue l'un des gestes de langage caractéristiques des mathématiques, puisqu'elle est la condition absolument nécessaire au progrès et à la continuité du raisonnement mathématique. Ainsi, même la simple formulation d'une suite d'instructions pour construire une figure en géométrie requiert la double désignation de certaines unités figurales. Mais, en algèbre, elle requiert que l'on ait au préalable recherché et identifié dans les énoncés de problèmes, quels qu'ils soient, une double désignation préalable verbale et/ou chiffrée de nombres ou de grandeurs. Et c'est là une pratique qui va contre toutes les pratiques spontanées du langage dans les échanges oraux ou dans la manière de donner des informations ou de décrire en dehors des mathématiques. C'est pourquoi elle reste pour les élèves, tout au long de leur curriculum, une difficulté plus profonde et plus insaisissable que l'opération de désignation fonctionnelle pour la mise en équation les données d'un problème. W. Damm avait fait, il y a plus de vingt ans, des observations significatives en ce sens, que l'on pourrait facilement refaire aujourd'hui même après quatre années d'enseignement de l'algèbre. Plus récemment J.-C. Duperret et J.-C. Fenice ont fait part de leur expérience d'enseignant sur ce point avec leurs élèves en quatrième et en troisième (Duperret & Fwenice, 1999). La prise de conscience de cette opération par les élèves est donc un enjeu cognitif important pour l'apprentissage de l'algèbre.

4.2.2 Variation de la référence du symbole “ = ” et changement de point de vue sur les expressions complètes produites.

Par rapport au aux expressions complètes, il y a deux situations très différentes quant au fonctionnement cognitif mobilisé : produire une expression complète et la comprendre de manière à pouvoir en étudier la portée et utiliser les possibilités de transformations qu'elle comporte. Dans le cas des équations et des formules, on peut même parler d'une rupture ou d'un fossé entre ces deux situations.

Dans la situation de « mise en équation » des données d'un problème, le symbole “=” réfère à *une relation d'équivalence sémantique*. Cette relation porte ne porte pas sur les objets désignés puis redésignés, mais sur leurs seules redésignations littérales. On retrouve ici la distinction introduite par Frege entre sens et référence :

la différence de sens vient des manières de désigner un objet et non pas de l'objet auxquelles les différentes désignations renvoient.

Dans la situation de compréhension, les équations sont regardées à partir du nombre de leur(s) solution(s) : une, plusieurs, aucune ou toutes les valeurs d'un ensemble de nombre. Et il s'agit de se demander pour quelles valeurs des lettres l'équation est vraie. Or cela exige un changement complet de point de vue. Car pour entrer dans cette question il faut basculer d'une compréhension de l'expression complète ancrée sur les objets désignés (quantités, grandeurs, ensemble de nombres) à une compréhension uniquement centrée sur le recouvrement d'extension de deux expressions incomplètes. Dans le champ d'une telle interrogation, que le symbole "=" peut alors ne plus référer à une équivalence sémantique, mais *à une relation logique d'identité formelle.*

On voit donc surgir ici un écart cognitif considérable entre les expressions incomplètes qui sont des syntagmes opératoires et le symbole "= ". Les expressions incomplètes formant les membres d'une équation ont des sens différents mais réfèrent au même objet (la ou les solutions), ce qui va justifier certaines opérations de traitement, comme on le verra plus loin. *Le symbole "=", qui n'a pas d'autre sens que sa référence, peut se référer à des objets différents, ici les relations d'équivalence sémantique et d'identité formelle*. Cela va dépendre du nombre de solutions de l'équation.

Certes, la relation d'identité formelle peut être logiquement considérée comme sémantique, puisqu'elle porte sur le recouvrement complet des extensions de deux expressions incomplètes. Mais d'un point de vue cognitif, les relations d'équivalence sémantique et d'identité formelle s'inscrivent dans des dynamiques de compréhension différentes.

Dans une situation où l'on a écrit une équation pour résoudre un problème, la question de la vérité ou, plus exactement, de la vérification du fait que les deux expressions désignent bien la même valeur numérique, ne se pose pas, puisque les deux expressions ont été produites pour être deux désignations différentes de la même valeur. Il n'y a pas à s'interroger sur la signification du symbole " = ". Ce serait une vraie fausse question.

Mais la situation de compréhension des équations, impose un changement de point de vue ne serait-ce qu'avec ce geste sémiotique typique de l'algèbre : *prendre le signe "0" comme l'un des membres de l'équation.* On bascule d'une compréhension centrée sur une équivalence sémantique à une compréhension centrée sur la distinction et la reconnaissance d'identités formelles, quelles que soient les valeurs des lettres. De même qu'il n'y a pas d'Analyse mathématique sans faire intervenir l'infini, de même il n'y a pas d'algèbre sans le signe « 0 ». Et, là, on commence à voir les équations se séparer des formules. Qui songerait à écrire toutes les formules de physique de cette manière ? Par exemple : v – d/t = 0 !

Le fait de pouvoir prendre « 0 » comme un membre d'équation permet de voir la différence cognitive entre équation et formule. Cette différence se situe à une frontière, dont on oublie toujours qu'elle reste discernable pour un profane même cultivé comme pour la plupart des élèves, entre ce qui est de l'algèbre et ce qui n'en est pas. Bien qu'elles soient des expressions complètes, les formules ne sont jamais regardées par rapport à leur valeur de vérité, *mais seulement par rapport à la fonction référentielle de chacun des termes constituant l'un des deux membres.* Concrètement cela veut dire que les seules opérations que l'on fait avec une formule sont *des opérations d'instanciation* : on substitue des nombres aux lettres dans l'un des membres, pour trouver la valeur numérique du terme qui constitue l'autre membre. Autrement dit, on fait les opérations inverses de celles requises par les opérations de redésignation, sans avoir à effectuer la mise en relation de deux redésignations différentes d'un même objet, comme dans la mise en équation des données d'un problème. La conséquence est simple et imparable. Dans une formule, le symbole "=" ne réfère ni à une identité formelle ni à une relation d'équivalence sémantique, mais seulement à *une relation opératoire orientée vers un résultat,* comme dans l'écriture d'un calcul numérique. On pourrait tout aussi bien remplacer ce symbole par une flèche : « c'est clair comme deux et deux *font* quatre», selon la formule bien connue.

4.3.2 Conséquences pour faire entrer les élèves dans l'algèbre

Cette analyse permet de soulever trois autres questions pour l'introduction de l'algèbre. Elles ne concernent plus l'emploi des lettres pour produire une expression incomplète ou une équation, mais la manière de regarder les expressions complètes, équations ou formules, ainsi que les opérations induites par leur compréhension.

(4) En situation de production, il n'y a guère de différence entre la mise en équation des données d'un problème et l'élaboration d'une formule pour rendre compte de relations observées, puisque dans les cas, cela mobilise les mêmes opérations de redésignation. Mais utiliser cette situation pour introduire l'algèbre ne conduit-il pas les élèves dans une impasse puisqu'en situation de compréhension, la compréhension des formules renforce l'interprétation du symbole " = " comme une relation opératoire orientée, contre toute interprétation comme une identité formelle ou même comme une équivalence sémantique ?

(5) Utiliser une formule et résoudre une équation pour résoudre un problème sont deux choses totalement différentes. Dans le premier cas il n'y a pas besoin de produire de la formule, tandis que dans le second il faut mettre en équation les

données du problème. Est-il alors nécessaire d'apprendre l'algèbre pour pouvoir appliquer les nombreuses formules qui sont utilisées dans de nombreux domaines en dehors des mathématiques ?

(6) On peut parfaitement utiliser une formule sans avoir à effectuer la moindre transformation de l'écriture de la formule. Il suffit de présenter toutes les formes de la formule correspondant aux différentes situations dans lesquelles elle peut être utilisée. Ainsi :

$$d/t = \boldsymbol{v}, \qquad vt = \boldsymbol{d}, \qquad d/v = \boldsymbol{t}$$

On évite ainsi les difficultés d'un changement de membre qui arrêtent tant d'élèves dans l'utilisation d'une formule, comme on l'a vu plus haut (1.1, Tableau 1). Dans ce cas, ne faudrait-il pas plutôt introduire les formules non pas pour motiver l'emploi des lettres mais pour faire découvrir l'une des opérations de transformations d'écriture d'une équation, celle qui consiste à passer un terme d'un membre à l'autre ?

Nous reviendrons ultérieurement sur ces questions.

4.3. Le traitement des expressions complètes et la question de la place et des occurrences des lettres.

A la différence des phrases et des propositions en langue naturelle, l'organisation des expressions algébriques complètes est intrinsèquement transformable sans que la valeur de vérité en soit changée ou affaiblie. Cette transformation peut être faite soit au niveau de l'expression complète, soit à celui d'une expression incomplète, soit encore aux deux. C'est ce qui confère aux équations leur puissance d'utilisation, et aux formules leur possibilité d'être utilisée dans des situations où ce n'est pas le même de type de données que l'on peut recueillir. Or la caractéristique des traitements algébriques est de porter non pas sur les lettres, sur ce qu'elles désignent ou même sur leur statut, mais uniquement sur leur place dans l'expression complète et sur leurs différentes occurrences.. Autrement dit, la distinction sémiotique fondamentale pour analyser le fonctionnement cognitif propre aux traitements en algèbre est *la distinction entre un signe et ses occurrences*, et non pas celle entre signifié et signifiant, ou entre un signe et l'objet auquel une opération discursive de désignation le réfère. C'est là que se situe le changement radical de regard que le passage d'une phase de « mise en équation » à celle de la « résolution d'équations » implique. Les traitements algébriques reposent deux types d'opérations fondamentales : le déplacement des occurrences d'une lettre par rapport **au signe " =",** et la réduction du nombre des occurrences d'une même lettre par rapport aux signes d'opérations. Nous pouvons ainsi distinguer deux types de transformations d'une expression complète.

4.3.1 Déplacement des occurrences d'une même lettre d'un membre à l'autre.

La première transformation de base porte sur le regroupement dans un même membre de tous les termes qui comportent une occurrence de lettre. Elle conduit donc à changer la place d'une des occurrences d'une lettre par rapport au symbole (« = »). Ce déplacement entraîne l'introduction d'un nouveau symbole d'opération :

(1) $x + 8 = 3x$ se réécrit en $8 = 3x - x$

(2) $8 - x = 3x$ se réécrit en $8 = 3x + x$

Ce type de déplacement est commun aux équations et aux formules. Il pose un problème de compréhension que l'on peut envisager sous deux points de vue différents. Celui de son explication mathématique : l'introduction d'un nouveau symbole d'opération dans le deuxième membre correspond à l'opération de suppression de l'occurrence dans le premier membre :

(1) : x « $-x$ » $+ 8 = 3x$ « $-x$ »

(2) : $8 - x$ « $+x$ » $= 3x$ « $+x$ »

Elle conduit à la formulation de règles sur les symboles d'opération et devient très vite peu opératoire pour les élèves, comme le montrent les difficultés à changer de membre, lorsque cette opération de suppression n'est plus additive mais multiplicative et fait apparaître une écriture fractionnaire. Or dans ce type d'opération *on part d'une forme d'organisation de l'équation pour expliquer comment et pourquoi on peut générer d'autres formes d'organisation équivalentes, et qui peuvent donc être substituées les unes aux autres.* On peut adopter un tout autre point de vue, qui consiste à faire la démarche inverse, comme dans l'utilisation de formules pour calculer une donnée manquante. *On part des différentes organisations d'une expression complète obtenues par le seul déplacement des places des différentes lettres.* Des valeurs numériques sont données pour, par exemple, instancier deux des trois lettres, afin de calculer la valeur numérique pour la troisième. En d'autres termes, au lieu de présenter une formule, on présente l'ensemble des expressions sous lesquelles elle peut être utilisée et entre lesquelles on peut choisir selon les valeurs numériques qui sont données :

$$\{d= vt,\ v = d/t,\ t = d/v\}$$

L'utilisation de formules peut être un moyen de prendre conscience de l'opération qui permet de les transformer pour les rendre utilisables et, ainsi, de se convaincre de leur équivalence en découvrant que c'est la même formule. En ce sens très précis, l'utilisation de formules peut être une condition pour entrer dans la résolution des équations, au lieu de la situation classique où elle considérée comme un des acquis attendus de l'enseignement du calcul algébrique ou « formel ».

4.3.2 Les transformations liées au nombre d'occurrences d'une lettre par rapport aux signes opératoires.

Elles portent sur les expressions incomplètes, celles uniquement organisées avec des symboles d'opération. L'opération vise la réduction maximale du nombre des occurrences d'une même lettre dans une expression incomplète, chaque occurrence étant liée par une opération à un autre terme qui peut-être une autre occurrence de la même lettre, un nombre ou une autre lettre. Cette réduction s'effectue en effectuant l'opération à laquelle l'occurrence est liée. Deux cas sont alors possibles :

— toutes les occurrences sont réductibles à une seule comme dans l'exemple suivant :

$$3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} - 8 \quad \rightarrow \quad 2\boldsymbol{x} - 8$$

— certaines occurrences sont irréductibles à une seule et elles apparaissent inséparables parce que liées multiplicativement comme dans l'exemple suivant :

$\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}$ comme Descartes l'écrivait

$$(\boldsymbol{x} + 1)\ (\boldsymbol{x} - 1)$$

Il y a évidemment la notation de l'exposant qui permet une économie d'écriture et qui accroît considérablement la puissance de calcul des écritures algébriques. Mais ce codage ne réduit pas le nombre des occurrences car il implique que l'on puisse faire un aller et retour entre deux formes d'écritures :

$$\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x} \text{ ET } x^2$$

$$(\boldsymbol{x} + 1)\ (\boldsymbol{x} - 1) \text{ ET } (\boldsymbol{x}^2 - 1)$$

Dans un sens la transformation relève d'un pur calcul, mais dans l'autre il exige souvent que d'abord l'on ait reconnu visuellement une forme particulière d'organisation de l'expression comme dans le cas de la résolution des équations du second degré. Et c'est là que les difficultés apparaissent.

Il y a celles bien connues de reconnaissance de la forme de l'identité remarquable que l'on peut utiliser pour simplifier une équation. Il s'agit à la fois d'une reconnaissance de forme et d'une reconnaissance sémantique portant sur les seuls nombres de l'expression incomplète. Car il s'agit d'identifier rapidement, à la simple lecture, non seulement les carrés mais aussi les différents produits permettant d'obtenir les nombres qui ne sont pas des carrés.

Le réflexe consistant à ne chercher qu'une seule valeur pour x^2 est d'une autre nature, On peut certes l'expliquer par la difficulté d'effectuer le retour vers la forme d'écriture qui ne masque pas l'irréductibilité de deux occurrences de x. Mais ce réflexe est d'abord la séquelle de la manière dont l'opération de désignation ou de *redésignation* par une lettre a été introduite (pour un exemple, voir supra 3.2, Figure 5), par association avec un nombre ou avec une liste corrélée de nombres. Et on voit, à travers ce réflexe qui persiste tout au long de la scolarité, la nécessité d'introduire les opérations de désignation littérale à partir de listes corrélées de nombres qui ne se limitent pas aux entiers mais portent aussi sur les nombres négatifs.

Références historiques consultables en ligne

Descartes, R. (1637) *Le Discours de la Méthode*
La Géométrie de Descartes débute en page 297 du *Discours de la Méthode*, consultable en ligne dans la bibliothèque Gallica à l'adresse Internet
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594.r=La+Géométrie+Descartes+1637.langFR

Robert Recorde (1510-1558) : le signe « = » est introduit dans *The Whetstone of Witte* (1557). This book was the Second Part of Arithmetic, *The Grounde of Artes* being the first, covering the extraction of roots, the theory of equations and arithmetic with surds. In his study of quadratic equations, Recorde does not allow solutions which are negative, but he does allow negative coefficients. He makes good use of the sum and product of the roots stressing that for the equation $x^2 = px - q$ the sum of the roots is p and their product is q.
Retrieved from
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Recorde.html

Stevin, S. (1585). L'arithmétique. Livre numérique gratuit, consultable en ligne sur Free Google eBook :
https://books.google.fr/books/about/L_arithmetique.html?hl=fr&id=1dU5AAAAcAAJ

Stevin, S. (1634) *Œuvres mathématiques. Augmentées par Albert Girard*. En ligne dans la bibliothèque Polib <http://polib.univ-lille3.fr/data/015/index.html>

François Viète (1540-1603) : In his treatise *In artem analyticam isagoge* Viète demonstrated the value of symbols introducing letters to represent unknowns. He suggested using letters as symbols for quantities, both known and unknown. He used vowels for the unknowns and consonants for known quantities. The convention where letters near the beginning of the alphabet represent known quantities while letters near the end represent unknown quantities was introduced later by Descartes in *La Géométrie.* This convention is used today, often without people realising that

a convention is being used at all. (If I asked for a solution to $ax = b$ nobody asks: "For which quantity do I solve the equation?")
Retrieved from http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete.html

… Son œuvre principale sera *In Artem Analyticam Isagoge* (1591), publié à Tours, premier grand traité d'algèbre symbolique. (…)Dans une équation, les consonnes (*resp*. les voyelles) sont les *paramètres* connus (*resp*. les *inconnues*). Il utilisa le terme actuel de *coefficient* dans une équation. Un demi-siècle plus tard, Descartes adoptera cet usage qui se répandra dans toute l'Europe.
Extrait de http://www.chronomath.com/

Bibliographie

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308.

Duperret, J. C. et Fenice, J. C. (1999). L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège. *Repères-IREM N° 34*. P. 29-54

Éduscol (ministère de l'Éducation Nationale), (2008). *Du numérique au littéral au collège*, document eduscol.education.fr/D0015/
http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Glaeser G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **2.3**, 303– 346.

OCDE (2011), Résultats de PISA 2009 : Savoirs et savoir-faire des élèves – Performance des élèves en compréhension de l'écrit, en mathématiques et en sciences (Volume I)
http://dx.doi.org/10.1787/9789264097643-fr

Pluvinage, F. et Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los Enteros. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA* volume 30, number 54.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. et Trigueros, M. (2005) *Enseñanza del álgebra elemental, una propuesta alternativa*, México, Trillas

RAYMOND DUVAL
duval.ray@wanadoo.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
fpluvinage@cinvestav.mx