LALINA COULANGE ET PAULA VERDUGO

UNE ETUDE COMPARATIVE DE L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL ALGEBRIQUE EN FRANCE ET AU CHILI

Abstract. A Comparative Study of the Teaching of Algebra in France and in Chile. In this paper, we present the results of a comparative study on the teaching of algebra in France and in Chili. Within the Anthropological Theory of the Didactic, we studied and compared the mathematical knowledge related to the distributive property, taught within each school system. The analysis of programs and textbooks reveals significant differences in the knowledge to be taught or taught. We also analyzed the knowledge of students, through a questionnaire given to French and Chilean students (aged 14-15). The analysis of the answers allows us to establish differences between the *mathematical praxeologies* students have learnt. It also reveals similarities that reveal the difficulties of (Chilean or French) students in learning algebra. Finally, we conducted a brief experimentation in a French class that introduced a type of tasks present in the Chilean textbook. This experimentation allows us to examine the role of geometric framework in the study of the distributive property, more represented in the knowledge to be taught and taught in Chile than in France.

Keywords: Comparative Study - Knowledge to be taught - Algebraic manipulation - The distributive property - Algebraic and geometrical frameworks

Résumé. Dans cet article, nous présentons les résultats d'une étude comparative sur l'enseignement du calcul algébrique en France et au Chili. Nous situant dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, il s'est agi d'analyser et de comparer les organisations de savoirs mathématiques enseignées en lien avec la propriété de distributivité, au sein de chaque institution scolaire. L'analyse des programmes et de manuels scolaires révèle des différences significatives dans les savoirs à enseigner et enseignés. Nous avons également mené une analyse des praxéologies apprises, au moyen d'un questionnaire proposé à des élèves français et chiliens (élèves de 14-15 ans). L'analyse des réponses nous permet d'établir des différences entre les praxéologies mathématiques apprises au sein des deux institutions, mais aussi des points communs qui renvoient entre autres à des difficultés similaires dans l'apprentissage du calcul algébrique. Enfin, nous avons conduit une brève expérimentation dans une classe de seconde française visant à « importer » un type de tâches présent dans le manuel chilien et absents des manuels français. Cette expérimentation nous permet d'interroger le rôle du cadre géométrique dans l'étude de la propriété de distributivité, plus représenté dans les savoirs à enseigner et enseignés au Chili qu'en France.

Mots-clés. Étude comparative – Savoirs à enseigner et enseignés – Calcul algébrique – Distributivité – Changement de cadres algébrique géométrique

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 153 - 185.

1. Introduction

Nous présentons une étude comparative sur les savoirs à enseigner et enseignés autour de la propriété de distributivité au secondaire en France et au Chili. Une analyse des programmes et des manuels français et chiliens à un niveau d'enseignement donné (élèves de 14-15 ans) nous permet de cerner des différences relatives aux savoirs à enseigner sur la distributivité dans les institutions scolaires de ces deux pays.
Sur la base des résultats de cette analyse, un questionnaire a été élaboré et appliqué à un échantillon d'une centaine d'élèves français et chiliens. L'analyse des réponses d'élèves à ce questionnaire nous permet de préciser les savoirs enseignés sur les techniques de calcul algébrique (liées à la factorisation et au développement d'expressions littérales) dans les institutions scolaires considérées.
Nous avons également conduit une expérimentation dans une classe de seconde française (élèves de 15-16 ans). Il s'agit de proposer à des élèves français d'accomplir des tâches relatives à un type de tâche donné, présent dans l'institution chilienne et absent de l'institution française. Cette expérimentation vise à interroger certaines des potentialités et/ou limites des changements de cadres algébriques et géométriques convoqués par ce type de tâche.
Le plan de l'article suit le plan de l'étude. Nous présentons tout d'abord la problématique sur laquelle s'appuie notre étude comparative. Dans une deuxième partie, nous exposons les résultats de nos analyses des savoirs à enseigner sur le calcul algébrique et la distributivité dans les programmes ainsi que dans plusieurs manuels français et chiliens. Puis nous rendons compte de l'analyse des réponses à un questionnaire posé à des élèves français et chiliens d'âge comparable. Enfin dans une dernière partie, nous donnons brièvement à voir de nouvelles pistes sur le rôle des changements de cadres pour justifier mais aussi produire des techniques de calcul algébrique liées à la propriété de distributivité.

2.- Une problématique de comparaison des savoirs à enseigner et enseignés sur la distributivité en France et au Chili

Nous nous situons dans une perspective d'étude comparative des savoirs à enseigner et enseignés en algèbre élémentaire, en France et au Chili, référée à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997 ; Chevallard, 1999 ; Bosch et Chevallard, 1999). Plus précisément, notre recherche est basée sur une comparaison des savoirs mathématiques à enseigner et enseignés sur le calcul algébrique en lien avec la propriété de distributivité et des types de tâches afférents. La propriété de distributivité joue un rôle central au regard des pratiques de calcul algébrique (Assude, Coppé et Pressiat, 2012, Croset 2009) mises à l'étude dans l'enseignement du calcul algébrique au niveau du secondaire. Dans le cadre de la théorie anthropologique, il s'agit d'étudier les types de tâches et les techniques relatives à la distributivité (relevant de la factorisation ou du développement d'expressions algébriques) ainsi que les aspects technologico-théoriques liés à ces types de tâches et ces techniques. Plusieurs auteurs en didactique de l'algèbre (Assude, Coppé et Pressiat, 2012 ; Coulange et al., 2012 ; Croset, 2009 ; Abou-Raad et Mercier, 2009 ; Abou-Raad, 2006) soulignent des manques technologiques ou l'absence d'un discours mathématique pertinent dans l'enseignement du calcul algébrique. Ces travaux convergent sur le fait que la portée des techniques de calcul algébrique n'est pas clairement identifiable dans les savoirs à enseigner et enseignés. Selon les auteurs précités, ceci pourrait être dû à la présence d'un enseignement à forte dimension ostensive, à l'absence d'un discours mathématique pertinent et au caractère « muet » de technologies permettant d'éclairer la mise en œuvre des techniques de calcul algébrique ou d'identifier les adaptations de connaissances correspondantes (Robert, 2008). D'autres travaux mettent en avant le cloisonnement des organisations mathématiques des savoirs algébriques à enseigner ou enseignés au regard des cadres numériques et géométriques d'emploi de l'algèbre (Coulange et al., 2012) ou bien des dimensions outils et objets de ces savoirs (Grugeon, 1997 ; Pilet, 2012). Ces phénomènes didactiques, relatifs tantôt au cloisonnement, tantôt à l'incomplétude des organisations de savoir algébrique mises à l'étude éclairent une partie des difficultés rencontrées par les élèves dans le domaine du calcul algébrique (Croset, 2009 ; Constantin, 2008). Notons enfin la récurrence apparente de ce type de phénomènes dans des institutions didactiques scolaires, parfois différentes (au collège ou au lycée ; en France, au Liban ou en Tunisie). Pourtant, exception faite des travaux d'Abou-Raad (2006), la plupart de ces recherches ne se centrent pas ou peu sur une perspective d'étude comparative des savoirs à enseigner et enseignés sur le calcul algébrique.

Nous avons choisi de nous engager dans cette voie de comparaison pour plusieurs raisons. Nous avons constaté d'une part, un peu « naïvement » au départ, des différences significatives dans les organisations de savoirs à enseigner autour de la distributivité en France et au Chili : tant dans la progression relative à ces savoirs à enseigner, que dans les types de tâches mis à l'étude ou encore, au regard du rôle des changements de cadre géométrique dans ces organisations mathématiques. Il nous a semblé intéressant d'interroger ces différences. D'autre part, il nous a semblé que cette comparaison pourrait permettre d'approfondir des questions relatives à la récurrence des phénomènes didactiques relatifs à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre.

La problématique au centre de notre recherche peut dès lors être formulée comme suit.

- *Quelles sont les praxéologies mathématiques à enseigner autour de la distributivité en France et au Chili ?*

Plus précisément, au sein de chaque institution scolaire : Quels sont les types de tâches et les techniques mis à l'étude ? Quels sont les ingrédients technologiques,

voire théoriques, enseignés sur le calcul algébrique, en lien avec la distributivité ? Notamment, quel(s) rôle(s) jouent les changements de cadre géométrique ?
Afin de trouver des éléments de réponses à ce type de questions, nous avons analysé les programmes, deux manuels français et le manuel chilien « officiel » (recommandé par le ministère de l'éducation national chilien). Nous synthétiserons les principaux résultats de ces analyses dans la sous-section 2.1 de l'article.
- *Quelles sont les praxéologies mathématiques apprises autour de la distributivité en France et au Chili ?*
Sur la base de nos analyses de programmes et de manuels, nous avons élaboré et fait passer un questionnaire à des élèves français et chiliens d'âges équivalent (âgés de 15-16 ans). Ce questionnaire comprend un ensemble de tâches de calcul algébrique, plus ou moins représentées au sein de chaque institution. Les analyses *a priori* et *a posteriori* des réponses obtenues à ce questionnaire, outillées par la théorie anthropologique, nous renseignent sur les rapports personnels des élèves aux organisations mathématiques enseignées sur la distributivité.
- *Que peut-on dire des potentialités et limites des praxéologies mathématiques à enseigner sur la distributivité au sein de chacune des deux institutions, française et chilienne ?*
Cette question est assez typique d'études comparatives (Bessot et Comiti, 2008 ; Bessot et Comiti, 2013). Dans le cadre de notre travail, en plus des analyses des savoirs à enseigner et enseignés au sein de chaque institution et de leur comparaison, nous avons conduit une brève expérimentation dans une classe française de Seconde (élèves de 15-16 ans). Au cours d'une séance dédiée à l'enseignement du calcul algébrique, nous avons observé et analysé l'accomplissement de plusieurs tâches, par les élèves français. Ces tâches correspondent à un type de tâches présent dans l'institution chilienne et absent de l'institution française, visant à produire et à justifier des techniques liées à la factorisation en prenant appui sur le cadre géométrique. Cette expérimentation nous a paru à même de questionner plus avant les relations possibles entre le cadre algébrique et le cadre géométrique dans les organisations de savoirs mathématiques à enseigner sur la distributivité, et leurs potentialités.

2.1 Savoirs à enseigner sur la distributivité dans les institutions françaises et chiliennes (élèves de 14-15 ans)

Nous avons étudié les programmes de l'enseignement secondaire en France et au Chili, et ce, afin d'identifier certains aspects globaux des organisations de savoir algébrique à enseigner sur la distributivité dans chacune des deux institutions. Nous ne retenons ici que les résultats principaux de cette étude, destinés à éclairer la suite de notre propos.

L'analyse des programmes fait apparaître que l'étude des organisations des savoirs à enseigner sur la distributivité se fait sur des échelles de temps très différentes, et que les relations envisagées entre les organisations de savoir algébrique et d'autres savoirs numériques ou géométriques au sein de chaque institution ne se jouent pas de la même manière.

En France, la propriété de distributivité simple est enseignée dès la classe de Cinquième (élèves de 12-13 ans). Ainsi dit-on dans le programme de ce niveau qu'il s'agit d'enseigner des connaissances liées à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction. On voit aussi le souci dès la 5e, d'introduire cette propriété en lien avec des pratiques de calcul numérique. Ainsi, la « capacité attendue » correspondante dans le programme (mais non exigible dans le cadre du socle commun de compétences) est d'utiliser la distributivité sur « des exemples numériques et littéraux » en prenant appui sur des situations empruntées aux cadres numérique ou géométrique faisant intervenir la notion de formule. En Quatrième (élèves de 13-14 ans), l'étude se poursuit : la propriété de double distributivité est introduite et l'accent est mis dans le programme sur l'enseignement de techniques relatives au « développement de produits algébriques ». Là aussi, des liens entre calcul numérique et littéral sont mis en avant à plusieurs reprises : par exemple l'introduction du produit de deux nombres relatifs est censée prendre appui sur l'extension de la propriété de distributivité simple à ce type de nombres. Enfin c'est en Troisième (élèves de 14-15 ans) que sont introduites les « identités remarquables » à exploiter dans la factorisation et le développement d'expressions numériques ou littérales simples. En France, ce qui caractérise les savoirs mathématiques à enseigner sur la distributivité est un temps long d'enseignement (3 ans dans le cadre de la scolarité obligatoire) et une construction dialectique des techniques de calcul algébrique et de leurs ingrédients technologiques avec les systèmes de nombres, mise en avant par Constantin (2014). Des articulations avec le cadre géométrique ou liées aux grandeurs sont également évoquées à plusieurs reprises *via* des situations scolaires de production/d'utilisation d'expressions numériques ou littérales.

Au Chili, ce n'est qu'en première année de l'enseignement dit « moyen » du lycée (élèves de 14-15 ans), que la propriété de distributivité semble un objet d'enseignement officiel. Elle fait certes une première apparition dans le programme de la classe de 5e année de l'enseignement dit « basique » (élèves de 10-11 ans) au Chili, dans le cadre de l'enseignement de la multiplication et est à cette occasion, énoncée sous sa forme générale liée à l'addition, mais elle n'est pas explicitement considérée comme un savoir explicite à enseigner à ce niveau[1]. Ce n'est qu'en première année de lycée (élèves de 15-16 ans) et donc bien plus tard, que le

[1] Bien que non cités explicitement dans le programme français, on peut faire le même type de constats sur des savoirs implicites ou « cachés » à enseigner sur la distributivité en lien avec le calcul mental ou posé de produits à l'école primaire (Constantin, 2014).

programme de l'enseignement chilien fait apparaître la propriété de distributivité en tant que savoir algébrique à enseigner, et met en avant l'enseignement des techniques de factorisation et de développement afférentes. À ce niveau, dans le même temps sont dès lors introduites à la fois la « distributivité simple », la « double distributivité » et les « identités remarquables ». Si l'on se fie aux programmes officiels, le temps d'enseignement des savoirs à enseigner sur la distributivité est donc beaucoup plus resserré et dense dans l'institution chilienne que dans l'institution française. Les praxéologies concernées sont enseignées à la fois plus tardivement et plus simultanément (1 an). Il est également à noter que des savoirs algébriques sont préalablement enseignés dans les niveaux antérieurs du secondaire : sur la notion d'équation, relatifs à la production ou à l'utilisation d'expressions algébriques (pour modéliser, généraliser des situations géométriques ou numériques) pouvant correspondre à des produits ou des sommes de plusieurs variables et/ou de variables d'exposants variés[2]. C'est dès lors davantage en lien avec ces savoirs algébriques que la distributivité semble introduite, plutôt qu'en lien avec la construction de systèmes de nombres.

En France				**Au Chili**
Propriétés	Classes			Classe
	5e	4e	3e	1er lycée
Distributivité simple	√			√
Distributivité double		√		√
Identités remarquables			√	√

Tableau 1 : Niveaux/ savoirs à enseigner sur la distributivité en France et au Chili.

Pour pouvoir étudier et comparer de manière plus locale ces savoirs à enseigner dans les deux institutions, française et chilienne, nous avons choisi d'analyser des manuels pour lesquels les savoirs à enseigner étaient relativement comparables, tout comme les âges des élèves considérés. Nous avons analysé les contenus de deux manuels français de troisième (élèves de 14-15 ans) : Triangle (édition 2012) et Phare (édition 2012) et du manuel officiel chilien[3] de 1re année du lycée (élèves de 14-15 ans), édité par le ministère de l'éducation nationale (2012).

Nos analyses révèlent des différences significatives dans les organisations mathématiques à enseigner, dont certaines visiblement en rapport avec la

---

[2] La notion de puissance 2, 3, 4… d'une variable est dès lors préalablement étudiée *via* le retour systématique à la définition d'une puissance.

[3] Le manuel chilien analysé est recommandé par le ministère de l'éducation nationale au Chili, c'est donc le manuel officiel et le plus utilisé (il est utilisé par environ 90% d'enseignants d'après les rapports officiels du ministère de l'éducation nationale chilien).

progressivité plus ou moins envisagée dans le temps d'enseignement. En effet, en France, la propriété de distributivité semble plus étroitement mise en rapport avec le cadre numérique qu'au Chili.

Dans les deux manuels de 3e français étudiés[4], un travail important est consacré aux expressions à une variable correspondant à des polynômes à une variable réelle et de degré au plus 3 (et plus fréquemment de degré 1 ou 2), avec des coefficients numériques variés. Au Chili, la rupture avec le cadre numérique paraît plus nette. Les expressions à développer, factoriser dans le manuel officiel chilien comprennent des produits de puissances de plusieurs variables, des polynômes à plusieurs variables réelles et de degré parfois plus grand que 3. Malgré des étiquetages officiels de savoirs proches (distributivités simple, double, identités remarquables), les types de tâches mises à l'étude dans les deux manuels diffèrent, du fait de variables didactiques différentes qui caractérisent les expressions algébriques et déterminent les techniques ou les adaptations de connaissances en jeu : qu'il s'agissent de la nature de coefficients numériques liés aux monômes ou de la structure des expressions (sommes, produits de polynômes et/ou de monômes, à une ou à plusieurs variables, etc.). Les tableaux donnés en annexe 1 et 2 donnent à voir ces différences relatives aux types de tâches liées à la factorisation ou au développement d'expressions algébriques potentiellement fréquentées par les élèves. Notons toutefois que les organisations didactiques que recouvrent ces manuels, sont également différentes, le nombre d'énoncés d'exercices dédiés aux types de tâches de calcul algébrique liés à la distributivité, étant globalement bien plus important dans les deux manuels français que dans le manuel chilien. Ceci implique de rester parfois prudent sur les interprétations des résultats de nos analyses, au regard des effectifs différents de tâches concernés (nettement moins importants dans le manuel chilien que dans les manuels français)[5].

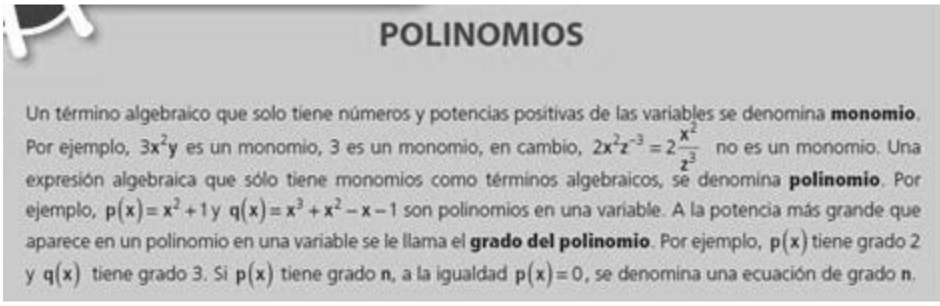
Une autre différence constatée à l'aune de l'analyse de manuels est relative aux ingrédients technologico-théoriques développés autour de ces types de tâches dans les différents manuels. Les arrière-plans théoriques des organisations des savoirs mathématiques à enseigner sur la distributivité en France et au Chili ne sont pas du même ordre. Dans l'institution française, la mise à l'étude de la propriété de distributivité repose davantage sur une formalisation, unification et généralisation des savoirs numériques (Constantin, 2014), mais ne fait pas apparaître de discours

[4] On peut faire le même constat sur la nature des expressions algébriques en jeu, en lien avec les types de tâches factoriser/développer pour les manuels français de 5e et de 4e.

[5] Une étude des pratiques enseignantes en vue d'étudier des choix effectifs d'énoncés par les enseignants des deux pays n'a pas été conduite. Toutefois, les résultats des analyses de réponses au questionnaire (présentés ci-après) confirment les résultats d'analyse des programmes et des manuels quant à la nature des tâches de calcul algébrique potentiellement fréquentées par les élèves des deux pays.

théorique explicite sur les objets de savoirs concernés, liées aux notions polynômes, de monômes, ou de degrés, ce que constataient déjà Abou-Raad et Mercier (2009).

Par contre, dans l'institution chilienne, l'arrière-plan théorique des organisations mathématiques relatives à l'enseignement de la distributivité positionne explicitement la notion de polynôme et/ou de monôme, de degré d'un polynôme, de produit et/ou de décomposition de polynômes au centre de l'étude. L'extrait de cours introductif du chapitre concerné cité ci-dessous l'illustre bien :



POLINOMIOS

Un término algebraico que solo tiene números y potencias positivas de las variables se denomina **monomio**. Por ejemplo, $3x^2y$ es un monomio, 3 es un monomio, en cambio, $2x^2z^{-3} = 2\frac{x^2}{z^3}$ no es un monomio. Una expresión algebraica que sólo tiene monomios como términos algebraicos, se denomina **polinomio**. Por ejemplo, $p(x) = x^2 + 1$ y $q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ son polinomios en una variable. A la potencia más grande que aparece en un polinomio en una variable se le llama el **grado del polinomio**. Por ejemplo, $p(x)$ tiene grado 2 y $q(x)$ tiene grado 3. Si $p(x)$ tiene grado **n**, a la igualdad $p(x) = 0$, se denomina una ecuación de grado **n**.

Figure 1 : Extrait du cours introductif sur le calcul algébrique du manuel chilien.

Par ailleurs, les ingrédients technologiques présents dans le manuel chilien s'appuient de façon plus prononcée sur des changements de cadres algébrique et géométrique (Douady, 1986). Les règles du calcul algébrique sont fréquemment justifiées dans l'ouvrage *via* un changement de cadre : l'équivalence entre deux polynômes qu'il s'agit de développer et/ou de factoriser, se justifie par des égalités d'aires de surfaces rectangulaires ou carrées. Ce type de changements de cadres est présent à d'autres niveaux dans des manuels français, en vue d'introduire les propriétés de simple distributivité et de double distributivité en 5^e et 4^e. Toutefois, il n'est pas repris dans les manuels de 3^e que nous avons analysés[6]. Constamment présent dans le manuel chilien, cet environnement technologique accompagne également des adaptations des techniques de calcul algébrique relatives à la distributivité qui ne sont pas explicitées dans les activités ou les cours des manuels français (et ce, à quelque niveau que ce soit) : par exemple, pour passer du développement d'un produit d'un facteur et d'une somme à deux termes, au

[6] Dans les manuels de 5^e et de 4^e que nous avons également consultés, ce type de changements de cadre est présent dans des activités visant à introduire la simple ou double distributivité et parfois repris à titre d'illustration, dans la partie cours. Un unique manuel de 3^e sur ceux consultés, semble en faire davantage usage que les autres, dans les activités introductives. Il s'agit du manuel Sésamath 3^e qui s'appuie notamment sur ce changement de cadre pour introduire le produit d'une somme par une différence (activité Sésamath 3^e, p. 35), ce qui constitue une originalité (notamment du fait de considérer un point de vue géométrique sur la différence) sur laquelle nous reviendrons par la suite (cf. partie 3).

développement d'un produit d'un facteur et d'une somme à plus de deux termes (à 3, 4... n termes) :

En general, si un lado de un rectángulo es a y el largo se divide en n partes, formando n diferentes rectángulos, donde todos tienen un lado que mide a. Entonces, el área del rectángulo es igual a la suma del área de los pequeños rectángulos (ver figura a la derecha). Es decir, si el largo mide $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$, entonces se tiene que:

$$a(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n) = ab_1 + ab_2 + ab_3 + ... + ab_n$$

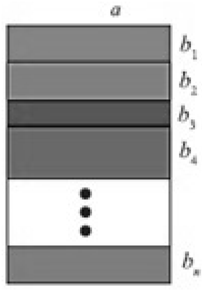


Figure 2. Construction géométrique pour l'étude de distributivité, relativement à une somme de n termes, proposée dans le manuel chilien

Cette importance constamment accordée aux cadres géométrique et algébrique se traduit aussi par des types de tâches en lien avec ce type de changements de cadres, présents de manière récurrente dans le manuel chilien, dont on ne trouve pas d'équivalents dans les manuels français. C'est par exemple le cas d'un type de tâches qui a particulièrement retenu notre attention, correspondant à l'énoncé « d'activité » [7]extrait de ce manuel, cité ci-après. Nous reviendrons par la suite sur ce type de tâches (cf. partie 3).

actividades

1. Dibuja en tu cuaderno dos rectángulos, uno de área $2x^3y^2$ y otro de área $3x^2yz$, de tal forma que tengan un lado de la misma medida. Factoriza $2x^3y^2 + 3x^2yz$

Figure 3. Activité de factorisation à l'aide de décomposition d'aires de rectangles

Il s'agit dans l'énoncé d'exercice cité ci-dessus de factoriser un polynôme à plusieurs variables (x, y et z) de degré 3. Pour ce faire, les auteurs du manuel chilien préconisent la représentation de surfaces rectangulaires d'aires indiquées dans l'énoncé, ayant un côté commun dont le tracé est laissé à la charge de l'élève. Le type de tâches correspondant, présent dans le manuel chilien, est absent des deux manuels français étudiés. Du fait de son caractère que l'on pouvait considérer *a priori* comme tout à fait inhabituel dans le contexte institutionnel français, et ce, à plusieurs titres (jeu de cadres attendu, factorisation de polynômes à plusieurs variables de degré supérieur à 2), nous n'avons pas choisi d'intégrer une tâche de ce type dans le questionnaire posé aux élèves français et chiliens (cf. partie 2), mais de conduire une expérimentation (cf. partie 3) visant à explorer les potentialités d'un tel type de tâches dans le contexte d'une classe de seconde française.

[7] Les « activités » (ou *actividades*) du manuel chilien ne sont pas à considérer comme des activités introductives au sens de celles trouvées dans les manuels français. Il semble s'agir davantage d'énoncés qui apparaissent à la suite d'éléments de cours progressivement introduits et/ou de tâches à considérer comme relativement emblématiques.

2.2 Elaboration et analyse *a priori* d'un questionnaire posé à des élèves français et chiliens (14-15 ans)

À partir des résultats de notre analyse de programmes et de manuels, nous avons élaboré un questionnaire qui a été proposé à un échantillon d'élèves français et chiliens. Notre échantillon comportait un total de 82 élèves français (à l'entrée en seconde) et 111 élèves chiliens (en fin de première année de lycée)[8].

Ci-dessous, est reproduit le questionnaire ainsi proposé à un nombre significatif d'élèves issus des deux institutions française et chilienne.

Exercice 1. Développer

a. $(a+b)(a-b)$

b. $(5+3x)^2$

c. $(\sqrt{3}-\sqrt{10})^2$

d. $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

Exercice 2. Factoriser

a. $9x^2-4y^2$

b. $3x+2xy$

c. $36-60x+25x^2$

Exercice 3. Développer

$(a+2b+c)^2$

Exercice 4. Factoriser

a. $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$

b. $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$

Exercice 5. Développer et réduire

$16x^2-(4x-3)(4x+3)$

Exercice 6. Factoriser

a. $abc-abc^2$

b. $-2xy^2w+4y^3w^2z$

c. $ac+bc+ad+bd$

Figure 4. Questionnaire proposé à des élèves français et chiliens de 15-16 ans (septembre-octobre 2013)

Les tâches proposées dans ce questionnaire ont été choisies à la lueur de nos résultats d'analyse des savoirs à enseigner sur la distributivité, notamment ceux concernant les types de tâches et techniques mises à l'étude dans les manuels français et chiliens. Nous avons cherché à rassembler des tâches correspondant à des types tâches caractéristiques des deux institutions, tout en recherchant une certaine variété dans la complexité des tâches. L'analyse *a priori* présentée ci-après permet de préciser

[8] Les 82 élèves français correspondent à trois classes différentes dans un seul lycée. Les 111 élèves chiliens correspondent à des classes de trois lycées différents. Précisons que ce sont des contraintes du calendrier de notre recherche qui nous ont conduites à poser ce questionnaire à l'entrée en seconde (plutôt qu'en fin de troisième) : toutefois au regard du fait que les élèves de Seconde concernés n'avaient pas repris l'étude du calcul algébrique au moment de la passation, on peut considérer que ce sont bien des connaissances en lien avec les savoirs enseignés en Troisième qui ont été convoquées pour répondre aux questionnaires.

notre démarche de conception d'un tel questionnaire, et comment nous avons procédé pour répartir des tâches que l'on pouvait considérer *a priori* comme plus ou moins routinières au sein de chaque institution, dans un même questionnaire. Nous avons notamment cherché à ce que ce questionnaire soit *a minima* équilibré : c'est-à-dire qu'il ne soit pas trop à la faveur ou à la défaveur d'une population d'élèves donnée, française ou chilienne (en proposant autant d'exercices « inhabituels » ou « habituels » d'une part et d'autre)[9].

L'analyse *a priori* de ce questionnaire a été conduite en envisageant les réponses possibles des élèves à la fois français et chiliens, par rapport à chaque item du questionnaire, en nous appuyant d'une part sur les résultats de nos analyses des organisations de savoir à enseigner au sein de chacune des institutions, d'autre part sur une étude des adaptations de connaissances potentiellement à l'œuvre dans les réponses possibles d'élèves des deux institutions. Afin d'illustrer notre méthodologie, prenons l'exemple de plusieurs items représentés dans les exercices. Nous avons retenu des items, présents dans les exercices 1, 4, 5 et 6 du questionnaire comme étant ceux qui nous paraissent le mieux illustrer les différences entre les praxéologies de calcul algébrique, apprises respectivement par les élèves français et les élèves chiliens à l'issue de nos analyses.

Exercice 1. Item 1.b : Développer $(5+3x)^2$

Dans les manuels français, le type de tâches relatif au développement d'expressions algébrico-numérique à une seule variable correspondant à la mise en application d'une identité remarquable auquel renvoie cet item est largement majoritaire dans les manuels de 3^e français (100% des exercices liés au développement dans Triangle, 75% des exercices extraits de Phare). À l'opposé, il est assez peu mis à l'étude dans le manuel chilien (14,3% des exercices). On peut donc faire l'hypothèse d'une meilleure réussite des élèves français en réponse à cet item. Toutefois compte tenu du fait qu'il s'agit d'une application assez immédiate d'une identité remarquable étudiée dans les deux pays, on peut penser que les élèves chiliens produisent des solutions correctes en réponse à cet item, au moins pour une part d'entre eux.

Exercice 1. Item 1.c : Développer $\left(\sqrt{3}-\sqrt{10}\right)^2$

---

[9] Nous avons conduit une étude quantitative sur la base des réponses obtenues afin de vérifier si vraiment le questionnaire avait été élaboré de forme équilibrée, c'est-à-dire que celui-ci ne soit pas discriminant quant aux performances de la population d'élèves français ou chiliens. Cela a été fait en appliquant aux dites performances des deux échantillons un test d'hypothèse non-paramétrique, dont l'hypothèse nulle est « il n'y a pas de différences significatives entre les performances des élèves de deux institutions sur le questionnaire », laquelle a été « non rejetée » avec un niveau de signification de 5%.

Dans le manuel français Triangle, il n'y a pas d'exercice lié à ce type de tâches : développer une expression numérique du type carré de binôme, avec la présence de nombres correspondant à des racines carrées. Il est par contre, travaillé dans 14 exercices sur un total de 64 (22%) consacré au développement d'expressions algébriques ou numériques du manuel Phare. Dans le manuel officiel chilien, ce type de tâche est très peu travaillé, seulement dans 1'exercice sur 7 (14,3%). La question reste donc relativement ouverte en ce qui concerne la réussite possible de la part d'une population d'élèves ou d'une autre en réponse à cet item.

Exercice 1. Item 1.d: Développer $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$

Le type de tâches correspondant à cet item n'est pas ou quasiment pas travaillé dans les deux manuels français (2,8% des exercices de Phare, absent dans Triangle), alors qu'il est présent dans le manuel chilien (il représente 60% des exercices). Le développement de polynômes à plusieurs variables n'est pas ou peu travaillé en France. Cependant, il se peut que les élèves français adaptent leurs connaissances sur les techniques de calcul algébrique en reconnaissant dans le cas présent, une identité remarquable (produit de la somme par la différence de deux nombres), soit en passant par la mise en application de la double distributivité. La mise en œuvre de ces techniques suppose toutefois des adaptations de connaissances en lien avec le calcul sur les puissances (savoir calculer le carré d'un cube) dont on peut penser qu'elles sont plus habituelles pour les élèves chiliens que français au regard du travail conduit sur la notion de puissance dans les deux institutions.

Exercice 4. Item 4.a. Factoriser $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$

Dans le manuel français Triangle, ce type de tâches avec expressions à une variable du type $(ax+b)(cx+d)-(ax+b)(ex+f)$, est travaillé dans 60 exercices sur un total de 66 énoncés (ce qui représente 91% des exercices). Ce type de tâches n'est pas représenté dans le manuel chilien. Les adaptations de la technique de factorisation requises ici ne sont pas enseignées au Chili. Ici**,** il s'agit en fait de repérer des facteurs communs correspondant à des expressions numérico-algébriques (le facteur commun étant ($2x$ +5)). À l'inverse, ce type de tâches semble constituer un enjeu de la classe de 3e française. Il recouvre d'ailleurs parfois avec des adaptations plus importantes de techniques prenant appui sur le numérique du type de celles convoquées par la tâche correspondant à l'item suivant.

Exercice 4. Item 4.b. Factoriser $25x^2 - 9 + (5x-3)(7x+8)$

Dans le manuel français Triangle, ce type de tâches est travaillé dans 6 exercices sur un total de 66 (9%). Dans le manuel Phare, il est l'objet de 10 exercices sur un total de 10 (100%). Dans le manuel chilien ce type de tâches est travaillé dans seulement 1 exercice sur 16. On peut penser que ce type d'exercices sera davantage réussi par les élèves français que par les élèves chiliens. Cependant, même pour les élèves français, cet exercice reste complexe, car le travail correspondant est souvent guidé dans les énoncés trouvés dans les manuels scolaires : on indique par exemple qu'il s'agit de factoriser $25x^2-9$ avant de factoriser l'ensemble de l'expression.

Exercice 5. Développer et réduire $16x^2-(4x-3)(4x+3)$

Il s'agit d'abord de développer le polynôme $(4x-3)(4x+3)$ en reconnaissant une identité remarquable, ou en appliquant la double distributivité, puis de réduire le polynôme restant, en prêtant attention au signe moins dans $16x^2-(16x^2-9)$. Dans le manuel français Triangle, ce type de tâche est travaillé dans 21 exercices sur un total de 50 (42%) et dans le manuel Phare, il est présent dans 8 exercices sur un total de 21 (38,1%). Dans le manuel officiel chilien ce type de tâches n'est pas travaillé en tant que telle. Cette tâche peut s'avérer plus discriminante que celles considérées auparavant, relatives à l'exercice 4, car les adaptations de connaissances numériques en lien avec la technique de développement ne sont vraisemblablement pas enjeu d'enseignement au Chili alors qu'elles sont davantage au cœur du travail algébrique conduit en fin de collège en France.

Exercice 6. Factoriser

a. $abc-abc^2$

b. $-2xy^2w+4y^3w^2z$

c. $ac+bc+ad+bd$

Dans les deux manuels français, il n'y a pas d'exercices liés au type de tâches que recouvre l'exercice 6. Dans le manuel chilien, le type de tâches correspondant est travaillé dans 12 exercices sur 16 liés à la factorisation d'expressions algébriques (75%). Ce type d'adaptation de connaissances, lié à la technique de factorisation n'est *a priori* pas étudié par les élèves français. Les deux premiers items pourraient dès lors s'avérer discriminants au regard des techniques dont les élèves de l'institution française disposent, du fait entre autres, de la présence inhabituelle de puissance (polynôme de degré 3 pour l'item b) et de plusieurs variables (*a, b* et *c* ; *x, y* et *z* ; *a, b, c* et *d*). On peut toutefois envisager que des élèves franchissent les adaptations de connaissances requises, en revenant à la définition de la notion de puissance, par exemple. Le cas du dernier item est un peu différent. Les marges de manœuvre sont moins importantes et le terme commun *(a+b)* peut apparaître après une factorisation par le facteur commun *c* des deux premiers termes, puis par *d* des deux derniers termes de la somme, ce qui peut rendre la tâche plus aisée, y compris pour des élèves français.

2.3 Résultats de l'analyse *a posteriori* du questionnaire posé aux élèves français et chiliens

L'analyse *a posteriori* des réponses des élèves français et chiliens à ce questionnaire donne des indications sur les rapports personnels développés par les deux populations d'élèves aux genres de tâches « développer » et « factoriser ».

Les différences de réussite constatées confirment la conformité de ces rapports personnels d'élèves aux rapports institutionnels appréhendés par notre étude des programmes et des manuels. Par exemple, on observe une plus grande réussite chez les élèves chiliens que les élèves français en réponse à l'exercice 3, du fait sans doute de leur fréquentation en amont de ce type de tâches considéré comme *a priori* plutôt absent du collège en France.

	$(a+2b+c)^2$
France	2,4%
Chili	37,8%

Tableau 5 : Taux de réussite dans l'exercice 3.

À l'opposé, on peut constater que la réussite des élèves français est plus importante que celle des élèves chiliens dans les réponses données à l'item c de l'exercice 1, ce qui paraît conforme au fait que ce type de tâches numériques n'est que très peu représenté dans l'institution chilienne, tout en n'étant pas non plus au cœur des savoirs enseignés en France (d'où les 23,2% de réussite constatée).[10]

	$(\sqrt{3}-\sqrt{10})^2$
France	23,2%
Chili	2,7%

Tableau 6 : Taux de réussite dans l'exercice 1c.

De la même façon, on peut apprécier que globalement ; le taux de réussite des élèves chiliens est plus important que celui des élèves français, relativement à l'exercice 6 :

	a. $abc-abc^2$	b. $-2xy^2w+4y^3w^2z$	c. $ac+bc+ad+bd$
France	1,2%	2,4%	28%
Chili	25,2%	26,1%	31,5%

Tableau 7 : Taux de réussite dans l'exercice 6

Toutefois comme ces tableaux l'illustrent bien, les taux de réussite constatés ne sont pas uniquement indexés avec la représentativité des types de tâches au sein de chacune des deux institutions. Par exemple, l'écart obtenu entre les taux de réussite

[10] Rappelons la diversité rencontrée dans les deux manuels français de 3^e sur ce type de tâches, précisément.

des élèves français et chiliens sur l'item c. de l'exercice 6, nettement plus faible que pour les items a. et b., montre que la complexité de la tâche en termes d'adaptations de connaissances et de marges de manœuvre joue un rôle également important tout comme notre analyse *a priori* permettait d'ailleurs de le supposer au regard des variables didactiques en jeu (cf. tableaux 1 et 2 en annexe).

De la même façon, la différence des taux de réussite constatée entre les deux populations d'élèves est nettement moins importante pour l'item 4b (Factoriser $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$) que dans l'item 4a (Factoriser $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$). Ceci est dû au fait que cet item présente une difficulté supplémentaire pour les élèves français : pour factoriser, il faut d'abord reconnaître le produit de la somme par la différence afin d'obtenir un facteur commun apparent. Notons que l'on observe pourtant une légère augmentation du taux de réussite des élèves chiliens sur ce deuxième item 4.b., ce qui semble indiquer qu'ils franchissent mieux certains types d'adaptations (liée par exemple, à l'introduction d'une étape intermédiaire pour factoriser une expression littérale donnée) que d'autres (relatives au traitement de l'opposé d'une somme).

	a. $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$	b. $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$
France	39%	14,6%
Chili	4,5%	8,1%

Tableau 8 : Taux de réussite dans l'exercice 4

Certains des résultats à la fois quantitatifs et qualitatifs de notre analyse *a posteriori* peuvent d'ailleurs quelque peu étonner au regard de la seule étude institutionnelle. Prenons l'exemple de l'exercice 2a.

	a. $9x^2-4y^2$	b. $3x+2xy$	c. $36-60x+25x^2$
France	26,8%	42,7%	40,2%
Chili	36%	64,9%	17,1%

Tableau 9 : Pourcentage de réussite dans l'exercice 2

Les taux de réussite des élèves français et chiliens, relativement à cet item sont respectivement de 26,8% et 36%, soit relativement proches. Les élèves des deux pays éprouvent par ailleurs des difficultés similaires à reconnaître $9x^2$ comme $(3x)^2$ et commettre des erreurs du même type dans le traitement attendu du monôme dans la factorisation. À l'instar de Pilet (2012), nous faisons l'hypothèse que cela renvoie en partie au fait que, que ce soit en France ou au Chili, ce type de tâches apparaît majoritairement comme directement convoqué comme sous-tâche dans l'accomplissement de tâches plus complexes telles que la factorisation de polynômes et serait finalement assez peu travaillé en tant que tel dans les deux institutions. Le travail de Constantin (2014) étaye également ce type de constat, en parlant de la présence de savoirs implicites ou « cachés » dans l'institution[11] et au rôle particulier que jouent notamment les monômes ou les « Pseudo-monômes »[12] au sens de Drouhard (1992) dans le calcul algébrique.

De la même manière, l'écart entre les taux de réussite obtenus en réponse à l'exercice 5 ne paraît pas très significatif.

	$16x^2-(4x-3)(4x+3)$
France	17,1%
Chili	11,7%

Tableau 10 : Taux de réussite dans l'exercice 5

L'analyse institutionnelle évoquée ci-avant semble pourtant indiquer que ce type de tâches est nettement plus fréquenté par les élèves français que par les élèves chiliens. Or on obtient en France comme au Chili un assez faible taux de réussite dans l'accomplissement du type de tâche ainsi représenté. Plus encore, les erreurs commises de façon majoritaire par les élèves chiliens et français sont de même nature : elles ont trait à la gestion du signe « – » qui semble problématique au sein des deux institutions bien que davantage travaillée en France.

Les résultats des analyses *a posteriori* des réponses d'élèves à ce questionnaire confirment que les rapports personnels d'élèves restent assez conformes aux rapports institutionnels que l'analyse des programmes et des manuels avaient permis d'appréhender. Le fait que les praxéologies à enseigner et enseignées sur le calcul algébrique en France mettent davantage l'accent sur le traitement d'expressions numérico-algébriques se confirme au regard des résultats obtenus aux exercices 4 et 5 du questionnaire. Inversement le fait que les praxéologies à enseigner au Chili se centrent plus sur des expressions algébriques à plusieurs variables et/ou comportant des produits de plusieurs variables est également confirmé par les réponses obtenues. Les élèves chiliens réussissent « mieux » les exercices 3 et 6.

Pour autant, les résultats obtenus donnent également à voir que la complexité des tâches de calcul algébrique proposées du fait de variables didactiques considérées dans notre analyse *a priori*, joue un rôle non négligeable. Les différences entre les taux de réussite constatés entre les deux populations d'élèves peuvent se retrouver infléchies du fait d'adaptations de connaissances supposées ou des marges de manœuvre plus ou moins importantes dans les calculs effectués, identifiées *a priori*. Ainsi pour des tâches plus ou moins possiblement fréquentes dans chacune des

[11] Dans son travail de thèse, Constantin (2014) évoque notamment le rôle que joue la substitution de lettres par des (pseudo-)monômes très précoce dans les propriétés énoncées autour de la distributivité sous une forme algébrique (du type $k(a + b) = ka + kb$).

[12] Cette catégorie de « pseudo-monôme » se distingue de celle d'un produit par le fait que, sur le plan de la structure linguistique, l'on peut considérer qu'il y a deux opérations multiplicatives : l'une interne comme pour $3 \times x$ et l'autre externe comme pour $3x$.

institutions, les taux de réussite des élèves français ou chiliens tendent à se rapprocher. Les réponses obtenues pour certains des exercices montrent également des erreurs aux origines communes que l'on retrouve commises par les deux populations d'élèves français ou chiliens : c'est le cas par exemple de la gestion des signes « – » dans les calculs à effectuer (cf. exemple donné ci-avant sur l'opposé de la somme). Ce type de résultats ainsi obtenu est intéressant car il nous informe quant aux difficultés rencontrées par les élèves et à leurs origines éventuelles qui peuvent, pour partie, transcender les différences constatées entre les organisations du savoir à enseigner au sein des deux institutions scolaires françaises ou chiliennes[13]. Nous y reviendrons en conclusion.

3. Quelques résultats sur le rôle des changements de cadres algébrique et géométrique dans l'enseignement de la distributivité

L'étude institutionnelle (cf. partie 2) a montré le changement de cadres algébrique et géométrique constitue un « fil rouge » du discours technologico-théorique tenu sur la distributivité au sein du manuel chilien. Nous avons dès lors trouvé intéressant de nous interroger plus avant sur les potentialités et/ou les limites de ce changement de cadre dans l'enseignement du calcul algébrique.

3.1. Remarques sur les potentialités et les limites du changement de cadres algébrique-géométrique

Dans le manuel officiel chilien analysé, une partie importante du discours technologique et théorique tenu sur la propriété de distributivité en lien avec le calcul algébrique prend appui sur des constructions géométriques. Pour ce faire, ce discours s'appuie sur des calculs d'aires de surface rectangulaires ou carrées en vue de justifier l'équivalence d'expressions algébriques.

Une des originalités de l'argumentation technologique ainsi développée dans le manuel chilien est qu'elle tente visiblement de prendre en charge une part des adaptations de techniques enseignées (cf. l'exemple développé ci-avant sur le développement du produit d'un facteur par une somme de *n* termes, cf. partie 2.1), tentative qui nous a paru plutôt absente des deux manuels français analysés. Pour autant, ce discours nous semble présenter quelques incomplétudes.

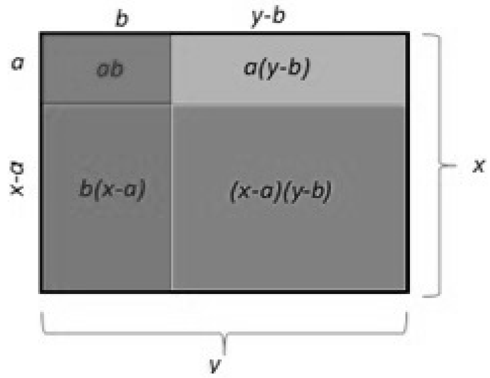
En effet, si ce discours s'attache à prendre en charge certaines des adaptations relatives aux techniques de développement et de factorisation d'expressions littérales, d'autres sont laissées de côté, comme par exemple celles attenantes à la

---

[13] Ainsi le résultat de recherche relative aux erreurs d'élèves français ou chiliens dans la gestion du signe « – » a conduit Dauriac (2014) à mener une enquête complémentaire sur l'intégration des nombres relatifs dans le calcul algébrique dans l'institution française. Cette étude a permis d'élucider certains aspects problématiques, relatifs à l'enseignement de ce que les auteurs de manuels de 4e désignent par déterminer l'opposé d'une somme.

soustraction. Cela nous a semblé intéressant de nous interroger plus spécifiquement à ce sujet, au regard des difficultés communes rencontrées par les élèves français ou chiliens dans la gestion de signe « – ». Le signe « – » est systématiquement prise en charge ailleurs dans le cadre algébrique *stricto sensu*, privilégiant de ce fait le retour systématique à sa signification comme opération unaire[14] ($-x$ étant à interpréter comme l'opposé de x), sans considérer l'opération binaire que la différence entre deux termes recouvre (Drouhard et Panizza, 2012) davantage en continuité du premier sens arithmétique de la soustraction et sans nécessairement aménager de passage explicite d'une signification à d'autres possibles[15].

Nous avons dès lors cherché à proposer quelques compléments possibles aux organisations mathématiques concernées par ces jeux de cadre, en lien avec la soustraction. Par exemple, nous proposons la construction géométrique suivante pour illustrer l'application de la double distributivité relativement à un produit de deux différences.



$$\begin{aligned}(x-a)(y-b) &= xy - b(x-a) - ab - a(y-b)\\ &= xy - bx + ba - ab - ay + ab\\ &= xy - xb - ay + ab\end{aligned}$$

Figure 5 : Support à un changement de cadres pour la double distributivité / soustraction

[14] L'« arité » d'une opération est par définition le nombre de ses opérandes ; par exemple l'addition est binaire, son arité est 2.

[15] Cette volonté de redéfinir la soustraction comme opération binaire dans le cadre algébrique peut poser question par rapport à la rupture entre arithmétique et algèbre, souvent mise en avant en didactique de l'algèbre. Nous ne nous y attarderons pas plus ici : notons toutefois qu'une identité remarquable du type $(a-b)^2$ présente dans les deux institutions française et chilienne (tout comme plus tard, dans l'étude de signes d'expressions littérales, les formules liées à la dérivation) montre une certaine « vie » de la « différence algébrique » comme opération binaire dans les pratiques de calcul algébrique.

Pour autant, ce type de compléments possibles au discours technologico-théorique sur les organisations mathématiques enseignées sur la distributivité et le calcul algébrique soulève des questions, notamment celle de la prise en charge de l'extension des pratiques de calcul algébrique aux nombres relatifs, impossible dans le seul cadre des grandeurs géométriques en jeu (en lien avec les notions d'aire et de longueur) comme le montre bien Constantin (2014).
Notons par ailleurs que dans la figure ci-dessus, comme dans toutes celles rencontrées dans la partie « cours » du manuel chilien, les variables ou les sommes et différences de variables caractérisent des longueurs, et dès lors les produits de deux facteurs (d'un nombre et d'une variable, de variables, de sommes ou de différences de deux variables) correspondent à des calculs d'aires. Cette caractéristique des changements de cadres géométrique et algébrique peut conduire à mettre en relation les grandeurs considérées (longueurs et aires) et les structures des expressions algébriques qui modélisent la situation géométrique. Par exemple, cela peut autoriser des moyens de contrôle, liés au degré des polynômes qui modélisent une situation géométrique faisant intervenir des grandeurs produits : on peut s'attendre à un polynôme de degré 2 pour un calcul d'aire, voire de degré 3 pour le calcul d'un volume.
Certains types de tâches correspondant à des exercices du manuel chilien font toutefois exception à cette caractéristique récurrente[16] des changements de cadre géométrique et algébrique. C'est par exemple, le cas de la factorisation d'un polynôme par le biais de la représentation en facteurs polynômiaux comme une somme d'aires, le total représentant le polynôme initial à factoriser (cf. figure 3). Rappelons que c'est un type de tâches présent dans le manuel chilien et absent des deux manuels français étudiés. Nous avons élaboré et mis en œuvre une brève expérimentation autour de ce type de tâches, dans une classe de Seconde française. Cette expérimentation visait à interroger quelques-unes des potentialités et des limites éventuelles de telles tâches liées à un changement de cadres algébrique et géométrique, relativement inhabituel pour les élèves, dans le contexte de l'institution scolaire française.

3.2. Une expérimentation en classe française : des tâches relatives à la factorisation et au changement de cadres algébrique-géométrique

Nous avons envisagé une série de tâches visant à installer progressivement le type de tâches concerné afin d'éviter une rupture de contrat didactique trop importante qui aurait pu entraver l'intégration de ce type de tâches inhabituel dans l'institution

[16] Cela semble être une caractéristique récurrente liée à ces changements de cadres algébrique et géométrique : que ce soit dans la partie « cours » du manuel chilien et/ou dans les parties « cours » ou « exercices » des manuels français de 5e et/ou de 4e où l'on en trouve davantage trace que dans les deux manuels de 3e analysés. Nous y reviendrons en conclusion.

française. D'autre part, l'analyse des réponses des élèves français au questionnaire présenté dans la partie 2.3 ayant donné à voir des difficultés de ces élèves dans les calculs liés aux (pseudo-)monômes, nous avons cherché à prendre en compte cet aspect dans la progression de tâches ainsi envisagées. L'expérimentation brièvement décrite ci-après a été mise en œuvre dans une classe de Seconde française (28 élèves de 15-16 ans, le 28 mars 2013, séance d'une heure environ). Précisons que les 28 élèves concernés avaient répondu au questionnaire présenté dans la sous-section 2.1 de cet article. Nous leur avons présenté la séance concernée en leur expliquant qu'il s'agissait de les familiariser avec un type d'exercices classique au Chili et assez inhabituel en France.
Nous avons reproduit ci-après la consigne distribuée aux élèves en début d'heure et qui a servi de support à cette expérimentation :

1) Expliquer comment tracer un carré d'aire $25x^2$ et faire une figure codée à main levée.
2) Expliquer comment tracer un carré d'aire $3x^2$ et faire une figure codée à main levée.
Construire un rectangle d'aire $10x$ ayant un côté commun avec ce carré.
Chercher une factorisation de $3x^2 + 10x$.
3) Tracer à la main un carré d'aire $25x^2$, puis un rectangle d'aire $25xy$, de sorte que les deux aient un côté commun.
Proposer une factorisation de : $25x^2 + 25xy$.
4) Tracer à la main deux rectangles, l'un d'aire $4x^2y$ et l'autre d'aire$4xy^2$, de sorte que les deux aient un côté commun.
Proposer une factorisation de $4x^2y$.+ $4xy^2$
5) Tracer à la main deux rectangles d'aires $2x^3y^2$ et $3x^2yz$, de sorte que les deux aient un côté commun.
Proposer une factorisation de $2x^3y^2 + 3x^2yz$.

Figure 6 : Support de l'expérimentation élaborée et mise en œuvre dans une classe de Seconde le 28 mars 2013

Notre analyse *a priori* de la succession de tâches ainsi proposée nous permet de prévoir que la question 1 ne devrait pas poser trop de difficultés aux élèves. Il s'agissait d'une première tâche visant à installer sur un exemple simple un contrat didactique toutefois inhabituel lié à la production d'une figure générique correspondant à une aire donnée sous la forme d'une expression algébrique.

Le début de la deuxième question posée nécessite une première adaptation liée à la présence d'un coefficient irrationnel $\sqrt{3}$. Il s'agissait pour nous de revenir sur une partie des difficultés potentiellement rencontrées par les élèves dans le traitement des (pseudo-)monômes (cf. résultats au questionnaire). Le fait qu'une tâche du même

type ait été accomplie préalablement nous a semblé pouvoir constituer une aide pour franchir cette première adaptation de connaissances. Par contre le fait de trouver les côtés du rectangle d'aire donnée, ayant un côté commun avec le carré est à même de poser difficulté aux élèves. Trouver le côté inconnu du rectangle en « divisant » l'aire de celui-ci ($3x^2 + 10x$) par la mesure du côté supposé commun $\sqrt{3}\,x$ entre le rectangle et le carré paraître délicat au regard de la nature du (pseudo-)monôme. Dans les faits, la factorisation attendue en réponse à cette question $\sqrt{3}x(\sqrt{3}x + \frac{10}{\sqrt{3}})$ ou $\sqrt{3}x(\sqrt{3}x + \frac{10\sqrt{3}}{3})$ est très inhabituelle (se situant par là-même en rupture de contrat didactique). Il est dès lors possible que les élèves produisent des factorisations plus « coutumières » pour eux mais ne répondant pas à la consigne donnée dans le cadre géométrique, du type de $x(3x+10)$. Ce choix était volontaire : il s'agissait bien de « forcer » la mise en place d'un nouveau contrat didactique attenant à la factorisation d'expressions littérales en lien avec un travail effectué en amont dans le cadre géométrique.
Il est important à noter qu'à partir de la troisième question (questions 3, 4 et 5), les expressions littérales à factoriser peuvent s'avérer problématiques vu qu'elles correspondent à des polynômes à plusieurs variables et/ou de degré ≥ 2. Or notre étude institutionnelle montre qu'ils ne sont pas ou peu travaillés dans les manuels français de collège. Notre idée est donc d'introduire ce type de tâches avec le but d'initier les élèves français à la factorisation d'expressions littérales sans doute inhabituelles pour eux et de voir si le travail effectué en amont dans le cadre géométrique leur permet de franchir les adaptations de connaissances correspondantes.

Les résultats principaux de l'analyse *a posteriori* de la séance observée sont les suivants. En réponse à la première question, 23 des 28 élèves ont reconnu que la mesure du côté du carré est égale à la racine de son aire, et ont su faire le calcul correspondant à la technique (reconnaître que le côté du carré est égal à la racine de son aire). La quasi-totalité a dessiné le carré de côté $5x$. Nous avons observé que la racine carrée du (pseudo-)monôme a pu à cette occasion ou non être convoquée explicitement par les élèves. La référence au cadre géométrique peut d'ailleurs amener les élèves à « expliciter la racine » qu'ils ne convoquent peut-être pas aussi spontanément dans le cadre algébrique *stricto sensu* si on en croit les résultats obtenus au questionnaire sur la factorisation de monômes identiques (et des erreurs commises par les élèves français comme chiliens dans ce type de traitements). L'extrait suivant de la transcription semble toutefois attester d'une première rupture de contrat didactique liée à l'articulation entre les cadres algébrique et géométrique liée au tracé d'une figure géométrique.

E1 : Enfin il faut une inconnue, du coup on pourra, on peut pas savoir, on peut pas faire, si y a une inconnue.
MAIT1 : **Ah, alors tu penses que tu peux pas faire parce que c'est pas connu, alors ce qu'on vous demande c'est une figure codée à main levée, hein.**
E1 : Ouais.
MAIT1 : **On vous demande pas de tracer quelque chose de (inaudible).**
E1 : Vingt-cinq *x* au carré...

Extrait 13 : Échanges d'élèves à l'occasion du tracé du carré d'aire $25x^2$

L'élève concerné hésite à tracer un carré codé à main levée, de côté indéterminé (côté $5x$). Notons que cela confirme une des ruptures du contrat didactique que nous avions anticipé dans notre analyse *a priori*, tout en précisant certains aspects : certains élèves éprouvent visiblement des difficultés à dessiner une figure « générique » dont le côté est indéterminé.

En réponse à la deuxième question de l'énoncé, conformément à notre analyse *a priori*, certains élèves ont produit la figure et la factorisation attendue tandis que d'autres ont produit des factorisations plus habituelles qui ne répondaient pas aux contraintes géométriques de l'énoncé et/ou se sont retrouvés bloqués dans le tracé à main levée de la figure correspondante. Cela a permis lors de l'épisode de mise en commun collective qui a suivi d'expliciter les règles « nouveau contrat didactique » relatif à la factorisation en lien avec le changement de cadre algébrique et géométrique. Notons que suite aux échanges collectifs qui ont permis d'identifier la longueur commune d'un côté du rectangle et d'un côté du carré : $\sqrt{3}x$ (correspondant au facteur commun), une majorité d'élèves a été en mesure de produire la factorisation attendue en réponse à cette question.

En réponse aux troisième, quatrième et cinquième questions de l'énoncé, il est important de signaler l'importance de la rupture du contrat didactique, liée au fait que les aires sont des monômes à plusieurs variables, ce qui est rarement travaillé dans l'institution française à ce niveau, comme l'on a vu dans l'analyse des manuels de Troisième (cf. sous-section 2.1). L'extrait suivant de la transcription atteste de la difficulté que représente cette question pour deux élèves dont les échanges ont été retranscrits.

E2 : Tiens, j'me sens trop mal. (inaudible)
E1 : Pourquoi tu te sens mal ? Qu'est-ce que t'as ? […]
E1 : Un rectangle d'aire, (inaudible) *x*, *y* ? Pfou // Oh, y a trop de lettres, j'suis perturbée là.[…]
E1 : 25*xy*. Pfou. Y a trop de lettres !

Extrait 14 : Échanges d'élèves à l'occasion de la découverte de la troisième question

Cependant, une fois cette difficulté surmontée *via* des aides de la part des expérimentateurs présents dans la classe,[17] la majorité des élèves ont répondu à une partie des questions posées de manière correcte. Des élèves ont produit spontanément plusieurs factorisations possibles sur la base des dessins à main levée effectués. Par exemple dans la production d'élèves ci-dessous, on peut observer deux factorisations possibles du polynôme relatif à la cinquième question posée.

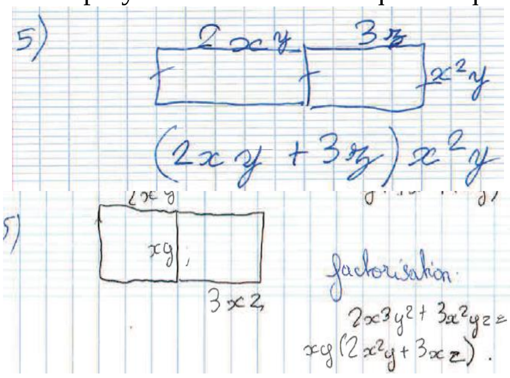


Figure 7 : Exemples de factorisations diverses pour l'exercice 5.

Le temps imparti pour la séance observée n'a malheureusement pas permis de revenir sur ces différentes possibilités pour factoriser une même expression algébrique, répondant de manière satisfaisante aux contraintes imposées par l'énoncé. Cela a été fait par l'enseignant de la classe observée à la suite de la séance concernée.

À travers cette brève expérimentation, on peut entrevoir quelques-unes des potentialités apparentes des tâches liées au changement de cadres algébrique et numériques ainsi expérimentées. Elles ont semblé permettre le travail sur des monômes avec un discours sur les longueurs des côtés des carrés et leurs aires qui semblent avoir permis aux élèves de mieux percevoir la structure algébrique particulières de pseudo-monômes au sens de Drouhard (1992). La production à main levée de « figures génériques » avec des côtés de longueurs indéterminées nous paraît également intéressante, au regard d'enjeux liés cette fois à la modélisation de situations géométriques, ici considérée dans un sens relativement inhabituel pour les élèves[18]. Enfin, la production spontanée par les élèves de plusieurs factorisations possibles sur la base de dessins à main levée d'expressions algébriques comprenant des produits de plusieurs variables le permettant *a priori* nous semble un point intéressant à signaler. Les élèves à l'issue de la classe du collège n'identifient pas

[17] Ces aides ont surtout constitué à expliciter ce que les expressions algébriques présentes dans l'énoncé présentaient d'inhabituel et à relancer la recherche des élèves.

[18] La modélisation algébrico-fonctionnelle est un enjeu important de l'enseignement des mathématiques au lycée en France, ce qui peut laisser penser qu'une telle potentialité mérite qu'on s'y attarde.

nécessairement que pour une expression littérale donnée, plusieurs factorisations sont possibles, et cela peut constituer un enjeu d'enseignement dans la transition collège-lycée (Tonnelle, 1979). On peut envisager que des tâches de ce type, mais plus traditionnelles pour des élèves français de Seconde, correspondant à la factorisation de polynômes comportant des produits de deux variables ou trois variables, de degré 2 ou 3 ou coïncidant davantage avec l'organisation mathématique des savoirs à enseigner sur les grandeurs (simples ou produits correspondant aux aires ou aux volumes) pourraient constituer une entrée intéressante dans la modélisation algébrico-fonctionnelle de situations géométriques.

4. Conclusions et perspectives

À l'issue de ce travail de recherche, plusieurs types de conclusions émergent sur les organisations de savoirs à enseigner sur la distributivité en France et au Chili.

Concernant les savoirs à enseigner et enseignés au sein de chacune des deux institutions, nous avons identifié des différences significatives dans les organisations de savoir à enseigner dans l'institution française et chilienne, que ce soit en ce qui concerne les types de tâches et techniques mises à l'étude ou les arguments technologico-théoriques qui visent à les accompagner (cf. partie 2). L'enseignement de la distributivité en France pourrait être qualifié de plus « algébrico-numérique » du fait des relations apparentes et étroites entre les *praxis* algébrique et numérique, étudiées de manière concomitante sur un temps long correspondant à plusieurs années d'enseignement au collège (Constantin, 2014). Ainsi les types de tâches à enseigner en fin de collège font principalement intervenir des « expressions algébrico-numériques » avec des coefficients de nature numérique variée (faisant parfois intervenir des racines carrées), correspondant la plupart du temps à des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 2. Les adaptations de techniques sollicitées reposent souvent sur un travail à la fois numérique et algébrique qui en ce qui concerne les (pseudo-)monômes par exemple, est parfois convoqué assez directement dans la factorisation ou le développement de polynômes. La *praxis* à enseigner sur la distributivité au Chili en un temps d'étude plus court qu'en France (une année à l'entrée du lycée) paraît d'emblée de nature plus algébrique : les polynômes considérés comportent plusieurs variables, peuvent être de degré supérieur à 2, ce qui va de pair avec un travail mené en amont sur les puissances et les produits de variables. Nous avons également constaté des différences dans les discours technologico-théoriques visant à accompagner l'enseignement des techniques de distributivité au sein des deux institutions. Le discours technologico-théorique paraît notamment plus présent et assumé dans le manuel chilien, du fait, d'une part, des objets de savoirs algébriques théoriques transposés (comme la notion de polynômes), et d'autre part de la présence d'arguments technologiques reposant sur un changement de cadres géométrique et algébrique, prenant en charge certaines adaptations des techniques.

En ce qui concerne les rapports personnels des élèves français et chiliens avec les savoirs enseignés ou les savoirs appris au sein de chacune des institutions, nous avons mis au jour des différences cohérentes avec celles constatées dans les organisations de savoirs mathématiques à enseigner. Ainsi les analyses des réponses d'élèves français et chiliens à notre questionnaire confirment les familiarités des uns et des autres avec les types de tâches respectivement mises à l'étude dans chacune des deux institutions. Par exemple, les élèves français réussissent davantage que les élèves chiliens à réaliser certaines adaptations de connaissances numériques, comme celles intervenant dans des calculs visant la factorisation ; en revanche, les élèves chiliens maîtrisent mieux d'autres adaptations, par exemple qui sont nécessaires pour la factorisation de polynômes à plusieurs variables et de degré supérieur ou égal à 2. Toutefois la nature même des adaptations de connaissances est importante à prendre en compte, et les différences de réussite entre les élèves chiliens et français dans l'accomplissement des tâches considérées comme plus ou moins familières aux uns et aux autres *a priori*, peuvent parfois s'estomper lorsque la marge de manœuvre relative à ces adaptations est plus faible. Ces analyses comparatives ont également permis de révéler la présence de *praxis* erronées qui semblent plus ou moins confortées par l'organisation des savoirs à enseigner au sein de chaque institution. Ainsi, bien qu'une *praxis* numérico-algébrique à enseigner en France, une part des techniques de développement ou de factorisation des polynômes correspondant à cette *praxis* (le travail sur les (pseudo-)monômes, la gestion du signe « – » dans les développements) semble à l'origine de difficultés des élèves français, tout autant que pour les élèves chiliens. Ces difficultés peuvent d'ailleurs renvoyer à des incomplétudes dans la *praxis* ou dans le *logos,* mises en avant par d'autres travaux que les nôtres (Pilet, 2012 ; Dauriac, 2014).

Ces résultats nous ont conduites à étudier les conditions de viabilité et d'existence de certaines organisations de savoir à enseigner. Nous nous sommes plus particulièrement intéressées aux rôles des changements de cadres algébrique et géométrique qui sous-tendent une part importante du discours technologico-théorique tenu sur la distributivité au Chili. Ainsi nous avons tenté dans un premier temps d'envisager des compléments aux ingrédients technologiques exposés dans le manuel officiel chilien : visant par exemple à prendre en charge la gestion du signe « – » dans les savoirs à enseigner sur la distributivité. Ce type de compléments peut certes poser question au regard de la signification prêtée à la différence dans le cadre géométrique, dès lors redéfinie comme opération binaire (en extension de sa signification arithmétique) alors que d'autres significations du signe « – » sont en jeu dans le cadre algébrique, dès lors que les nombres relatifs interviennent (Drouhard et Panizza, 2012). De manière plus générale les cadres géométrique et lié aux grandeurs présentent des limites avérées et maintes fois soulignées en ce qui concerne l'intégration des nombres relatifs (autrefois qualifiés d'algébriques). Des travaux récents (Dauriac, 2014) interrogent plus précisément ce point particulier, concernant la (ré-)intégration des nombres relatifs dans les *praxis* liées au calcul algébrique, à enseigner en France.

Pour autant, les changements de cadres géométrique et algébrique ne nous semblent pas dénués de potentialités au regard des éléments de discours technologiques qu'ils permettent de tenir sur les savoirs à enseigner sur le calcul algébrique, mais aussi du point de vue de types de tâches pouvant correspondre à des « jeux de cadres » au sens de Douady (1986). L'expérimentation conduite dans une classe de Seconde française nous a permis notamment d'identifier les potentialités d'un type de tâches donné, présent dans le manuel officiel chilien, et absent de l'institution française. Les mises en relations d'aspects structuraux des expressions algébriques (produits ou carrés, sommes) et de grandeurs géométriques (aires, longueurs) permises *via* le type de tâches ainsi exploré par les élèves nous ont semblé pertinentes à plusieurs égards développés ci-avant : dans le traitement des monômes ou pseudo-monômes, dans la recherche de facteurs communs dans le cadre algébrique. De plus, les questions suscitées par la production de « figures génériques » en lien avec des changements de cadres algébrique et géométrique (envisagé dans un sens inhabituel pour des élèves français) nous ont paru intéressantes dans une autre perspective, celle liée à l'enseignement de la modélisation algébrico-fonctionnelle.

Toutefois, il ne faudrait pas sous-estimer le coût que de tels changements ou jeux de cadre peuvent occasionner du point de vue des connaissances mathématiques des élèves relatives aux organisations de savoirs mathématiques liées aux calculs algébrique et aux grandeurs géométriques. D'autre part, la mise en cohérence de ces organisations de savoirs à enseigner peut être questionnée au regard des pratiques de modélisations algébriques. Par exemple, quelle(s) relation(s) envisager entre grandeurs simples, grandeurs-produits (aire, volume) et degré et/ou produits de monômes ou de polynômes ? Et pourquoi ?

Bibliographie

ABOU-RAAD N. (2006), *Le calcul algébrique en France et au Liban. Etude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves*. Thèse d'université. Université Aix-Marseille I.

ABOU-RAAD N., MERCIER A. (2009) Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 29(2) 155-288.

ASSUDE, T., COPPÉ, S. & PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 41-62). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BESSOT, A. & COMITI, C. (2008), Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam/France. In Coulange L. & Hache, C. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* 2008, 171-19.

BESSOT, A. & COMITI, C. (2013), Apport des recherches comparatives internationales aux recherches en didactique des mathématiques. Le cas de la France et du Viêt Nam. *Recherche en didactique des mathématiques,* 33(1), 41-62.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). - La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objets d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 77-124.

CHEVALLARD, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

CONSTANTIN, C. (2008), *Des fragilités du collégien aux difficultés du lycéen en Mathématiques, deux études de cas : Yoan et Joanna*. Mémoire de Master 2 recherche, Université Paris 7.

CONSTANTIN, C. (2014), *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

COULANGE L., DROUHARD J.P., DORIER J.L., ROBERT A. (2012), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COULANGE L., BEN NEJMA S., CONSTANTIN C., LENFANT-CORBLIN A. (2012), Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre à l'entrée au lycée. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 57-79). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CROSET, M.-C. (2009), *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre*. *Étude des erreurs stables inter-élèves et intra-élèves en termes de praxis-en-acte*. Thèse de l'Université Joseph Fourier – Grenoble I.

DAURIAC P. (2014), *Entre relatifs et calcul algébrique en 4e*. Mémoire de Master 2, Université de Bordeaux.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-31.

DROUHARD J.-P. (1992), *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse de l'université Paris 7.

DROUHARD J.-P., PANIZZA M. (2012), Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 203-229). Grenoble : La Pensée Sauvage.

GRUGEON B. (1997), Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, Recherches en Didactique des Mathématiques, 17(2), 167-210.

PILET J. (2012), *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire: modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris.

TONNELLE J. (1979), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

VLASSIS J. (2013), Utilisation du signe négatif et activités de modélisation, *Education et Formation*, 39-50.

Ministerio de Educación. *Informe final servicio de implementación del sistema de seguimiento al uso de texto escolares en uso durante el 2013.* http://www.textosescolares.cl/usuarios/tescolares/File/Informe%20Final%20SAT%202013_diciembre.pdf (2013), Accessed 03 Jan 2016.

MANUELS SCOLAIRES

BRAULT, R., DARO, I., FERRERO, C., PERBOS-RAIMBOURG, D., & TELMON, C. (2008). *Mathématiques, 3e*. Collection « Phare ». Hachette.

CHAPIRON, G., MANTE, M., MULET, R., & PEROTIN, C. (1999). *Mathématiques, 3e*. Triangle. Hatier.

ORTIZ, A., REYES, C., VALENZUELA, M., CHANDÍA, E. (2012). *Matemáticas, 1º*. McGraw-Hill. Interamericana de Chile Limitada.

Remerciements : Les deux auteurs remercient le Dr. Jean-Philippe Drouhard et le Dr. Patricio Cumsille pour leur collaboration dans la rédaction de cet article.

LALINA COULANGE
lalina.coulange@espe-aquitaine.fr

PAULA VERDUGO
paulasinttia@gmail.com

Annexe 1 : Le genre de tâches « Développer » en France et au Chili

Types de tâches associés au genre de tâches « Développer ». La notion de développement repose sur l'idée de supprimer des parenthèses, mais aussi sur la transformation d'un produit en une somme. Développer consiste donc en la transformation d'une expression algébrique écrite comme un produit, dans une autre expression algébrique écrite sous la forme d'une somme de deux ou plus polynômes. À partir de notre analyse praxéologique on distingue quatre types de tâches principaux, lesquels sont à leur tour divisés dans sous-types selon les variables didactiques en jeu :

Expressions	Types de tâches du genre « Développer »
1) $(a+b)(a-b)$	1.1) *a* nombre relatif/racine et *b* racine/nombre relatif, ou *a, b* racines (on exclut le cas : *a, b* nombres relatifs). Ex. : $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$, $(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$
	1.2) *a, b* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $(3x+12)(3x-12)$ $(3x-12)(3x+12)$
	1.3) *a, b* polynômes ou monômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $(x-y)(x+y)$
2) $(a\pm b)^2$	2.1) *a* nombre relatif/racine et *b* racine/nombre relatif, ou *a, b* racines (on exclut le cas : *a, b* nombres relatifs). Ex. : $(\sqrt{6}+2)^2$, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$
	2.2) *a, b* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $(3x\pm 2)^2$
	2.3) *a, b* polynômes ou monômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $(x\pm 3y^2)^2$
3) $(a\pm b\pm c)^2$	3. *a, b, c* monômes à plusieurs variables de degré inferieur ou égal à 1.
4) $pq\pm rs$	4.1) $pq+rs$ avec *p, q, r, s* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $3x+3(5x+3)$
	4.2) $pq-rs$ avec *p, q, r, s* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $16x^2-(4x-3)(4x+3)$
	4.3) *p, q, r, s* polynômes ou monômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $x^2y^2(3xy\pm 2x^2y)\pm 5x^3y^3$

Tableau A.1 : Les types de tâches constitutifs du genre de tâches « Développer »

Le Tableau A.2 ci-dessous donne des indications sur la présence des types de tâches du genre « Développer » dans les manuels français Triangle et Phare et dans le manuel officiel chilien.

Genre Développer		Triangle	Phare	Manuel chilien
1) $(a+b)(a-b)$	1.1)	0	10 (27,8%)	0
	1.2)	23 (100%)	25 (69,4%)	2 (40%)
	1.3)	0	1 (2,8%)	3 (60%)
Total		23	36	5
2) $(a \pm b)^2$	2.1)	0	14 (22%)	1 (14,3%)
	2.2)	35 (100%)	48 (75%)	1 (14,3%)
	2.3)	0	2 (3%)	5 (71,4%)
Total		35	64	7
3) $(a \pm b \pm c)^2$		0	0	1 (100%)
4) $pq \pm rs$	4.1)	29 (58%)	12 (57,1%)	0
	4.2)	21 (42%)	8 (38,1%)	0
	4.3)	0	1 (4,8%)	21 (95%)
Total		50	21	22

Tableau A.2 : Présence des types de tâches constitutifs du genre de tâches « Développer » au sein des deux institutions.

Annexe 2 : Le genre de tâches « Factoriser » en France et au Chili

Types de tâches associés au genre de tâches « Factoriser ». Dans l'enseignement secondaire dans l'institution française, le genre de tâches « Factoriser » une expression algébrique du type donné ne se réduit qu'aux polynômes (généralement à une variable) de degré 3 au plus, et à coefficients, correspondant la plupart du temps, à des entiers relatifs et fractions. Par contre dans l'institution chilienne, ce genre s'étend aux polynômes à plusieurs variables et de degré au plus 4 en chaque variable (ce qui peut produire expressions de degré assez élevé), comme le montre la figure ci-dessous. Dans notre étude, nous distinguons 3 types de tâches principaux, lesquels sont à leur tour divisés en sous-types de tâches selon les variables didactiques en jeu.

Expressions	Types de tâches du genre « Factoriser »
1) a^2-b^2	1.1) *a, b* polynômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $16x^2-9$, $(5x+4)^2-(3x-2)^2$
	1.2) *a, b* polynômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : x^2-y^2 , x^4-y^2
2) $a^2\pm 2ab+b^2$	2.1) $a^2+2ab+b^2$ avec *a* nombre relatif ou racine et *b* polynôme à une variable de degré égal à 1, ou *a* polynôme à une variable de degré égal à 1 et *b* nombre relatif ou racine (on exclut le cas *a* et *b* nombres relatifs ou racines au même temps). Ex. : $16x^2+24x+9$ ou $9+24x+16x^2$
	2.2) $a^2-2ab+b^2$ avec *a* nombre relatif ou racine et *b* polynôme à une variable de degré égal à 1, ou *a* polynôme à une variable de degré égal à 1 et *b* nombre relatif ou racine (on exclut le cas *a* et *b* nombres relatifs ou racines au même temps). Ex. : $36-60x+25x^2$ ou $25x^2-60x+36$
	2.3) *a, b* polynômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $4x^2\pm 12xy^2+9y^4$
3) $pq+pr$ / $qp+rp$	3.1) *p* nombre relatif ou racine et *q, r* polynômes à une variable de degré égal à 1 (on exclut le cas *p, q* et *r* nombres relatifs ou racines au même temps) Ex. : $3x+12+6x+24$
	3.2) *p, q,* et *r* polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 1, où le facteur commun est apparent. Ex. : $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$
	3.3) *p, q,* et *r* polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 1, où le facteur commun n'est pas apparent. $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$
	3.4) *p, q,* et *r* polynômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $-12x^2y+24y^2$

Tableau A.3 : Les types de tâches constitutifs du genre de tâches « factoriser »

Le Tableau A.4 ci-dessous montre la répartition des types de tâches du genre « Factoriser » dans les manuels français Triangle et Phare, ainsi que dans le manuel officiel chilien.

Genre « Factoriser »		**Triangle**	**Phare**	**Manuel**
1) $a^2 - b^2$	1.1)	33 (100%)	31 (97%)	0
	1.2)	0	1 (3%)	2 (100%)
Total		33	32	2
2) $a^2 \pm 2ab + b^2$	2.1)	26 (57%)	11 (39,3%)	1(33,3%)
	2.2)	20 (43%)	13 (46,4%)	1(33,3%)
	2.3)	0	4 (14,3%)	1(33,3%)
Total		46	28	3
3) $pq + pr$ / $qp + rp$	3.1)	0	0	3 (18,75%)
	3.2)	60 (91%)	0	0
	3.3)	6 (9%)	10 (100%)	1 (6,25%)
	3.4)	0	0	12 (75%)
Total		66	10	16

Tableau A.4 : Présence des types de tâches constitutifs du genre de tâches « Factoriser » au sein des deux institutions.