ZOE MESNIL

UN RETOUR DE NOTIONS DE LOGIQUE DANS LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES POUR LE LYCEE : UN NOUVEAU SAVOIR A ENSEIGNER

Abstract. Logic in high school syllabuses, a knowledge to be taught, With the resurgence of logical concepts in new syllabuses, a *knowledge to be taught* appears more explicitly than it did in previous years. This led me to study the teaching of logical concepts in high school as the study of a didactical transposition process. But because the goal is not to teach mathematical logic, but to teach logical tools for mathematical activity, I propose to introduce into the didactical transposition's scheme a *reference knowledge* between the *mathematical knowledge* (mathematical logic) and the *knowledge to be taught*. In this article, I am showing through the example of the implication, which aspects of logical concepts it would be relevant to take into account in such a knowledge, and I rely on the criteria established to construct a framework for analyzing syllabuses and textbooks.

Résumé. Avec la réapparition de notions de logique dans les nouveaux programmes, un *savoir à enseigner* est dessiné de façon plus explicite que dans les années précédentes, ce qui m'a amenée à étudier l'enseignement de notions de logique au lycée en termes d'étude d'un processus de transposition didactique. Mais parce que l'objectif n'est pas d'enseigner la logique mathématique, mais d'enseigner des outils logiques au service de l'activité mathématique, je propose d'introduire dans le schéma de la transposition didactique un *savoir de référence* intermédiaire entre le *savoir savant* (la logique mathématique) et le *savoir à enseigner*. Dans cet article, je montre à travers l'exemple de l'implication quels aspects des notions de logique il serait pertinent de prendre en compte dans un tel savoir, et je m'appuie sur les critères dégagés pour construire une grille d'analyse des programmes et des manuels.

Mots-clés. logique, implication, lycée, transposition didactique.

Introduction

Si tout le monde est d'accord sur le fait qu'il faut user de logique quand on fait des mathématiques, il n'y a, en revanche, pas de réponse consensuelle et pérenne à la question de l'enseignement de cet usage. À l'époque des mathématiques modernes (entre 1960 et 1980), on a pensé que cela passait par un enseignement de logique mathématique, notamment au lycée. Les quelques personnes qui s'intéressaient particulièrement à cette question dans la communauté didactique naissante ont d'une part commencé un travail d'identification des erreurs récurrentes des élèves, d'autre part prévenu des limites d'une approche trop formelle pour y remédier : une leçon de logique ne peut être efficace qu'« à condition que cette logique soit bien présentée comme métamathématique, c'est-à-dire que sa relation aux mathématiques soit constamment présente » (Adda, 1988, p.20). Ces réflexions et expérimentations sur

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 235 - 266.

un enseignement de logique mathématique au service de l'activité mathématique n'ont cependant pas pu être poursuivies puisque la logique mathématique a été exclue des programmes de la contre-réforme (autour de 1980) dont les rédacteurs voulaient marquer une rupture avec les mathématiques modernes. Mais avec cette éviction, c'est également l'enseignement de la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique, que j'appelle *logique des mathématiques* pour la différencier de la logique mathématique, qui a en grande partie disparu, comme le décrit V. Durand-Guerrier :

> Pratiquement absente aujourd'hui des curricula français, la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique est également le plus souvent absente du discours du professeur. Pour autant, les objets dont s'occupe la logique, tels que les connecteurs, la quantité, les règles d'inférences, la vérité et la validité sont autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence. (Durand-Guerrier, 2005, p.5)

En ce qui concerne le lycée, la situation est possiblement en train de changer : dans le nouveau programme pour la classe de Seconde publié en juillet 2009 (et dans ceux qui ont suivi en 2010 pour la classe de Première et en 2011 pour la classe de Terminale), des notions de logique sont de nouveau explicitement citées. Il y a donc actuellement une demande institutionnelle, et j'ai mené une étude didactique pour l'analyser et étudier sa mise en œuvre. Cette étude est l'objet de ma thèse intitulée *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'expression* (Mesnil, 2014), dont je vais en partie rendre compte dans cet article.

Dans la première partie, j'argumenterai le choix de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1991) pour étudier l'enseignement de la logique au lycée en termes d'étude d'un processus de transposition didactique. Parce qu'il ne s'agit pas d'enseigner le savoir savant qu'est la logique mathématique, j'ai proposé de penser la transposition didactique des notions de logique au lycée en introduisant un *savoir de référence* (Rogalski et Samurçay, 1994). Une difficulté majeure apparaît tout de suite : un tel savoir de référence n'existe pas au sens d'un corpus qui fasse consensus dans la communauté mathématique. En m'appuyant sur une étude épistémologique et didactique, j'ai mis au jour dans ma thèse des caractéristiques pertinentes d'un tel savoir et j'ai constitué un corpus dans lequel les notions de logique sont abordées sous trois angles : celui de la logique mathématique, celui des pratiques langagières des mathématiciens, celui des difficultés des élèves. Je montrerai alors, à travers l'exemple de l'implication, comment ce corpus constitue une référence pour la suite de mon étude, l'étude du *savoir à enseigner*.

La deuxième partie de l'article sera consacrée à l'étude de la place de la logique dans les programmes de Seconde et dans les documents qui les accompagnent depuis 1960. J'y mettrai en évidence les similitudes et les différences entre deux périodes : la période des mathématiques modernes (entre 1969 et 1981), et la période actuelle (depuis 2009).

L'étude de ces programmes montre que les instructions officielles actuelles sont imprécises, et ne donnent que peu d'éléments pour outiller les enseignants face à la complexité des notions de logique. Dans la troisième partie de cet article, je présenterai une étude des manuels actuels, en les regardant comme éléments qui participent à dessiner le savoir à enseigner (peut-être encore plus dans ce contexte de nouveauté, car les enseignants disposent de peu de s), mais également comme éléments révélateurs de choix d'organisation didactique qui permettent de faire des hypothèses sur les pratiques des enseignants.

1. Caractéristiques d'un savoir de référence pertinent pour l'enseignement de notions de logique au lycée

1.1. Une nécessaire adaptation du schéma de la transposition didactique

Le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009 présente par rapport au précédent programme une nouveauté pour l'enseignement de la logique dans la classe de mathématiques : il y figure le tableau ci-après (figure 1) fixant des objectifs concernant divers éléments de logique. Ces éléments sont régulièrement rencontrés dans l'activité mathématique, et leur utilisation par un individu nécessite des connaissances logiques (connaissance au sens de Margolinas, 2012, « ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation »). Le programme stipule donc que l'enseignement de ces connaissances fait partie de l'enseignement des mathématiques. Ces connaissances sont en lien dialectique avec le savoir logique des mathématiciens (savoir toujours au sens de Margolinas, 2012, « construction sociale et culturelle qui vit dans une institution »). Le programme de 2009 détermine ainsi « un contenu de savoir […] désigné comme savoir à enseigner » (Chevallard, 1991, p.39). Ce changement rend d'autant plus intéressante l'approche de la Théorie Anthropologique du Didactique et l'étude de l'enseignement de notions de logique au lycée en terme d'étude d'un processus de transposition didactique, c'est-à-dire de l'« ensemble [des] transformations adaptatives qui vont rendre [ce savoir] apte à prendre place parmi les *objets d'enseignement* » (*Ibid.*). Notamment, le programme, le document *Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques* qui l'accompagne et les manuels de Seconde publiés en 2010 constituent un ensemble consistant de données permettant une analyse de la partie externe de la transposition, aboutissant à la constitution du *savoir à enseigner*.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Figure 1 : Tableau des objectifs sur les notions de logique, Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique, BO n°30 du 23/07/2009

Notons cependant que les auteurs du programme de 2009 réservent aux notions de logique un traitement différent d'autres notions au programme. Par exemple, la notion d'échantillon[1] est un « contenu »[2] du programme, associé à des « capacités attendues » – comme « exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage » – et accompagné du « commentaire » suivant : « un échantillon de taille *n* est constitué des résultats de *n* répétitions indépendantes de la même expérience ». Les notions de logique par contre ne sont pas présentées comme des contenus et ne sont pas accompagnées d'un commentaire qui en donnerait ce qui pourrait être une définition au niveau du lycée. La notion d'échantillon est clairement repérée dans un savoir savant (la statistique), les concepteurs de programmes s'en saisissent et en font un objet d'enseignement. Pour les notions de logique, le statut d'objets mathématiques qu'elles ont au sein de la logique mathématique ne semble pas être une référence. La transposition didactique à étudier n'est donc pas celle d'un contenu de savoir repéré dans le savoir savant qu'est la logique mathématique, mais d'un contenu de savoir repéré dans ce que j'ai déjà appelé dans l'introduction la

[1] La notion d'échantillon est un nouvel objet d'enseignement dans le programme de Seconde de 2009, même si cette notion était déjà présente comme thème d'étude possible dans le programme précédent.

[2] Les termes « contenu », « capacités attendues » et « commentaires » font référence à la présentation classique des programmes en trois colonnes.

logique des mathématiques. Cette logique des mathématiques, partagée par la communauté, est visible dans les pratiques des mathématiciens plutôt que dans des traités. J'emprunte alors à J. Rogalski et R. Samurçay la notion de *savoir de référence* :

> Dans le domaine étudié, on assiste au déroulement d'un processus de construction d'un corps de savoir de référence à partir d'un ensemble de « savoirs en acte » manifestés dans des pratiques. Ce processus consiste à identifier des catégories d'objets et de traitements communes à des pratiques efficaces, qui sont quant à elles spécifiques de situations, contextualisées et personnalisées. (Rogalski et Samurçay, 1994, p.43)

C'est en tant que transposition d'un tel savoir de référence, qui serait une institutionnalisation de ce « savoir logique en acte », que je propose d'étudier le savoir à enseigner au lycée relatif aux notions de logique. J. Rogalski et R. Samurçay précisent ensuite qu'il est nécessaire que ce savoir de référence puisse « s'exprimer avec ses concepts, ses méthodes, ses systèmes de représentations et son langage » (*ibid.*, p.46). Or, bien que chaque mathématicien soit sans doute capable de décontextualiser, de dépersonnaliser les connaissances logiques qu'il met en œuvre, il n'existe pas dans la communauté mathématique un « savoir de référence pour la logique des mathématiques » qui fasse consensus dans le choix des concepts qui y figurerait et dans le niveau de formalisation du discours sur ces concepts. J'ai alors cherché à déterminer des caractéristiques épistémologiques et didactiques qui seraient pertinentes pour la constitution d'un tel savoir, et je me suis appuyée sur ces caractéristiques pour proposer une référence, c'est-à-dire un corpus sur les notions de logique présentes au lycée.

1.2. Caractéristiques d'un savoir de référence pour les notions de logique, et principes pour la constitution d'une référence

L'étude de divers systèmes logiques à travers l'histoire m'a permis de dégager des invariants et des différences dans le rôle assigné à la logique et dans les moyens qui lui sont donnés pour le remplir, que j'ai organisés selon quatre axes : le travail sur le langage, la validité des raisonnements, la nécessaire formalisation et la dialectique entre syntaxe et sémantique. L'étude de travaux didactiques montre comment les questions relatives à l'enseignement de la logique résonnent avec les préoccupations et les choix de ces différents logiciens. Je présente ici quelques grandes lignes des résutats de ces études, importantes pour situer les choix faits dans la constitution d'une référence (pour plus de détails, voir Mesnil, 2014, pp. 95 à 102).

Tous ces systèmes logiques sont construits à partir d'un travail sur le langage. La notion de proposition y est primordiale. Aristote la décrit en termes de sujet-copule-prédicat, et il a fallu attendre Frege pour qu'à la fin du XIX^{e} siècle, cette analyse soit remplacée par une analyse en termes de fonction et argument qui permet deux choses essentielles pour le langage mathématique : d'une part de considérer des prédicats (propriétés) à plusieurs places, d'autre part de sortir l'opération de quantification de la proposition en la faisant porter par des quantificateurs qui agissent sur des variables. La logique des prédicats qui naît alors est ainsi en mesure de modéliser les propositions mathématiques[3]. Du point de vue didactique, J. Adda avait déjà souligné au moment des mathématiques modernes que les mathématiques ne peuvent se traiter sans se placer à l'intérieur du calcul des prédicats et que les questions de quantifications étaient trop peu présentes dans la classe (Adda, 1975). Depuis sa thèse sur l'implication, V. Durand-Guerrier a montré de nombreux exemples de situations dans lesquelles la logique des prédicats est une théorie de référence pertinente pour l'analyse didactique (Durand-Guerrier, 1996), et dans la communauté didactique francophone, plusieurs travaux sur différentes notions de logique reprennent cette hypothèse de travail (Rogalski et Rogalski, 2004 et Deloustal-Jorrand, 2004 sur l'implication, Chellougui, 2004 sur les quantificateurs, Ben Kilani, 2005 sur la négation).

Le langage actuel des mathématiciens s'inspire du formalisme de Frege, mais n'est en aucun cas une utilisation stricte d'un langage formel. S'intéressant particulièrement aux problèmes langagiers dans l'enseignement des mathématiques, C. Laborde montre qu'il y a un usage particulier de la langue en mathématiques, dû à l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle (Laborde, 1982). Cette interaction permet aux mathématiciens d'avoir recours à des reformulations fécondes pour la conceptualisation. Les enseignants ont une pratique familière des particularités du langage des mathématiciens, mais elles peuvent poser des difficultés aux élèves, qui « découvrent en même temps les concepts et la façon dont on en parle » (Hache, 2015, p. 28). Selon S. Epp, il faut une attention particulière pour que les étudiants acquièrent la maîtrise du langage suffisante pour l'activité mathématique (Epp, 1999).

Dans les systèmes logiques étudiés, le travail sur le langage est un préalable à celui sur le raisonnement : leur but commun est bien d'assurer la validité de celui-ci. De la même façon, et particulièrement dans une perspective didactique, l'étude de notions de logique en tant que constituant du langage mathématique est à articuler avec leur utilisation dans le raisonnement. Dans la référence que j'ai constituée, j'ai

[3] J'appelle « proposition mathématique » tout énoncé qui dit un (ou des) fait(s) sur un (ou des) objet(s) mathématique(s). Une proposition mathématique est susceptible d'être vraie ou fausse. Ainsi, « 3 est impair » est une proposition vraie, « 2 est impair » est une proposition fausse, « n est impair » est une proposition pour laquelle cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, mais nous ne pouvons pas répondre à cette question par manque d'information sur n. Ce choix est différent de celui de certains auteurs qui appellent « proposition » seulement les deux premières (qui sont des propositions closes), il a pour but de renforcer la similitude entre ces trois énoncés : ce sont des phrases qui parlent d'objets mathématiques, la première de 3, la deuxième de 2, la troisième d'un objet qui s'appelle n.

choisi de donner une place centrale au langage au détriment du raisonnement. Entrer dans la logique par le langage est cohérent avec l'étude épistémologique, lui accorder une place importante est cohérent avec les travaux didactiques. Le fait que cela soit au détriment du raisonnement est lié essentiellement à deux raisons : tout d'abord à des questions de temps (mais la référence constituée a vocation à être enrichie, notamment du côté du raisonnement), ensuite, à une volonté de réhabiliter les liens entre langage et logique, celle-ci étant plus spontanément associée au raisonnement.

Finalement, ces études épistémologique et didactique m'ont amenée à proposer une référence dans laquelle la présentation des notions de logique combine trois approches :

- la logique mathématique. C'est une branche récente des mathématiques qui peut être considérée comme un aboutissement de ce qu'ont cherché à faire différents concepteurs de systèmes logiques depuis l'Antiquité grecque, et qui est particulièrement adaptée comme référence formelle pour rendre compte de la logique des mathématiques. Propositions, variables, connecteurs, quantificateurs sont présentés en tant qu'élements du langage mathématiques, sous un double aspect syntaxique et sémantique.
- l'étude des pratiques langagières des mathématiciens. J'ancre ainsi la présentation de ces notions de logique dans l'activité mathématique en prenant en compte la façon dont elles sont exprimées dans le discours mathématique, en utilisant la logique des prédicats pour mettre au jour certaines formulations complexes et parfois ambiguës qui font pourtant partie des pratiques langagières des mathématiciens, largement importées dans la classe de mathématiques.
- des travaux didactiques. J'ancre ainsi la présentation de ces notions de logique dans la classe de mathématiques, en prenant en compte les difficultés que la complexité de ces notions peut amener chez les élèves.

Cette référence (que j'évoquerai en disant simplement *la référence*) n'est pas un savoir de référence puisqu'elle n'est pas partagée et reconnue par la communauté mathématique. Elle pourrait cependant contribuer à la construction d'un tel savoir.

1.3 L'exemple de l'implication dans la référence

L'implication est un élément majeur dans l'activité mathématique. Elle est à l'articulation entre le langage et le raisonnement : de nombreux théorèmes sont formulés sous la forme d'une implication, il faut les démontrer, et pour cela, nous utilisons fréquemment dans nos raisonnements d'autres implications que l'on sait vraies. Je vais présenter ici cette notion à partir des trois approches que j'ai décrites. Parce qu'il y a beaucoup à dire, même à l'intérieur de chaque approche, cette présentation peut donner l'impression d'être une longue liste de points sensibles associés à cette notion, pour la plupart déjà évoqués dans d'autres écrits. Mais c'est justement cette multiplicité des points de vue, et cette volonté de faire le tour des points sensibles, qui permet à la référence d'être opérationnelle, à la fois comme outil d'analyse du chercheur, et comme ressource pour l'enseignement et la formation.

1.3.1. Approche à partir de la logique mathématique

Du point de vue mathématique, le mot *implication* recouvre plusieurs objets différents : le connecteur IMPLIQUE, la proposition formée en faisant opérer ce connecteur sur deux propositions P et Q[4] (ce qui donne la proposition P⇒Q, ce que pour ma part j'appellerai implication), mais aussi la proposition obtenue en faisant opérer ce connecteur sur deux propositions P[x] et Q[x] dans lesquelles la variable x est libre, et en lui associant une quantification universelle portant sur la variable x (ce qui donne la proposition « pour tout x, P[x]⇒Q[x] », que j'appellerai implication universellement quantifiée). Dans une preuve, nous adoptons deux positions par rapport à la manipulation des implications : nous sommes parfois utilisateur d’une implication (elle sert alors à justifer une inférence), nous sommes parfois démonstrateur d’une implication (elle est alors la conclusion d’une inférence).

Le connecteur binaire IMPLIQUE permet, à partir de deux propositions P et Q, de former la proposition P⇒Q (c'est l'aspect syntaxique d'opérateur sur les propositions commun à tous les connecteurs). Il est caractérisé du point de vue sémantique par la table de vérité ci-après (figure 2).

Les deux dernières lignes de cette table posent souvent problème. Plusieurs arguments permettent de les justifier, je n'en donnerai qu'un ici, celui qui illustre le mieux à mon sens la cohérence de ce choix avec l'activité mathématique. Considérons la proposition « pour tout entier n, n est divisible par 4 ⇒ n est pair ». Dire que cette proposition est vraie (ce qui est le cas), c'est en particulier dire que les propositions « 6 est divisible par 4 ⇒ 6 est pair », et « 9 est divisible par 4 ⇒ 9 est pair » sont vraies, cas qui correspondent aux deux dernières lignes de la table de vérité. Ainsi, décider que l’implication P⇒Q est vraie lorsque la prémisse P est fausse est la seule manière de pouvoir écrire des propositions de la forme « pour tout x, P[x]⇒Q[x] », sans se préoccuper des valeurs qui rendent la prémisse fausse pour conclure à sa vérité, ce que nous faisons constamment.

[4] P et Q peuvent éventuellement comporter des variables libres, V. Durand-Guerrier distingue ces deux situations en parlant d’implication matérielle dans le premier cas (pas de variable libre), et d’implication ouverte dans le deuxième cas (Durand-Guerrier, 2005, pp. 46 à 49).

P	Q	P⇒Q
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Figure 2 : Table de vérité du connecteur IMPLIQUE

Cette table de vérité nous permet de voir facilement que la négation de P⇒Q est (P ET NON(Q)).

Une implication universellement quantifiée est une proposition de la forme « pour tout x∈E, P[x]⇒Q[x] ». Elle est construite à partir d'une implication « P[x]⇒Q[x] » dans laquelle la variable x est *parlante*, et d'une quantification universelle portant sur cette variable, ce qui a pour effet de la rendre *muette*, et opérant sur cette implication[5]. La proposition « pour tout x∈E, P[x]⇒Q[x] » est vraie lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E, P[a] est fausse ou Q[a] est vraie. Ceci nous permet de voir que la négation de la proposition « pour tout x, P[x]⇒Q[x] » est la proposition « il existe x tel que P[x] ET NON(Q)[x] », ce qui justifie la technique du contre-exemple pour infirmer une implication. On voit que le fait que le contre-exemple doit vérifier la prémisse et pas la conclusion est lié à la table de vérité du connecteur IMPLIQUE[6], et que le fait qu'il suffise d'en produire un seul est lié à la quantification universelle.

Pour rendre compte de la manipulation d'une implication dans une preuve, je me servirai ici de la déduction naturelle de Gentzen. Les deux positions d'utilisateur et de démonstrateur correspondent aux deux règles de déduction ci-après (figures 2 et 3), l'une appelée règle d'élimination de l'implication (schéma également connu sous le nom de *modus ponens*), l'autre appelée règle d'introduction de l'implication (pour plus de détails sur ces règles, et sur d'autres règles du système de Gentzen, utilisées comme outils d'analyse des pratiques langagières dans la formulation des preuves, voir Hache et Mesnil, à paraître)

[5] La notion de variable étant absente du savoir à enseigner actuel, que ce soit dans le programme ou dans les manuels, le statut d'être muette ou parlante pour une variable est *a fortiori* également absent. C'est pourtant une disctinction fondamentale pour la compréhension des propositions mathématiques, voir Mesnil, 2014, p. 113.

[6] Plusieurs étudiants savent très bien utiliser cette technique du contre-exemple, mais quand on leur demande d'écrire formellement la négation de P⇒Q, ils proposent souvent P⇒NON(Q), ou NON(P)⇒Q, ou Q⇒NON(P), bref, une implication combinant P, Q ou leur négation !

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

Figure 3 : règle d'élimination de l'implication

$$\begin{array}{c}[P]\\ \vdots\\ \dfrac{Q}{P \Rightarrow Q}\end{array}$$

Figure 4 : règle d'introduction de l'implication

La règle d'élimination peut se lire ainsi : « de P et de P⇒Q je déduis Q », la règle d'introduction peut se lire ainsi : « pour démontrer P⇒Q, je démontre Q sous hypothèse P ».

1.3.2. Expression dans le discours mathématique

Dans cette partie, je me limiterai à étudier deux expressions langagières couramment utilisée pour dire les implications : « si P, Q » et « si P alors Q ». Je renvoie le lecteur / la lectrice à la thèse (Mesnil, 2014) pour l'utilisation d'autres expressions telles que « P implique Q », « P entraîne Q ».

Nous allons voir différentes utilisations de *si* (ou de *si… alors…*) dans lesquelles je soulignerai des obstacles possibles à la compréhension de la notion d'implication dans son sens mathématique rappelé dans le paragraphe précédent. Cette deuxième approche situe la référence dans une perspective didactique puisque ces obstacles sont autant de difficultés potentielles pour l'enseignement et l'apprentissage.

Je me suis d'abord appuyée sur des travaux du linguiste O. Ducrot qui propose une description des énoncés *si p, q* du langage courant non pas à partir de l'existence d'un type de relation entre *p* et *q*, mais à partir de deux actes illocutoires réalisés par leur énonciation : demander à l'auditeur d'imaginer *p*, une fois le dialogue introduit dans cette situation imaginaire, y affirmer *q* (Ducrot, 1991). Il précise que cette description permet de rendre compte de l'emploi traditionnel du mot *si* pour donner à entendre une relation de dépendance entre les propositions qu'il réunit :

> Dans la mesure, en effet, où on demande à l'auditeur de se placer dans l'hypothèse « *p* » avant de lui annoncer « *q* », on donne à penser qu'il y a une certaine dépendance entre « *p* » et « *q* » : sinon, on comprendrait mal que le locuteur ait cru bon de faire précéder l'acte d'affirmation d'un acte de supposition. La dépendance entre les deux propositions apparaît ainsi comme un contrecoup de la dépendance entre les deux actes accomplis. (Ducrot, 1991, p.169)

Il explique ensuite comment la loi d'exhaustivité, connue également sous le nom de principe du maximum d'information, amène alors à entendre cette relation de dépendance comme à la fois suffisante et nécessaire :

> Si le locuteur a restreint son affirmation de « *q* » à la supposition préalable que « *p* » est vrai, il est naturel de croire, puisqu'il est censé dire le maximum de ce qu'il sait, qu'il ne pouvait pas affirmer « *q* » d'une façon catégorique. Si, de plus, on refuse d'attribuer cette incapacité à une limitation de son savoir, on doit interpréter cette restriction de l'affirmation comme l'affirmation d'une restriction. On introduit donc l'idée que « *q* » est vrai seulement si « *p* » est vrai. (Ducrot, 1991, pp.169-170)

En mathématiques, pour démontrer une implication « si P (alors) Q », on se place dans la situation où P est vérifiée, puis on affirme (en argumentant) Q (voir règle d'introduction de l'implication à la figure 4). Cette démarche se rapproche de la description de Ducrot, et le phénomène qu'il décrit ci-dessus, même s'il correspond à des utilisations de *si* dans la langue courante, peut venir faire obstacle à la compréhension de la notion d'implication qui est alors entendue comme une l'équivalence.

Puisque nous avons distingué implication et implication universellement quantifiée, demandons-nous laquelle est marquée par l'utilisation de *si*, ou de *si… alors…* qui est plus fréquemment utilisé en mathématiques. Cette expression est presque toujours utilisée en mathématiques entre deux propositions comportant au moins une même variable libre. Les mathématiciens ne lisent pas une proposition telle que « si *n* est pair, alors *n* est divisible par 4 » comme une simple implication entre deux propositions mais comme une implication universellement quantifiée. La preuve en est que si on les interroge sur cette proposition, ils ne diront pas qu'elle est parfois vraie (par exemple pour n=7), parfois fausse (par exemple pour n=6), mais qu'elle est fausse. En fait, selon O. Ducrot, l'idée de dépendance associée au mot *si* empêche les mathématiciens de l'utiliser pour marquer dans tous les cas le connecteur IMPLIQUE :

> Un mathématicien n'aurait pas de répugnance particulière à dire « si 2+2=4, alors 2+3=5 », car on peut envisager que la deuxième proposition se démontre à partir de la première. Mais il hésiterait à dire « si 2+2=4, alors 2 n'a pas de racine carrée rationnelle », car la démonstration de la deuxième proposition, dans ce cas, n'utilise pas, habituellement, la première. (Ducrot, 1991, p.169)

Ainsi, en mathématiques, la dépendance entre P et Q dans l'expression *si P alors Q* est marquée par le fait d'avoir une démonstration de Q à partir P. Or, les mathématiciens ne démontrent pas des propositions telles que 2+3=5 sous hypothèse 2+2=4, mais plutôt l'implication $x+y=z \Rightarrow x+y+1=z+1$ dont ils montrent qu'elle est vraie quels que soient x, y et z. Cette position qui distingue *si* de la langue courante et connecteur IMPLIQUE était également celle de Frege. Il soulignait que le signe qu'il employait dans son *Idéographie* pour noter le connecteur IMPLIQUE ne se traduisait par *si* que « dans le seul cas où une partie du contenu est indéterminée et donne à l'ensemble un caractère de généralité » (Frege, 1971). Il restreignait ainsi l'utilisation de *si* au cas où au moins une variable apparaît libre dans la prémisse et dans la conclusion, cas où il est alors possible de quantifier universellement l'implication. Finalement, nous rencontrons dans l'activité mathématique essentiellement des implications universellement quantifiées[7] et la plupart du temps, la quantification est implicite, « intégrée » au *si (alors)*. L'utilisation de *si* pour signifier le connecteur IMPLIQUE entre deux propositions quelconques se heurte aux habitudes dues à cet usage (par extension, les emplois de *si* pour signifier une instanciation d'une implication universellement quantifiée seront cependant acceptés, c'est le cas de l'exemple de Ducrot).

Cette description de O. Ducrot lui permet d'expliquer d'autres utilisations du *si* avec cette même description. Certaines de ces utilisations sont présentes en mathématiques, notamment ce qu'il appelle le *si-présuppositionnel*, que l'on retrouve par exemple dans « si Pierre est à Paris, il y restera certainement » (Ducrot, 1991, p.176). La proposition introduite par *si* constitue alors un présupposé de la principale, qui n'a pas de sens en dehors de la situation décrite par la subordonnée. Nous retrouvons en mathématiques une utilisation de *si* qui se rapproche du *si-présuppositionnel*, par exemple dans la proposition suivante :

si x et y sont des réels strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

Ici, le *si* introduit une condition P : « x et y sont des réels strictement positifs » pour que la proposition Q : « $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ » ait un sens. La gêne que l'on peut ressentir en essayant d'énoncer la contraposée de cette proposition montre bien qu'on ne l'entend pas comme une implication.

Je terminerai en signalant un dernier emploi de *si* courant en mathématique : son utilisation dans les définitions. Tout d'abord, une définition n'est pas une proposition. Elle pose une convention, et cela n'a pas de sens de se demander si elle est vraie ou fausse. Elle introduit un nouveau prédicat P'[x] (par exemple « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ») comme raccourci d'une proposition P[x] (ici « pour tous réels x, y, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$ »). Par ailleurs, elle pose une équivalence entre ces deux propositions (mais on ne peut pas utiliser dans la définition l'expression *si et seulement si* puisque d'une certaine façon le prédicat P'[x] n'est pas encore introduit dans le langage).

Nous voyons que dans ces deux dernières utilisations *si* ne correspond pas à une implication. Nous pouvons souligner les distinctions entre ces énoncés et une implication en s'appuyant sur d'autres formulations. Dans le premier exemple, on pourra utiliser de façon équivalente une formulation dans laquelle la quantification universelle est explicite, relativisée à un ensemble de valeurs pour les variables pour lequel la suite de la proposition a un sens :

---

[7] Notons cependant qu'à chaque implication universellement quantifiée sont associées des implications obtenues par instanciation de la variable par une valeur, comme nous venons de le voir.

Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

C. Hache décrit une telle formulation comme une quantification relativisée posant une *condition de sens*, à distinguer d'une quantification relativisée posant une *condition de vérité*, qui par contre correspond à une implication (« pour tous réels x et y strictement positifs, $xy>0$ » est équivalente à « pour tous réels x et y, si $x>0$ et $y>0$ alors $xy>0$ », voir Hache, 2015).

Dans le cas des définitions, l'utilisation d'une expression telle que « par définition, P'[x] si P[x] » permet de signaler que l'on est dans une utilisation particulière de *si* qui ne relève pas de l'implication, l'utilisation d'une formulation telle que « on dira que P'[x] lorsque P[x] » permet d'éviter le *si*.

Dans cette étude de l'utilisation de *si* en mathématiques, je me suis appuyée à la fois sur une approche linguistique et sur une approche mathématique. Elles se complètent pour décrire les pratiques langagières des mathématiciens, et surtout les éventuels obstacles à la compréhension des élèves.

1.3.3. Difficultés dans l'apprentissage de l'implication

Ici encore je continue à suivre le fil rouge « langage » qui guide ce que je choisis de mettre (pour l'instant) sur l'implication dans cette référence. Ainsi, dans cette partie sur les difficultés dans l'apprentissage de l'implication, je présenterai ce qui concerne l'implication en tant qu'élément du langage mathématique : le cas délicat d'une implication dont la prémisse est fausse, la distinction entre implication et implication universellement quantifiée. J'évoquerai finalement la disticntion foncdamentale entre vérité d'une implication et validité d'une déduction.

Cas de la prémisse fausse : Dans une étude menée en 1999 et 2001 auprès d'étudiants entrant dans la préparation au CAPES[8] de mathématiques, J. Rogalski et M. Rogalski ont notamment étudié le traitement des implications à prémisse fausse, intérêt qu'ils justifient par le fait que « la situation de l'implication à hypothèse fausse est à peu près la seule qui met fortement en évidence le saut qualitatif entre d'une part une certaine logique usuelle, naturelle […] et d'autre part une logique formelle dont la nécessité intervient de façon plus cachée en mathématiques, au point que les étudiants ne se rendent pas compte qu'elle y est plus qu'on ne le pense à l'œuvre » (Rogalski et Rogalski, 2004, p.177). Ils montrent que seulement 20% des étudiants savent traiter correctement le cas de la prémisse fausse dans des situations mettant en jeu des implications formées à partir de propositions concernant des données immédiatement saisissables par le sujet (par exemple, « si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral ») et que

[8] Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré, les étudiants qui préparent le CAPES se destinent donc à être enseignants dans le secondaire (élèves de 11 à 18 ans).

ces étudiants réussissent mieux dans d'autres situations où ils ont à évaluer la vérité d'une implication (dans différents contextes, les études nombreuses autour de la tâche de Wason ayant montré l'importance de celui-ci, voir Durand-Guerrier et al., 2012). Le résultat ne serait sans doute pas très différent aujourd'hui puisque la logique est peu présente dans la formation initiale des enseignants. Mais le fait de ne pas savoir qu'une implication est vraie quand sa prémisse est fausse est-il handicapant dans l'activité mathématique ? Nous nous retrouvons assez peu souvent (je serais presque tentée de dire jamais) en situation de devoir valider une implication en justifiant sa vérité par le fait que sa prémisse est fausse. En revanche, nous avons affaire à l'implication à prémisse fausse à plusieurs moments, que j'ai déjà signalés dans la partie 1.3.1 et que je rappelle ici :

- à chaque fois que nous affirmons la vérité d'une implication universellement quantifiée « pour tout x, (P[x]⇒Q[x]) », nous affirmons en particulier la vérité d'un certain nombre d'implications à prémisse fausse (par exemple, affirmer la vérité de « pour tout réel x, $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ » c'est en particulier affirmer la vérité de « $-0{,}5 \geq 1 \Rightarrow (-0{,}5)^2 \geq 1$ »).
- à chaque fois que nous nous contentons de montrer B sous hypothèse A pour montrer que l'implication A⇒B est vraie, nous considérons donc qu'elle est vraie lorsque A est fausse.

Le fait qu'une implication dont la prémisse est fausse est vraie permet de mieux comprendre ce que l'on fait dans ces moments de l'activité mathématique.

Distinction entre implication entre propositions et implication universellement quantifiée : V. Durand-Guerrier a écrit de nombreux textes mettant en évidence le caractère polysémique de l'implication et a notamment souligné la pratique de quantification universelle implicite associée à l'implication. Elle a relaté des expérimentations dans lesquelles des élèves qui ne sont pas au courant de cette pratique évaluent alors la vérité d'une implication d'une façon non conforme à ce qu'attend le professeur, et pourtant conforme à la logique mathématique (voir par exemple la tâche du labyrinthe, Durand-Guerrier, 1999 : les élèves disent qu'on ne peut pas savoir si une implication est vraie, car ils la lisent comme une implication entre deux propositions dont on ne connaît pas la valeur de vérité, le professeur dit qu'elle est fausse car il la lit comme une implication universellement quantifiée).

Confusion entre *si A alors B* et *A donc B* : A⇒B est une proposition. Elle peut être vraie ou fausse, ce renseignement ne nous est pas donné par la proposition elle-même mais par son assertion ou son infirmation. De plus, savoir qu'elle est vraie ne nous donne aucun renseignement sur la valeur de vérité de A ni sur celle de B puisque plusieurs distributions de valeurs de vérité rendent A⇒B vraie. *A donc B* n'est pas une proposition, on ne peut pas lui accorder de valeur de vérité. Par contre, nous pouvons nous demander si une telle inférence est valide ou non, et pour cela, il est nécessaire de contrôler plusieurs éléments : en effet, affirmer *A donc B*, c'est affirmer trois choses : que A est vraie, que B est vraie et que l'on peut déduire le deuxième renseignement du premier (souvent parce que l'on sait que $A \Rightarrow B$ est vraie). Une implication, marquée par exemple par l'utilisation de *si… alors…,* et une déduction, marquée par l'utilisation de *donc*, sont ainsi deux objets épistémologiquement différents, reliés à deux concepts disctincts et fondamentaux en logique : la vérité (d'une proposition) et la validité (d'un raisonnement, qui est assurée par la vérité des prémisses et la validité d'une loi logique).

Bien sûr, une grande partie des *donc* écrits ou prononcés en mathématiques sont reliés à l'implication car ils marquent une utilisation de la règle du *modus ponens*. V. Durand-Guerrier fait l'hypothèse que l'utilisation des implications essentiellement dans ce cas amènent une conception selon laquelle affirmer un énoncé conditionnel, c'est affirmer son antécédent, « conception commune [qui] semble assez résistante, au sens où elle résiste à la pratique et aux savoirs acquis en mathématiques » (Durand-Guerrier, 2005, p.56). Une telle conception empêche d'utiliser une implication dans un raisonnement par contraposition (schéma du *modus tollens, si A alors B, or NON(B) donc NON(A)*), puisque la conclusion d'un tel raisonnement est la fausseté de la prémisse.

J'ai finalement montré dans cette première partie de l'article comment le processus de transposition didactique pour les notions de logique au lycée pouvait être repensé à partir d'un *savoir de référence* pour intégrer la dimension outil de ces notions dans l'activité des mathématiciens. Tout en m'appuyant sur le savoir savant qu'est la logique mathématique, j'ai intégré d'autres dimensions plus en lien avec l'activité mathématique et avec la classe dans la constitution d'une référence par rapport à laquelle je situe l'étude du *savoir à enseigner*.

2. Analyse des programmes et documents d'accompagnement

Y. Chevallard appelle travail externe de la transposition didactique la « sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme "savoir à enseigner", seront alors soumis au travail de transposition » (Chevallard, 1991, p.30). Il s'agit d'un travail externe car il se fait en dehors des institutions où est mis en œuvre l'enseignement. Des textes sont ainsi produits (programmes, documents d'accompagnement) qui constituent la délimitation « officielle » du savoir à enseigner. Je donnerai d'abord la méthodologie, puis les principaux résultats de l'analyse de ces textes.

2.1. Méthodologie d'analyse des programmes : l'approche écologique

L'approche écologique propose des outils pour l'analyse du texte du savoir. Cette analyse, menée avec une perspective historique, éclaire les enjeux des choix faits pour définir le savoir à enseigner, choix qui participent d'un système de conditions et de contraintes auquel est soumis l'enseignant. Pour analyser les programmes et les documents d'accompagnement, j'ai suivi la démarche proposée par M. Artaud dans son cours à la IX^e École d'Été de didactiques des mathématiques :

> un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour [de lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où on [le] trouve et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. Nous pourrons alors envisager la transposition de ces complexes d'objets dans l'enseignement secondaire. (Artaud, 1997, p.111)

J'ai recherché niche(s) et habitat(s) de la logique dans les textes des programmes et des documents les accompagnant depuis 1960. J'ai centré mon étude sur les programmes pour la classe de Seconde[9], et je l'ai menée en distinguant quatre périodes selon la place attribuée à la logique dans ces programmes :

- de 1960 à 1969 : en 1960, la logique fait une entrée dans les programmes. Et dans les années qui suivent, des expériences sont faites sur le terrain, certaines pratiques d'enseignement sont débattues, notamment en ce qui concerne l'emploi des symboles logiques.
- de 1969 à 1981 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1969 est celui des mathématiques modernes. C'est une période dans laquelle la logique est objet explicite d'enseignement. Mais cette réforme donne rapidement lieu à de vives critiques.
- de 1981 à 1999 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1981 est celui de la contre-réforme. La logique en est exclue, accusée de participer au formalisme excessif reproché aux mathématiques modernes. Cette exclusion se poursuit dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1990.
- depuis 1999 : la logique fait un timide retour dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1999, puis dans le programme pour la classe de Première de la section littéraire en 2004, puis finalement un retour plus explicite dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009.

Pour cerner le contexte dans lequel est écrit chacun de ces programmes, je me suis appuyée sur différents textes publiés par l'APMEP[10], notamment le Bulletin, publication trimestrielle de l'association. J'utilise ces textes comme des indicateurs

---

[9] En ce qui concerne les programmes actuels, les objectifs sont presque identiques pour les classes de Seconde, Première et Terminale et seul un document d'accompagnement a été publié, pour la classe de Seconde.

[10] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

des interrogations de la communauté de l'enseignement des mathématiques. Des positions diverses s'y expriment, pas seulement celles prises officiellement par l'association. Je fais ainsi des allers-retours entre analyses des programmes à l'aide des outils de l'analyse écologique qui permettent de préciser la demande institutionnelle, et analyses des bulletins de l'APMEP, qui aident à en comprendre l'évolution, en montrant le point de vue des acteurs de la mise en œuvre de cette demande.

2.2. Résultats de l'analyse : comparaison de la période des mathématiques modernes et de la période actuelle

Dans tous les textes institutionnels étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais la logique mathématique n'est une référence pour cet apprentissage que durant la période des mathématiques modernes (1969-1981), et, à un degré moindre, depuis 1999. Nous pouvons donc parler, dans ces deux périodes, de deux niches qui correspondent aux deux piliers de la logique : une niche raisonnement et une niche langage. Ces deux niches sont bien sûr imbriquées puisque le langage est constitutif du raisonnement.

Dans ces deux périodes nous pouvons également parler d'un habitat flou pour la logique qui doit être présente partout, son étude accompagnant celle des notions vues dans les autres chapitres. Il y a cependant une différence notable sur ce point entre les deux périodes, qui révèle deux positions distinctes quant à la dimension objets des notions de logique. Pendant la période des mathématiques modernes, un chapitre spécifique était consacré à ces notions, étudiées en tant qu'objets mathématiques. Ce chapitre était placé en début de Seconde et il avait pour but de poser des bases qui seraient ensuite réinvesties à de multiples occasions. Dans le programme pour la classe de Seconde de 2009, il est précisé qu'il ne faut pas faire de cours et le programme ne suggère d'aborder les notions de logique que dans leur dimension outil.

L'étude de documents accompagnant les programmes de 1969 et de 2009 montre que, si les deux programmes mentionnent à peu près les mêmes notions de logique à étudier, les approches sont très différentes, notamment dans la place attribuée à la logique mathématique. Dans la période des mathématiques modernes, le *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* de 1970 qui accompagne les programmes de 1969 (désigné ensuite par *le commentaire de 1970*) propose un très synthétique cours de logique mathématique, en précisant que ce qui est exposé est surtout à visée de formation des professeurs plutôt que directement destiné aux élèves. Cet exposé n'est pas accompagné d'exemples d'activités pour la classe.

À l'inverse, le document *Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques* de 2009 (désigné ensuite par *le document ressources de 2009*) propose une série d'exercices sur les éléments de logique au programme, mais aucune considération théorique les concernant. Il n'est ainsi pas question de les présenter, ni pour les élèves, ni même pour les professeurs, à partir de l'approche de la logique mathématique. Plusieurs différences entre l'utilisation de certains mots (et, ou, un, si… alors…) dans le langage courant et dans le langage mathématique sont soulignées, mais aucun terme de la logique mathématique n'est utilisé pour expliquer ces différences (par exemple, les termes « quantificateur universel » et « quantificateur existentiel » ne sont pas utilisés pour parler des différents sens dans l'emploi du mot *un*).

Finalement, l'étude de ces deux documents nous permet de préciser les liens entre logique et langage dans ces deux périodes. Durant la période des mathématiques modernes, l'ancrage dans la niche langage est plus fortement affirmé : la formalisation du langage mathématique est vue comme bénéfique, structurante pour l'activité mathématique, et la logique mathématique est vue comme une aide à la maîtrise d'un langage formalisé beaucoup plus largement utilisé au lycée qu'aujourd'hui. Dans le programme actuel, même si la logique est relié au langage, la maîtrise d'un langage mathématique spécifique n'est plus un objectif revendiqué. Les principes de la logique mathématique sont en effet mis en parallèle avec les principes de la logique du langage courant, mais dans les commentaires du document ressource de 2009, les premiers semblent consister en des précisions nécessaires pour adapter les deuxièmes à la rigueur requise en mathématiques, qui exige notamment l'univocité de certains termes. Le traitement des notions de variable et de proposition est un indicateur de ces différentes positions par rapport au langage mathématique : elles sont présentées comme des notions essentielles dans le commentaire de 1970, elles sont absentes du document ressources de 2009.

L'étude des documents publiés par l'APMEP montre que l'enseignement de la logique est beaucoup plus une préoccupation des enseignants durant la période des mathématiques modernes qu'actuellement (une liste des articles publiés dans le Bulletin de l'APMEP sur ce sujet se trouve dans Mesnil, 2014, pp. 441 à 443). En 1967 et 1968, l'APMEP publie dans le Bulletin des articles théoriques sur la logique mathématique, montrant ainsi la volonté de former les professeurs en matière de logique avec cette référence. D'autres textes publiés dans le Bulletin témoignent des débats qui ont accompagné la période des mathématiques modernes, notamment autour de la présentation axiomatique dans l'enseignement des mathématiques. S'agissant plus particulièrement des notions de logique, le débat sur l'utilisation ou non des symboles de quantificateur a été particulièrement vif. Des expériences d'enseignement de logique sont relatées, de l'école primaire au lycée. Les auteurs y mettent en avant le travail sur le langage que permet la logique. La formalisation est défendue par plusieurs enseignants comme un élément fécond pour la conceptualisation des notions mathématiques. Pour la période actuelle, le premier article publié dans le Bulletin qui concerne la logique est paru en novembre 2014 (Larrieu, 2014), et c'est au jour d'aujourd'hui le seul.

La perspective historique sur la place de la logique dans les programmes de mathématiques pour le lycée montre que la position actuelle vient à la suite de deux situations extrêmes : la logique est présente comme une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de 1969 à 1981, mais est ensuite totalement exclue de 1981 à 1999. Nous pouvons ainsi parler d'un retour de la logique dans les programmes, et en retenir deux conséquences importantes en ce qui concerne les enseignants : rien n'a été inscrit dans le temps à un niveau collectif, et les enseignants actuels n'ont pas tous reçu le même type de formation sur la logique, et n'ont pas les mêmes connaissances. Le professeur d'aujourd'hui se retrouve donc, sans doute plus que pour d'autres domaines, à devoir faire des choix didactiques qui seront très influencés par une composante personnelle (Robert et Rogalski, 2002).

Comme le souligne G. Arsac (Arsac, 1989), le savoir à enseigner ne se réduit cependant pas aux textes officiels (d'ailleurs les professeurs se contentent rarement de cette seule lecture pour préparer leurs cours). Parmi les ressources publiées à côté des textes officiels, les manuels ont une place importante. Ils sont un élément charnière de la transposition. Leur étude, qui est l'objet de la partie suivante, complète l'étude des programmes et documents d'accompagnement dans l'étude globale du savoir à enseigner.

3. Analyse des manuels

Les manuels donnent à voir des choix d'organisation d'enseignement de notions de logique, c'est-à-dire une interprétation possible des programmes à l'intérieur d'un système de contraintes qui leur est propre. Mais, par leur manière de présenter les notions et par le choix et l'organisation des tâches qu'ils proposent, ils sont aussi une ressource pour les choix didactiques des professeurs. L'étude des manuels dans ce contexte de retour de la logique dans les programmes est particulièrement intéressante : nous pouvons faire l'hypothèse d'y trouver des différences dans l'interprétation du programme et dans la présentation des notions, d'une part parce que des habitudes n'ont pas encore été prises, d'autres part parce que les injonctions du programme sont assez imprécises. Par ailleurs, le peu de ressources pour l'enseignement de la logique au lycée peut amener les enseignants à utiliser les manuels comme ressource privilégiée pour cela.

Neuf des dix manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010 ont choisi de consacrer quelques pages à la logique, réunies au début ou à la fin du manuel, ou disséminées dans chaque chapitre. Par ailleurs, tous ces manuels proposent des exercices identifiés pour travailler sur les notions de logique, soit grâce à l'utilisation d'un logo, soit parce qu'ils sont réunis dans une rubrique. Ces pages et ces exercices sont des nouveautés par rapport aux précédentes éditions de ces manuels.

3.1. Méthodologie d'analyse des manuels

L'étude des programmes nous a permis de voir les grandes lignes des instructions officielles concernant l'enseignement de notions de logique. À partir de ces grandes lignes, les auteurs des manuels scolaires, par ailleurs soumis à des contraintes d'écriture, vont proposer une matière plus directement utilisable par l'enseignant, comme le souligne L. Ravel :

> Ces grandes lignes sont ensuite mises en texte dans les manuels scolaires. Les auteurs de manuels, sujets de l'institution scolaire, vont apprêter les objets de savoir à enseigner afin de les rendre “utilisables” par les enseignants et les élèves. [...] Ils vont donc faire des choix pour mettre en texte les directives du programme et proposer à leurs sujets des activités préparatoires, un cours et des exercices. Ils vont alors construire des organisations mathématiques autour de ces objets de savoir pour pouvoir les mettre en place. (Ravel, 2003, pp.39-40)

J'ai mené l'analyse des manuels en deux temps : tout d'abord une étude des « pages logiques » des manuels, c'est-à-dire des pages où sont présentées les notions de logique, dans l'ensemble des manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010, ainsi que 3 manuels de Seconde publiés en 1969[11], puis une étude des tâches proposées dans les exercices identifiés « logique » dans cinq manuels publiés en 2010, sélectionnés parce qu'ils présentent une certaine diversité quant aux choix faits pour la présentation des notions de logique et qu'ils sont largement utilisés. Je me suis appuyée sur les études épistémologique et didactique pour retenir des points sensibles permettant de décrire et catégoriser les propositions des manuels en les situant par rapport à la référence que j'ai élaborée, ce qui m'a conduite à organiser mon étude autour des questions ci-dessous :

- Quel investissement de la niche langage ? de la niche raisonnement ?
- Les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique sont-ils tous les deux présents ?
- Quelle position est prise par rapport à la formalisation des notions ?
- Comment sont prises en compte certaines difficultés identifiées dans la référence liées à la complexité des notions de logique ?

[11] Parce que le programme donne des directives précises, nous pouvons faire l'hypothèse d'une certaine homogénéité dans les manuels de 1969, qui fait qu'il n'est pas nécessaire de proposer une étude de tous les manuels de cette époque; ceux choisis étaient par ailleurs très largement utilisés.

- L'organisation des activités permet-elle que la logique soit effectivement « présente partout » ?

Je vais présenter les résultats de cette analyse en ce qui concerne l'implication, mais les réponses à ces questions sont à peu près similaires pour les connecteurs ET et OU, pour la négation, pour les quantificateurs. De même que dans le programme et le document ressources, les notions de proposition et de variable sont très peu présentes dans les manuels.

3.2. Focus sur l'implication dans les manuels

3.2.1. Investissement des niches langage et raisonnement

La notion d'implication est une notion particulièrement importante dans ces deux niches : d'une part les élèves rencontrent très fréquemment des propositions sous forme d'implication, d'autre part, le seul schéma de raisonnement qui est explicité au moment de l'apprentissage du raisonnement déductif est le *modus ponens (si A alors B, or A donc B),* qui met en jeu une implication.

Deux manuels de Seconde n'évoquent pas l'implication : *Pixel* qui n'a pas de « pages logiques » et *Déclic* qui n'en a qu'une, mais qui ne mentionne pas l'implication. Les huit autres manuels consacrent un paragraphe à la notion d'implication[12]. Deux d'entre eux présentent l'implication dans la niche raisonnement :

- dans *Odyssée*, le paragraphe Implication, réciproque, contraposée commence par : « Le principe même du raisonnement mathématique est **l'implication** (propriété directe) : un fait en implique un autre, une hypothèse entraîne une conclusion ».
- dans *Indice*, dont un extrait est donné ci-après (figure 5), l'implication est également introduite en lien avec l'idée de conséquence, le mot étant explicitement employé. Implication et déduction ne sont d'ailleurs pas distinguées, puisque des formulation en *si… alors…* et des formulations avec *donc* sont données comme synonymes.

[12] L'expression « proposition conditionnelle » employée par le programme n'est reprise que dans deux manuels, le terme « implication » étant largement plus employé.

V. Implication – Équivalence

- Dans le langage usuel, on emploie souvent les mots « donc », « d'où » ou des phrases sous la forme :

$$\text{« si } \underbrace{---}_{P} \text{ alors } \underbrace{---}_{Q} \text{ »}$$

pour exprimer l'idée qu'une partie de l'énoncé (ici Q) est une conséquence de l'autre partie (ici P).

Par exemple : « J'ai 40° de fièvre donc je ne vais pas au lycée » ;

$$\text{« Si } \underbrace{\text{j'ai 40° de fièvre,}}_{P} \text{ alors } \underbrace{\text{je ne vais pas au lycée}}_{Q} \text{ »}$$

De même en mathématiques, dès le collège, de tels énoncés ont été utilisés.

Par exemple :

« *ABCD* est un losange, donc ses diagonales sont perpendiculaires »

$$\text{« Si } \underbrace{\text{un quadrilatère est un losange,}}_{P} \text{ alors } \underbrace{\text{ce quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires}}_{Q} \text{ »}$$

Ces phrases sont vraies car on sait qu'un losange a ses diagonales perpendiculaires ; l'hypothèse « un quadrilatère est un losange » entraîne forcément la conclusion « ce quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires ».

Figure 5 : Extrait du manuel Indice sur l'implication

Cette approche de la notion d'implication en lien avec le raisonnement déductif pourrait être une façon de mettre en place une dialectique outil/objet (Douady, 1986). L'implication y serait vue d'abord à travers les déductions qu'une implication vraie permet de faire (c'est ce qui est proposé dans une situation telle que *Les Comonautes*, présentée dans le document ressources de 2009, issue de Legrand, 1983), puis la définition sémantique du connecteur IMPLIQUE (sa table de vérité) permettrait de justifier cette utilisation. Les manuels *Odyssée* et *Indice* sont loins de proposer une telle dialectique, ils n'explicitent pas l'utilisation d'une implication dans un raisonnement, et n'évoquent la question de la vérité d'une implication qu'à travers un exemple.

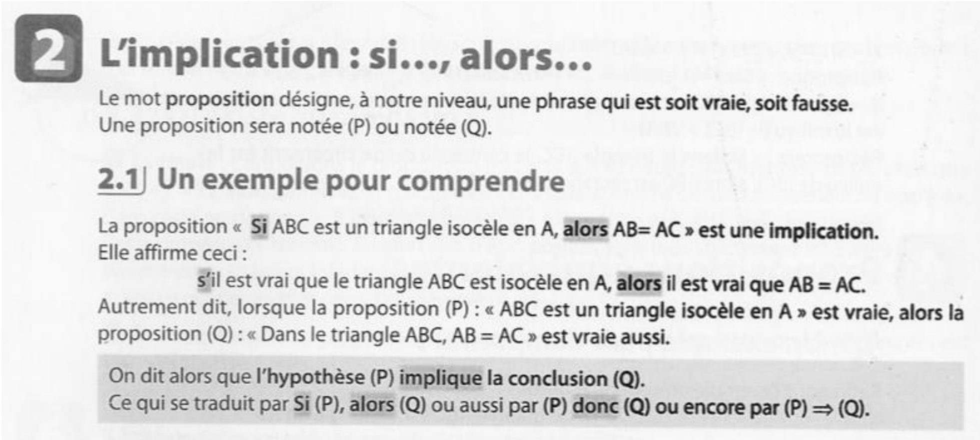
Trois autres manuels, *Symbole*, *Transmath* et *Travailler en confiance*, ont une présentation à l'intersection des niches langage et raisonnement : une implication est une proposition de la forme *si A alors B*, dont la description sémantique est en lien avec le raisonnement (voir figure 6 ci-après). En effet, elle consiste à dire que l'implication *si A alors B* signifie « si A est vraie alors B est vraie », reliant ainsi l'implication à certaines déductions possibles[13]. Dans son analyse de la notion d'implication dans des manuels de 4ème, de Seconde et de DEUG[14], V. Deloustal-Jorrand classe effectivement de telles définitions dans le registre du raisonnement

---

[13] Une implication vraie permet de déduire la vérité de la conclusion de la vérité de la prémisse, et la fausseté de la prémisse de la fausseté de la conclusion.

[14] Diplôme d'Études Universitaires Générales, qui, avant l'organisation du cursus en Licence-Maîtrise-Doctorat, s'obtenait au bout des deux premières années d'étude à l'Université.

déductif, et souligne qu'elles ont le défaut d'écraser l'implication sur le cas où la prémisse et la conclusion sont toutes les deux vraies, et qu'elles connotent une notion de causalité, voire de temporalité (Deloustal-Jorrand, 2004, p.73).


2 L'implication : si…, alors…

Le mot **proposition** désigne, à notre niveau, une phrase **qui est soit vraie, soit fausse.**
Une proposition sera notée (P) ou notée (Q).

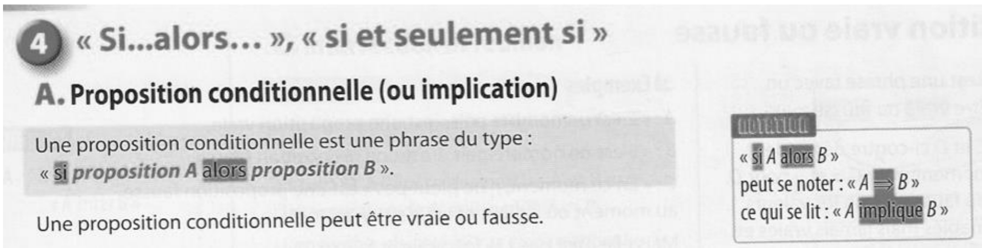
2.1 Un exemple pour comprendre

La proposition « **Si** ABC est un triangle isocèle en A, **alors** AB= AC **» est une implication.**
Elle affirme ceci :
s'il est vrai que le triangle ABC est isocèle en A, **alors il est vrai que AB = AC.**
Autrement dit, lorsque la proposition (P) : « **ABC est un triangle isocèle en A » est vraie, alors la** proposition (Q) : « Dans le triangle ABC, AB = AC » **est vraie aussi.**

On dit alors que **l'hypothèse (P) implique la conclusion (Q).**
Ce qui se traduit par **Si** (P), **alors** (Q) ou aussi par **(P) donc (Q) ou encore par (P) ⇒ (Q).**

Figure 6 : Extrait du manuel Math'x sur l'implication

Les trois derniers manuels, *Math'x, Hyperbole* et *Repères*, définissent l'implication seulement dans la niche langage : une implication est une proposition de la forme *si A alors B* :


4 « Si…alors… », « si et seulement si »

A. Proposition conditionnelle (ou implication)

Une proposition conditionnelle est une phrase du type :
« si *proposition A* alors *proposition B* ».

Une proposition conditionnelle peut être vraie ou fausse.

NOTATION
« si *A* alors *B* »
peut se noter : « *A* ⇒ *B* »
ce qui se lit : « *A* implique *B* »

Figure 7 : Extrait du manuel Transmath sur l'implication

En plus de ces descriptions ou définitions, les manuels abordent différents aspects de l'implication. Certains aspects sont en lien avec le langage, comme le fait que certaines formulations cachent une implication (*Transmath* donne l'exemple de la proposition « deux angles opposés par le sommet sont égaux »), ou comme le fait que les formulations en *si… alors…* comportent une quantification universelle implicite (souligné seulement par le manuel *Travailler en confiance*). D'autres sont en lien avec le raisonnement, comme l'indication de techniques pour montrer que l'implication *si A alors B* (qui est en fait dans les exemples donnés toujours une implication implicitement universellement quantifiée) est vraie ou fausse. Dans le premier cas, trois techniques sont données : montrer B sous hypothèse A, utiliser des implications successives, remplaçer la conclusion par une proposition équivalente, mais aucune de ces techniques n'est justifiée par les propriétés de l'implication. Dans le deuxième cas, la technique proposée est le recours à un contre-exemple, mais les manuels qui en parlent se contentent de dire qu'il faut montrer que l'on peut avoir à la fois A vraie et B fausse, sans justifier cette technique par l'explicitation des règles de négation d'une proposition universellement quantifiée, et de négation d'une implication. Cette présentation de techniques qui ne sont pas justifiées est à mettre en relation avec les mises en garde du programme qui précise qu'il n'est pas question de faire un « cours » de logique, et avec l'absence de considérations théoriques sur les notions de logique dans le document ressources de 2009. Les auteurs de manuels donnent l'impression d'avoir suivi cette ligne de conduite : seule la dimension outil est présente.

Le tableau ci-après (figure 8) résume les indicateurs de l'investissement de la niche langage et de la niche raisonnement dans la présentation de l'implication dans les manuels. Une case vide signale que cet aspect n'est pas traité dans le manuel, un premier constat est donc qu'il n'y a pas du tout uniformité du contenu du discours sur l'implication dans les différents manuels. Par ailleurs, le tour d'horizon que j'ai proposé dans cet article sur les définitions de l'implication montre que sur un aspect présent dans presque tous les manuels, les choix d'approches sont également très divers. Ce résultat peut s'expliquer par le manque de précision du programme : les auteurs de manuels ont eu à combler ce manque, chacun ayant fait ses choix. Enfin, des lettres majuscules L ou R indiquent dans quelle niche se situe chaque aspect de l'implication, et nous pouvons voir que la niche raisonnement est plus investie que la niche langage, ce qui est encore une fois à lettre en relation avec les résultats de l'étude des programmes.

	Description ou Définition, niche Langage ou Raisonnement	Implication implicite dans d'autres formulations	Formulation en *si… alors…* implicitement universellement quantifiées	Comment montrer que *si A alors B* est vraie	Comment montrer que *si A alors B* est fausse	Comment utiliser une implication
Odyssée	Description, **R**					
Hyperbole	Définition, **L**			B sous hypothèse A, **R**		
Transmath	Définition, **L/R**	**L**				
Indice	Description, **R**			B sous hypothèse A, **R**	Contre-exemple, **R**	
Travailler en confiance	Définition, **L/R**		**L**	Par implications successives, par conclusion équivalente, **R**		
Symbole	Définition, **L/R**			Par implications successives, B sous hypothèse A, **R**		
Math'x	Définition, **L**	**L**		Par implications successives, **R**	Contre-exemple, **R**	**R**
Repères	Définition, **L**			B sous hypothèse A, **R**	Contre-exemple, **R**	

Figure 8 : Langage et raisonnement dans les propos des manuels de 2010 sur l'implication

3.2.2. Aspects syntaxique et sémantique de l'implication dans les manuels de 2010, niveau de formalisation

Dans le programme et le document ressources de 2009, le discours sur les notions de logique reste en grande partie informel, et le document ressources, pourtant à destination des enseignants, ne propose aucun élément théorique. Cette absence de référence dans le programme se ressent dans les manuels actuels, et ce que j'espère avoir donné à voir pour l'implication est valable pour les autres notions de logique : le discours est assez différent d'un manuel à l'autre, il reste également en partie informel, et les notions de logique y sont même parfois malmenées. Une conséquence immédiate de la défiance affichée vis-à-vis de la formalisation des notions est l'absence quasi totale de leur aspect syntaxique, ce que nous allons voir pour l'implication.

Dans les deux manuels *Symbole* et *Hyperbole*, la présentation de l'implication fait suite à la description de la conjonction et de la disjonction de deux propositions, et de la négation d'une proposition. À travers l'emploi de cet ensemble de termes, et une présentation plus formelle que dans d'autres manuels, nous pouvons considérer que dans *Symbole* et *Hyperbole*, chaque connecteur, et en particulier l'implication, est présent sous son aspect syntaxique d'opérateur permettant de construire une nouvelle proposition (voir figures 9 et 10 ci-après). Mais cet aspect syntaxique n'est pas dissocié de l'aspect sémantique. Dans la définition des connecteurs ET et OU, la description sémantique est proche de ce qui pouvait se faire à l'époque des mathématiques modernes, où l'on trouvait des tables de vérité dans les manuels de Seconde. Le fait de ne pas utiliser de table de vérité n'est cependant pas anodin : c'est un ostensif représentatif d'une approche formelle de la logique, contre laquelle le programme actuel met en garde. Par contre, dans cet extrait, il n'y a pas de description sémantique du connecteur IMPLIQUE telle que celle des connecteurs ET et OU. Les auteurs ne donnent pas le comportement de l'implication par rapport aux valeurs de vérité de ses composantes, ils parlent de ce qu'elle « exprime ».

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Figure 9 : Extrait du manuel Symbole sur les connecteurs ET et OU

1 L'implication

Définition 7

Si P et Q sont des propositions, la proposition « si P, alors Q », appelée **implication**, exprime que si P est vraie alors Q est vraie aussi.

Figure 10 : Extrait du manuel Symbole sur l'implication

Ce traitement différent de l'implication empêche d'identifier une catégorie d'objets, les connecteurs, en tant qu'éléments du langage mathématique, comme cela était le cas en 1969. J'intepréte cette différence de traitement en lien avec un autre point sensible en logique : la distinction entre une proposition et l'affirmation de sa vérité, qui rejoint la distinction entre contenu de jugement et jugement que faisait Frege (Frege, 1971, pp.74-75). C'est par l'affirmation de la vérité de l'implication *si P alors Q* que l'on exprime que si P est vraie alors Q est vraie (et il vaudrait mieux dire, pour éviter cette redondance du *si… alors…*, qu'elle exprime qu'il n'est pas possible que P soit vraie et Q soit fausse). Une proposition en elle-même n'exprime pas un jugement. Bien sûr, dans l'activité mathématique, la vocation des propositions est d'être énoncées, et cette énonciation constitue l'acte d'affirmation de leur vérité. Dans la pratique, on ne dit pas « la proposition "tous les réels ont un carré positif" est vraie » mais simplement « tous les réels ont un carré positif ». Pour la conjonction (et la disjonction), les auteurs du manuel *Symbole* distinguent la proposition et l'affirmation de sa vérité, puisqu'ils ne se contentent pas de dire « (P et Q) exprime que P est vraie et que Q est vraie », mais ils ne font plus cette distinction pour l'implication.

Globalement, même si dans les manuels de 2010 une implication est caractérisée par sa forme *si A alors B*, c'est le seul aspect syntaxique qui est soulevé. Dans les manuels de 1969, certaines propriétés de l'implication étaient données, comme l'équivalence entre (A⇒B) et (NON(A) OU B), ou la transitivité (énoncée comme le fait que la proposition ((A⇒B) ET (B⇒C))⇒(A⇒C) est toujours vraie). De telles propriétés, bien que justifiées d'un point de vue sémantique (par les tables de vérité), renforcent la présence de l'aspect syntaxique de l'implication en donnant des propriétés du signe qui peuvent ensuite être utilisées indépendamment de son sens. Ces propriétés sont absentes des manuels de 2010 (autant des manuels de Seconde que des manuels de Première ou Terminale), et il n'y a pas de dialectique entre les deux aspects syntaxique et sémantique de l'implication.

3.2.3. Prise en compte de la complexité de la notion d'implication

Je reviens ici sur les difficultés évoquées dans le paragraphe 1.3.3 et sur la façon dont elles sont prises en compte dans les manuels, ou au contraire source d'erreurs.

Prémisse fausse : Seul le manuel *Math'x* évoque le cas de la prémisse fausse quand il précise comment utiliser une implication : « **quand on sait que "si A alors B" est vraie**, on est sûr que lorsque la proposition A est vraie, la proposition B est automatiquement vraie. **Attention**, lorsque la proposition A est fausse, on ne peut rien dire sur B ! Elle peut être, indifféremment, vraie ou fausse ». Cela montre à quel point le travail sur la notion d'implication ne vise pas du tout l'aspect objet du connecteur IMPLIQUE.

Distinction entre implication entre propositions et implication universellement quantifiée : la pratique de quantification universelle implicite des implications étant quasi-systématique dans les manuels, il est difficile de distinguer implication et implication universellement quantifiée. Comme nous l'avons vu dans le tableau de la figure 8, un seul manuel, *Travailler en confiance*, souligne cet implicite. Par ailleurs, les exemples d'implications donnés dans les manuels sont presque toujours traitées comme des implications implicitement universellement quantifiées, quand bien même elles pourraient être lues seulement comme des implications. Par exemple, pour la proposition « si ABC est un triangle isocèle en A, alors AB=AC » du manuel *Transmath* (figure 6), une interprétation comme implication dans laquelle les variables A, B et C sont parlantes est possible. Cependant, le manuel précise ensuite que cette proposition affirme que « lorsque la proposition (P) « ABC est un triangle isocèle en A » est vraie, alors la proposition (Q) « dans le triangle ABC, AB=AC » est vraie aussi ». Cette précision introduit l'idée que les variables peuvent prendre des valeurs différentes, et que quelles que soient les valeurs prises, si la proposition (P) est vraie, la proposition (Q) est vraie, ce qui est une interprétation de l'implication universellement quantifiée. De même que dans les pages « Logique », les implications présentes dans les exercices Vrai/Faux ne sont, à quelques exceptions près, jamais explicitement quantifiées, ce qui peut amener le même type de réponse « on ne peut pas savoir » que dans la tâche du labyrinthe (Durand-Guerrier, 1999).

Confusion entre *si A alors B* et *A donc B* : Trois des dix manuels de 2010 mettent *si… alors …* et *donc* sur le même plan, notamment le manuel *Indice* dans l'extrait donné en figure 3. Le fait de donner des exemples rend particulièrement visible la différence entre ces termes : on ne prononce pas les deux phrases « J'ai 40° de fièvre donc je ne vais pas au lycée » et « Si j'ai 40° de fièvre alors je ne vais pas au lycée » dans les mêmes circonstances, puisque la première est énoncée par quelqu'un qui a 40° de fièvre, et la seconde généralement par quelqu'un qui justement n'est pas dans cette situation.

Ces différents aspects qui font de la notion d'implication une notion complexe ne sont pas évoqués dans le document ressources de 2009. Il n'est donc pas étonnant de n'en trouver aucune trace dans les manuels. Dans le commentaire de 1970, le cas de la prémisse fausse était mentionné, puisque l'implication était présentée comme un connecteur, la forme $A \Rightarrow B$ était distinguée de la forme *pour tout x*, $P[x] \Rightarrow Q[x]$. Le recours à la logique mathématique permet de souligner ces points, mais cette référence formelle n'est pas suffisante pour être opérationnelle pour l'enseignement et l'apprentissage de notions de logique. Plusieurs recherches ont été menées pour évaluer la pertinence d'un enseignement de logique ayant pour référence la logique mathématique mais en la reliant à l'activité mathématique. Je cite en exemple, mais je suis loin d'être exhaustive, les travaux de J. Adda, par exemple son article dans le bulletin APMEP, 1975, la thèse de E. M. El Faqih, 1991, la thèse de J. Njomgang Ngansop, 2013. Les propositions de J. Adda concernent les collège, mais datent d'une époque révolue, les travaux de E. M. El Faqih et de J. Njomgang Ngansop concernent le supérieur. Des expérimentations restent donc à mener au niveau du lycée.

3.2.4. Présence d'un travail sur l'implication dans les différents chapitres

Un relevé et une classification en terme de types de tâche des exercices identifiés « logique » montrent que l'implication est de loin la notion qui est l'objet du plus grand nombre d'exercices (dans les 5 manuels étudiés, entre 25% et 47% des exercices estampillés « logique » sont sur l'implication), essentiellement des tâches de type Vrai/Faux à propos d'une implication, éventuellement de sa réciproque, puis de l'équivalence. Sur l'ensemble des 5 manuels, ce type d'exercice est présent dans tous les chapitres. Quand les implications sont vraies, la tâche consiste la plupart du temps à seulement repérer une propriété vue en cours.

Conclusion

Dans cet article j'ai proposé une contribution à l'étude de la transposition didactique de notions de logique au lycée en France. Une telle transposition ne peut pas se penser selon le schéma classique, avec la logique mathématique comme savoir savant à son origine, mais plutôt à partir d'un savoir de référence qui prend en compte la dimension outil des notions de logique dans l'activité mathématique. À partir d'études épistémologique et didactique, j'ai construit une référence dans laquelle des notions de logique sont présentées à partir de trois approches, illustrées ici à travers l'exemple de l'implication : le point de vue mathématique à partir de la logique mathématique, le point de vue de l'activité mathématique à travers la prise en compte des pratiques langagières des mathématiciens, le point de vue de l'enseignement à travers les résultats d'études didactiques. Cette référence est un outil qui m'était nécessaire pour constituer une grille d'analyse du savoir à enseigner. J'ai par exemple montré dans cet article que la complexité de l'implication n'était pas prise en compte ni dans le programme, ni dans le document ressources qui l'accompagne, ni dans les manuels. Les auteurs de ces derniers proposent finalement une sorte d'institutionnalisation *a minima,* quasiment un seul type de tâche, l'exercice

Vrai/Faux, et font des confusions malheureuses (comme la confusion entre *si A alors B* et *A donc B* que l'on trouve dans certains manuels). Plus généralement, l'ensemble de l'étude du savoir à enseigner montre que les instructions du programme actuel sur la logique sont imprécises et que le discours dans les manuels reste très informel. Cette étude amène naturellement des perspectives de recherche sur le savoir enseigné et sur les pratiques des enseignants. Au vu de ses résultats, nous pouvons faire l'hypothèse d'une diversité dans les pratiques, et de difficultés des enseignants à mettre en place un enseignement de notions de logique. Une question méthodologique spécifique à la logique se pose alors pour tester cette hypothèse : comment constituer un corpus de données adéquat permettant de saisir des pratiques sur un enseignement qui se doit d'être transversal ?

Ces résultats sur le savoir à enseigner s'expliquent en grande partie par l'absence d'un savoir de référence dans la communauté (comprenant mathématiciens, enseignants de mathématiques, chercheurs en didactiques des mathématiques). La constitution d'un tel savoir est alors un moyen d'agir pour l'enseignement de la logique des mathématiques, mais elle ne peut se faire que sur un temps long et de façon collective : il est important que les mathématiciens y retrouvent la logique qu'ils mettent en œuvre dans l'activité mathématique, que les logiciens y retrouvent leur objet de travail, que les enseignants de mathématiques y trouvent une façon d'enseigner cette logique, que les didacticiens puissent argumenter par des recherches la pertinence de son contenu.

Sur ce dernier point par exemple, des recherches sur les notions de proposition et de variable sont à poursuivre. Ce sont des éléments essentiels du langage mathématique, mais, sans doute parce qu'elles sont primordiales, elles ont été l'objet de nombreux débats au moment de la crise de fondements. Le point de vue naïf adopté dans la référence que j'ai constituée tend à gommer leur complexité, l'étude de ces débats en permettrait sans doute une description plus fine. Ces notions sont également essentielles pour parler du langage mathématique dans une perspective d'enseignement des mathématiques. Elles sont pourtant en grande partie absentes du programme et des manuels, et le discours sur le langage mathématique y reste très confus. Ainsi, c'est surtout en direction de la classe que des recherches sont à poursuivre sur ces notions, qui pourraient être structurées autour des questions suivantes : quelles difficultés des élèves peuvent être mises en relation avec une conception erronée de ces notions ? Comment les enseignants abordent-ils ces difficultés ? Qu'est-ce qu'une clarification de ces notions peut apporter sur ces deux points ? Quelles situations proposer pour les aborder ?

Un autre enrichissement de la référence contituée consisterait à redonner au raisonnement une place plus importante. Là encore, c'est une suite naturelle au travail déjà fait sur le langage (voir par exemple l'étude des pratiques langagières dans la formulation des preuves dans Hache et Mesnil, à paraître), pour laquelle de nombreuses recherches existantes pourraient être exploitées.

Bibliographie

ADDA J. (1975), Une manière d'intégrer des éléments de logique dans l'enseignement des mathématiques en 6ème. *Bulletin de l'APMEP n°301*, pp. 755-759.

ADDA J. (1988), L'évolution de l'enseignement de la logique en France. *Atti degli incontri di logica matematica, vol. 5*, pp. 13-26.

ARSAC G. (1989), La transposition didactique en mathématiques. G. Arsac, M. Develay et A. Tiberghien (Eds.) *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie* (pp. 3-36). IREM et LIRDIS de Lyon.

ARTAUD M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. M. Bailleul et al. (Eds.) *Actes de la 14ème École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139).

BEN KILANI I. (2005), *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

CHELLOUGUI F. (2004), *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004), *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(0)*, pp. 5-31.

DUCROT O. (1991), *Dire et ne pas dire : principes de sémantique linguistique.* Hermann.

DURAND-GUERRIER V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit'x n°50*, pp. 57-79.

DURAND-GUERRIER V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.* Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V., BOERO P., DOUEK N., EPP S. et TANGUAY D. (2012) *Examining the Role of Logic in Teaching Proof.* G. Hanna et M. de Villiers (éds), ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education, chap. 16, pp. 369-389. Springer, New-York

EL FAQIH E. M. (1991), *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*. Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

EPP S. (1999), The language of quantification in mathematics instruction. L. Stiff et R. Curio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 188-197). National Council of Teachers of Mathematics.

FREGE G. (1971), *Écrits logiques et philosophiques.* Traduction et introduction de C. Imbert. Éditions du Seuil.

HACHE C. (2015), Pratiques langagières des mathématiciens. Une étude de cas avec « avec ». *Petit'x n°97.*

HACHE C. et MESNIL Z. (à paraître), Pratiques langagières et preuves, *Actes du XXII^{e} colloque de la CORFEM*. A.Chesnais, M. Gandit et G. Train (Eds)

LABORDE C. (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de doctorat. Université scientifique et médicale institut national polytechnique de Grenoble.

LARRIEU J.Y. (2014), Une progression pour l'enseignement de la logique propositionnelle au Lycée. *Bulletin de l'APMEP n° 511,* pp. 524-530.

LEGRAND M. (1983), Les cosmonautes. Compte rendu d'une recherche du groupe "apprentissage du raisonnement"de l'IREM de Grenoble. *Petit'x n°1*, pp. 57-73.

MARGOLINAS C. (2012), Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières. *Colloque sociologie et didactique*.

MESNIL Z. (2014), *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

NJOMGANG NGANSOP J. (2013), *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone: aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

RAVEL L. (2003), *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. exemple de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourrier Grenoble.

ROBERT A. et ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies vol. 2/4*, pp. 505-528.

ROGALSKI J. et ROGALSKI M. (2004), Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 9,* pp. 175-203.

ROGALSKI J. et SAMURÇAY R. (1994), Modélisation d'un savoir de référence et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. G. Arsac, Y. Chevallard, J. Martinand, et A. Tiberghien (Eds.) *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35–71). Grenoble : la Pensée Sauvage.

ZOE MESNIL
Laboratoire de Didactique André Revuz,
Université Paris Est Créteil
zoe.mesnil@u-pec.fr