JEROME PROULX, MARIE-LINE L. LAMARCHE, KARL-PHILIPPE TREMBLAY

ÉQUATIONS ALGEBRIQUES ET ACTIVITE MATHEMATIQUE EN CALCUL MENTAL: REGARD SUR LES DEFIS D'ENSEIGNEMENT

Abstract. Algebraic equations and mathematical activity in mental mathematics: on teaching challenges. This article explores students' and teachers' strategies when solving algebraic equations without paper and pencil or any other material aid. The enactivist notions of problem-posing offer conceptual grounds to engage in analysis of students' and teachers' strategies, and in their comparisons. This leads to the exploration of differences in the nature and origin between the solving processes of students and those of teachers, as well as challenges in relation to teaching and learning of algebra equation solving. Final remarks reflect on the potential of being sensitized to the nature of these differences in solving processes.

Keywords. Mental calculations, algebraic equations, mathematical strategies, mathematical activity, teaching challenges.

Résumé. Dans cet article, nous explorons et comparons la nature de l'activité mathématique déployée par des élèves à celles déployée par des enseignants lors de la résolution d'équations algébriques en contexte de calcul mental. L'ancrage théorique de la recherche s'inspire de la théorie de l'enaction, précisément la notion de pose de problème, pour conceptualiser les différences entre les stratégies des élèves et des enseignants. Ces différences font ressortir certains défis relatifs à l'enseignement de la résolution d'équations en algèbre. Ces défis sont abordés et discutés en fin d'article, particulièrement sous l'angle de l'importance de la sensibilisation aux natures différentes des processus de résolution.

Mots-clés. Calcul mental, équations algébriques, stratégies mathématiques, activité mathématique, défi d'enseignement.

Introduction

Cet article se place en continuité avec un précédent publié dans cette même revue sur la résolution mentale d'équations algébriques (Proulx, 2013). Nous avons travaillé en ce sens à quelques reprises avec des élèves du début secondaire, mais aussi indépendamment avec des enseignants du secondaire, à la résolution d'équations algébriques usuelles de la forme $Ax + B = C$, $Ax + B = Cx + D$, $Ax/B = C/D$, sans utiliser papier-crayon ni tout autre aide matérielle, lors de séances de calcul mental. Notre intérêt de recherche est de mieux comprendre la nature des stratégies déployées, autant par les élèves que par les enseignants, lors de ces séances durant lesquelles nous leur avons demandé de faire la résolution mentale de ce type d'équations algébriques.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 43 - 65.
© 2017, IREM de STRASBOURG.

C'est donc dans ce cadre que nous abordons cet article, où nous offrons une analyse des stratégies dans lesquelles élèves et enseignants se sont engagés pour résoudre diverses équations algébriques. Ces analyses de stratégies permettent de dégager des différences significatives entre élèves et enseignants sur les façons de résoudre ces équations algébriques ; différences qui valent la peine d'être analysées en détail. Cette mise en contraste des stratégies des élèves et des enseignants permet de mettre de l'avant des défis que tout ceci pose pour l'enseignement-apprentissage de la résolution d'équations en algèbre.

Avant d'entrer sur l'analyse des processus de résolution développés par les élèves et les enseignants, nous présentons les bases théoriques de notre travail de recherche, ancrées dans une vision épistémologique de l'activité mathématique et de la résolution de problèmes en calcul mental.

1. Conceptualisation de l'activité mathématique en calcul mental : de la résolution de problèmes à la pose de problèmes[1]

Tel qu'expliqué dans Proulx (2013), des travaux récents soulignent le besoin de mieux comprendre et mieux conceptualiser le processus de développement de stratégies en calcul mental. Certains chercheurs ont critiqué l'idée usuelle suivant laquelle le « résolveur »[2] fait un choix de stratégie à partir d'un coffre à outils rempli de stratégies prédéterminées pour résoudre un problème de calcul mental. Threlfall (2002, 2009) insiste plutôt sur l'émergence organique et le caractère contingent des stratégies en fonction de la tâche *et* du résolveur, soit ce qu'il comprend, préfère, connait, a comme expérience, est confiant de, etc. (voir aussi Butlen & Pézard, 2000 ; Rezat, 2011). Cette idée d'émergence s'aligne avec les travaux de Lave (1988) en cognition située, où les stratégies mentales sont conceptualisées en tant que réponses flexibles, émergentes et adaptées, liées à un contexte spécifique.

En didactique des mathématiques, la théorie cognitive de l'enaction (inspirée des travaux de Maturana, 1987, 1988a, b ; Maturana & Varela, 1992 ; Varela, 1999 ; Varela, Thompson & Rosch, 1991) s'est intéressée aux notions d'émergence, d'adaptation et de contingence de l'activité mathématique. Ainsi, dans nos travaux, des aspects de cette théorie inspirent et enracinent la conceptualisation des processus de résolution en contexte de calcul mental. En particulier, la distinction proposée par Varela (1996) entre la « résolution de problème » et la « pose de problèmes » offre

---

[1] Le début de cette section sur l'ancrage théorique reprend en 1er lieu les idées développées dans la Section 3 de l'article de 2013 et en 2e lieu les tire plus loin pour faire avancer la théorisation et la conceptualisation des processus de résolution en calcul mental.

[2] Le néologisme « résolveur » est créé dans le but de retrouver le sens de l'expression anglophone *solver*, soit celui qui résoud le problème.

une réponse préliminaire pour mieux comprendre le processus de résolution au niveau de l'émergence et la génération de stratégies de résolution.

Pour Varela, la notion de « résolution de problèmes » implique que des problèmes sont déjà présents, en attente d'être résolus, indépendamment de nous. Or, pour Varela, nous spécifions les problèmes que nous rencontrons, à travers le sens que nous donnons au monde qui nous entoure et notre compréhension des choses, ce qui nous amène à reconnaitre les choses d'une façon spécifique, de le faire à notre façon. Nous ne « choisissons » pas ou ne « prenons » pas les problèmes comme s'ils existaient « à l'extérieur » de nous, de façon objective et indépendante de nos actions : plutôt, nous les faisons émerger.

> La plus importante faculté de toute cognition vivante est précisément, dans une large mesure, de poser les questions pertinentes qui surgissent à chaque moment de notre vie. Elles ne sont pas prédéfinies mais *enactées*, on les *fait-émerger* sur un arrière-plan, et les critères de pertinence sont dictés par notre sens commun, d'une manière toujours contextuelle. (Varela, 1996, p. 91)

En bref, nous posons les problèmes. Les problèmes que nous rencontrons et les questions que nous posons font autant partie de nous que de notre environnement : ils émergent de notre interaction avec lui. Nous interprétons les évènements qui nous entourent comme des éléments à aborder, nous les voyons comme des problèmes à résoudre. Nous n'agissons pas sur des situations préexistantes, notre interaction avec notre environnement crée les situations possibles sur lesquelles agir. Les problèmes que nous résolvons, alors, sont implicitement pertinents pour nous, car nous permettons à ceux-ci d'être des problèmes pour nous.

Cette perspective met de l'avant l'argument de Simmt (2000), qui affirme que ce n'est pas une tâche ou un problème qui est donné aux résolveurs, mais plutôt un énoncé, et que c'est le résolveur, en posant l'énoncé dans un contexte mathématique particulier, qui en produit une tâche. Un énoncé devient une tâche lorsque le résolveur le pose comme une tâche à résoudre. Mais, l'énoncé en lui-même, pour Simmt, n'est rien en soi : il devient une tâche ou un problème à résoudre à la rencontre du résolveur. Ainsi, divers résolveurs transforment l'énoncé en une tâche de multiplication, une de proportion, une de fonctions, une d'algèbre, etc., et font la résolution en fonction de cette transformation, de cette « pose[3] ». Et, cette pose n'est pas statique, ni fixée, car elle engage dans un processus de résolution qui en retour retransforme la tâche posée. La tâche ne se fixe pas au moment de la rencontre, au moment de sa pose : le processus est mouvant et c'est dans ce processus continu que la tâche émerge, de façon organique, toujours en train de se faire, de se développer, de se poser. Il y a en ce sens une interrelation mutuelle entre la pose et la résolution de la tâche.

[3] Nous parlons de « pose », par analogie à l'expression « poser un problème ».

À titre d'exemple, voici une stratégie tirée d'une étude conduite sur le calcul mental autour d'opérations arithmétiques (Osana et al., 2014 ; Proulx et al., 2014), qui permet d'illustrer le caractère émergent et interrelié de la résolution et de la pose de la tâche. Pour résoudre 741 – 75, un des résolveurs explique ainsi sa façon de faire :

> (a) 741 – 75 est comme 700 – 75 + 41.
>
> (b) 700 – 75 est comme avoir 7 dollars et y soustraire 3 vingt-cinq sous. Il me reste 6,25$. Et, 6,25$ est six-vingt-cinq, donc j'ajoute 41 à 625.
>
> (c) Pour faire ça, je fais 5+1 est 6, 4+2 est 6, et j'ai 600, donc 666.

Lorsque l'énoncé 741 – 75 a été donné, le premier pas a été de trouver une façon de résoudre, de trouver une façon « d'entrer », de poser la tâche. Cet énoncé a donc été posé comme une tâche de décomposition, qui a mené ce résolveur à décomposer 741 en 700 + 41 pour y soustraire 75 de 700. Cette décomposition a produit en retour une nouvelle situation pour le résolveur, soit de résoudre 700 – 75, laquelle a été posée comme une tâche en contexte monétaire (7 $ moins 75 sous). Cet autre pas de résolution mène en retour à 625 + 41, que le résolveur pose comme une tâche de décomposition des divers chiffres des deux nombres par rapport à leur position (centaines, dizaines, unités) et leurs additions successives. On voit bien aussi dans cet exemple ce qui a été avancé dans Proulx (2013) dans l'analyse des stratégies en calcul mental, où la création d'un contexte permet l'avancement dans la résolution de la tâche. Ainsi, chaque pas de résolution entraîne la (re-)pose de la tâche à résoudre, exigeant aussi de trouver une nouvelle façon « d'entrer » dans celle-ci pour continuer à résoudre.

On voit dans cet exemple les différents pas de résolution entrepris. Entrer dans la tâche c'est faire un pas, et puis un autre, et ce sont ces pas qui émergent dans la résolution. Ensuite, on peut dire qu'une « stratégie » a émergé, mais la stratégie est un regard *a posteriori*, après coup, alors que le tout se fait en continuité, pas par pas, pour avancer dans la tâche posée. Chaque étape est un pas, qui mène à une nouvelle pose de problème, à une nouvelle résolution contingente à ce pas, et qui fait une repose, menant à un autre pas, etc.

Et ces pas de résolution émergent de l'interaction du résolveur et de l'énoncé, influencés par les deux comme l'affirme Davis (1995) : pas uniquement reliés à l'énoncé (ses « propriétés » ou ses affordances, voir Proulx, 2015), ni uniquement reliés au résolveur (ses expériences, ses habitudes, ses succès, sa confiance, sa compréhension des directives, etc.), mais aux deux :

> As a result of this interaction between noticing and knowledge each solution 'method' is in a sense unique to that case, and is invented in the context of the particular calculation – although clearly influenced by experience. It is not learned as a general approach and then applied to particular cases. […] The

> ‘strategy’ (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges. (Threlfall, 2002, p. 42)

Les pas de résolution, ou les stratégies au sens de Threlfall[4], ne sont pas prédéterminés, mais générés pour résoudre, émergeant de l’interaction d’avec l’énoncé. Ainsi, le résolveur transforme l’énoncé en tâche mathématique, le fait sien, et génère une « stratégie » pour la tâche « posée », dans le but de résoudre « sa » tâche[5]. C’est cette entrée dynamique et émergente sur les stratégies qui caractérise notre entrée sur la compréhension des processus de résolution, enracinant notre façon de donner un sens aux données recueillies sur la résolution d’équations algébriques et d’aborder la question des défis de son enseignement.

2. Résolution d’équations algébriques sans papier-crayon

Tel qu’expliqué dans Proulx (2013), le fonctionnement que nous adoptons pour travailler le calcul mental est simple. Lors de séances de groupe, chacun assis à sa table sans papier ni crayon à sa disposition, les résolveurs doivent tenter de résoudre mentalement les énoncés offerts. L’organisation des rencontres s’apparente à celle proposée par Douady (1994), où une attention particulière à installer un climat respectueux qui permet le partage et l’écoute des solutions entre les résolveurs : (1) Le chercheur offre oralement et par écrit une équation algébrique ; (2) Les résolveurs font la résolution mentalement de cette équation ; (3) Au signal du chercheur, les résolveurs sont invités à partager oralement et en détails leur solution.

Les données recueillies pour l’analyse proviennent des explications orales des stratégies des résolveurs suite à leur résolution. Celles-ci sont prises sous forme de notes de terrain par deux (ou plus) assistants de recherche et sont jumelées aux réflexions collectives « à chaud » entre les membres de l’équipe (chercheur, assistants et parfois l’enseignant lorsque la disponibilité le permet) suivant immédiatement les séances d’expérimentation entre les membres de l’équipe. Les notes des assistants de recherche sont par la suite combinées pour former le corpus de données, soit un seul rapport de séance prenant en compte les notes des assistants et les réflexions des membres de l’équipe. Dans le cas des enseignants-résolveurs, la

[4] Et c’est ce sens offert par Threlfall que nous utilisons dans le reste de l’article lorsque nous faisons référence à l’expression « stratégie », soit non pas en tant qu’entité figée et réifiée, mais en tant que *chemin de résolution*, dans sa totalité qui se trace et se représente par les divers *pas de résolution*.

[5] Un des évaluateurs a souligné ici que l’expression « tâche mathématique » pourrait être mise au pluriel en lien avec ce qui est avancé. En effet, autant la stratégie comme chemin de résolution évolue à travers les divers pas et peut ainsi être vue comme nouvelle à chaque pas (donc multiple), la tâche qui est posée et re-posée à travers ces pas peut être vue nouvelle, donc multiple aussi. C’est ce que nous tentons de rendre par l’idée que cette tâche n’est pas statique et évolue en cours de résolution.

séance est aussi captée sous forme de vidéo, permettant un retour au besoin pour clarifier ou bonifier les notes de terrain.

Tel qu'expliqué en introduction, l'analyse des stratégies des élèves est effectuée ici dans une intention future de comparaison avec celles des enseignants. Ainsi, ce n'est pas une analyse pour les stratégies en elles-mêmes, mais bien plus pour établir un terrain de « comparaison » entre stratégies. La centration de l'analyse est sur le processus, sur les pas de résolution, et donc sur l'activité mathématique déployée dans la résolution.

2.1. Pose de problèmes et stratégies des élèves lors de la résolution des équations algébriques

Nous avons travaillé avec des élèves de 2e année du secondaire (13-14 ans, deux classes d'approximativement 30 élèves chacune, une période de 75 minutes pour chacune des deux classes). Malgré que les élèves en étaient à leurs débuts avec la résolution d'équations algébriques, notre expérimentation s'est déroulée en avril, soit au 8e mois de l'année scolaire, et donc les élèves avaient été confrontés à l'occasion à des équations de ce type. Les mêmes quatre équations algébriques ont été proposées aux élèves des deux groupes, et deux de celles-ci sont analysées dans cet article, soit « Résoudre pour x l'équation $2x+3=5$ » et « Résoudre pour x l'équation $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ ». Les stratégies émergeant de ces deux équations sont illustratives de la nature de l'activité mathématique déployée chez les élèves durant la séance. En ce sens, cette analyse ne s'intéresse pas aux occurrences des stratégies (i.e., nombre de fois que chacune des stratégies a été utilisée, par combien d'élèves, etc.), mais plutôt à leur nature, au sens de Douady (1994), pour bien comprendre le sens et la fonctionnalité des outils utilisés (i.e. les stratégies déployées). Pour cette raison, l'ensemble des stratégies recueillies dans les deux classes sont regroupées dans l'analyse.

Pour « Résoudre pour x l'équation $2x+3=5$ », les élèves ont produit les stratégies suivantes[6] :

> **Stratégie 1 : Méthode des opérations inverses**
>
> Un des élèves a expliqué que la réponse est $x=1$, car il a fait « moins 3 » au 5 à la droite de l'égalité pour donner $2x = 2$, ce qui donne $x=1$. Et ensuite il a divisé par 2. Questionné sur sa stratégie, il explique aussi que la division par 2 était directe et qu'il n'a pas eu besoin de la faire réellement.
>
> **Stratégie 2 : Méthode de la balance**

[6] L'analyse des stratégies est plutôt à ce stade descriptive, mais ces descriptions sont reprises plus loin lors d'une mise en commun des stratégies dans le but d'aborder l'intention d'analyse pour cet article, soit la comparaison des stratégie des élèves et des enseignants.

Un autre élève explique qu'il a fait ce qu'on appelle souvent la méthode de la balance, soit en faisant la soustraction de 3 de chacun des côtés pour obtenir $2x = 2$ et puis en divisant par 2 des deux côtés pour obtenir $x = 1$.

Stratégie 3 : Lecture directe de l'équation

Un élève explique qu'avec $2x + 3 = 5$ il savait par « logique » que $x = 1$, car $2 + 3 = 5$ donc x vaut 1. Plusieurs élèves ont dit avoir fait la même chose. Un autre élève dit qu'il a enlevé dès le début le x de l'équation et qu'il voyait que $2 + 3 = 5$. Il explique qu'il s'est ensuite dit que lorsqu'il fera « fois quelque chose », donc le x, il faut que ça donne 2 encore et que par conséquent x doit être égal à 1. Un élève explique toutefois que, pour lui, ceci signifie que $x = 0$, car comme $2 + 3 = 5$ alors il n'a pas besoin du x (qui vaut alors 0).[7]

Pour « Résoudre pour x l'équation $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ », les élèves ont produit ces stratégies :

Stratégie 1 : Mise en fractions équivalentes puis en décimal

Un élève explique avoir voulu diviser $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{5}$, mais que cela ne fonctionnait pas. Plutôt, il a transformé $\frac{1}{2}$ en $\frac{10}{20}$ pour que ce soit plus simple. Il obtient alors $\frac{2}{5}x = \frac{10}{20}$. Il a fait la même chose avec le $\frac{2}{5}$ de « l'autre côté » pour obtenir $\frac{20}{50}x = \frac{10}{20}$. Il explique alors que ceci équivaut à $0{,}4x = 0{,}5$ et donc que la réponse est $x = \frac{0{,}5}{0{,}4}$.

Stratégie 2 : Nombre décimal

Un élève explique que la réponse est 1,25. Il a fait $\frac{5}{2}x = 2$, car $\frac{1}{2}$ se transforme par 2. Il a ensuite transformé en nombre décimal pour obtenir $2{,}5x = 2$. En divisant par 2, il obtient $1{,}25x = 1$ et donc que $x = 1{,}25$. [8]

Stratégie 3 : Produit croisé

Un élève dit qu'il a fait $\frac{2x}{5} = \frac{1}{2}$ pour ensuite faire le produit croisé. Il fait 5 fois $\frac{1}{2}$ ce qui donne 2,5. Ensuite, il obtient $2x = 2{,}5$ et donc que $x = 1{,}25$.

Stratégie 4 : Moitié

L'élève dit qu'il y est allé par la « logique » en se disant que la moitié de 5 est 2,5 et que puisque ce qui est recherché est la moitié, alors x vaut 1,25.

[7] Une discussion a évidemment eu lieu entre les élèves autour de ces idées.

[8] Il y a ici un certain nombre de transformations inadéquates cumulées, qui au final se compensent (équivalence d'équations, non-transformation de x à $1/x$, isolation du x).

Stratégie 5 : Dénominateurs communs

L'élève dit qu'il faut trouver la valeur de x pour que le $\frac{2}{5}$ vaille $\frac{1}{2}$. Il explique qu'en mettant la fraction sur 10, il sera capable d'y arriver. L'élève dit alors qu'il pense que x vaut 1,25, car 4 fois 1,25 donne 5 et que $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Stratégie 6 : Dénominateurs communs et contexte additif

L'élève dit qu'il a utilisé les dénominateurs communs en mettant tout sur 10. Il a donc $\frac{4}{10}x = \frac{5}{10}$. L'élève a ensuite soustrait $\frac{5}{10}$ de $\frac{4}{10}$ce qui lui donne $\frac{-1}{10}$. Il dit que le x vaudrait $\frac{1}{10}$.

Stratégie 7 : Élimination du dénominateur

Un élève suggère de multiplier par 5 pour donner $2x = \frac{5}{2}$ (mais n'avait pas continué son calcul, ce qui est fait par après).

Toutes ces stratégies, et leurs pas de résolution sous-jacents, ne sont pas nécessairement « adéquates » ou « standard », mais témoignent par contre d'une activité mathématique émergente, soutenue et diversifiée dans la recherche de la valeur de x qui satisfait l'équation algébrique. Par ces exemples de résolution d'équations algébriques, on voit l'émergence d'une diversité de pas de résolution, « d'entrées » pour résoudre ; qu'on peut penser provoquée par le contexte de calcul mental et ses contraintes implicites de rapidité, et celles explicites telles que de ne pas pouvoir prendre de notes ni produire de traces écrites. Encore ici, tel que nous le montrons dans Proulx (2013), l'aspect « mental » oriente vers la formulation d'une réponse, mais pas de la même façon qu'on l'entend habituellement : l'entrée est davantage sur la recherche d'une façon de voir vite, de trouver un contexte de résolution pour réussir à entrer dans le problème rapidement et efficacement, de faire un pas, pour *ensuite* s'orienter vers la recherche d'un résultat. De plus, la régulation de la résolution se fait par le résolveur lui-même, et non pas par le déroulement d'une procédure appliquée à l'équation (tel qu'on le fait fréquemment en contexte papier-crayon).

Pour ces exemples de calcul mental, tout semble orienté vers une réponse mais en procédant par raisonnements et par le sens sous-jacent, donc très peu sur l'application mécanique d'une méthode ou d'un algorithme. L'élève n'est pas dans une stratégie de résolution syntaxique (travail sur les règles), mais bien plus sémantique (travail sur les relations entre les grandeurs). On parle alors de la création de son propre contexte de résolution, de sa propre entrée adéquate et adaptée pour résoudre, où la part des résolutions mécaniques (dénominateur commun, opérations inverses, transformation en décimales, etc.) est réduite et se fond dans le contexte de résolution. C'est cette diversité qui ressort et qui se traduit par des stratégies différentes pour résoudre la même équation (qui n'est plus la même équation soudainement, car elle est contextualisée, *posée*, différemment et signifiée différemment d'un élève à l'autre). Les élèves développent leurs façons d'entrer dans l'équation. Ces considérations sur la création d'un contexte de résolution ramènent effectivement à la question de la « pose de problèmes » à la Varela, telle qu'expliquée à la Section 2. Cette variété mise de l'avant par les résolveurs, et ici uniquement pour deux équations, illustre bien comment les différentes façons de « poser » la tâche ont mené à des stratégies différentes. Les mêmes équations ont permis de faire émerger une variété de « poses », engageant alors sur une variété de stratégies.

2.2. Pose de problèmes et stratégies des enseignants lors de la résolution des équations algébriques

Nous avons travaillé avec une quinzaine d'enseignants pendant une journée complète. Le travail sur la résolution des équations algébriques s'est fait durant la matinée. Pendant ce temps, des équations algébriques similaires, voire identiques, à celles données aux élèves ont été données à résoudre aux enseignants.

De façon générale, les stratégies des enseignants se décrivent comme efficaces mais habituelles pour résoudre les équations algébriques : faisant intervenir la balance ou l'isolation du x, par exemple. Par contre, à l'occasion durant la séance, diverses stratégies de nature davantage arithmétique ont émergé pour résoudre les équations. Par exemple, certains enseignants ont utilisé quelques fois la méthode qu'ils appellent de « recouvrement » du x. Pour résoudre « Résoudre pour x l'équation $x^2 - 4 = -3$ », un enseignant explique :

> Je cherche le nombre qui, si on lui soustrait 4, me donne –3. Je sais que c'est 1, donc quel nombre élevé au carré donne 1… c'est ±1.

Ce type d'approche est similaire aux méthodes de résolution « inverses » discutées par Hewitt (1996) et Filloy et Rojano (1989), ainsi que dans le *unwinding* de Nathan et Koedinger (2000) où les opérations sont défaites pour arriver à la valeur de x[9]. Tel que l'expliquent Filloy et Rojano (1989), pour arriver à résoudre une équation algébrique de cette façon « il n'est pas nécessaire d'opérer sur ou avec les inconnues » (p. 20, notre traduction), le travail se ramenant à une suite d'opérations arithmétiques réalisées sur des nombres. Par contre, ces stratégies de type arithmétique ne sont pas majoritaires chez les enseignants, voire occasionnelles.

---

[9] Avec ce type d'exemple, on peut penser, tel que l'a souligné un des évaluateurs, qu'on est sur « une recherche directe de valeurs en prenant x^2 comme inconnue intermédiaire ». Par contre, les enseignants qui ont, très occasionnellement, utilisé cette approche l'ont parlée en termes de recherche inverse comme ils le feraient pour $2(x - 3) = 7$ où on divise en 2 et on ajoute 3 (voir Hewitt, 1996, pour une description plus approfondie de cette approche de recouvrement).

Pour « Résoudre pour x l'équation $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ », soit la même que pour les élèves, les enseignants ont produit les stratégies suivantes :

> **Stratégie 1 : Produit des extrêmes est égal au produit des moyens**
>
> Un enseignant affirme avoir fait comme avec les proportions, soit de faire ce qu'il appelle le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Il a multiplié le 2 et le 2, ainsi que le 5 et le 1, obtenant alors $4x = 5$ et $x = \frac{5}{4}$.
>
> **Stratégie 2 : Multiplier par l'inverse**
>
> Un enseignant explique avoir divisé par $\frac{2}{5}$ de chaque côté de l'égalité, revenant à multiplier par l'inverse, soit $\frac{5}{2}$, donnant alors $x=\frac{5}{4}$. Un autre enseignant explique avoir fait directement une multiplication par $\frac{5}{2}$ pour isoler le x.
>
> **Stratégie 3 : Isoler *x* en deux étapes**
>
> Un enseignant explique avoir multiplié l'équation par 5, obtenant $2x = \frac{5}{2}$, et ensuite diviser le tout par 2. Il obtient $x = \frac{5}{4}$.

Suite à ces trois stratégies, un des enseignants (le même ayant fait la méthode du recouvrement pour résoudre $x^2 - 4= -3$) offre une stratégie quelque peu différente :

> **Stratégie 4 : Simplifier l'équation**
>
> L'enseignant explique avoir voulu se débarrasser de la demie en multipliant toute l'équation par 2. Ceci lui donne « 4 cinquièmes de x égale à 1 ». Par la suite, il multiplie par l'inverse $\frac{5}{4}$ pour trouver le x.

L'enseignant ici simplifie l'équation de départ, en éliminant la demie, pour après trouver la valeur de x en multipliant par l'inverse du coefficient de x. Plusieurs enseignants ont été intrigués par cette procédure et ont questionné l'enseignant. Ce dernier a expliqué que son intention n'était justement pas de travailler avec $\frac{2}{5}$ et de s'en débarrasser (tel que d'autres l'avaient fait auparavant dans les Stratégies 2 et 3), mais bien de travailler avec $\frac{1}{2}$ pour l'éliminer et « trouver 1 d'un côté » de l'équation, et aussi « parce que la multiplication par 2 était facile ici ». Questionné sur les nombres présents dans l'équation, l'enseignant explique aussi qu'il n'est pas clair pour lui si des nombres tels que $\frac{3}{2}$ ou $\frac{1}{6}$ l'auraient mené vers une stratégie similaire, mais que c'est la présence de la demie qui a guidé son activité. On voit alors l'impact des données concrètes dans l'équation pour orienter la stratégie de résolution : on sent la présence d'une stratégie locale, produite sur-le-champ pour cette équation, et non pas comme stratégie générale applicable à tous les problèmes (en effet, multiplier par 2 donne peu de résultats si l'équation est par exemple $\frac{2}{5}x = \frac{4}{3}$). L'entrée dans la résolution se fait localement par $\frac{1}{2}$ et non par l'équation prise dans son ensemble, ce qui est le cas pour une stratégie plus globale comme le produit croisé qui peut se faire indépendamment de la nature des nombres au numérateur et dénominateur. Il y a donc présence de stratégies de résolution de natures très différentes. Cette procédure de doubler $\frac{1}{2}$ est assez différente de celle que l'on retrouve habituellement pour l'isolation du x, alors qu'on fait des transformations pour se trouver une équation équivalente, mais plus simple, pour résoudre. On ne transforme pas l'équation pour isoler le x ici, mais bien pour obtenir une autre équation plus facile à lire ou plus parlante, pour ensuite trouver la valeur du x.

Bien que locale, cette stratégie relève d'un regard ancré directement dans les données de l'équation. L'enseignant simplifie l'équation, en doublant $\frac{1}{2}$, puisqu'il était « simple » de le faire, pour ensuite résoudre. On a vu plus haut que les élèves proposent aussi des stratégies de ce type, souvent locales, où des liens sémantiques et contextuels sont faits. Toutefois, ces stratégies diffèrent de la majorité des stratégies produites par les enseignants, qui tirent leurs stratégies d'automatismes syntaxiques, efficaces, qui s'apparentent presque à des « réflexes » mathématiques. Chez l'élève, on retrouve une sensibilité aux valeurs mises en relation dans l'équation, qui se traduit par des pas de résolution locaux, directement connectés à l'équation à résoudre. De son côté, les stratégies de l'enseignant peuvent paraître générales, plus centrées ou relatives à la syntaxe de l'équation et moins aux valeurs elles-mêmes mises en relation. En un mot, face aux mêmes énoncés les enseignants posent des problèmes bien différents de ceux posés par les élèves.

Cette différence entre enseignants et élèves se réflète bien dans le commentaire formulé par un autre enseignant suite au partage de la stratégie du doublage de l'équation. Ayant lui-même eu recours à l'occasion à des stratégies non-standard pour résoudre les équations offertes, cet enseignant commente sur l'équation en question et sur la stratégie de résolution « optimale » à utiliser, référant à ses élèves.

Enseignant : Mais en secondaire 2 [13-14 ans] vraiment la stratégie qui serait gagnante ici là c'est la stratégie du raisonnement proportionnel, la proportion. On la travaille tellement et moi là je les incite presque a vraiment utiliser la proportion lorsqu'on a ce genre d'équation. [Discussion sur la nature de la proportion dans l'équation] De faire tout le reste [i.e., les autres stratégies mentionnées], moi je veux bien, mais avec mes groupes à moi, je regarde mes élèves et puis [soupir et geste de la main de découragement].

Chercheur : Tu n'es pas sûr que ça sortirait comme ça ?

Enseignant : Non, je ne suis pas sûr que ça sortirait beaucoup surtout si on demande de ne faire aucun calcul papier. En calcul mental, ce n'est pas évident, tandis qu'avec la proportion je pense qu'avoir 2 fois $2x$ $4x$ et 1 fois 5, $4x$ sur 5 après ça ils savent qu'il doivent diviser par 4, c'est des règles de transformation des équations.

L'enseignant met ici de l'avant une entrée plus standard de résolution sur l'équation. Partagé par les autres enseignants, ce commentaire sur la stratégie à utiliser contraste avec et est éloigné des procédures utilisées par les élèves soulignées plus haut, dans laquelle on ne retrouve pas vraiment l'utilisation de procédures et algorithmes traditionnels, soit ceux souvent utilisés en contexte papier-crayon.[10] Souvent, avec ces algorithmes, le défi n'est pas de se demander comment entrer, mais simplement de les utiliser/appliquer correctement pour arriver à la réponse.

Toutefois, la centration sur les procédures plus standard par les enseignants concerne davantage leur enseignement de la résolution d'équations algébriques, lorsque ceux-ci aident et montrent aux élèves comment faire. Elle ne concerne pas une limitation des enseignants à comprendre, apprécier et connaître d'autres façons de résoudre. En effet, lorsque interrogés sur d'autres types de stratégies qui peuvent être utilisées, ces mêmes enseignants offrent d'autres stratégies, particulièrement en lien avec ce que leurs élèves feraient : transformer les fractions en nombre décimaux, éliminer les fractions en multipliant par 5 et par 2 toute l'équation ou, encore, mettre les fractions sur le même dénominateur pour ne s'intéresser qu'aux numérateurs. On voit donc qu'ils comprennent, peuvent faire et anticipent des procédures différentes lorsqu'on les questionne.

Par la suite, dans la séance, lorsque les enseignants ont dû « Trouver la valeur de $2t$ dans $3(2t) + 6 = 18$ », trois stratégies sont ressorties :

Stratégie 1 : Procédure standard – balance/opérations inverses

Un enseignant dit avoir trouvé 4 en procédant par les opérations inverses. Il a soustrait 6 de chacun des côtés, a obtenu $3(2t) = 12$. Ensuite, en divisant par 3 de chacun des côtés, il a obtenu que $2t = 4$.

[10] La question des perception a déjà été traitée par Nathan et Koedinger (2000) dans leur étude sur la perception d'enseignants et de chercheurs sur ce qui est difficile et sur ce qui ne l'est pas chez les élèves, montrant que les réussites et difficultés vécues chez les élèves en algèbre et la perception des enseignants et des chercheurs sur ces possibles réussites et difficultés ne sont pas tout à fait arrimées.

Stratégie 2 : Défaire les opérations

> En lien avec la Stratégie 1, un enseignant explique avoir fait les opérations contraires (sans les avoir appliquées de chacun des deux côtés comme pour la balance précédente), soit de soustraire 6 et de diviser par 3.

Stratégie 3 : Recouvrement

> Un enseignant dit avoir procédé par recouvrement, soit en cherchant le nombre qui additionné de 6 donne 18. Ce nombre est 12. Ensuite, il se demande quel est le nombre qui multiplié par 3 donne 12. Ce nombre est 4.

Ici aussi, cette dernière stratégie dite de recouvrement soulève un certain questionnement chez les enseignants, un questionnement qui ne résulte pas d'une incompréhension de la stratégie utilisée, mais bien (de la surprise) du fait d'avoir concrètement utilisé cette stratégie pour résoudre ce type d'équation algébrique. Un des enseignants souligne en fait que bien que lui-même fasse la résolution des équations algébriques de façon variée, il n'enseigne pas cela à ses élèves et considère important de procéder par étapes avec eux, par colonnes, de chacun des deux côtés de l'égalité, etc., ce que d'autres enseignants appuient. À la suite de ce commentaire, toutefois, une des enseignantes soulève la question suivante :

> J'ai une question. Moi je le montrerais vraiment tout comme ça, papier-crayon, [étape par étape, de chacun des côtés, comme l'explique l'enseignant auparavant], mais dans la vie moi je vais y aller par contre aussi vite que ça [i.e. autres méthodes, recouvrement, défaire les opérations]. Sauf que je me souviens que lorsque j'étais au secondaire, on ne m'a jamais montré la méthode du balancement [i.e., effectuer les mêmes opérations des deux côtés]. Il a fallu qu'un collègue me dise « regarde, moi, je l'enseigne comme ça » et qu'ensuite en secondaire 1 je commence tranquillement et on parlait tout le temps « tu fais l'opération inverse, bing, bang ». Puis je me dis que c'est peut-être rendu un automatisme… Est-ce que c'est parce que nous on en a tant fait, et qu'à un moment donné les élèves eux-mêmes se mettent à le faire aussi rapidement, est-ce que c'est correct ou faut-il vraiment qu'ils continuent [d'y aller avec diverses méthodes différentes] ? [Plus tard elle ajoute :] Mais est-ce que l'on doit encourager chez l'élève la variété des stratégies ?

Ce commentaire de l'enseignante offre une certaine réponse aux préoccupations et affirmations de Freudenthal (1983) sur la question des automatismes en enseignement des mathématiques :

> I have observed, not only with other people but also with myself […] that sources of insight can be clogged by automatisms. One finally masters an activity so perfectly that the question of how and why [students don't

> understand them] is not asked anymore, cannot be asked anymore and is not even understood anymore as a meaningful and relevant question. (p. 469)

Ce que Freudenthal souligne, tout comme l'enseignante, n'est pas une incompréhension des façons de faire non habituelles chez celui qui fait ou enseigne les mathématiques, mais plutôt une habitude bien ancrée qui (1) empêche de penser soi-même à ces façons de faire comme option pour résoudre, mais surtout (2) amène à questionner la pertinence de ces stratégies. La question de l'enseignante est directement sur ce point, non pas au niveau d'une incompréhension de leur efficacité et sens mathématique, mais de leur légitimité dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques : Doit-on les enseigner ? Doit-on les accepter ? Ces questions soulèvent, au-delà des valeurs et perspectives sur l'enseignement-apprentissage de l'algèbre, un certain nombre de défis. La prochaine section aborde ces défis sous deux angles : le processus de résolution de problèmes et la confrontation des perspectives.

3. Autour des défis pour l'enseignement-apprentissage de l'algèbre

3.1 Une réflexion sur les processus de résolution d'équations

La distance entre les stratégies déployées par élèves et les enseignants, et leur possible arrimage, sont sans contredit des sources de défis pour l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. Une façon d'aborder ces questions est de se pencher sur le processus de résolution de d'équations qui a cours autant chez l'élève que chez l'enseignant en contexte de calcul mental. Comment expliquer la variété, mais surtout les différences de résolution entre les enseignants et les élèves ? Reprenons la citation de Threlfall (2002) :

> As a result of this interaction between noticing and knowledge, each solution 'method' is in a sense unique to that case, and is invented in the context of the particular calculation – although clearly influenced by experience. It is not learned as a general approach and then applied to particular cases. The solution path taken may be interpreted later as being the result of a decision or choice, and be called a 'strategy', but the labels are misleading. The 'strategy' (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges. (p. 42)

Si on prend en compte ce que Threlfall mentionne, on peut considérer que la nature de ce qui émerge chez un élève « novice » est bien différente de celle qui émerge chez un enseignant « expert ». Dans le cas du novice, son bagage d'expériences, pour reprendre les mots de Threlfall, est différent de celui de l'expert. Chez l'expert, on a l'impression que certaines expériences dirigent fortement les façons de résoudre. Dans le commentaire de l'enseignante, et dans celui de Freudenthal ci-dessus mentionné, on entend bien qu'il est difficile de sortir du cadre prétracé par l'expérience répétitive gagnée en enseignant un programme prédéterminé. Suivant la responsabilité qui lui incombe de faire apprendre les élèves, l'enseignant se retrouve à faire des choix et ces choix dictent alors la nature de l'expérience qu'il vivra au fil des années pour ce contenu mathématique[11]. Lorsque l'enseignant finit par pencher vers une ou des méthodes ou approches, qui sont vues comme pouvant aider les élèves, ces dernières deviennent en retour, systématiquement, celles qui dirigent son propre processus de résolution ; phénomène qui est bien rendu par l'expression « automatisme » à laquelle l'enseignante fait allusion.

Les pas de résolution donnant lieu aux stratégies, tant des élèves que des enseignants, émergent suite à une pose de problème différente et propre à chacun. Ces stratégies émergent dans l'interaction avec l'équation, elles se manifestent au travers des mêmes idées (ou sous la même forme), mais elles n'ont pas les mêmes *origines* : elles sont distanciées, influencées par une expérience qui joue un rôle fort chez l'enseignant. L'enseignant est expert dans la résolution de ces équations. Il est capable de lire celles-ci sous un même angle algébrique, ramenant tout ou presque au même type de tâche, posant le tout comme la même tâche. Et on voit que, placés devant des équations similaires, voire identiques, enseignants et élèves procèdent différemment, posant alors des tâches bien différentes.

Une distance entre les stratégies chez l'élève-novice et chez l'enseignant-expert est bien existante. Malgré son succès dans la résolution, et paradoxalement, l'expertise de l'enseignant limite la variété des problèmes qu'il pose, étant moins sensible à souligner des variations, provoquant ainsi une certaine distance avec les poses des élèves. Cette expertise de l'enseignant, par la nature même de son travail depuis plusieurs années l'amène à concevoir, à poser dirait-on, ce type de problèmes toujours sous le même angle algébrique. Quant à l'élève, il n'est pas un « non-expert ». Par contre, il n'a pas encore vécu ces mêmes expériences, récurentes au fil des années, avec les équations algébriques. Ceci fait penser à la métaphore du lit de rivière (*riverbed* en anglais). Le lit de rivière de l'enseignant est bien creusé, donc très spécialisé, et la rivière y coule vraisemblablement. L'élève est quant à lui semblable à un jeune ruisseau qui dévie au moindre changement de terrain, ce qui ne l'empêche pas de faire déboucher la rivière (parfois au même endroit, mais parfois à un endroit tout à fait imprévu tout aussi adéquat).

À travers les divers propos tenus par les enseignants, tels ceux relatés plus haut concernant leurs automatismes et leurs préférences envers des méthodes dites plus standard et générales, on y conçoit une certaine intention d'uniformisation des procédures des élèves (tout autant qu'un malaise vécu par certains face à cette

[11] L'expérience mathématique de l'enseignant du secondaire est, plus souvent qu'autrement, exactement celle de son enseignement de ces contenus mathématiques. Mis à part les enseignants continuant des études en mathématiques, peu nombreux sont ceux qui font des mathématiques en dehors de leur pratique de classe.

intention). Cette situation porte en elle le risque d'éloigner les enseignants des élèves au niveau des problèmes posés et de la résolution de ces mêmes problèmes. Il devient alors difficile de faire des mathématiques différemment, tel que l'exprime l'enseignante ci-dessus, mais aussi d'apprécier pleinement la variété des solutions des élèves ; une variété qu'eux-mêmes enseignants ne vivent plus dans leur quotidien mathématique. On y voit poindre alors des questions de légitimité de ces stratégies « non-usuelles », tel qu'expliqué plus haut.

Il est important à nouveau de noter le fait que cette distance n'est pas due à un manque mathématique chez l'enseignant, mais bien à un enracinement profond, à travers son enseignement, de ses façons de poser et résoudre les équations algébriques. Ainsi, tel que le montrent les analyses ci-dessus, malgré leurs difficultés à se rappeler comment faire de la résolution de problème autrement, les enseignants sont tout à fait capables de comprendre ces autres stratégies mathématiques, voire à en imaginer certaines lorsqu'ils sont poussés à le faire.

Tout ce contexte fait écho aux travaux conduits sur la résolution de problèmes en arithmétique et le travail des algorithmes de calcul. Dans sa recension de certains écrits, Anghileri (2001) montre qu'avant l'apprentissage des algorithmes standard de calcul, les enfants ont des stratégies qui sont directement taillées sur leur compréhension des problèmes individuels. Toutefois, ces stratégies ne perdurent pas longuement, car elles sont tour à tour remplacées par les procédures standard enseignées en classe, alors que les enfants tentent de se conformer à ces algorithmes qui prennent une place importante en classe de mathématiques. On y perd alors toute la richesse mathématique chez l'élève au profit de méthodes standard de résolution (qui dans bien des cas applanissent l'activité mathématique de l'élève à une mécanique).

Anghileri (2001) montre de plus que cette situation est complexe, car sans renier la puissance des algorithmes de calculs, elle explique que ces algorithmes sont en conflit, en distance pour utiliser nos propres mots, avec le développement des aptitudes des élèves en résolution de problèmes. De plus, de la même façon que le souligne l'enseignante plus haut, il y a une question de familiarité des enseignants avec ces algorithmes, contrairement aux algorithmes personnels des élèves taillés en fonction des problèmes abordés. Toutefois, pour Anghileri, si l'intention est de développer des élèves qui peuvent réfléchir mathématiquement, s'adapter et être flexibles face aux situations mathématiques, en plus d'être outillés à communiquer leurs idées, il est important d'encourager l'efficacité des méthodes personnelles des élèves et de ne pas les enfouir sous les procédures standard. Et, en ce sens, elle fait un plaidoyer pour une augmentation du support destiné à aider les élèves à mieux structurer leurs idées et approches mathématiques et façons de faire, plutôt que de les remplacer par des procédures standards.

Cette distance entre élèves et enseignants, ce défi, pointe sur l'intérêt d'une sensibilisation, dans un premier temps, à la variété de l'activité mathématique possible et, dans un deuxième temps, à la présence d'une différence d'expertise entre enseignants et élèves ; tel que ceci s'est produit en séance chez les enseignants. Dans la prochaine section, une discussion est engagée sur l'ouverture et la sensibilisation à l'activité mathématique « différente » à travers une confrontation des perspectives mathématiques.

3.2 Qu'en est-il pour la formation des enseignants ? Une réflexion sur la confrontation des perspectives

Cette situation fait ressortir des enjeux de formation des maîtres en didactique de l'algèbre. La réaction des enseignants sur les automatismes et celles sur la nature des stratégies moins standard, de type arithmétique, souligne ces enjeux de formation. En fait, on peut s'intéresser justement aux commentaires et questionnements des enseignants, ceux-ci étant apparus suite à une certaine « confrontation » de perspectives.

Par exemple, la proposition de stratégies arithmétiques, ou celle axée sur le doublage de l'équation en simplifiant la demie, ont représenté des moteurs importants pour questionner les pratiques de résolution mais aussi d'enseignement des autres enseignants. En ce sens, la nécessité de mettre à plat et d'expliquer en détails le rationnel derrière ces pratiques (par exemple : efficacité de la proportionnalité, nécessité de travailler en colonne pour aider les élèves, recours à la technique de la balance) est survenue en réaction à certaines stratégies et/ou à une demande de clarification de la part des autres enseignants.

Dans ces demandes de clarification, au-delà de l'affirmation des automatismes et façons de faire ancrées dans l'expérience, on sent se mettre en place une certaine sensibilisation, non pas à l'importance de varier ou d'aller vers ces diverses stratégies, mais plutôt à une compréhension personnelle de la présence de ces automatismes et au déclenchement en retour d'une réflexion importante chez l'enseignant sur leurs propres processus de résolution. En résumé, on voit à travers les interactions entre les enseignants la naissance d'une sensibilisation de chacun vis-à-vis sa propre activité mathématique.

Et si des situations de sensibilisation de ce type étaient provoquées dans un cadre de formation des enseignants ? Faisant référence aux façons de faire et outils utilisés par divers professionnels, qui en deviennent des artéfacts de leur pratique, Pozzi, Noss et Hoyles (1998) parlent de situations qui impliquent ce qu'ils appellent des *breakdowns* dans les pratiques habituelles. Ces situations ont beaucoup de potentiel pour permettre d'expliciter le rationnel et de rendre plus visibles les aspects opaques des processus de décision des professionnels, tel qu'ils l'expliquent :

> Tools and artefacts shape activities and thoughts in ways that only become visible at times of breakdowns to routine. In disruption to routine, individuals need to develop a broader interpretative view of the model that underpins their routine practice (Noss, 2002, p. 53)

Dans le cas des enseignants qui nous concernent, ce sont leurs procédures et façons de faire qui deviennent réifiées comme outils et artéfacts de leur pratique, et qui sont fortement automatisées et ancrées dans des routines de fonctionnement, tel que l'explique l'enseignante. Ces situations de *breakdown* ont le potentiel de révéler, de mettre en lumière, l'activité professionnelle de l'enseignant concernant le processus de résolution d'équations en algèbre.

On peut penser, par exemple, à des situations de formation continue où les enseignants doivent comparer leurs méthodes de résolution à des méthodes d'élèves souvent moins conventionnelles quoique tout aussi valides. On peut vouloir provoquer de façon explicite ces situations pour faire avancer les enseignants tant au niveau mathématique que professionnel. Dans ces cas-ci, l'intention n'est pas de confronter l'enseignant avec une soi-disant incapacité ou limite personnelle, mais plutôt de l'aider à se sensibiliser à ses propres façons de faire, aux raisons qui le(s) guident, et à leur donner un sens.

La sensibilisation avec une diversité de façons de résoudre les mêmes équations n'est pas non plus dans le but de « changer » les enseignants, mais bien de les sensibiliser : à leurs propres façons de faire et à d'autres, à divers types d'efficacités mathématiques, à la richesse de façons alternatives de résoudre, etc. Cette sensibilisation peut potentiellement mener à des réflexions sur comment tirer profit de ces différentes façons de résoudre (les leurs, celles des autres) dans leur enseignement. Car, en effet, le cœur du défi de cette distance est pour les enseignants autant au niveau de l'approfondissement de leurs propres compréhensions, que dans la coordination des différentes stratégies des élèves avec les leurs. Par exemple : Comment coordonner la stratégie de recouvrement avec celle de la balance ou celle de multiplier par 2 avec le produit croisé ?

Remarques finales autour de la primauté de l'activité mathématique

Au-delà de la distance et des automatismes dans les procédures, la place accordée à la résolution de problèmes est elle-même matière à réflexion au niveau des défis d'enseignement. À travers les stratégies qu'ils déploient, autant élèves qu'enseignants montrent qu'ils peuvent entrer en activité algébrique (bien que celle-ci ne mène pas toujours directement à la réponse voulue dans le cas des élèves). En bref, autant enseignants qu'élèves font de l'algèbre. Donc, bien qu'il y ait une distance entre les divers pas de résolution et donc stratégies déployées, cette distance n'est pas présente au niveau de l'activité elle-même de résoudre. Les stratégies des élèves ne sont pas toutes « efficaces », mais elles émergent toutes d'une activité mathématique vivante et émergente. Peut-être que le défi de la distance réside aussi dans la prise en compte de cette activité mathématique pour en tirer profit, pour travailler avec et à travers celles-ci (et en même temps, pour explorer activement, à la Borasi (1996), les différentes « erreurs » commises).

Lors de l'enseignement de l'algèbre, on peut penser qu'une trop grande insistance est placée sur l'algèbre elle-même et non pas sur l'activité algébrique et la résolution d'équations. Fait-on une association, voire une fusion, entre la résolution algébrique et l'enseignement de la stratégie pour résoudre cette équation ? Le cas échéant cela résulte en un accent sur le résultat plutôt que sur l'activité elle-même. Une cause du défi est possiblement cette centration sur l'enseignement *de* l'algèbre, sur les choses à savoir et à faire, au lieu de l'être sur l'engagement dans la résolution d'équations algébriques. En faisant ainsi, ne s'éloigne-t-on pas des mathématiques comme résolution de problèmes ou comme activité humaine à la Freudenthal ? N'y a-t-il pas là un certain glissement, méta-didactique (Brousseau, 1998), où le moyen pour résoudre se substitue à l'activité de résoudre ?

Placer la résolution de problèmes au premier plan, se centrer sur l'activité mathématique, et non sur la solution elle-même, peut être conçue comme une façon de provoquer ce rapprochement, de réduire cette distance entre élèves et enseignants, pour revenir l'un vers l'autre et faire ensemble, plutôt que de faire chacun de son côté ou de faire comme on se le fait dicter.

Au final, cette activité de calcul mental apparaît comme un terreau fertile au niveau algébrique, dans lequel on retrouve une panoplie de pas de résolution et de stratégies, de façons de penser l'équation, d'entrer dans sa résolution, de la poser sous forme algébrique, arithmétique, hybride, etc. Le rapprochement, le défi, passe aussi par la façon dont, ensemble, élèves et enseignants prennent avantage de cette richesse et fonctionnent dans ce terrain de jeu : on avance dans les poses et résolutions plutôt que d'enseigner ou se faire enseigner ces poses et résolutions. Tel que le disent Sumara et Davis (1997), c'est une occasion d'y élargir l'espace du possible (algébrique), ce qu'Anghilieri (2001) aborde au niveau de l'activité mathématique elle-même :

> […] it is not the sole purpose in a calculation to find the answer, although this is not always made explicit to children. There is knowledge and understanding to be gained through *doing* calculations that can initiate children into the world of mathematics, revealing the patterns and relationships that will empower them to go on to more complex calculations, and that will be the basis for working with more abstract higher mathematics. (Anghileri, 2001, p. 93)

Ainsi, de la même façon que le contexte de calcul mental pour Threlfall (2002) permet de faire émerger des *possibilities for numbers*, ce contexte de calcul mental en algèbre peut être vu comme faisant émerger des « possibilités pour l'algèbre ». Cette variété de résolutions, et sa prise en compte comme activité mathématique, a beaucoup de portée pour l'enseignement de l'algèbre, parce qu'elle offre différentes voies pour la résolution d'équations algébriques et ne les restreint pas : c'est l'activité mathématique en elle-même qui est en jeu. Et, c'est bien cette activité mathématique, sa vivacité comme sa richesse, qui apparaît centrale dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre.

Bibliographie

ANGHILERI, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 79-94). Open University Press : Berkshire, UK.

BORASI, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. Ablex: NJ.

BURTON, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

BUTLEN, D., & PEZARD, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *Repères IREM, 41,* 5-24.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage: Grenoble.

DAVIS, B. (1995). Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory. *For the Learning of Mathematics, 15*(2), 2-9.

DOUADY, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM n° 15,* 25p.

FILLOY, E., & ROJANO, T. (1989). Solving equations : the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, *3*(3-4), 413-435.

FREUDENTHAL, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Netherlands.

HEWITT, D. (1996). Mathematical fluency: the nature of practice and the role of subordination*, For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 28-35.

LAVE, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

MATURANA, H. R. (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing* (pp. 65-82) Hudson, NY: Lindisfarne Press.

MATURANA, H. R. (1988a) Ontology of observing: The biological foundations of self-consciousness and the physical domain of existence. In R.E. Donaldson (ed.), Texts in cybernetic theory: An in-depth exploration of the thought of Humberto Maturana, William T. Powers, and Ernst von Glasersfeld. 53 pages. American Society for Cybernetics (ASC) conference workbook.

MATURANA, H. R. (1988b). Reality: The search for objectivity of the quest for a compelling argument. *Irish Journal of Psychology*, *9*(1), 25-82.

MATURANA, H. R., & VARELA, F. J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (Rev. ed.). Boston, MA: Shambhala.

Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (1988). *Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes. Orientation générale.* Fascicule K. Québec : Gouvernement du Québec.

MURPHY, C. (2004). How do children come tu use a taught mental calculation strategy? *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 3-18.

NATHAN, M. J., & KOEDINGER, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(*2*), 168-190.

NOSS, R. (2002). Mathematical epistemologies at work. *Proceedings of PME-26* (vol. 1, pp. 47-63). Norwich, England: PME.

OSANA, H., PROULX, J., ADRIEN, E., & NADEAU, D. (2013). Developing relational thinking in preservice teachers. *Proceedings of PME-NA 35* (pp. 845-848). Chicago, US.

POZZI, S., NOSS, R., & HOYLES, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics*, *36*, 105-122.

PROULX, J. (2015). Solving problems and mathematical activity through Gibson's concept of affordances. *Proceedings of PME-39* (vol. 4, pp. 49-56). Hobart, Tasmanie.

PROULX, J. (2013). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *18*, 61-90.

PROULX, J., OSANA, H., NADEAU, D., & ADRIEN, E. (2013). On the emergence of mental mathematics strategies. *Proceedings of PME-NA 35* (p. 328). Chicago, US.

REZAT, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. *Proceedings of CERME-7* (pp. 396-405). Rseszow, Pologne: CERME.

SIMMT, E. (2000). Mathematics knowing in action: A fully embodied interpretation (PhD dissertation). Edmonton, Canada: University of Alberta.

SUMARA, D. J., & DAVIS, B. (1997). Enlarging the space of the possible: Complexity, complicity, and action-research practices. In T. R. Carson & D. J. Sumara (Eds.), *Action research as a living practice* (pp. 299-312). New York: Peter Lang.

THRELFALL, J. (2002). Flexible mental calculations. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47

THRELFALL, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*, 541-555.

VARELA, F. J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives* (P. Lavoie, Trans.) Paris: Éditions du Seuil.

VARELA, F. J. (1999). *Ethical Know-how*. Stanford: Stanford University Press.

VARELA, F. J., THOMPSON, E., & ROSCH, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.

JEROME PROULX
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case Postale 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, Qc
H3C 3P8 Canada
proulx.jerome@uqam.ca

MARIE-LINE L.LAMARCHE
lavallee-lamarche.marie-line@courrier.uqam.ca

KARL-PHILIPPE TREMBLAY
tremblay.karl-philippe@courrier.uqam.ca