REBECA GUIRETTE, ANA GÓMEZ-BLANCARTE, RICARDO VALERO-PÉREZ

RECONOCIMIENTO DE LAS VARIABLES VISUALES Y UNIDADES SIMBÓLICAS SIGNIFICATIVAS DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

Recognition of visual variables and significant symbolic units of quadratic functions.

Abstract. In this paper, we explore the qualitative recognition by 144 high school students of the visual variables of the graphical representation of a quadratic function and the significant symbolic units of its algebraic writing. This recognition emerges when students are asked to move from the graphical register to the algebraic register, and conversely. The results show that the association between the visual variables of the graphic register and the symbolic units of algebraic writing has not been fully recognized. It is considered that, although the students study the effects of the coefficients of a quadratic function, they tend to only associate them with translations through the axes, instead of with pertinent visual changes. This is not sufficient for a qualitative global apprehension that allows the coordination between the visual variables of the graphical representation of a quadratic function and the significant symbolic units of its algebraic representation.

Keywords. Quadratic function, conversion, relevant cognitively units, visual variables and significant symbolic units.

Reconnaissance des variables visuelles et des unités symboliques significatives des fonctions quadratiques.

Résumé. Dans cet article on explore la reconnaissance qualitative, par 144 élèves de baccalauréat, des variables visuelles de la représentation graphique d'une fonction quadratique et des unités symboliques de sa représentation algébrique. Cette reconnaissance se manifeste quand on demande aux élèves de passer du registre graphique à l'algébrique et vice-versa. Les résultats montrent que l'association entre des variables visuelles du registre graphique et des unités symboliques de l'écriture algébrique n'a pas été complètement reconnue. Bien que les élèves aient abordé l'étude des effets des coefficients d'une fonction quadratique, on observe qu'ils tendent à ne leur associer que des translations selon les axes, au lieu des changements visuels pertinents. Cela n'est pas suffisant pour une appréhension globale qualitative, qui permet la coordination entre les variables visuelles de la représentation graphique et les unités symboliques de la représentation algébrique d'une fonction quadratique.

Mots-clés. Fonction quadratique, conversion, unités cognitivement pertinentes, variables visuelles et unités symboliques significatives.

Resumen. En este artículo se explora el reconocimiento cualitativo que hacen 144 estudiantes de bachillerato sobre las variables visuales de la representación gráfica y las unidades simbólicas de la representación algebraica de una función cuadrática. Este reconocimiento se manifiesta cuando se pide a los estudiantes pasar del registro gráfico al algebraico, y viceversa. Los resultados muestran que la asociación entre las variables visuales del registro gráfico y las unidades simbólicas de la escritura algebraica no ha sido

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 159 – 184.

completamente reconocida. Se considera que, si bien los estudiantes abordan el estudio del comportamiento de los coeficientes de la función cuadrática, tienden a sólo asociarlos con traslaciones a través de los ejes, en lugar de variables visuales pertinentes. Lo cual no es suficiente para una aprehensión global cualitativa que permite la coordinación entre las variables visuales de la representación gráfica y las unidades simbólicas de la representación algebraica de la función cuadrática.

Palabras clave. Función cuadrática, conversión, unidades cognitivamente pertinentes, variables visuales y unidades simbólicas significativas.

1. INTRODUCCIÓN

La relevancia de las representaciones semióticas de un concepto matemático, el dominio de estas representaciones y sobre todo la coordinación de distintas representaciones del contenido matemático en cuestión, se ponen en juego en cada momento del proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con Duval (1998), es esa coordinación la que menos se promueve en la enseñanza de las matemáticas, lo cual puede provocar dificultades por parte de los estudiantes en el aprendizaje de éstas. Ejemplos de tales dificultades se pueden apreciar cuando los estudiantes realizan actividades que involucran la articulación entre registros de representación semiótica (lenguaje natural, algebraico, tabular y gráfico) del concepto de función. García, Vázquez e Hinojosa (2004), al explorar las dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería, encontraron que la gran dificultad radica en pasar de un registro gráfico a uno algebraico y viceversa. Fue de mayor dificultad pasar del registro gráfico al algebraico. Los autores reconocen que estas dificultades pueden deberse a que en la enseñanza del concepto de función "pocas veces se busca de manera sistemática reforzar el domino de tareas que impliquen el pasaje entre registros" (p. 31). Dificultades similares, con estudiantes también de ingeniería, fueron reportadas por Guzmán (1998) quien aplicó diversos problemas que implicaban, entre otras tareas, escribir la ecuación que satisficiera las condiciones exigidas en la representación gráfica de una parábola de la forma $ax^2 + c, c = 1$. De los resultados incorrectos a esta tarea, el autor infiere un desconocimiento, por parte de los estudiantes, de la correspondencia entre las unidades significativas gráficas y las algebraicas. Es decir, una dificultad para coordinar los registros. El reconocimiento de que los estudiantes presentan dificultades de coordinación entre los registros gráfico y algebraico de una función cuadrática es apoyada también por Bouciguez, Irassar y Suárez (2008). Ellos afirman que los estudiantes tienen dificultades porque "en las clases de matemáticas los profesores privilegiamos las escrituras simbólicas" (p. 179).

Duval (1992) señala que "el paso de la representación gráfica a la escritura algebraica proviene de una interpretación global" (p. 130). Esta interpretación "depende de una identificación precisa de *todos los valores de las variables visuales pertinentes* y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica que corresponden" (p. 138). Un reconocimiento cualitativo significa que en el paso del registro gráfico al algebraico y viceversa "están excluidos toda consideración de los números y todo recurso a cálculos" (Duval, 1999, p. 75). Sin embargo, la mayoría de los estudios sobre la coordinación entre los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática, tema de estudio en este artículo, van más allá de solicitar un reconocimiento cualitativo al incluir también valores particulares o tratamientos numéricos. Por ejemplo, en el estudio de Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013) se reportan las dificultades que tuvieron estudiantes (entre 17 y 20 años de edad) para articular los registros gráfico y algebraico de la función lineal y cuadrática. En el caso de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$), en la conversión del registro algebraico al gráfico, se indagó si los estudiantes: 1) asociaban la expresión algebraica de la función con la gráfica de una parábola, 2) asociaban la relación entre los signos de a con la concavidad y de c con la ordenada al origen y 3) interpretaban la condición gráfica de $b \neq 0$. Los autores señalan que una de las dificultades con mayor presencia fue el desconocimiento de que la ausencia o presencia del coeficiente del término lineal de una función cuadrática ($b = 0$, $b \neq 0$) determina si la posición del eje de la parábola correspondiente coincide o no con el eje y. Cuando se pide a los estudiantes establecer la correspondencia del registro gráfico al algebraico, los autores exploran si los estudiantes, dada una gráfica que indica los valores en los que la curva intersecta a los ejes, encontraban los datos necesarios para determinar tanto el signo como el valor de los parámetros de la expresión algebraica correspondiente. Los estudiantes tuvieron dificultad para identificar los signos y valores de los coeficientes, en particular, los valores de a y b en la expresión $y = ax^2 + bx + c$. Ellos lograron identificar el carácter negativo del coeficiente a, pero no pudieron determinar su valor exacto mediante la información que mostraban los puntos de intersección de la parábola con los ejes. Se puede apreciar que los autores al solicitar los valores exactos de los parámetros de la expresión algebraica promueven un tratamiento numérico, lo cual contradice la condición antes señalada para el proceso de conversión: "están excluidos toda consideración de los números y todo recurso a cálculos".

Otros estudios, en los que se ha recurrido al uso de herramientas tecnológicas como un *software* dinámico para favorecer la coordinación entre los registros de la función cuadrática, también centran la atención en valores puntuales como las raíces de la función, los máximos, mínimos, valores de los parámetros y tratamiento de la función que implican procesos numéricos o de cálculo (e.g., Oaxaca y Valderrama, 2000; Huapaya, 2012; Gutiérrez, Araujo y Prieto, 2012; Opazo, Grajeda y Farfán, 2014).

El presente artículo se deriva de dos investigaciones previas sobre el estudio de la conversión entre los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática. La primera investigación (ver Valero-Pérez, 2015) indagó la discriminación de tales variables y unidades simbólicas que hacen estudiantes de bachillerato (N = 169) y licenciatura (N = 5) ante tareas de reconocimiento (como la que se muestra en la figura 2 de la siguiente sección). Los resultados pusieron en evidencia que los estudiantes para resolver dichas tareas recurren al tratamiento numérico de las expresiones algebraicas dadas, así como al uso de fórmulas para la determinación de puntos específicos (e.g., determinar el vértice y las raíces) que les permitieran identificar el registro solicitado. El autor reporta que cuando las tareas van del registro algebraico al gráfico los estudiantes discriminan los coeficientes a y c del término cuadrático y término independiente, respectivamante, pues reconocen que el signo de a determina el sentido de la concavidad y que el el valor de c indica en qué punto del eje y intersectará la gráfica correspondiente de la función. Cuando las tareas van del registro gráfico al algebraico, el autor identificó que los estudiantes tienen un mayor reconocimiento de la característica concavidad de la gráfica, ya que identifican que si la gráfica es cóncava hacia arriba, la expresión algebraica tendrá un signo positivo en el coeficiente a; si la concavidad es hacia abajo, el signo del coeficiente en cuestión será negativo. La siguiente característica que más reconocen los estudiantes es la intersección que se da con el eje y, la cual les permitió identificar el coeficiente c. En cuanto a la discriminación del coeficiente b, tanto en las tareas que van del registro algebraico al gráfico como las del gráfico al algebraico, la gran mayoría de los estudiantes mostraron un desconocimiento de la correspondencia semiótica que tiene esta unidad simbólica con el comportamiento de la gráfica de la función. Menos del 3% de los estudiantes de bachillerato y ninguno de los estudiantes de licenciatura identificaron la correspondencia semiótica del parámetro b. De las conclusiones del estudio de Valero-Pérez (2015) se observa, por un lado, que el uso de tratamientos numéricos a los que recurrieron los estudiantes para pasar de un registro a otro evidencia una falta de reconocimiento cualitativo y que este uso es más evidente en estudiantes de licenciatura (futuros matemáticos), tal vez por el domino que tienen en los cálculos. Por otro, los pocos estudiantes que reconocieron la unidad simbólica b saben que si $b > 0$, la gráfica se desplaza a la izquierda; si $b < 0$, a la derecha, pero esto sucede sólo si $a > 0$. Sin embargo, parecen desconocer que cuando $a < 0$, el desplazamiento que indica b, se invierte.

En la segunda investigación, como continuación del estudio de Valero-Pérez (2015), se presenta una propuesta del conjunto de unidades simbólicas del registro algebraico y variables visuales del registro gráfico de la función cuadrática, pertinentes para la conversión entre los registros. La propuesta se ejemplifica mediante un proceso de discriminación usando el *software* GeoGebra y propone una nueva unidad simbólica que toma en cuenta la relación entre los signos de los parámetros a y b (Gómez-Blancarte, Guirette y Morales-Colorado, en prensa). El objetivo del presente estudio es indagar el reconocimiento cualitativo que hacen estudiantes de bachillerato al coordinar las variables visuales (*concavidad, posición del vértice respecto de eje y, e intersección de la curva con el eje*) y unidades simbólicas (a, b y c) de los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática en su forma general $y = ax^2 + bx + c$. El interés de la investigación radica en explorar el reconocimiento meramente cualitativo entre las variables visuales del registro gráfico y las unidades simbólicas significativas del registro algebraico de la función cuadrática.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Conversión de registros

Duval (1998) distingue dos actividades cognitivas fundamentales relacionadas con las transformaciones de las representaciones semióticas: el *tratamiento* y la *conversión*. El tratamiento es la transformación de una representación en otra dentro del registro donde fue creada y la conversión es la transformación de una representación en un registro inicial en otra representación en un registro final, actividades cognitivas independientes entre sí. Profundizamos en la actividad de conversión por ser el objeto de estudio de esta investigación.

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, la conversión, es decir, el cambio de una representación de un objeto matemático de un registro de representación semiótico a otro, se da entre los registros de representación semiótica discursivos y no discursivos, por ejemplo en los registros algebraico y gráfico. En el registro algebraico (registro discursivo) se formulan expresiones y en el registro gráfico (no discursivo) se representan configuraciones de formas. Por lo que en el registro algebraico se podrá inferir, razonar y calcular, mientras que en el gráfico se podrá visualizar lo que no es dado de manera visible (Duval, 2004).

Dado que la conversión no es una actividad cognitiva inmediata, no es suficiente poner lado a lado la representación algebraica y la gráfica de un objeto matemático para que los estudiantes comprendan la conversión, es decir, "la simple presentación no permite que se aprenda a discriminar en el contenido de cada representación, lo que son las unidades significantes pertinentes para representar el objeto matemático… y lo que no lo es" (Duval, 2004, p.49). Al ser la conversión una tarea cognitiva compleja, ya que no hay reglas explícitas que permitan dicha transformación de forma directa, ya sea en uno u otro sentido en que se realice ésta (Duval, 1998), se debe diferenciar lo que es observable en un gráfico y lo que las particularidades observadas permiten identificar. Al respecto, Duval (2004) plantea tres formas de ver las gráficas cartesianas: 1) aprehensión local por punteo, de manera puntual, esto es, por el comportamiento de un valor particular (puntos, parejas de números); 2) aprehensión icónica, por desplazamientos en relación con un nivel horizontal y 3) aprehensión global cualitativa, la manera de ver que permite visualizar las relaciones entre dos conjuntos de valores (orientación y posición en relación con los ejes). Cada una de estas formas toma en cuenta distintos aspectos en el gráfico. La dificultad radica en poder pasar de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa.

2.2 Aprehensión global cualitativa

Para saber que se ha dado el paso de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa, Duval (2004) propone atender tres exigencias en una terea de conversión:

1. La tarea de conversión sólo es requerida en un sentido, el que va del registro gráfico al registro algebraico.

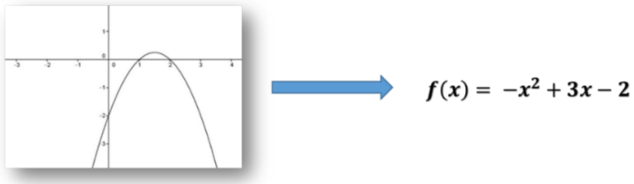


Figura 1. Conversión, sentido gráfico - algebraico.

2. La tarea debe ser sólo una tarea de reconocimiento, ya que de esta manera se reflejará qué ha sido automatizado, interiorizado o integrado y sobre todo, "condiciona la iniciación de todos los tratamientos consientes que puede proponerse un sujeto" (Duval, 2004, p.70).

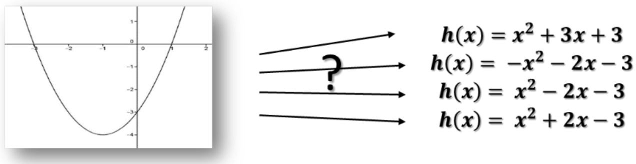


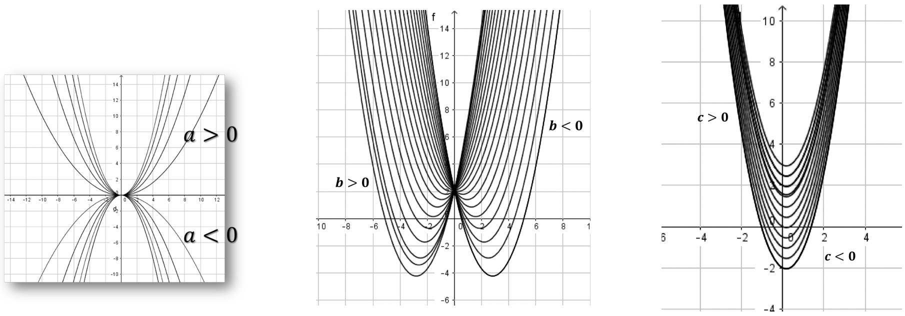
Figura 2. Tarea de reconocimiento.

3. La tarea debe permitir examinar "el conjunto de las variaciones de representación cualitativamente discernibles a la vista" (Duval, 2004, p.70). Es decir, las opciones dadas deben reflejar valores en oposición (como se muestra en la figura 2).

Estas exigencias favorecen la coordinación entre los registros gráfico y algebraico porque los valores visuales del registro gráfico se ponen en correspondencia con las unidades simbólicas (signos) de la expresión algebraica y no con valores numéricos (Duval, 2004). Por ello, la aprehensión global culitativa conlleva una asociación "*variable visual de la representación-unidad significativa de la escritura algebraica*" (Duval, 1992, p. 127).

La discriminación de tales variables visuales y unidades simbólicas requiere de identificar las unidades cognitivamente pertinentes a través de una variación estructural de una representación y de una asociación con otra representación en un registro diferente. Por ejemplo, se analiza el registro gráfico y se asocia con el registro algebraico, de tal forma que cuando se varía la representación gráfica también se producirá una variación en la representación algebraica. Así pues, las unidades cognitivamente pertinentes en el registro gráfico (variables visuales) serán aquellas cuya variación también produce un cambio en el registro algebraico (unidades simbólicas). Este tipo de variación estructural es la que se planteó en Gómez-Blancarte et al. (en prensa).

En la enseñanza de la función cuadrática en su forma general ($y = ax^2 + bx + c$; a, b y c en $\mathbb{R}$ y $a \neq 0$), se estudian tres unidades cognitivamente pertinentes: la concavidad: hacia arriba ($a > 0$) y hacia abajo ($a < 0$) (figura 3a); desplazamiento horizontal de la curva respecto del eje y: a la izquierda ($b > 0$, cuando $a > 0$), sobre el eje y ($b = 0$) y a la derecha ($b < 0$, cuando $a > 0$) (figura 3b); intersección de la curva con el eje y, arriba del origen ($c > 0$), en el origen ($c = 0$) y abajo del origen ($c < 0$) (figura 3c).



(a) (b) (c)

Figura 3. Unidades cognitivamente pertinentes de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$.

El modo en que estas unidades cognitivamente pertinentes son estudiadas en algunos libros de texto en México, no promueve una discriminación a través de una variación estructural y de una asociación, pues se explican como algo acabado. El tratamiento de ellas toma en cuenta aspectos más numéricos que cualitativos, sobre todo en el caso del parámetro b, lo cua promueve más una aprehensión local e icónica. En algunos libros de textos, el parámetro b suele asociarce con el eje de simetría y la coordenada del vértice (ver figura 4); en otros, con un desplazamiento horizontal. Además, se suele estudiar con mayor énfasis los coeficientes a y c que el coeficiente b (Opazo et al., 2014).

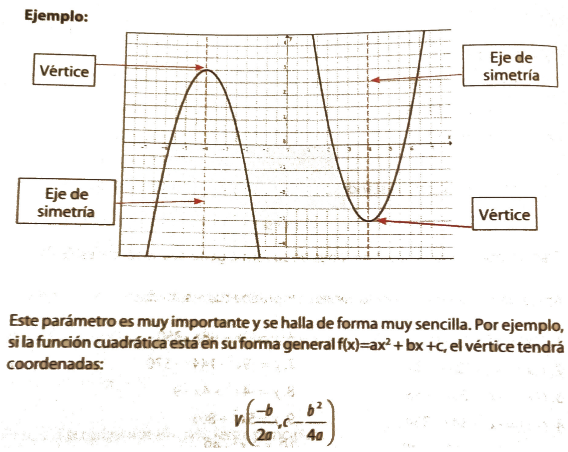


Figura 4. Ejemplo de cómo se estudia el parámetro b en la enseñanza.
Fuente: Matemáticas IV (Carrillo, 2014, p.146).

2.3 Propuesta para la aprehensión global cualitativa de la función cuadrática

Basados en la discriminación de las variables pertinentes de la función lineal, $y = ax + b$, hecha por Duval (1988), se discriminaron el conjunto de unidades cognitivamente pertinentes de la función cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$ (a, b y c, números reales con $a \neq 0$) para coordinar sus registros gráfico y algebraico de manera cualitativa, utilizando el *software* GeoGebra (ver Gómez-Blancarte et al., en prensa). La Tabla 1 presenta el resultado obtenido.

Variables visuales	Valores	Unidades simbólicas
Concavidad	Hacia arriba	$a > 0$
	Hacia abajo	$a < 0$
Posición del vértice respecto del eje y	A la izquierda	$ab > 0$
	Sobre el eje	$b = 0$
	A la derecha	$ab < 0$
Intersección de la curva con el eje y	Arriba del origen	$c > 0$
	En el origen	$c = 0$
	Abajo del origen	$c < 0$

Tabla 1. Variables visuales y unidades simbólicas significativas de la función $y = ax^2 + bx + c$.

La discriminación de las unidades simbólicas propias al registro algebraico son: el signo relacional ($=$) y los signos ($+$, $-$) de los coeficientes (a y b) y de la constante (c). Mientras que la discriminación para las variables visuales de la representación gráfica son: la concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección de la curva con el eje y. Cada una de estas variables visuales de la representación gráfica admite distintos valores: la concavidad del trazo puede tomar dos valores; la posición del vértice respecto del eje y toma tres valores y la intersección del trazo con este eje toma otros tres valores. Cada uno de estos valores de las variables visuales se asocia con una unidad significativa en la notación algebraica de la función cuadrática. Las tres variables se asocian con una característica visual, y no numérica, que implican el carácter semántico de los tres parámetros (a, b, y c) incluidos en la notación algebraica. Cuando se varían las variables visuales del registro gráfico se produce una variación en las unidades simbólicas de la escritura algébrica, y viceversa, que muestran 18 (9 para $a > 0$ y 9 para $a < 0$) posibles combinaciones de gráficas, visualmente distintas y con expresiones algebraicas particulares (ver figura 5).

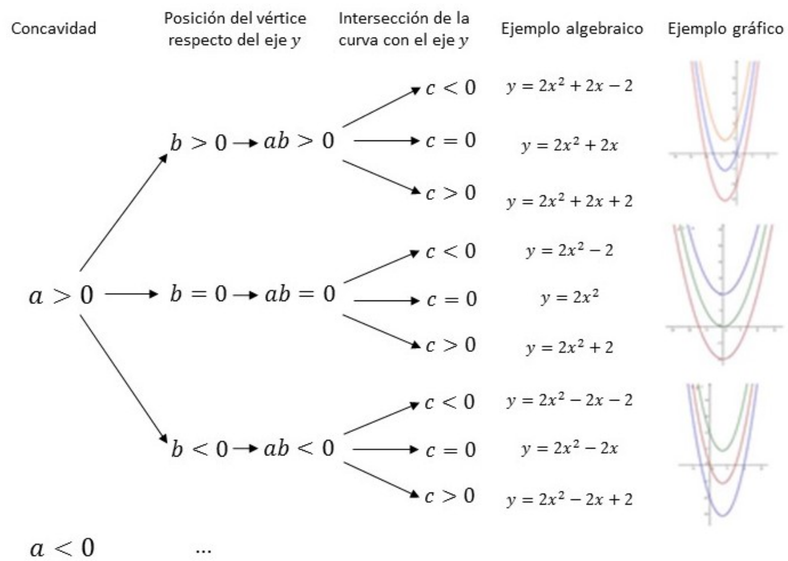


Figura 5. Combinaciones de las variables visuales y unidades simbólicas significativas de la función $y = ax^2 + bx + c$.

Obsérvese que en esta propuesta no se considera sólo el carácter positivo y negativo del coeficiente b para el desplazamiento horizontal de la curva, pues dicho desplazamiento está asociado con el signo del coeficiente de a. Para observar esta asociación basta fijar $a > 0$ y variar b y notar que cuando $b > 0$ el desplazamiento de la curva es a la izquierda; cuando $b < 0$, es a la derecha. Pero, si $a < 0$, al variar b, se observa que el desplazamiento de la curva es a la derecha cuando $b > 0$ y a la izquierda cuando $b < 0$ (ver Gómez-Blancarte, et al., en prensa). Para resumir estas distintas implicaciones, recurrimos al producto de signos de ambos parámetros. Así, la unidad simbólica que determina la posición del vértice respecto del eje y es el producto de signos de los parámetros a, b. Aunque se prefirió nombrar esta variable visual como posición del vértice en lugar de desplazamiento de la curva, como suele ser nombrada en la enseñanza, es importante notar que el nombre no hace referencia al valor de la coordenada, sino a su posición (derecha, sobre, izquierda) respecto del eje y.

Abordar el estudio de la función cuadrática desde una aprehensión global cualitativa, como la que se presenta en este artículo, promueve el análisis del funcionamiento cognitivo de las representaciones al considerar de manera simultánea los registros de representación algebraico y gráfico. Es decir, se han hecho visibles las unidades cognitivamente pertinentes del contenido de las representaciones del registro algebraico en relación con las del registro gráfico de la función cuadrática en su forma general. Sin embargo, es posible identificar otras unidades cognitivamente pertinentes si la escritura de la función cuadrática es distinta. En este estudio, es de interés explorar la escritura general porque lo que importa de la escritura son los coeficientes a y b y la constante c.

3. DISEÑO DEL ESTUDIO

Se diseñó un estudio cualitativo tomando en cuenta algunos aspectos que Duval (2004) señala respecto de las tareas de conversión (ver sección 2.2). Dado que el objetivo es indagar el reconocimiento cualitativo a través de la conversión entre los registros algebraico y gráfico de la función cuadrática en su forma general, se decidió evitar tareas cuyas respuestas implicaran opciones (ver figura 2). La experiencia en el estudio de Valero-Pérez (2015) mostró que al dar opciones en el registro final, ya sea en el sentido gráfico-algebraico o algebraico-gráfico, los alumnos recurren a tratamientos numéricos para encontrar la representación solicitada. Por ejemplo, los estudiantes calculan las raíces de la función convirtiendo la escritura general de la función a una escritura factorizada. De esta manera, no es posible identificar si el estudiante reconoce la correspondencia semiótica que hay entre las unidades simbólicas a, b y c de la escritura algebraica y sus correspondientes variables visuales del registro gráfico. Así pues, para que ese reconocimiento fuera más evidente, se diseñó un cuestionario con seis tareas de reconocimiento cualitativo, planteadas de manera que el estudiante no tuviera elementos que lo motivaran a recurrir a algún tratamiento numérico.

3.1. Cuestionario

El cuestionario está compuesto de seis tareas organizadas en dos secciones de tres tareas cada una. En la primera sección, el registro de inicio es el algebraico y el de destino el gráfico (A-G); en la segunda, el registro de inicio es el gráfico y el de destino el algebraico (G-A). En las tareas A-G, el estudiante, dada la escritura algebraica de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$), debía trazar la gráfica correspondiente (registro de destino) bajo ciertas condiciones (Tabla 2). Estas condiciones implicaban la relación de los coeficientes a, b y constante c respecto de 0, lo cual centraba la atención en el reconocimiento cualitativo de esas unidades simbólicas en la gráfica trazada.

Expresión algebraica	***Condiciones***	***Gráfica****
1. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx - 7}$	$\boldsymbol{a < 0}$ **y** $\boldsymbol{b < 0}$	
2. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$	$\boldsymbol{a > 0, b = 0}$ **y** $\boldsymbol{c > 0}$	
3. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + 3}$	$\boldsymbol{a < 0\ y\ b > 0}$	

Tabla 2. Tareas de reconocimiento cualitativo del registro algebraico al gráfico.
**En la hoja que se les dio a los estudiantes, esta columna tenía un espacio suficiente para trazar la gráfica.*

En la tarea 1, la condición es trazar una parábola cuya concavidad se corresponda con las condiciones dadas para los parámetros a y b, la condición del parámetro c está explícita en la expresión. De acuerdo con estas condiciones, la unidad simbólica $a < 0$ determina una parábola cóncava hacia abajo, la posición del vértice debe ubicarse del lado izquierdo del eje vertical, para que se corresponda con $b < 0$; el trazo de la parábola debe intersectar al eje vertical en $c < 0$ o específicamente en $c = -7$. En la tarea 2, la parábola debe ser cóncava hacia arriba para que se corresponda con la unidad simbólica $a > 0$; dado que $b = 0$, la posición del vértice se encuentra sobre el eje y; el corte del trazo debe pasar por arriba del origen. En la tarea 3, de nuevo se debe trazar una parábola cóncava hacia abajo, pues se indica que $a < 0$, ahora la posición del vértice se ubicará del lado derecho para que se corresponda con $b > 0$; en este caso el corte del trazo pasa por arriba del origen, específicamente en $c = 3$.

La segunda sección (Tabla 3) contiene tres parábolas distintas entre sí de la función cuadrática; para cada una, el estudiante debía determinar el signo relacional ($>$, $=$ o $<$) con respecto a 0 de cada uno de los parámetros a, b y c. En este caso, el proceso de conversión va del registro gráfico al algebraico. La tarea 1 es una parábola cuyas variables visuales (concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección con el eje y) son las mismas que están implicadas en la tarea 2 del registro A-G. De manera que en la tarea 1 del registro G-A, las respuestas son: $a > 0$, $b = 0$ y $c > 0$. En las tareas 2 y 3 del registro G-A, de nuevo se tienen parábolas cóncavas hacia abajo, por lo que $a < 0$; en la tarea 2, la posición del vértice se encuentra a la derecha, $b > 0$ y en la tarea 3, se encuentra a la izquierda, $b < 0$. En la tarea 2, la intersección del trazo pasa por el origen, $c = 0$; en la tarea 3, por debajo, $c < 0$. Las tarea 1 del registro A-G y la tarea 3 del registro G-A implican las mismas unidades simbólicas y variables visuales: $a < 0$ (cóncava hacia abajo), $b < 0$ (posición del vértice a la izquierda del eje y) y $c < 0$ (intersección del trazo abajo del origen).

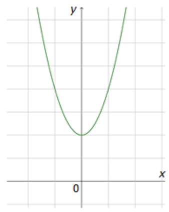
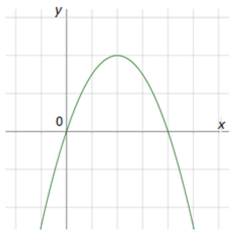
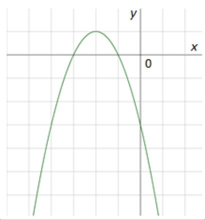
1. 	a_____0 b_____0 c_____0
2. 	a_____0 b_____0 c_____0
3. 	a_____0 b_____0 c_____0

Tabla 3. Tareas de reconocimiento cualitativo del registro gráfico al algebraico.

Tanto en las tareas del registro A-G como en las del registro G-A se tomó la decisión de explorar la unidad simbólica $a < 0$ con dos de las tres posiciones del vértice ($b < 0$ y $b > 0$) a fin de indagar si los estudiantes en ambos sentidos reconocen de manera conjunta los parámetros a y b. La decisión de darles valores específicos a la unidad simbólica c, en las tareas 1 y 3 del registro A-G fue la de identificar cómo asocian dicho valor con los ejes. Además, el hecho de que las unidades simbólicas y variables visuales de las tareas 1 (A-G) y 3 (G-A) son los mismas, así como las de las tareas 2 (A-G) y 1 (G-A), tiene la intención de explorar si el reconocimiento es consistente cuando se cambia el sentido del registro.

El cuestionario se aplicó en las aulas donde los estudiantes toman sus cursos regulares y de acuerdo con su horario de la clase de matemáticas. La aplicación se llevó a cabo por uno de los autores, sin supervisión de la profesora de matemáticas de los grupos mencionados. Para evitar que los estudiantes recurrieran a tratamientos numéricos, se les aclaró que no debían darle valores a los parámetros. Además, en el caso de las tareas del registro G-A (Tabla 3), las gráficas no señalan puntos específicos al intersectar con los ejes, lo cual evita el intento de operaciones.

3.2. Características de los participantes y aplicación del cuestionario

El cuestionario se aplicó a 144 estudiantes del quinto semestre de bachillerato (entre los 16 y 18 años edad). De acuerdo con los programas de estudio, en los semestres I, III y IV los estudiantes participantes estudian temas relacionados con la función cuadrática (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2014). De hecho uno de los libros de texto que estos estudiantes utilizan es el citado en la figura 4. La selección de los estudiantes fue por conveniencia, pues son estudiantes de un bachillerato en el que labora uno de los autores. Los estudiantes no tenían ninguna particularidad, más que la de disponibilidad por responder el cuestionario y ser estudiantes del 5º semestre, quienes ya habían abordado el estudio de la función cuadrática.

Desde el primer semestre del bachillerato, los estudiantes abordan distintos tratamientos de la escritura de la función cuadrática y su representación gráfica, por ejemplo:

- Resuelven por el método algebraico de despeje ecuaciones de segundo grado incompletas: $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$; $a \neq 0$.
- Completan y factorizan trinomios cuadrados perfectos para resolver la ecuación cuadrática en su forma general ($ax^2 + bx + c$).
- Reconocen la función cuadrática en su forma general ($y = ax^2 + bx + c$) y, mediante el método de tabulación, trazan la gráfica de ésta.
- Identifican en la gráfica el vértice como el punto en el que la curva cambia su comportamiento, así como, el punto más bajo o más alto de la parábola.
- Determinan las coordenadas (h, k) del vértice de una parábola transformando la escritura general del registro algebraico, $y = ax^2 + bx + c$, a la forma estándar o canónica, $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$, la cual también es usada para graficar la función cuadrática por el método de tabulación.
- Los estudiantes al término del primer semestre identifican que el coeficiente a del término cuadrático de la función determina la concavidad de la parábola y resuelven actividades como las que muestra la figura 6.

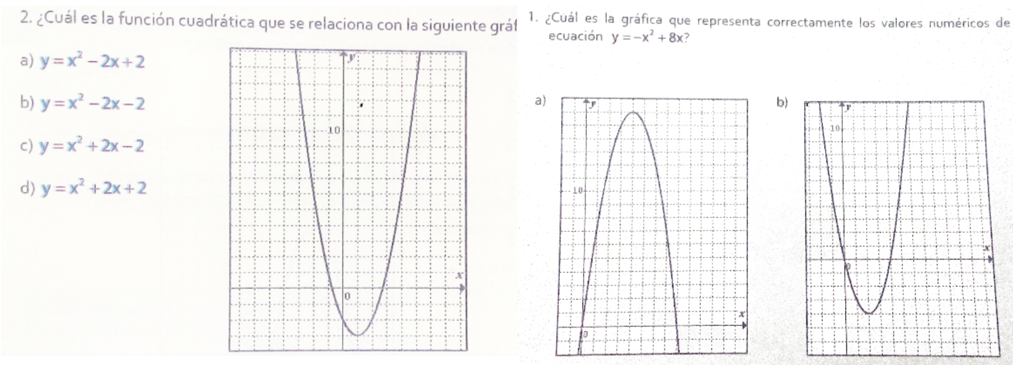


Figura 6. Ejemplos de actividades que resuelven los estudiantes en el primer semestre.
Fuente : Matemáticas I (Ríos y Callejas, 2015, pp. 326-327).

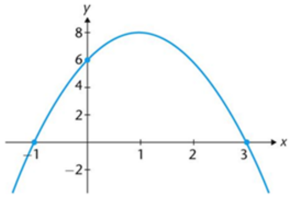
En el tercer semestre los estudiantes participantes estudian a la parábola como el lugar geométrico de todos los puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, el *foco*, y una recta fija perpendicular al eje, la *directriz*. Reconocen la ecuación de la parábola, $x^2 = 4ay$, con vértice en el origen y foco en $(0, a)$. Identifican de nuevo que el signo del coeficiente a determina la concavidad de la parábola.

En el cuarto semestre se define la función cuadrada como una función polinomial de grado dos y su escritura general: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. En este semestre, los estudiantes:

- Reconocen la forma mixta ($f(x) = ax^2 + bx; a \neq 0$) y pura ($f(x) = ax^2 + c; a \neq 0$) de la función.
- Reconocen y determinan a partir de la escritura general de la función cuadrática la forma estándar o canónica de ésta, $f(x) = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$, grafican la función identificando las coordenadas del vértice mediante el método de tabulación.
- Identifican las características de la función cuadrática en relación con su gráfica. Es decir, reconocen que la gráfica de una función cuadrática es una parábola, la cual abrirá hacia arriba o hacia abajo según el signo del coeficiente a, que el valor de c, el término independiente, indica la intersección de la parábola con el eje y. Además, se establece la relación del discriminante de la función con la intersección de la gráfica con el eje x.
- Identifican analíticamente y gráficamente el eje de simetría, el vértice (h, k) y los valores máximos y mínimos de la parábola.

En este semestre los estudiantes resuelven actividades como las siguientes:

22. Determina la expresión de la función cuadrática cuya gráfica se ilustra a continuación.



a. $y = 2x^2 - 6x + 4$

b. $y = -2x^2 + 6x - 4$

c. $y = -2x^2 + 5x + 6$

d. $y = -2x^2 + 4x + 6$

19. Dada la función cuadrática $f(x) = -2x^2 - 3x + 20$, determina:

A. Hacia dónde se abre la gráfica de la función (concavidad).

a. Hacia arriba

b. Hacia abajo

Figura 7. Ejemplos de actividades que resuelven los estudiantes en el cuarto semestre.
Fuente : Matemáticas IV (Cuellar, 2012, pp.137-138).

En este mismo semestre, un contenido, previo al de la función cuadrática, es el de “traslación de funciones”. Los estudiantes analizan la traslación vertical, $f(x) \pm k$, y horizontal, $f(x \pm k)$, de la gráfica de una función, cuando a ésta se le suma o resta una constante distinta de cero. Es común que la función utilizada para estudiar la traslación de funciones sea la función cuadrática.

De acuerdo con los estudios previos de los estudiantes participantes en esta investigación, se reconoce que ellos han desarrollado competencias gráficas y algebraicas sobre la función cuadrática, propias al tratamiento de un mismo registro, pero también sobre la correspondencia semiótica entre las variables visuales del registro gráfico y la unidades simbólicas pertinentes del registro algebraico, con mayor énfasis: la concavidad y su relación con el coeficiente a del término cuadrático; la intersección de la curva con el eje y y su relación con el valor de c, el término independiente.

3.3. Análisis de datos

El análisis de las respuestas a cada una de las tareas del cuestionario se centró en identificar la asociación que hicieron los estudiantes entre las tres unidades simbólicas del registro algebraico (a, b y c) y sus respectivas variables visuales (concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección de la curva con el eje y) del registro gráfico. Esto a fin de indagar el reconocimiento cualitativo que hacen los estudiantes sobre dicha asociación. Así, si en las 6 tareas la asociación entre las tres unidades simbólicas y sus respectivas variables visuales era correcta, se asumiría que el reconocimiento era consistente, en el sentido de mantener el reconocimiento en las 6 tareas. Esto es, asociar correctamente el valor de la variable visual con su respectiva unidad simbólica en todas las tareas (las 6 tareas). Asociar de manera errónea una variable visual con su respectiva unidad simbólica en, al menos una tarea, sería categorizado como un reconocimiento inconsistente, en el sentido de que no se mantuvo dicho reconocimiento.

Los datos se analizaron utilizando una estadística descriptiva, basada en la interpretación de tablas. La interpretación es una lectura cuantitativa y cualitativa de los datos. Cuantitativa porque muestra las frecuencias de los reconocimientos identificados; cualitativa porque se plantea una descripción más allá de los datos en las tablas, es decir lo que esos reconocimientos pueden significar según las variables visuales y unidades simbólicas propuestas en el marco.

4. RESULTADOS

4.2. Reconocimiento de la asociación entre las unidades simbólicas a, b y la concavidad y posición del vértice respecto del eje y

En la tabla 4 se presentan las asociaciones que se identificaron sobre las unidades simbólicas a y b. Las cuales se han organizado en dos grandes casos relacionados con la asociación de la unidad simbólica a:

Caso 1. Estudiantes que en no todas las 6 tareas asociaron correctamente la concavidad con la unidad simbólica a. Es decir, fallaron en al menos una tarea. En este caso se tienen 70 estudiantes.

Caso 2. Estudiantes que en las 6 tareas asociaron de manera correcta la concavidad con la unidad simbólica a. En este caso se tienen 74 estudiantes.

Cada uno de los dos casos está vinculado con 5 asociaciones de la unidad simbólica b. Por ejemplo, la asociación número 1 de la unidad simbólica b, en el caso 1, significa que los estudiantes no fueron consistentes en asociar correctamente la concavidad de la parábola con el signo del coeficiente a, pero sí fueron consistentes en asociar la unidad simbólica b con las posiciones derecha, sobre e izquierda del vértice de la parábola respecto del eje y. La asociación número 1 de la unidad simbólica b, en el caso 2, significa que los estudiantes fueron consistentes en asociar de manera correcta tanto la concavidad con su unidad simbólica a, como la posición del vértice con su unidad simbólica b. Esta asociación número 1, caso 2, ejemplifica a los únicos 18 estudiantes (12.5%) que parecen reconocer que tanto la unidad simbólica a, como la unidad simbólica b, se relacionan con la posición del vértice respecto del eje y. Sin embargo, como se verá más adelante, dicho reconocimiento parece estar basado en otras asociaciones.

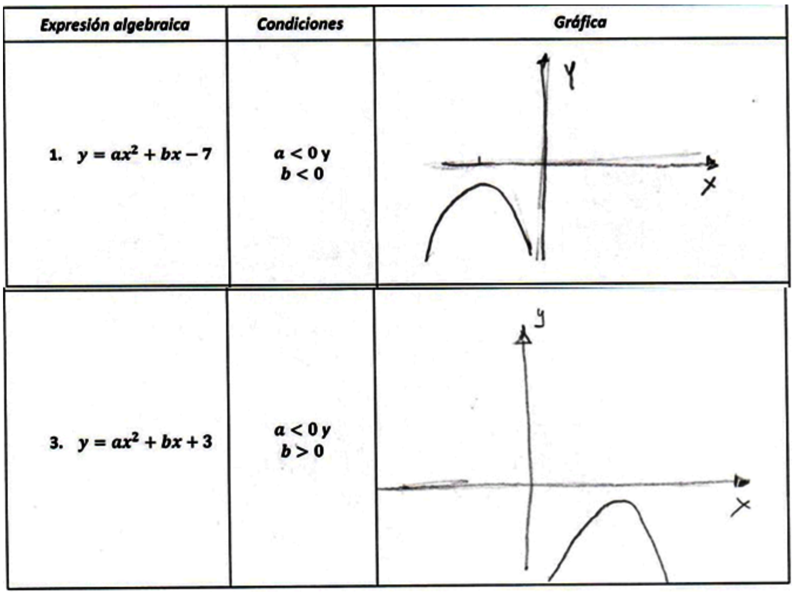
Los 126 estudiantes restantes (87.5%) no fueron consistentes en asociar de manera correcta la concavidad ni la posición del vértice respecto del eje y. La asociación 1 de la unidad simbólica b en el caso 1, muestra inconsistencia en la unidad simbólica a; las asociaciones números 2, 3, 4, 5 y 6 de la unidad simbólica b, en el caso 1, muestran un reconocimiento inconsistente en ambas unidades simbólicas; las asociaciones números 2, 3, 4, 5 y 6, en el caso 2, muestran inconsistencia en la unidad simbólica b.

Asociación de la unidad simbólica b		**Asociación de la unidad simbólica a**	
		Caso 1 (No en todas las tareas)	**Caso 2** (En todas las tareas)
1	En todas las tareas asocian $b > 0$, $b = 0$ y $b < 0$.	8	18
2	En todas las tareas asocian $b > 0$ y $b < 0$, pero en no todas asocian $b = 0$.	3	4
3	En todas las tareas asocian $b = 0$, pero en no todas asocian $b > 0$ y $b < 0$.	17	19
4	En no todas las tareas asocian $b > 0$, $b = 0$ ni $b < 0$.	41	25
5	*En todas las tareas asocian $b > 0$ y $b < 0$, en no todas reconocen $b = 0$.	1	0
6	*En todas las tareas asocian $b > 0$, $b = 0$ y $b < 0$.	0	8
Totales		70	74

Tabla 4. Asociación de las unidades simbólicas a y b.
**El reconocimiento es consistente, pero se cumple sólo si a > 0.*

No se puede afirmar que los 18 estudiantes que asociaron correctamente las unidades simbólicas a y b en todas las tareas conozcan la relación que guardan estas dos unidades para determinar la posición del vértice respecto del eje y. En otras palabras, no es posible saber si estos estudiantes usaron conscientemente las unidades simbólicas de los parámetros a y b para determinar la posición del vértice respecto del eje y. Suponemos que estos estudiantes asociaron el valor de la unidad simbólica b con los valores numéricos del eje horizontal: negativos (a la izquierda, $b < 0$) y positivos (a la derecha, $b > 0$), independientemente de la concavidad. Esta suposición se fundamenta en que, por un lado, en los libros de texto que se utilizan en la escuela, el estudio del desplazamiento horizontal de la parábola no se analiza para cuando $a < 0$, sólo se estudia para cuando $a > 0$. Por ello, los 8 estudiantes de la asociación número 6 y un estudiante de la número 5, en todas las tareas asociaron la unidad $b > 0$ con un desplazamiento a la izquierda y $b < 0$ con un desplazamiento a la derecha, pues esto sucede cuando $a > 0$. Por otro, como se muestra en los siguientes figuras, 3 de los 18 estudiantes en las tareas 1 y 3 del registro A-G dibujaron la posición del vértice respecto del eje y tomando en cuenta la unidad simbólica de c y no la de b.

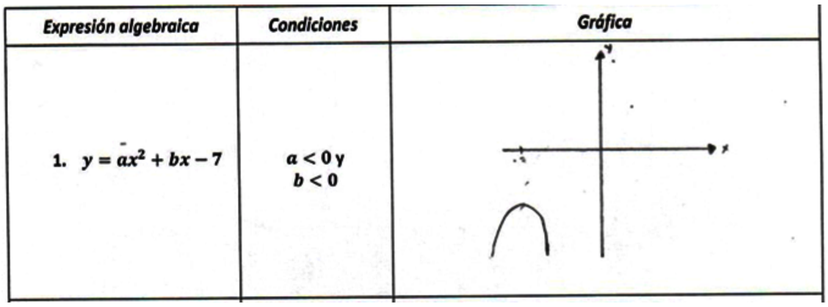
En la figura 8, se muestran las parábolas trazadas por uno de los 18 estudiantes, quien asoció correctamente la concavidad y la posición del vértice respecto del eje y. Sin embargo, en la tarea 1, se observa que la posición del vértice a la izquierda del eje y coincide con $c < 0$, hay una marca representando el valor de c. De igual forma, en la tarea 3, la posición del vértice coincide con $c > 0$.



Expresión algebraica	Condiciones	Gráfica
1. $y = ax^2 + bx - 7$	$a < 0$ y $b < 0$	
3. $y = ax^2 + bx + 3$	$a < 0$ y $b > 0$	

Figura 8. Reconocimiento consistente de a y b (estudiante No. 92).

El siguiente ejemplo, también proviene de los 18 estudiantes, en este caso, el estudiante sólo asoció el parámetro c con un desplazamiento horizontal en la tarea 1. En esta figura se observa que el estudiante señala el punto -7 sobre el eje horizontal.



Expresión algebraica	Condiciones	Gráfica
1. $y = \bar{a}x^2 + bx - 7$	$a < 0$ y $b < 0$	

Figura 9. Reconocimiento consistente de a y b (estudiante No. 117).

Se puede observar que estos dos estudiantes no lograron dibujar una parábola que intersectara en algún punto al eje y. Lo cual confirma que el reconocimiento de que las unidades simbólicas $ab > 0$ ($a < 0$ y $b < 0$) o $ab < 0$ ($a < 0$ y $b > 0$) se asocian con la posición del vértice a la izquierda o a la derecha, respectivamente, en realidad coincidió con el reconocimiento de la asociación entre la constante c con el eje horizontal.

4.2. Reconocimiento de la asociación entre la unidad simbólica c y la intersección de la curva con el eje y

En el reconocimiento de la asociación entre la unidad simbólica c y la intersección de la curva con el eje y se identificaron 4 casos. El caso 1 es un ejemplo de un reconocimiento consistente de dicha unidad simbólica, ya que en todas las tareas se asociaron correctamente el signo de c ($c > 0, c = 0, c < 0$) y su respectiva variable visual en la gráfica. Los casos 2 y 3, son ejemplos de tareas cuyo reconocimiento no fue consistente porque la asociación de alguno de los signos de c no se corresponde con la variable visual que muestra la gráfica. El caso 4 es totalmente contrario al caso 1, es decir, en no todas las tareas se asoció correctamente el signo de c con las variables visuales mostradas. Así pues, los casos 2, 3 y 4 muestran que 138 estudiantes (aproximadamente 96%) fallaron en el reconocimiento de la correspondencia semiótica que implica la unidad simbólica c.

Casos	Asociación de la unidad simbólica c	Frecuencia
1	En todas las tareas asocian $c > 0$, $c = 0$ y $c < 0$.	6
2	En todas las tareas asocian $c > 0$ y $c < 0$, pero no reconocen $c = 0$.	2
3	Asocian $c = 0$, pero no en todas las tareas asocian $c > 0$ y $c < 0$.	26
4	No en todas las tareas asocian $c > 0$, $c = 0$ y $c < 0$.	110

Tabla 5. Asociación de la unidad simbólica c.

En la tabla 6 se ilustran las respuestas de uno de los 6 estudiantes que en todas las tareas asoció correctamente $c > 0$, $c = 0$ y $c < 0$ con sus respectivas variables visuales en la gráfica. Aunque el estudiante en todas las tareas reconoce correctamente esa asociación, se observa cómo en la tarea 1 traza una parábola cóncava hacia arriba cuando la condición es $a < 0$ y ubica la posición del vértice del lado derecho del eje vertical cuando debe estar del lado izquierdo, pues $b < 0$. La parábola trazada en la tareas 2 y 3 cumplen con el reconocimiento de las tres variables visuales: concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección de la curva con el eje y. Es importante resaltar que este alumno sólo falló en la tarea 1 del registro A-G; en las tres tareas del registro G-A asoció correctamente la relación que guardan las unidades simbólicas a, b y c respecto de 0, según las variables visuales de las parábolas trazadas.

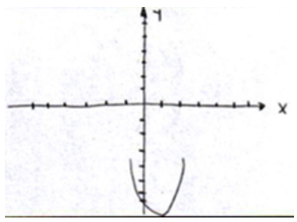
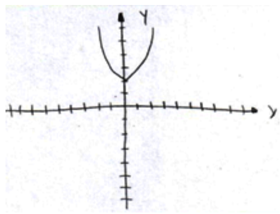
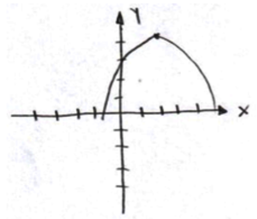
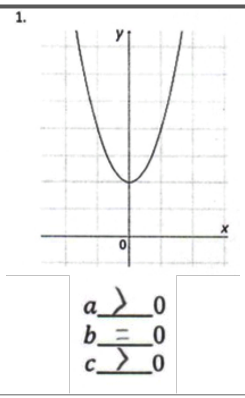
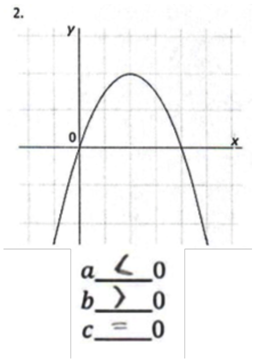
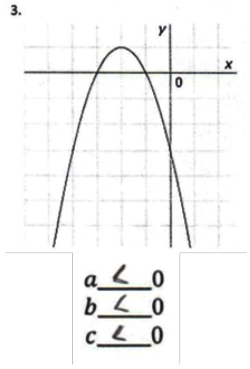
Tarea 1 $\boldsymbol{y = ax^2 + bx - 7}$; $\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b < 0}$	Tarea 2 $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$; $\boldsymbol{a > 0, b = 0}$ y $\boldsymbol{c > 0}$	Tarea 3 $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + 3}$; $\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b > 0}$
		
Tarea 1	**Tarea 2**	**Tarea 3**
		

Tabla 6. Reconocimiento consistente de c (estudiante No. 121).

Cabe recordar que la tarea 1 del registro A-G y la tarea 3 del registro A-G implican las mismos valores de las unidades simbólicas ($a < 0$, $b < 0$ y $c < 0$). El estudiante falló en la tarea 1 y acertó en la tarea 3, lo cual ejemplifica un reconocimiento inconsistente cuando se cambia el sentido del registro.

En los siguientes ejemplos se ilustran cuáles fueron las asociaciones de mayor frecuencia que presentaron los estudiantes que en no todas las tareas asociaron correctamente la unidad simbólica c con la intersección de la curva con en el eje y.

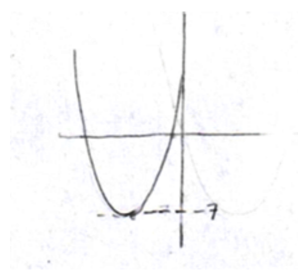
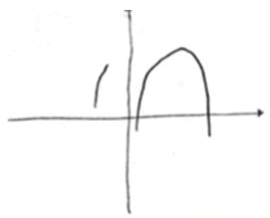
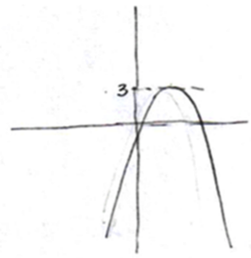
<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Asociación de la unidad simbólica c con un desplazamiento arriba-abajo del eje vertical, pero la parábola trazada no corta al eje en c.</th><th colspan="3">Frecuencia</th></tr>
<tr><th>Tarea 1
52</th><th>Tarea 2
2</th><th>Tarea 3
44</th></tr>
<tr><td>Tarea 1
$y = ax^2 + bx - 7$;
$a < 0$ y $b < 0$</td><td>Tarea 2
$y = ax^2 + bx + c$;
$a > 0, b = 0$ y $c > 0$</td><td colspan="3">Tarea 3
$y = ax^2 + bx + 3$;
$a < 0$ y $b > 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Tabla 7. Ejemplo de asociaciones de la unidad simbólica c (estudiante No. 128, tareas 1 y 3; estudiante No. 86, tarea 2).

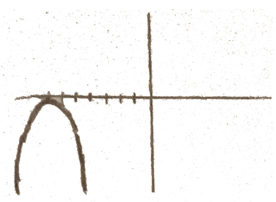
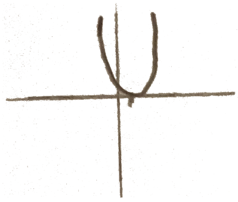
<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Asociación de la unidad simbólica c con un desplazamiento (derecha-izquierda) de la curva sobre el eje x.</th><th colspan="3">Frecuencia</th></tr>
<tr><th>Tarea 1
10</th><th>Tarea 2
8</th><th>Tarea 3
6</th></tr>
<tr><td>Tarea 1
$y = ax^2 + bx - 7$;
$a < 0$ y $b < 0$</td><td>Tarea 2
$y = ax^2 + bx + c$;
$a > 0, b = 0$ y $c > 0$</td><td colspan="3">Tarea 3
$y = ax^2 + bx + 3$;
$a < 0$ y $b > 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Tabla 8. Ejemplo de asociaciones de la unidad simbólica c (estudiante No. 23).

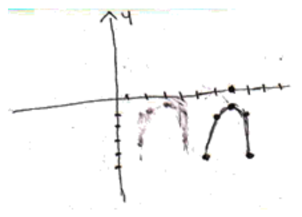
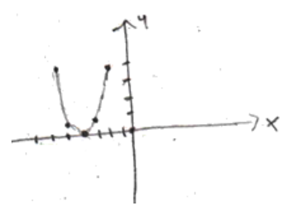
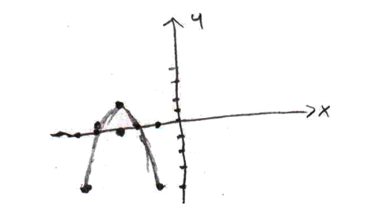
<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Asociación de la unidad simbólica c con un desplazamiento (derecha-izquierda) de la corva sobre el eje x tomando el inverso de c: $-c$.</td><td colspan="3">Frecuencia</td></tr>
<tr><td>Tarea 1
7</td><td>Tarea 2
2</td><td>Tarea 3
9</td></tr>
<tr><td>Tarea 1
$\boldsymbol{y = ax^2 + bx - 7}$;
$\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b < 0}$</td><td>Tarea 2
$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$;
$\boldsymbol{a > 0, b = 0}$ y $\boldsymbol{c > 0}$</td><td colspan="3">Tarea 3
$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + 3}$;
$\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b > 0}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Tabla 9. Ejemplo de asociaciones de la unidad simbólica c (estudiante No. 70).

En la siguiente tabla se resumen las asociaciones de mayor frecuencia cuando el registro de inicio es el gráfico.

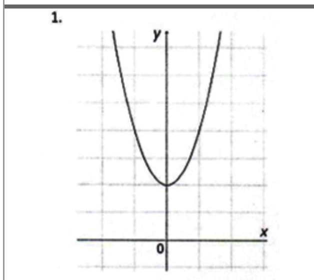
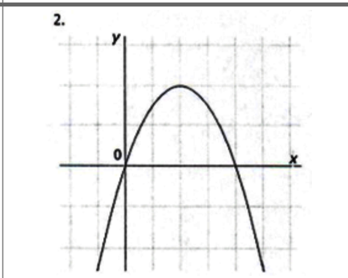
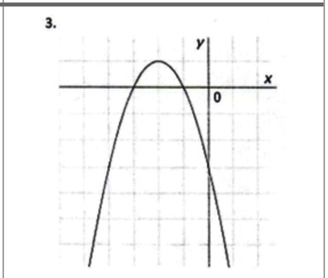
Tarea 1	**Tarea 2**	**Tarea 3**
		
31 estudiantes asociaron la posición del vértice sobre el eje $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{b = 0}$) con $\boldsymbol{c = 0}$.	98 estudiantes asociaron la intersección de la curva en el origen ($c = 0$) con $c > 0$ o $c < 0$.	71 estudiantes asociaron la intersección de la curva abajo ($c < 0$) del origen con $c > 0$.

Tabla 10. Asociaciones de mayor frecuencia de la unidad simbólica c en el registro G-A.

En la tarea 1, los 31 estudiantes parecen confundir la posición del vértice de la parábola ($b = 0$) sobre el eje y con la intersección de la curva en el origen ($c = 0$). Cuando la curva intersecta al eje y en el origen (tarea 2), 98 estudiantes no lograron asociarlo con $c = 0$. En el caso de la tarea 3, aproximadamente la mitad de los estudiantes asociaron la intersección de la curva que pasa por abajo del origen con la unidad simbólica $c > 0$.

No hubo ningún caso que mostrara un reconocimiento consistente de la asociación entre las tres unidades simbólicas (a, b y c) con sus respectivas variables visuales. La correspondencia semiótica (asociación) entre la variable concavidad y la unidad simbólica a fue la que mayor reconocimiento tuvo, aproximadamente 51% de los estudiantes fueron consistentes en reconocer esa correspondencia. La correspondencia entre la posición del vértice respecto del eje y y la unidad simbólica b fue reconocida de manera consistente por aproximadamente un 18% de los estudiantes, independientemente de la relación entre b y a. La correspondencia semiótica entre la intersección de la curva con el eje y y la unidad simbólica c, fue la que menor reconocimiento tuvo, aproximadamente el 4% de los estudiantes la reconocieron consistentemente.

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

En el presente estudio se investigó la asociación que hacen los estudiantes entre las unidades simbólicas (a, b y c) del registro gráfico de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) y sus rescpectivas variables visuales del registro gráfico. Dicha asociación se categorizó como un reconocimiento consistente si la asociación se hacía de manera correcta en todas las tareas propuestas; inconsiste, si la asociación fallaba en al menos una tarea. Los resultados presentan evidencias de que dicho reconocimiento tiende a ser más inconsistente. Estas inconsistencias se pueden entender en las distintas maneras en que los estudiantes asociaron las unidades simbólicas con sus respectivas variables visuales:

– A un mismo signo de una unidad simbólica, el estudiante asocia valores distintos a la variable visual correspondiente. Por ejemplo, asociar a la unidad simbólica $a < 0$ parábolas cóncavas hacia abajo y hacia arriba.

– A dos unidades simbólicas distintas, el estudiante asocia un mismo valor de la variable visual correspondiente. Por ejemplo, los estudiantes que tanto para $b < 0$, como para $b > 0$ trazaron parábolas con posición del vértice de un mismo lado del eje y.

– A dos valores distintos de variables visuales, el estudiante corresponde un mismo signo de la unidad simbólica. Por ejemplo, estudiantes que en dos parábolas con posición del vértice del lado derecho e izquierdo, respectivamente, les asocian el mismo signo de la unidad simbólica b. Así como, estudiantes que asociaron a dos parábolas con valores distintos de la variable intersección de la curva con el eje y (una intersección arriba del origen y otro abajo) el mismo signo de la unidad simbólica c.

– A una misma variable visual, el estudiante asocia unidades simbólicas distintas. Por ejemplo, los estudiantes que, a dos parábolas cóncavas hacia abajo, les asocian $a < 0$ y $a > 0$, respectivamente.

- La correspondencia semiótica entre las unidades simbólicas y variables visuales difiere cuando se cambia de registro de inicio. Por ejemplo, los estudiantes que en la tarea 2 del registro A-G trazaron correctamente una parábola cóncava hacia arriba porque $a > 0,$ la posición del vértice sobre el eje y porque $b = 0$ y la curva intersecta al eje vertical arriba del origen porque $c > 0$, pero en la tarea 1 del registro G-A, cuya parábola presentaba las mismas variables visuales (cóncava hacia arriba, posición del vértice sobre el eje y y la curva intersecta al eje vertical arriba del origen) le asociaron unidades simbólicas diferentes. Por ejemplo, asociaron la intersección de la curva arriba del origen con $c = 0$. También sucedió lo contrario, estudiantes que no trazaron correctamente una parábola en la tarea 1 del registro A-G y sí asociaron correctamente las unidades simbólicas de la parábola en la tarea 3 del registro G-A.

Además de las inconsistencias anteriores, es importante señalar que el reconocimiento que muestran los estudiantes no es completo si se considera que no hubo un caso en que se reconociera correctamente la asociación de las tres unidades simbólicas con sus respectivas variables visuales. Por ejemplo, el estudiante puede reconocer correctamente la asociación entre la constante a y la concavidad, pero no asocia la constante b con la posición del vértice respecto del eje y o asociar (o no) la unidad simbólica c con el corte de la curva en el eje y. En la propuesta que aquí se plantea, el reconocimiento de la asociación o correspondencia semiótica que guardan las unidades simbólicas a y b es importante porque la posición del vértice respecto del eje y depende no sólo de b, sino también de a.

Aun cuando los estudiantes habían estudiado previamente diferentes tratamientos de la función cuadrática, se reconoce en los resultados que ese estudio no garantiza que la correspondencia semiótica entre las variables del registro gráfico y las unidades simbólicas del registro algebraico de la función haya sido reconocida correctamente. En el estudio de Valero-Pérez (2015), se verificó que los estudiantes ante tareas como las de la figura 2 (sección 2.2.) logran ir de un registro a otro porque ellos son capaces de realizar algún tratamiento numérico. Sin embargo, al condicionar el uso de esos tratamientos, como se hizo en el presente estudio, la aprehensión global cualitativa se vuelve necesaria, pues les permite ir de un registro a otro tomando en cuenta sólo las reglas semióticas de correspondencia entre las unidades simbólicas del registro algebraico de la función cuadrática y las variables visuales del registro gráfico. En su lugar, la asociación que muestran los estudiantes parece deberse a una aprehensión icónica, por desplazamiento. Esto es un conocimiento acerca de la "traslación de funciones a través de los ejes", pues es uno de los temas que estudian y el cual se ejemplifica con la función cuadrática. Por ejemplo, suponemos que los estudiantes asocian el coeficiente b con un desplazamiento horizontal de la curva, pero no necesariamente identifican que eso es una variable visual pertinente para coordinar ambos registros. De igual forma, asocian el coeficiente c con un desplazamiento vertical, pero no necesariamente como una variable visual que representa la intersección de la curva con el eje y, de hecho, no logran representar dicha intersección cuando se les pide dibujar la parábola.

Consideramos que abordar el estudio de la función cuadrática en su forma general desde una aprehensión global cualitativa, como la que se presenta en este artículo, puede promover que el estudiante alcance a establecer la coordinación de los registros de representación semiótica de la función cuadrática, lo cual le permitirá tener un mayor conocimiento de dicha función.

BIBLIOGRAFÍA

BOUCIGUEZ M., IRASSAR L. Y SUÁREZ M. (2008), Análisis de estrategias: Un estudio de caso para la función cuadrática, *II REPEM-MEMORIAS,* 172-180.

CARRILLO C. (2014), *Matemáticas IV*, Veracruz, México: SEV.

CUELLAR J. (2012), *Matemáticas IV*, México: McGraw Hill.

DÍAZ M., HAYE E., MONTENEGRO F. Y CÓRDOBA L. (2013), Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas, *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*, 1-13, República Dominicana.

DUVAL R. (1988), Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **1**, 235-253.

DUVAL R. (1992), Gráficas y ecuaciones: La articulación de dos registros [Parra, B., Trad.]. En R. Cambray, E. Sánchez, y G. Zubieta (Eds.), *Antología en educación Matemática,* Ciudad de México, México: Departamento de Matemática Educativa, 125-139.

DUVAL R. (1998), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Ed. F. Hitt), 173-20, Grupo Editorial Iberoamericana, S. A. de C. V, México.

DUVAL R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

DUVAL R. (2004), *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Cali, Colombia: Universidad del Valle (Edición en castellano).

GARCÍA L., VÁZQUEZ R. E HINOJOSA M. (2004), Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería, *Ingenierías*, **VII.24**, 27-34.

GÓMEZ-BLANCARTE A., GUIRETTE R., Y MORALES-COLORADO F. (En prensa), Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la función cuadrática mediante el uso del *software* GeoGebra, *Educación Matemática*, México.

GUTIÉRREZ R., ARAUJO Y. Y PRIETO J. (2012), Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilzando GeoGebra, *Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*, 511-519, Uruguay.

GUZMÁN I. (1998), Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: Voces de estudiantes, *Revista Lationamericana de Investigación en Matemática Educativa,* **1.1***,* 5-21.

HUAPAYA E. (2012), *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*, Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima. Obtenido de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_maestria/HUAPAYA_GOMEZ_ENRIQUE_MODELACION.pdf

OAXACA J. Y VALDERRAMA M. (2000), Enseñanza de la función cuadrática, interpretando sus parámetros. Obtenido de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias/at05/PRE1178753682.pdf

OPAZO C., GRAJEDA J. Y FARFÁN R. (2014), Visualización de la función cuadrática, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1539-1546, CLAME, México.

RÍOS R. y CALLEJAS L. (2015), *Matemáticas I*, Veracruz, México: SEV.

SEP (2014), *Programa de estudios*. Obtenido de http://www.dgb.sep.gob.mx/

VALERO-PÉREZ R. (2015), *Dificultades por parte de alumnos de educación media superior y superior en la conversión de los resgistros algebraico y gráfico y viseversa : el caso de la función cuadrática.* Xalapa, Veracruz: Universidad Veracruzana. Tesis de Licenciatura.

REBECA GUIRETTE

guirette-saldana@gmail.com

ANA GÓMEZ-BLANCARTE,

Instituto Politécnico Nacional, CICATA-Legaria,

algomezb@ipn.mx

RICARDO VALERO-PÉREZ

ricval5692@gmail.com