José Carrillo, Miguel Montes, Luis C. Contreras et Nuria Climent

El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK

The teacher' knowledge from a perspective based on his specialization: MTSK

Abstract. This paper shows the conceptualization of an analytical model of mathematics teacher's specialised knowledge, which is based on the seminal work of Lee Shulman. In order to show the potential of the model, it is used here to analyze a particular case of a teacher of Spanish' Secondary Education. The analysis shows the intertwining between different features of the knowledge of the teacher, reflecting the integrated nature of that knowledge, allowing, at the same time, a work of decomposition and synthesis of it. That will allow us to manage the design of teachers' education, conducing also to a better understanding of mathematics teaching.

Résumé. En este artículo se mostrará la conceptualización de un modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas y su génesis inspirada en los trabajos seminales de Lee Shulman. Para mostrar la potencialidad del modelo, lo utilizamos para el análisis de un caso particular de un profesor de Educación Secundaria. Este análisis muestra la interrelación entre distintos aspectos del conocimiento del profesor, reflejo del carácter integrado de dicho conocimiento, pero a su vez permite una labor de descomposición y síntesis del mismo que nos facilita la intervención en la formación inicial del profesorado así como una mejor comprensión de la enseñanza de la matemática.

Mots-clés. MTSK, conocimiento del profesor de matemáticas, modelo analítico.

Introduction

La importancia del profesor como promotor del aprendizaje de sus alumnos es incuestionable. Diversas variables se ponen en juego cuando un profesor desarrolla su enseñanza en un aula (Pariès, 2010). En particular, la relevancia del conocimiento del profesor en su habilidad para fomentar el desarrollo del

La versión en Francés de este artículo se ha publicado en
ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 185 - 205.

conocimiento de sus alumnos es un hecho conocido (Kilpatrick, Swaford, Findell, 2001). Las múltiples facetas de conocimiento que un profesor puede poner en juego al planificar, desarrollar, y reflexionar sobre su acción en el aula, son un foco habitual de reflexión de la investigación en el área. Cabe, pues, plantearse qué conocimiento, propio de un profesor de matemáticas, puede ser útil para contribuir al aprendizaje, y, desde una perspectiva teórica, cómo podemos modelizar dicho conocimiento.

Durante los últimos treinta años, la discusión en educación matemática acerca de qué conocimiento puede ser útil para un profesor ha sido fructífera en modelos que aproximan las diferentes naturalezas de dicho conocimiento. Shulman (1986, 1987) introdujo la distinción entre conocimiento de la materia, conocimiento curricular y conocimiento didáctico del contenido, definiendo este último como:
« *the blending of content and pedagogy into an understanding of how topics, problems, or issues are organized, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction. Pedagogical content knowledge is the category most likely to distinguish the understanding of the content specialist from that of the pedagogue* » (1987, p. 8)

Este posicionamiento reconoce el carácter intrínsecamente profesional de algunos elementos del conocimiento poseído y movilizado por los profesores como parte de su actividad docente. En este sentido, Chevallard (1986) introduce la idea de transposición didáctica, en la que el profesor es el agente de la transformación del contenido desde un registro académico a uno escolar, transformación que requiere un conocimiento profesional específico de la profesión.

Posteriores esfuerzos trataron de generar refinamientos en esta distinción en componentes o subdominios de conocimiento del profesor tomando en cuenta la diferencia entre la matemática académica y la matemática escolar (Bromme, 1994), las diferentes situaciones en las que se pone en juego el conocimiento (Rowland, Turner, Thwaites, & Huckstep, 2005), la complejidad de dicho conocimiento y su desarrollo (Davis, & Simmt, 2006), o la especificidad del conocimiento del profesor en contraposición con otros profesionales usuarios de la matemática (Ball, Thames & Phelps, 2008). Asimismo, existen aproximaciones en las que se ha discutido la formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria, en las que el conocimiento es un elemento subyacente a la discusión acerca de los tipos de actividades de formación de profesores (Chevallard, & Cirade, 2006).

Los objetivos de estos modelos han ido ligados a discutir y poner de relieve los diferentes elementos de conocimiento que un profesor requiere para desarrollar su tarea profesional en relación con la enseñanza de una materia, centrándose de forma especial en la actividad de aula.

En este artículo presentamos un modelo de *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés de Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013) que aborda, desde una perspectiva analítica, el conocimiento que el profesor usa y activa en su labor docente profesional en relación con la enseñanza de la matemática, contemplando esta desde una perspectiva amplia, abarcando preparación de clases, reflexión tras las mismas, y la propia actividad de aula, asumiendo la naturaleza compleja, dinámica y tácita de dicho conocimiento (Ponte, 1994).

1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Cuando la maestra de quinto curso de Educación Primaria del estudio de Barrera, Liñán, Muñoz Catalán y Contreras (2016) trabaja con sus alumnos la posición relativa de dos rectas, surgen en al aula dos situaciones para cuya gestión parece razonable un conocimiento que va más allá del que se le suele suponer a un maestro de ese nivel. La primera de esas cuestiones atañe al concepto de distancia entre dos rectas, que la maestra utiliza de forma intuitiva para definir cuándo dos rectas son paralelas; la segunda se refiere a la pertinencia de considerar los casos de rectas coplanarias o no coplanarias a la hora de estudiar posiciones relativas.

Para la primera situación la maestra dibuja en la pizarra dos segmentos paralelos, haciendo un gesto ostensible de su continuidad infinita, y paralelos a su vez a la base de la pizarra, señalando (sin dibujar) la distancia entre dos puntos (sin especificar que el segmento que los une es perpendicular a ambas rectas), con varias parejas de puntos, como una distancia (intuitivamente) constante que, a su vez, caracterizaría a dos rectas paralelas.

La segunda situación surge por la intervención de una alumna que, usando sus dos dedos índices, separados y con direcciones diferentes, cuestiona acerca del paralelismo de ambos (de las rectas que los contienen).

Una visión simplificada del conocimiento (de índole matemático) del profesor para gestionar estas situaciones permite identificar como suficiente el conocimiento acerca de las posiciones relativas de dos rectas, en un mismo o en distinto plano, y el conocimiento del concepto de distancia. Sin embargo, el conocimiento que permitiría una gestión apropiada de ambas situaciones incluye también aspectos intrínsecamente relacionados con la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje. Así, parece necesario conocer que las distintas formas de dibujar los segmentos (o de representar las rectas) tienen implicaciones en la comprensión de los estudiantes, entre otras cosas porque la idea de distancia que han podido captar los alumnos en el dibujo realizado por la maestra puede no tener asociada la idea de perpendicularidad a ambos segmentos (sino un segmento vertical que los une), al no ser el ejemplo utilizado transparente (Lesh, Behr, & Post, 1987) acerca de la idea de distancia. Por otro lado, cabe plantear la discusión acerca de la pertinencia o no de abordar en quinto curso de Primaria las posiciones relativas de dos rectas solo en el caso de las coplanarias o, por el contrario, tratarlo también en otros casos, por señalar dos aspectos de las situaciones anteriores.

Cuando Lee Shulman (1986) denominó « paradigma perdido » (p.6) al enfoque del conocimiento del profesor en relación con el propio contenido que enseña, estaba poniendo de relieve que para "gestionar las clases, organizar y estructurar las actividades, planificar las lecciones, formular preguntas o valorar la comprensión de sus estudiantes" (p.8), hay un conocimiento centrado en el contenido, diferente del conocimiento pedagógico general, que es preciso considerar.

No es nuevo centrar la atención en el *conocimiento sobre el contenido* que se enseña, de hecho Shulman (1986) advierte que en el movimiento pendular que ha caracterizado los paradigmas anteriores, el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico, por separado, han sido protagonistas. Lo novedoso es la forma en que detalla la esencia de ese conocimiento del contenido, no poniendo en discusión solamente la cantidad de ese conocimiento, ni siquiera la distinción entre el conocimiento matemático formal y el conocimiento matemático escolar, sino, y sobre todo, enfatizando sus estructuras sustantiva y sintáctica (y cita a Schwab, 1978). Para Shulman, lo importante del conocimiento sustantivo del contenido es ir más allá de los hechos o conceptos de un dominio; es contemplar la « variedad de formas en la que se organizan los conceptos y principios básicos de esos hechos y conceptos » (p.9). El conocimiento sintáctico, por su parte, se refiere al conjunto de formas que se utilizan para construir o validar el conocimiento, las reglas que se utilizan para esa construcción, algo así como su propia gramática y sin cuyo concurso el profesor solo podría mostrar a los estudiantes esas verdades, sin poder argumentar por qué lo son.

El *conocimiento didáctico del contenido*, por otro lado, puede considerarse una aportación revolucionaria en su tiempo, rompiendo con el movimiento pendular y caminando hacia una amalgama entre el contenido y la pedagogía, o, como el mismo Shulman (1986) dice, yendo « más allá del conocimiento del contenido *per se* hacia una dimensión del conocimiento del contenido para la enseñanza » (p.9); es todo aquello que permite trazar puentes entre el conocimiento del contenido del estudiante y el que el profesor tiene, y que implica el conocimiento acerca de diferentes formas para representar dichos contenidos, ejemplos y analogías, diferentes formas de explicarlo… además de las razones que hacen que un determinado contenido sea más difícil para los estudiantes, las concepciones erróneas que estos pueden presentar, lo que es o no adecuado para niños de una determinada edad, las estrategias alternativas que los estudiantes suelen utilizar para resolver problemas, por ejemplo.

Finalmente, la idea de *conocimiento curricular* es también relevante, dado que va más allá del mero conocimiento incluido en las normativas educativas locales o nacionales, considerando también conocimiento sobre la variedad de material instruccional disponible en relación con los programas educativos que emanan de esas normas.

Todo ello nos sitúa ante un conocimiento que permite al profesor ver el contenido como objeto de enseñanza y aprendizaje y que llama nuestra atención sobre la importancia de conocer el contenido de forma sustancialmente diferente de como se había pensado hasta ese momento. Nosotros lo hemos denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, *et al*., 2013), entendiendo que se trata de un conocimiento que es específico para el profesor y que no sería de utilidad ni para otros profesionales que utilizan la Matemática ni para otros profesionales de la enseñanza.

El modelo MTSK asume varios elementos que fundamentan su conceptualización, y que, a su vez, muestran la perspectiva desde la que está desarrollado. Estos son: la naturaleza especializada del conocimiento del profesor, la perspectiva eminentemente interpretativa (no evaluativa) desde el que se desarrolla, y el enfoque centrado en la matemática.

La actividad profesional de 'profesor de matemáticas' requiere de diferentes habilidades y conocimientos matemáticos (Ruiz-Olarría, & Sierra, 2011) que la dotan de especificidad como profesión. En particular, la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas se considera, desde la perspectiva que aquí se presenta, derivada de la naturaleza profesional del uso del mismo. Esto supone un cambio de enfoque frente a previas aproximaciones, en las que el conocimiento se consideraba especializado cuando era exclusivo del profesor (Ball, *et al*., 2008). Así, se asume que el conocimiento del profesor será especializado al ser conocimiento útil en contextos de enseñanza y aprendizaje, en la línea de lo propuesto por Schoenfeld (2010). Asimismo, el foco de este modelo es el conocimiento propio de un docente cuya actividad profesional está ligada a la enseñanza de las matemáticas, con lo que sólo forman parte de la conceptualización aquellos elementos en los que el contenido matemático tiene relevancia. Por ejemplo, aspectos ligados a la gestión del aula, propios de un conocimiento pedagógico general, no se tienen en cuenta, asumiendo sin embargo su relevancia. Además, estamos centrándonos en el profesor en relación con su toma de decisiones relativa directamente a la enseñanza de los contenidos matemáticos. Hay muchos otros elementos que intervendrán en esa propia toma de decisiones y en otros aspectos del papel del profesor que no se relacionan con el contenido matemático (como sus consideraciones sobre el contexto cultural y social en el que se desarrolla su labor, sus valores o su visión de la escuela y su papel en esta) y somos conscientes de que escapan de lo que aquí tratamos.

El paradigma desde el que se desarrolla el modelo, y, por tanto, desde el que se realiza la aproximación al conocimiento profesional, es interpretativo, vinculado a comprender la naturaleza del conocimiento puesto en juego por el profesor, y cómo se articulan las diferentes componentes del mismo. Esto conlleva el hecho de que no se haya enfocado la corrección o no de dicho conocimiento a la hora de construir el modelo, o una descripción de cómo debería ser dicho conocimiento. Esto no significa que no pueda usarse el modelo con propósitos evaluativos, como sucede, por ejemplo, en su aplicación en la formación inicial del profesorado, en cuyo contexto, evidentemente, adquiere sentido contrastar los conocimientos de los futuros profesores con una propuesta de conocimientos deseables.

La figura 1 muestra el modelo MTSK con sus dominios y subdominios. MTSK se compone de dos de los dominios del modelo de Shulman, el dominio matemático (MK) y el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK), en uno de cuyos subdominios (el del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas - KMLS), hemos incluido el conocimiento curricular de Shulman; y considera, además, las concepciones y creencias del profesor acerca de la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje como elemento que permea todo el conocimiento.

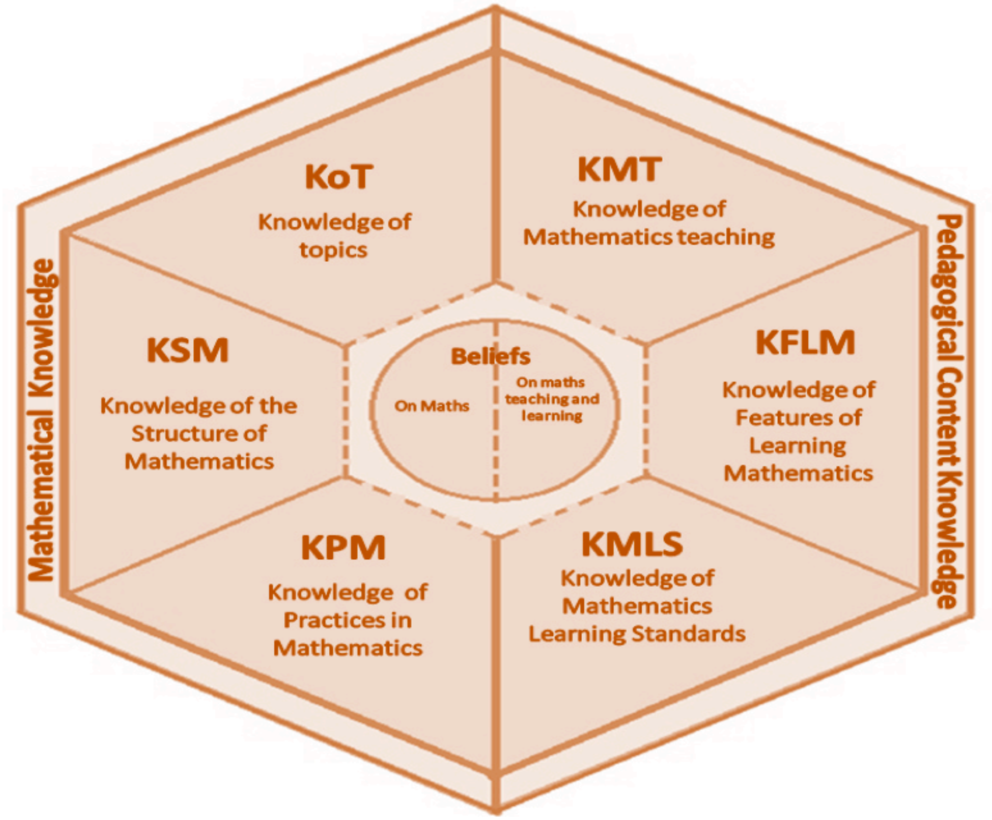

Figura 1: Modelo MTSK (extraído de Carrillo, *et al.*, 2013)

Los subdominios del dominio matemático (MK) están en gran parte inspirados en la idea de Ma (1999) de « conocimiento profundo de la matemática fundamental », como un tipo de conocimiento que conecta, estructura y es longitudinalmente coherente en relación con las ideas matemáticas nucleares. El primero de los subdominios que se incluye es el conocimiento de los temas (KoT), entendiéndolo como un conocimiento disciplinar que incluye la fenomenología y aplicaciones de un contenido, los procedimientos, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, y los diferentes registros de representación.

El conocimiento de conexiones es para nosotros la esencia del conocimiento de la estructura matemática (KSM), que permite disponer de una visión de conjunto del conocimiento matemático, con sus conexiones de simplificación o complejización (que permiten ver tanto un contenido elemental desde una perspectiva avanzada, como un conocimiento avanzado desde una perspectiva elemental), las conexiones auxiliares (que permiten hacer un uso instrumental de un concepto o procedimiento en el trabajo con otro contenido), y las conexiones transversales (que se refieren a ideas matemáticas que enlazan varios núcleos de contenidos).

Por otro lado, la estructura sintáctica de Shulman forma parte de nuestro conocimiento de la práctica matemática (KPM), que consiste en el conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático, incluyendo aspectos de la comunicación, la argumentación y la demostración matemáticas, así como el conocimiento sobre qué es definir y qué características debe tener un enunciado matemático (definiciones, proposiciones…), el conocimiento de procesos asociados a la resolución de problemas (heurísticos) y el de otras prácticas del quehacer matemático (como la modelización).

Los subdominios y categorías relativos al Conocimiento Didáctico del Contenido están estrechamente ligados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. La idea de amalgama de Shulman es potente en la medida en que nos hace ver que no supone una mera yuxtaposición de saberes.

Forman parte del mismo el conocimiento de recursos materiales o virtuales, incluidos los diseñados por él mismo, en cuanto a la potencialidad de los mismos y las actividades matemáticas que encierran, el conocimiento de estrategias de enseñanza, técnicas, tareas y ejemplos; ambos son parte de lo que hemos denominado conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que se completa con el conocimiento de teorías personales o formales de enseñanza.

Otro aspecto que se muestra de utilidad es el conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, que incluye el conocimiento del profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Junto a ella, situamos el conocimiento sobre fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje, que aúna conocimientos sobre errores, obstáculos, dificultades y capacidades potenciales de los alumnos vinculados a la matemática en su conjunto o a temas específicos. Es asimismo relevante el conocimiento de teorías personales o formales sobre el aprendizaje tanto de la matemática en general como de contenidos particulares, y el conocimiento sobre las expectativas e intereses que suelen tener los estudiantes en relación con los contenidos matemáticos. Todas ellas configuran el subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM).

Como se ha indicado antes, el profesor necesita conocer lo que está establecido que debe aprenderse del contenido matemático en cada nivel educativo. A este conocimiento normativo añadimos la relevancia del conocimiento acerca de las aportaciones que desde la educación matemática se han producido en este sentido, y que permiten al profesor la toma de decisiones sobre cómo organizar y secuenciar el contenido matemático en los diferentes niveles de escolaridad. En este subdominio, que hemos denominado conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), hemos diferenciado entre el conocimiento acerca de lo que se espera aprendan los alumnos y el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, ambos para un contenido concreto y un nivel concreto así como el conocimiento de secuenciaciones del contenido. Este subdominio mediará las decisiones del profesor acerca de lo que debería enseñarse, y de cómo esos contenidos deberían adaptarse a las necesidades intelectuales y culturales de sus estudiantes (Giroux, 1997).

En síntesis, el modelo MTSK considera la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas afectando a todos los dominios, no se trata de asociar el carácter especializado a un dominio o subdominio particular; por el contrario, la especialización procede del hecho de ser un conocimiento que se usa o necesita en y para la enseñanza de la matemática, independientemente de que este conocimiento o parte de él sea compartido por otras personas. Coherentemente, la división del dominio del conocimiento matemático es intrínseca a la propia matemática; y del mismo modo, dentro del dominio del conocimiento didáctico del contenido solo tiene cabida aquello en lo que la matemática sea influyente. Finalmente, la inclusión de las creencias y concepciones permite comprender mejor al profesor. Para su estudio, nos basamos en Carrillo y Contreras (1995), donde se establecen categorías e indicadores para las concepciones sobre la matemática y para las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. No obstante, creencias y concepciones no serán objeto de interés en este artículo.

A continuación, vamos a ejemplificar el MTSK en acción, aplicándolo al análisis del conocimiento de un profesor de Educación Secundaria. En el análisis, etiquetaremos como indicio los extractos que parecen indicar la existencia de un determinado elemento de conocimiento, pero que no muestran el respaldo suficiente como para considerarlos una evidencia.

2. El conocimiento especializado de Felipe

Joana, una niña de 15 años, se enfrentó al siguiente problema: *En el pueblo de Villaonuba se ha engalanado su plaza para las fiestas. Se han colocado cadenetas entre todos los vértices de la plaza, para lo cual se han usado 4 cajas de 15 cadenetas cada una, aunque han sobrado algunas. ¿Cuántos lados tiene la plaza de Villaonuba*?

Este problema fue planteado por Felipe, profesor de matemáticas en 3º de Educación Secundaria (alumnos de 14-15 años) en un centro educativo urbano ubicado en Huelva (España). El problema permite una aproximación geométrica (considerando que las cadenetas corresponden a los lados y diagonales del polígono correspondiente a la forma de la plaza) o aritmética. Por ejemplo, ejemplificando con valores del número de vértices se puede advertir que el número de cadenetas corresponde a la suma de naturales consecutivos desde uno menos que el número de lados, hasta uno. Además, se puede resolver por ensayo y error, probando con distintos números de lados hasta acercarse al número de cadenetas posible (entre 45 y 60, ambos excluidos), o buscando un patrón en el número de cadenetas necesarias en relación con el número de lados. La interpretación geométrica puede dar sentido a la aritmética. El problema potencia el establecimiento de conjeturas y la discusión sobre su validación.

El centro educativo en el que se sitúan las interacciones que aquí se describen es de nivel medio, tanto en relación con la capacidad económica, como en el nivel de competencia del alumnado. El grupo donde está Joana es heterogéneo, y Joana es una alumna de nivel medio, interesada y preocupada por aprender. Felipe lleva diez años en el centro, teniendo una experiencia docente total de 16 años. Es considerado buen profesional por sus compañeros y se muestra dispuesto a colaborar con la investigación, aunque no es posible grabar sus clases por la negativa de algunos padres. El grupo está compuesto por 14 alumnos y 16 alumnas, distribuidos en 6 grupos de 5. En el grupo de Joana están también David, Ana, Ester y Pedro. El ambiente de trabajo en el aula es bueno, y asimismo en el grupo de Joana.

Los alumnos ya han estudiado, entre otros contenidos matemáticos, ecuaciones de segundo grado y elementos de los polígonos, incluyendo la fórmula de obtención de la cantidad de diagonales de un polígono dado su número de lados, y están habituados a enfrentarse a problemas matemáticos, algunos de los cuales los abordan en grupo. Normalmente, cada grupo posee un miembro que actúa de portavoz en las puestas en común. Joana se muestra especialmente activa e implicada en la resolución del problema, por lo que atrae la atención de Felipe.

Apoyados en la planificación del profesor, la observación del aula y las entrevistas, realizamos un análisis del contenido (Bardin, 1998) para acercarnos a su conocimiento en relación con la enseñanza de la matemática con el propósito de comprenderlo. En dicho análisis, van emergiendo las categorías que componen cada uno de los subdominios anteriormente presentados.

Cuando leímos la planificación de la sesión, pensamos que el profesor había diseñado este problema con la intención de comprobar si sus alumnos eran capaces de poner en juego los contenidos abordados de un modo no mecánico, como él mismo nos confirmó al preguntarle por el objetivo del problema:

I (investigador): ¿Por qué eliges este problema?

F (Felipe[1]): Realmente, no es que elija el problema, lo diseño personalmente **{KMT: tareas; KoT: fenomenología y aplicaciones}**[2] para ver si mis alumnos son capaces de aplicar sus conocimientos de una forma no mecánica **{Concepciones: aprendizaje significativo}**[3]. Ellos han visto la fórmula de las diagonales [se refiere a la expresión $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$]; para su obtención se ha seguido un razonamiento que quiero ver si aplican ahora, es decir, si de verdad lo han entendido **{Concepciones: aprendizaje significativo}**. Los alumnos suelen hacer más o menos bien los problemas directos (doy los lados y calculan las diagonales), pero tienen más dificultades en los problemas inversos (doy las diagonales y pido los lados), mucho más cuando, de hecho, aquí eso no les basta **{KFLM: fortalezas y dificultades}**, pues necesitan sumar lados y diagonales [se refiere a que las cadenetas unen cada vértice con todos los demás vértices] **{indicio de KoT: procedimientos}**. Además, es un problema muy rico, con posibilidad de relacionar aspectos artiméticos y geométricos que puede servir de precursor del tema de sucesiones a través de la búsqueda del término general **{KSM, conexiones transversales y de complejización}.**

I: ¿Crees que tus alumnos están preparados para abordar este tipo de problemas que, no solo son inversos, sino que no disponen de una fórmula inmediata para aplicar?

F: Quizás no sea inmediato para ellos, probablemente cometan errores, pero el nivel de dificultad se corresponde con lo que se espera de ellos en este curso, al menos de un modo inicial **{KMLS: expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico}**. Yo creo, además, que algunos de mis alumnos resolverán bien el problema **{KMLS: nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar}**[4].

En el aula, los alumnos comenzaron trabajando en grupo. Felipe les dio el enunciado del problema y les dijo que lo leyeran cuidadosamente, lo pensaran un poco y luego se pusieran a discutir en cada grupo. Da la impresión de que Felipe

[1] Subrayamos la inicial del profesor para que sea más fácil diferenciar su intervención de la de sus alumnos en los fragmentos de interacción entre ellos.
[2] Se emplean los símbolos { y } para incluir el subdominio y categoría de MTSK asignados, escribiéndose en negrita.
[3] Aunque las concepciones no son el foco de este artículo, se incluirán para ofrecer una mejor comprensión del conocimiento del profesor.
[4] Obsérvese que, tanto en esta asignación, como en las demás, no se está evaluando si el conocimiento del profesor es correcto o no, tan solo se indica la categoría sobre la que se obtiene información.

sabe que en muchas ocasiones los alumnos no comprenden el enunciado **{KFLM: fortalezas y dificultades}**, de ahí que dé importancia a la lectura.

Al cabo de unos diez minutos, se establece una interesante discusión en el grupo de Joana (es el primer momento en el que se ponen a discutir sobre el problema, pues antes cada uno lo había enfrentado individualmente):

D (David): La solución es 12, la plaza de Villaonuba tiene 12 lados.

E (Ester): A mí no me sale 12.

A (Ana): A mí me sale decimal.

J (Joana): Decimal no puede ser.

P (Pedro): ¿Por qué?

J: Porque el número de lados no puede ser un número decimal.

D: Yo he puesto que el número de diagonales tiene que ser 60.

J: Pero 60 no puede ser, sobran algunas.

D: Sí, pero espera. He resuelto la ecuación $\frac{n(n-3)}{2} = 60$ y me da n=12.56. Entonces, como no puede ser decimal, la solución es 12.

A: A mí sale otro número decimal. Yo he hecho lo mismo que tú [David], pero he añadido el número de lados [$\frac{n(n-3)}{2} + n = 60$] y me sale 11.47.

Felipe observa la discusión y se percata de que David no comprende la resolución de Ana, por lo que decide intervenir:

F: Habéis igualado a 60 cosas distintas, ¿por qué? ¿Qué es lo que se ajusta al enunciado del problema?

J: Profesor, yo creo que la solución de David valdría si no hubiera cadenetas por el contorno de la plaza. Como dice que se han colocado cadenetas entre todos los vértices, no pueden ser sólo las diagonales.

Ante la cara de incomprensión de David, Felipe le propone que haga el dibujo de una plaza de menos lados, por ejemplo de menos de 6 lados, y dibuje las cadenetas en este caso **{KPM: heurísticos; KMT: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza de un contenido matemático**, en este caso referido a estrategias para ofrecer ayudas al alumnado**}**. David dibuja una plaza pentagonal.

D: ¡Ah, es verdad!

E: Entonces, la solución es 11 lados, ¿no?

P: Con 11 lados salen 55 cadenetas y con 10 lados salen 45 cadenetas, así que hay dos soluciones.

J: Yo creo que solo vale 11, porque con 45 cadenetas no se necesitarían 4 cajas.

En la entrevista posterior a la clase preguntamos a Felipe por la valoración del error de David.

F: No considero que David haya cometido un error grave, pues pensó en una distribución de las cadenetas que no se correspondía con el enunciado, pero que tenía sentido; sin embargo, sí me parece un error más importante el de Ana, que consideró posible una solución decimal. El error de David muestra una interpretación incorrecta del enunciado; quizás se ha dejado llevar por que los problemas que hemos hecho hasta ahora hablan de diagonales en función del número de lados, y no de diagonales más lados. **{KFLM: formas de interacción de los estudiantes con un contenido}**.

I: ¿Qué te pareció la intervención de Joana al respecto?

F: Me sorprendió, pues ella no suele estar tan activa, pero esta vez se implicó mucho en el problema y captó la esencia.

I: ¿A qué te refieres con la esencia del problema?

F: Pues a que entender el enunciado significa dar como rango de soluciones posibles de 46 (no 45) a 59 (no 60), ya que se han empleado 4 cajas y han sobrado **{KoT: procedimientos}**. Y es algo esencial también en el problema el que la solución o las soluciones han de ser números enteros positivos **{KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos} {KPM: heurísticos}**.

I: Y supongo que, como dijiste antes, la aplicación de la fórmula del número de diagonales de modo inverso es también algo importante en el problema.

F: Sí, claro, pero, una vez que deciden aplicarla, lo que sigue es algo mecánico, lo importante es interpretar el número que te sale como solución para n [número de lados del polígono] **{Concepción: importancia de la plausibilidad del resultado por encima de los algoritmos}**.

Volvamos al aula. Al realizar la puesta en común de las resoluciones de los grupos, la portavoz (María) de uno de estos presentó lo siguiente:

M (María): Nosotros hemos hecho el problema de forma parecida a lo que se hizo en clase para obtener la fórmula de las diagonales. Hemos pensado que cada vértice se une con todos los demás, salvo consigo mismo, por lo que hemos multiplicado n por n-1, y luego hemos dividido por 2.

P: ¿Por qué habéis dividido por 2?

M: Porque cada cadeneta va entre dos vértices, así que las hemos contado dos veces.

F: Entonces, ¿qué fórmula habéis obtenido?

M: Pues $\frac{n(n-1)}{2}$

F: ¿Y cuál es la solución?

M: 11 lados tendría la plaza de Villaonuba.

E: Pero eso es lo que le salió a Ana y no lo hizo así.

F: ¿Pensáis que es posible hacerlo de dos formas distintas y obtener el mismo resultado? [Le preguntamos en la entrevista sobre el sentido de esta pregunta y respondió que muchos alumnos piensan que cada problema tiene una sola forma de resolverse y una única solución, lo que interpretamos como **{KFLM: conocimiento de los intereses y expectativas de los estudiantes}**]

Unos dicen que sí y otros que no. Un estudiante de otro grupo interviene:

R (Ricardo): A mí me sale también $\frac{n(n-1)}{2}$, pero no lo he hecho así. Yo he empezado a hacer una tabla; en una columna, el número de lados, y en la otra columna, el número de cadenetas, y me he dado cuenta de que si multiplicaba el número de lados por sí mismo menos 1, me salía el doble de cadenetas.

F: Pasa a la pizarra, Ricardo, y escribe la tabla para que todos comprendan lo que has dicho. [Felipe es conocedor de las dificultades que algunos alumnos tienen de comprender mensajes matemáticos sin apoyo visual: **{KFLM: conocimiento de fortalezas y dificultades}**]

Ricardo escribe en la pizarra la siguiente tabla:

3	3
4	6
5	10
6	15
7	

Explica así:

R: ¿Veis? Si multiplico 3 por 2, sale 6; si multiplico 4 por 3, sale 12; 5 por 4 me da 20; 6 por 5 da 30; y si multiplico 7 por 6, va a salir 42, que es el doble de las cadenetas que tengo que poner en la casilla vacía.

F: ¿Y cómo acabaste el problema?

R: Planteé la ecuación $\frac{n(n-1)}{2} = 60$ y seguí igual que mis compañeros.

F: ¿Qué os ha parecido la solución de Ricardo?

Todos los alumnos dicen que les parece bien.

F: ¿Cómo podemos estar seguros de que esa regla que ha encontrado Ricardo se va a poder aplicar a los números siguientes?

J: Porque es la misma que encontró María.

F: Sí, claro, pero pensad que no conocemos la fórmula, que María todavía no la ha mostrado.

Varios alumnos dicen que la fórmula de Ricardo es válida en cualquier caso, porque "es lo que tienen en común los primeros números".

F: Si solo nos hubiéramos fijado en el 3, podríamos haber dicho que las cadenetas coinciden con los lados. O si solo nos fijáramos en el 3 y en el 4, podríamos decir que la fórmula es $n + (n-3)2$, o $3n-6$. **{KoT: procedimientos; KPM: formas de argumentación, validación y prueba** (papel de los ejemplos en la demostración)**}**

Algunos alumnos dicen que "es verdad, pero entonces no valdría para el 5, mientras que la de Ricardo sí vale".

F: Efectivamente, pero sabemos que es válida porque hemos hecho el cálculo para el 5. ¿Cómo sabemos que vale para el 11? ¿Y si, en vez del 11, la solución fuera 11000? ¿Seguiríamos haciendo la tabla hasta llegar al 11000?

La portavoz de otro grupo, Elena, interviene:

E: Entonces, ¿tampoco está bien lo que nosotros hemos hecho? Hemos hecho los dibujos de los casos de 4, 5, 6 y 7 lados y nos hemos dado cuenta de que salen 6, 10, 15 y 21 cadenetas. Hemos hecho la tabla como el grupo de Ricardo y nos hemos dado cuenta de que el número de cadenetas que se añade de un número de lados a otro es cada vez uno más.

F: ¿Puedes salir a la pizarra y explicarlo sobre la tabla de Ricardo, por favor?

E: De 6 a 10 se suman 4; de 10 a 15, se suman 5; de 15 a 21, se suman 6. Entonces hemos pensado que con 8 lados, deben ser 21+7=28 cadenetas; con 9 lados, 28+8= 36 cadenetas; con 10 lados, 36+9=45 cadenetas; y con 11 lados 45+10=55 cadenetas. Serían 11 lados porque 55+11 salen ya 66 y se pasa de las 4 cajas de 15 cadenetas.

F (a todos): ¿Qué creéis? ¿Os convence el argumento del grupo de Elena o creéis que ocurre como en el caso del grupo de Ricardo? ¿Tenemos garantías de que porque hasta 7 lados vaya sumando uno más, ha de seguir ocurriendo?

Otro alumno del grupo de Elena, Juan, interviene:

J: Pero si lo comprobamos con 11 lados y nos salen 11x8/2=44 diagonales; más 11 lados, igual a 55 cadenetas, entonces hemos comprobado que vale.

F: ¿Habéis comprobado que vale como solución del problema o que vuestra hipótesis de la diferencia entre el número de cadenetas es cierta? **{KPM: formas de argumentación, validación y prueba}**.

J: Lo primero.

F: ¿Hubiera sido posible resolverlo de este modo si el problema os hubiera hablado de 3000 cajas de 15 cadenetas?

Algunos alumnos comentan que no.

Felipe muestra varios elementos del MTSK en estas intervenciones. Ya se ha señalado el conocimiento de procedimientos asociados a la resolución del término general de sucesiones aritméticas, la primera con el único dato de $a_1 = 3$ y la segunda con los datos $a_1 = 3\ y a_2 = 6$ **{KSM : conexiones de complejización}**. Asimismo, reconocemos conocimientos de tareas en el planteamiento de preguntas que cuestionan la generalización de los alumnos y plantean variantes de la tarea propuesta ("¿Y si, en vez del 11, la solución fuera 11000?"): **{KMT: conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza de un contenido matemático}**. Pero, realmente, todo lo anterior, al menos su manifestación en el aula, está condicionado por el propósito del planteamiento de las preguntas de Felipe.

I: Parece que la solución de Ricardo fue especial para ti, ¿no? ¿Por qué?

F: Es que Ricardo abordó el problema aritméticamente y eso no tiene sentido aquí, pues no hay ningún argumento geométrico que garantice que esa regla, ese patrón, se vaya a seguir **{KPM: formas de argumentación, validación y prueba en matemáticas}**. El grupo de Elena también hizo algo similar, probablemente inspirados por algunos problemas que hemos trabajado de observación de regularidades **{KFLM: formas de interacción de los estudiantes con un contenido}**. Aunque no pudieron tampoco argumentarlo geométricamente, comprobaron que el resultado de su hipótesis era válido como resultado del problema. Si lo intentas demostrar geométricamente, puedes ver que realmente la diferencia entre el número de diagonales de un polígono de n lados y el de n+1 lados es n-1; como además le has de sumar un lado más, te queda una diferencia de n, que coincide con la conjetura de los alumnos **{KoT: procedimientos; KPM: formas de argumentación, validación y prueba en matemáticas}**. Esto lo comprobé después; en clase, no vi adecuado demostrarlo a ellos, pues creo que hubiera sido confuso que diferenciaran que la conjetura era cierta, pero su argumentación (a partir de algunos ejemplos) no era válida **{KFLM: conocimiento de fortalezas y dificultades}**. Es más, creo que mi intención de que diferenciaran que la resolución del problema era válida en el caso del grupo de Elena (habían llegado "intuitivamente" a un caso posible y lo habían comprobado) pero no estaba argumentada su conjetura, puede no haber llegado a muchos alumnos, que se quedan con si la solución (el número de lados, en este caso) es esa o no **{KFLM: conocimiento de los intereses y expectativas de los estudiantes}**.

Discusión del análisis y conclusiones

El análisis del conocimiento especializado de Felipe nos permite comprender cómo conoce el contenido en cuestión como objeto de enseñanza y aprendizaje y cómo pone en uso dicho conocimiento en el aula.

Desde el punto de vista del Conocimiento de los temas (KoT), Felipe conoce la relación entre el número de lados y diagonales de un polígono, así como una situación donde tiene sentido la aplicación de dicho contenido. Sabe crear una tarea a partir de dicha situación (KMT) y valorar las posibles dificultades de los estudiantes con la tarea, tanto por aspectos relativos al contenido en cuestión (dificultades para aplicar la fórmula de modo inverso, o considerar soluciones decimales) como por aspectos matemáticos generales (dificultades para comprender el enunciado de un problema, o para comprender una argumentación sin apoyo visual –cuando interviene Ricardo explicando su resolución) (KFLM). También desde el punto de vista del KFLM, comprende cómo suelen pensar los alumnos sobre el contenido en cuestión (por qué en la tarea pueden considerar sólo las diagonales) y qué expectativas tienen (suelen pensar que la resolución y la solución de un problema son únicos, y que si el resultado es correcto, ha de serlo también el proceso seguido para llegar a él). Puede valorar también la tarea desde lo que se espera aprenda un alumno respecto de este contenido en este nivel (KMLS).

Volviendo a su conocimiento matemático, el conocimiento del profesor de distintos procedimientos para resolver la tarea, que las diagonales y lados han de ser números naturales (KoT), así como su conocimiento de formas de argumentación, validación y prueba en matemáticas, y de la estrategia heurística consistente en reflexionar sobre si la solución es razonable (KPM), le permiten valorar la adecuación de las resoluciones de los alumnos y la comprensión del contenido que suponen dichas resoluciones. Así, puede identificar cuáles son los elementos clave en la comprensión de la tarea (como considerar solo como soluciones números naturales) y que las resoluciones aritméticas realizadas por los alumnos no permiten una demostración de la situación. El profesor sabe demostrar geométricamente las conjeturas aritméticas de los alumnos (KoT), si bien desecha abordarlo en el aula por consideraciones relativas a las expectativas de los alumnos citadas en el párrafo anterior (KFLM). Además, su KPM relativo a formas de argumentación, validación y prueba, y su KoT relativo a obtener el término general de una sucesión aritmética dados algunos términos, le permiten cuestionar las resoluciones aritméticas de los alumnos, proponiendo alternativas a la tarea inicial para las que sus resoluciones no serían aplicables. Su KPM en relación con heurísticos para la resolución de problemas (en concreto en este caso, el de simplificar el problema) está relacionado con su conocimiento de ayudas a los alumnos (KMT). Asimismo, parece tener una visión del problema que le permite trasladarlo a contenidos posteriores (KSM).

Algunas concepciones evidenciadas del profesor en relación con la enseñanza y aprendizaje de la matemática, por otro lado, permiten comprender mejor su actuación en el aula, complementando la visión dada por los subdominios de conocimiento especializado. Así, la tarea que propone y su análisis de la misma y de las dificultades de los alumnos se entiende si se considera su visión de que el aprendizaje matemático efectivo ha de considerar situaciones que otorguen significado al contenido y una aplicación no mecánica del mismo. Además, en la resolución de problemas por parte de los alumnos, otorga más importancia al proceso de resolución y a la plausibilidad del resultado que al propio resultado.

Queremos resaltar, del análisis del conocimiento del profesor con las herramientas que nos proporciona el MTSK, cómo se visibiliza la interrelación entre distintos aspectos del conocimiento del profesor: su conocimiento del contenido (fenomenológico, procedimental, y de propiedades -KoT), con su conocimiento de la tarea (KMT) y del aprendizaje de los alumnos respecto de la tarea (KFLM); su conocimiento de formas de argumentación y validación, y de heurísticos (KPM), con su conocimiento del aprendizaje de los alumnos respecto de la tarea (KFLM) y de estrategias de enseñanza en relación con dicho aprendizaje (KMT). Desde nuestro punto de vista, esta muestra de las interrelaciones entre el conocimiento del profesor relativo a distintos aspectos y subdominios es un reflejo del carácter integrado de dicho conocimiento. Si bien el MTSK, como cualquier modelo analítico, realiza una labor de descomposición del conocimiento del profesor, cobra sentido al posibilitar la labor posterior de síntesis de dicha descomposición. Este tipo de comprensión del conocimiento del profesor nos facilita la intervención en su formación (Climent, *et al.*, 2016), así como una mejor comprensión de la enseñanza de la matemática.

Bibliographie

BALL, D. L., THAMES, M. H. & PHELPS, G. (2008), Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education* **59.5,** 389-407.

BARDIN, L. (1998), *L'analyse de contenu*, Presses Universitaires de France - Le Psychologue, Paris.

BARRERA, V. J., LIÑÁN, M. M., MUÑOZ-CATALÁN, C. & CONTRERAS, L. C. (2016), Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas, dans *Investigación en Educación Matemática XX* (Eds. Macías & alii), 167-176, SEIEM, Málaga, Espagne.

BROMME, R. (1994), Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' profesional knowledge, dans *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Eds. Biehler & alii), 73-88, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS L.C. & MUÑOZ-CATALAN, M.C. (2013), Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching, dans *Proceedings of CERME 8* (Eds. Ubuz & alii), 2985-2994, ERME, Antalya, Turquie.

CARRILLO, J. & CONTRERAS, L.C. (1995), Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza, *Educación Matemática* **7.3**, 79-92.

CHEVALLARD, Y. (1986), La Transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné, *Revue française de pédagogie* **76***,* 89-91.

CHEVALLARD, Y. & CIRADE, G. (2006), Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques, dans *De l'integration des technologies aux dispositifs de formation de futurs enseignants* (Eds. Chiocca & alii), ENFA & IUFM Midi-Pyrénées, Toulouse, France.

CLIMENT, N., MONTES, M.A., CONTRERAS, L.C., CARRILLO, J., LIÑAN, M.M., MUÑOZ-CATALAN, M., BARRERA, V.J. & LEON, F. (2016), Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos, *Avances de Investigación en Educación Matemática* **9**, 85-103.

DAVIS, B. & SIMMT, E. (2006), Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know, *Educational Studies in Mathematics* **61.3**, 293-319.

FLORES-MEDRANO, E., MONTES, M.A., CARRILLO, J., CONTRERAS, L.C., MUÑOZ-CATALAN, M.C. & LIÑAN, M.M. (2016), El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático, *Bolema* **30.54**, 204- 221.

GIROUX, H.A. (1997), *Los Profesores como Intelectuales: Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje*. Paidós. Barcelona

KILPATRICK, J., SWAFFORD, J. & FINDELL, B. (EDS.). (2001), *Adding it up: Helping children learn mathematics*, National Academy Press, Washington, DC.

LESH, R., BEHR, M. & POST, T. (1987), Rational number relations and proportions, dans *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (Ed. Janvier), 41-58, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, USA.

MA, L. (1999), *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, VA.

PARIES, M. (2010), Circulation du savoir en classe de mathématiques: quelles variabilités dans les pratiques des enseignants? Étude de cas. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **15**, 9 – 44.

PONTE, J.P. (1994), Mathematics teachers' professional knowledge, dans *Proceedings of PME 18*, *Vol. 1*(Eds. Ponte & alii), 195-210, PME, Lisbonne.

ROWLAND, T., TURNER, F., THWAITES, A. & HUCKSTEP, P. (2005), *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*, SAGE, Londres.

RUIZ-OLARRIA, A. & SIERRA, T. (2011), La formación Didáctico-Matemática del profesorado de Secundaria, dans *Un panorama de la TAD* (Eds. Bosch & alii), 465-483, CRM, Barcelona, Espagne.

SCHOENFELD, A. (2010), *How we think*, Routledge, New York.

SCHWAB, J.J. (1978), Education and the structure of the disciplines, dans *Science, curriculum and liberal education* (Eds.Westbury & alii), 229-272, University of Chicago Press, Chicago.

SHULMAN, L.S. (1986), Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* **15.2**, 4-14.

SHULMAN, L.S. (1987), Knowledge and teaching: Foundations of a new reform. *Harvard Educational Review* **57.1**, 1-21.

JOSE CARRILLO
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
carrillo@uhu.es
MIGUEL MONTES
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
miguel.montes@ddcc.uhu.es
LUIS C. CONTRERAS
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
lcarlos@uhu.es
NURIA CLIMENT
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
climent@uhu.es