### GREFEM1

# CONTEXTUALISER POUR ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES : UN ENJEU DE FORMATION

**Abstract.** Research in mathematics education shows that dwelling upon questions regarding "contextualizations" in teaching and learning mathematics is important for teacher training. In this article, we examine in terms of contextualization, three training practices (addressing primary or secondary prospective teachers at Université du Québec à Montréal – UQAM) targeting the same mathematical content (division). Through each case, following an inductive process, we analyze *a posteriori* the meaning of contextualizing, including its assigned function by the teacher-students or the teacher-educator, whether the contextualizations were explicitly requested or emerged in students' work. A transversal reading of the cases shows the richness of meanings associated with contextualization and identify potential avenues for teacher training.

Résumé. S'attarder aux questions de contextualisation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques constitue, comme le montrent les travaux de recherche en didactique
des mathématiques et les contraintes institutionnelles, un enjeu important à considérer dans
la formation des enseignants. C'est à cet enjeu que s'attarde cet article. Trois cas de pratiques
de formation à l'enseignement des mathématiques à l'Université du Québec à Montréal
(UQAM), ciblant un même contenu mathématique (la division), sont analysés sous l'angle
de la contextualisation. Ces pratiques, analysées a posteriori, proviennent d'un cours de didactique des mathématiques s'adressant à de futurs enseignants de mathématiques au secondaire (deux premiers cas) et d'un cours de didactique des mathématiques s'adressant plutôt
à de futurs enseignants du primaire (troisième cas). Une contextualisation y est sollicitée de
manière explicite ou émerge du travail mené par les futurs enseignants. Pour chacun des cas,
nous dégageons, par une démarche d'analyse inductive, le sens que prend, dans l'action, cette
contextualisation, et la fonction qui lui est attribuée. Une lecture transversale de ces cas
montre une richesse des significations associées à la contextualisation, et permet de cibler
des enjeux de formation.

**Mots-clés.** Formation des maitres en mathématiques, Contextualisation dans l'enseignement des mathématiques, Concept et algorithmes de division.

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 23, p. 69 - 105. © 2018, IREM de STRASBOURG

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Groupe de REcherche sur la Formation à l'Enseignement des Mathématiques. Les membres du GREFEM ayant participé à la rédaction de cet article sont, par ordre alphabétique, Nadine Bednarz (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada), Caroline Lajoie (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada), Jean-François Maheux (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada) et Mireille Saboya (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada).

#### 70

#### 1. Introduction

La question de l'utilisation des « contextes » dans l'enseignement des mathématiques touche à l'essence même de ce que sont les mathématiques et leur apprentissage. En revenant sur la rationalité invoquée par ceux qui prônent l'utilisation de contextes dans l'enseignement des mathématiques, Boaler (1993) nous sensibilise à cet enjeu. Que ces raisons soient liées à la motivation des élèves, au transfert des apprentissages, ou encore à une prise en compte des liens entre les mathématiques scolaires et les problèmes « réels », elles reposent sur une hypothèse largement répandue en éducation mathématique affirmant que l'apprentissage sera « meilleur » si les mathématiques sont apprises dans des contextes « réels », et si les liens entre ce qui est requis dans les deux cas sont établis. Or les travaux de Lave (1988) et les nombreuses études menées sur les mathématiques au travail viennent contester cette conception universelle et générale des mathématiques, qui semble intemporelle, et dont les applications sont conçues comme des situations où une connaissance générale s'applique sans affecter la nature des objets mathématiques impliqués. Un des éléments clés, au contraire, qui se dégage des études sur les mathématiques au travail a trait au rôle structurant du contexte dans les conceptualisations développées en pratique et dans leurs transformations, lorsque celles-ci sont contextualisées, recontextualisées à travers différentes situations (Noss, 2002). Ces différents travaux montrent en ce sens la complexité de la question attachée aux « contextes », pris dans le sens de circonstances et conditions entourant un problème ou une idée mathématique, et à leur utilisation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Quelques travaux de recherche viennent ainsi interroger l'impact que peuvent avoir les contextes sur l'engagement des élèves dans la résolution de problèmes en mathématiques, ces derniers pouvant jouer un rôle de support à la résolution, mais également s'instaurer en obstacle au travail mathématique (Webb, 1984; Nguala, 2006; Cooper et Harries, 2002; Boaler, 1993). En ce sens, ils ne peuvent être pris *a priori* comme un acquis sur lequel peut s'appuyer l'apprentissage, mais leur rôle doit être interrogé. Cette interrogation est au cœur du travail mené depuis plus de 30 ans par les chercheurs de l'Institut Freudenthal aux Pays-Bas, dans la perspective du « Realistic Mathematics Education » (RME) (voir notamment Streefland, 1991; Treffers, 1993; Gravemeijer et Doorman, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Rasmussen et King, 2000; Hough et Cough, 2007), une perspective suivant laquelle les contextes ne sont pas qu'un lieu d'application des concepts mathématiques:

« In realistic mathematics education, context problems play a role from the start onwards [...] The point of departure is that context problems can function as anchoring points for the reinvention of mathematics by the students themselves » (Gravemeijer et Doorman, 1999, p. 111).

En partant de contextes « imaginables », au sens où ces derniers sont « experientially real » pour les élèves, et de l'activité informelle qui s'y développe, les recherches-développements menées dans plusieurs domaines ont permis de documenter un processus de mathématisation progressive : des modèles spontanés que les élèves se donnent pour résoudre les situations qui leur sont proposées, modèles émergents développés dans une activité mathématique située (« model of ») aux modèles plus généraux (dits « model for ») (Gravermeijer et Doorman, 1999). Ces modèles progressivement développés par les élèves trouvent ainsi leur ancrage dans ces contextes et sont suffisamment flexibles pour pouvoir être réinvestis dans d'autres situations. Le contexte sert ici en quelque sorte de pont entre un niveau informel où les élèves inventent des stratégies et un niveau plus formel de l'activité mathématique où les modèles sont généralisables (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). L'importance accordée aux contextes ressort donc clairement de ces différents travaux menés en didactique des mathématiques, des contextes qui, notons-le, et ce contrairement à ce que peut laisser entendre le mot « realistic », ne se limitent pas aux contextes réels :

« In RME, context problems are defined as problems of which the problem situation is experientially real to the student. Under this definition, a pure mathematical problem can be a context problem too. Provided that the mathematics involved offers a context, that is to say, is experientially real for the student » (*ibid*, p. 111).

Sur un tout autre plan, le recours aux contextes est également une recommandation forte des programmes d'études au Québec, et ce depuis fort longtemps, comme le montre l'analyse des programmes et des documents pédagogiques réalisée par Lajoie et Bednarz (2012, 2016) sur plus d'un siècle de réformes successives. Ces contextes peuvent être issus de la vie de tous les jours, réels ou réalistes, fantaisistes, purement mathématiques (MEQ, 1988)<sup>2</sup> ou encore issus de domaines généraux de formation (médias, environnement, santé, etc.) et d'autres disciplines scolaires (sciences, sciences humaines, ...) (MEQ, 2001; MELS, 2003, 2005). Cette place accordée aux contextes dans l'enseignement des mathématiques au plan institutionnel n'est pas sans incidence pour la formation des enseignants. Les « contextes » apparaissent en effet comme des incontournables avec lesquels seront appelés à travailler les enseignants. Les quelques études menées au Québec à ce sujet, à travers une analyse de chapitres de manuels utilisés au secondaire – un matériel avec lequel les enseignants sont appelés à travailler (Cotnoir, 2010), ou encore une analyse des manières de faire des mathématiques chez les enseignants à la fin du secondaire comme on le constate au quotidien (Corriveau, 2013), confirment l'importance de cette contextualisation

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Un contexte est « <u>réel</u> s'il se produit effectivement dans la réalité », « <u>réaliste</u> s'il est susceptible de se produire réellement », « <u>fantaisiste</u> s'il est le fruit de l'imagination et qu'il est sans fondement dans la réalité », « <u>purement mathématique</u> s'il fait exclusivement référence à des objets mathématiques » (MEQ, 1988, pp. 26-27).

dans l'enseignement des mathématiques. La question du recours aux contextes dans la formation des futurs enseignants pourrait bien constituer en conséquence un de ses enjeux importants. Quelques travaux de recherche menés par des chercheurs de l'Institut Freudenthal tendent d'ailleurs déjà à montrer que ce travail autour des contextes en formation des enseignants ne va pas de soi – notamment dans le défi que pose pour l'enseignant le travail à partir des raisonnements des élèves construits en contexte (Wubbels, Korthagen et Broekman, 1997).

Pour avancer sur la compréhension de cette contextualisation en formation des enseignants et des enjeux qu'elle soulève, nous avons cherché à cerner, en partant de nos propres pratiques de formation qui intègrent ces questions de contextualisation dans nos cours, les formes que prend cette contextualisation dans l'action lorsque nous travaillons avec de futurs enseignants : que peut signifier travailler avec des « contextes » en formation des enseignants et pourquoi le fait-on?

#### 2. Quelques repères méthodologiques

Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi d'examiner les pratiques de formation de trois d'entre nous, chercheurs-formateurs<sup>3</sup>, sous l'angle de la contextualisation. La notion de pratique<sup>4</sup> est ici définie comme « une manière de faire singulière d'une personne, sa façon réelle, propre d'exécuter une activité professionnelle : l'enseignement » (Altet, 2002, p. 86). Elle ne recouvre pas seulement les actes observables, soit un ensemble de gestes, d'actions mises en œuvre dans un cours, mais renvoie également aux choix et aux prises de décision qui sont effectués lors de la préparation des séances ou dans le cours lui-même. Cette pratique professionnelle rassemble « à la fois la manière de faire de chaque personne singulière, le faire propre à cette personne, et les procédés pour faire qui correspondent à une fonction professionnelle telle qu'elle est définie par un groupe professionnel particulier en fonction de buts,

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Comme groupe de chercheurs et formateurs, impliqués dans la formation des enseignants du primaire et du secondaire à l'Université du Québec à Montréal, et ce depuis de nombreuses années, le choix a été fait de partir de nos propres pratiques, de l'intérieur de celles-ci. La connaissance intime que nous en avions permettait en effet d'explorer de façon fine cette contextualisation et ses enjeux.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> La notion de pratique a été développée sur le plan théorique par les didacticiens des mathématiques, dans les travaux portant sur les pratiques enseignantes, en s'appuyant sur la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski, 2002; Roditi, 2005, 2013). Ces travaux ont permis de mettre en lumière la complexité de ces pratiques, leurs différentes composantes (cognitives et médiatives en lien avec le travail en classe, sociale en lien avec l'établissement scolaire, les autres enseignants et les parents, institutionnelle en lien avec les programmes et personnelle en lien avec le parcours de l'enseignant et ses conceptions, valeurs...). Ils ont permis également de documenter l'activité de l'enseignant (ses gestes professionnels, la logique qui le guide).

d'objectifs et de choix autonomes » (*ibid*, p. 86). Ce dernier aspect nous semble ici particulièrement important, car les pratiques que nous reprenons dans cet article s'inscrivent dans une certaine historicité du développement de la formation des enseignants à l'UQAM, qui a été construite au fil du temps par un groupe de formateurs-didacticiens (voir à ce sujet pour le secondaire Bednarz, 2001; Bednarz, Gattuso et Mary, 1995; pour le primaire Lajoie et Pallascio, 2001). Les orientations qui ont été retenues, les choix qui ont été faits sont ainsi le résultat d'un travail collectif.

L'analyse des trois cas s'est développée à partir de récits de pratique, sous forme verbale, des trois formateurs, de tâches proposées en formation, et de réflexions et discussions impliquant les quatre auteurs. De plus, en ce qui concerne le troisième cas, notre analyse a aussi porté sur des extraits de verbatim de séances de formation. Pendant un an environ, des rencontres hebdomadaires nous ont conduits à cibler progressivement un contenu spécifique commun aux trois cas, qui rejoignait la formation des enseignants du primaire et celle des enseignants du secondaire.

Notre intention par ce choix et par ce travail est de nourrir une explicitation de plus en plus riche et nuancée des pratiques impliquant la contextualisation, ainsi que des *possibilités* envisagées à cet égard. Il n'est donc pas question ici de réaliser une analyse documentaire de cas, mais bel et bien de dégager, à travers une réflexion sur ceux-ci, des manières de concevoir la contextualisation en mathématiques et les enjeux de formation des enseignants qui peuvent s'y rattacher. Il s'agit donc d'analyses *a posteriori* de nos pratiques de formation. Ces pratiques proviennent de cours donnés en formation des enseignants (du secondaire en mathématiques pour les deux premiers cas, du primaire pour le troisième) dans lesquels nous intervenons et dans lesquels la contextualisation est sollicitée de manière explicite ou émerge de façon régulière.

Les trois exemples que nous allons plus spécifiquement traiter ici sont développés autour de la division. Si nous avons choisi ce thème, c'est en partie parce qu'il rejoint la formation des enseignants du primaire et celle des enseignants du secondaire, et en partie aussi parce que la division est riche et complexe du point de vue didactique (Lajoie et Maheux, 2013) et que le recours à des contextes pour l'enseigner n'est pas sans poser de difficultés (Boulet, 1998).

À travers ces trois exemples, nous cherchons à mieux comprendre la diversité que recouvre la contextualisation dans le travail mené par trois d'entre nous autour de ce concept mathématique, nous permettant plus largement de dégager :

- le sens pris dans l'action contextualiser ou avoir recours à des contextes en formation des enseignants ;
- la fonction attribuée à cette contextualisation : nous contextualisons pour/à quelles fins ?

Cette analyse prend appui, dans un premier temps, sur une description des tâches proposées, des choix faits et de ce qui les motive. Il s'agit pour chacun des cas de rendre compte de ceux-ci du point de vue de la formatrice impliquée (puisqu'il s'agit en fait ici de trois formatrices – une par cas), de manière à saisir « le fond des choses » par une certaine distanciation de l'action. Ce recul permet de faire ce que Denzin (1989) appelle, au sens de l'ethnographie, une « description dense » des pratiques investiguées :

« La description dense [...] injecte de l'histoire dans l'expérience, établit la signification d'une expérience isolée ou d'une suite d'événements pour la ou les personnes en question. » (Denzin, 1989, p. 55)

Dans chacun des cas, la formatrice impliquée va ainsi préciser, en partant de ce qu'elle fait à propos de la division, des exemples de tâches réalisées avec les étudiants en formation, les analyses didactiques qui les sous-tendent et les choix qu'elle fait, les intentions sous-jacentes, de manière à décrire de la manière la plus fine possible le travail réalisé à propos des contextes en formation. Dans les deux premiers cas, la description ne renvoie qu'à la formatrice, aux tâches qu'elle propose, à leur analyse préalable, pour en faire ressortir ce qui la guide et l'anticipation de ce qui pourrait s'y dérouler, et ce de manière à mettre en évidence ce qu'elles devraient ou pourraient solliciter. Dans le troisième cas, la description des tâches proposées par la formatrice est complétée par des extraits de verbatim de séances de formation rendant compte de ce que font effectivement les étudiants en formation dans ces tâches.

Cette description dense constitue l'assise du travail mené par l'équipe. Le regard croisé porté sur les trois cas va en effet conduire à se dégager de la posture de formateur pour entrer dans une analyse de chacun des cas. Cette démarche d'analyse inductive, au sens de Blais et Martineau (2006), nous conduit à cerner, au-delà de la description explicite de ce qui se fait et des intentions, le sens qui se dégage concernant ce que recouvre le travail de contextualisation en formation.

Dans ce qui suit, nous présentons le résultat de ce travail en introduisant chacun des trois cas par une description de la pratique, suivie d'une synthèse des éléments qui s'en dégagent. L'enchaînement des cas permet de faire ressortir une complexification progressive de l'idée de contextualisation et des enjeux de formation qui peuvent y être associés. Dans la discussion qui suit l'analyse, nous proposons une seconde lecture de ces cas en revenant de manière transversale sur ceux-ci.

Suivant un choix de rédaction reflétant au mieux le type d'analyse menée, les concepts théoriques porteurs pour celle-ci interviendront au fil du texte, au fur et à mesure qu'ils s'avèrent utiles pour l'analyse, plutôt qu'à l'intérieur d'un cadre théorique ou conceptuel préalable à celle-ci.

## 3. Trois cas de pratique impliquant la contextualisation autour du concept de division

3.1 Cas 1 : Un travail sur le contexte à partir de la formulation de problèmes en mots

#### 3.1.1. Pour situer le travail réalisé

Au Ouébec, la formation des enseignants du secondaire est offerte à l'intérieur de programmes de premier cycle universitaires d'une durée de quatre ans. À l'Université du Québec à Montréal, le choix a été fait dès les années soixante-dix d'une formation professionnelle axée sur l'intervention en enseignement des mathématiques, venant façonner, de manière intégrée, à la fois la formation mathématique, didactique et pratique. Nous avons décrit ailleurs l'orientation globale de ce programme et ses caractéristiques particulières (Bednarz, 2001). Les premier et deuxième cas sont tirés du premier cours de didactique des mathématiques que doivent suivre les futurs enseignants dès la première année, un cours de 90 heures (voir pour une description plus précise de ce cours, didactique 1 et laboratoire, Bednarz et al., 1995). Dans ce premier cours de didactique des mathématiques destiné aux futurs enseignants du secondaire, une attention particulière est portée sur la division en lien avec l'enseignement et l'apprentissage des élèves du début du secondaire (12-13 ans) et ce qui a été fait antérieurement au primaire. Le travail réalisé sur les contextes prend ici appui sur l'opération de division à travers l'étude de problèmes en mots. Ces problèmes prennent une forme particulière en ce sens qu'ils font appel à un contexte. Autour de ces problèmes « à contexte », le travail de la formatrice poursuit plusieurs intentions : sensibiliser les futurs enseignants aux différents modèles conceptuels de la division, soit le partage et le groupement, faire voir l'importance de présenter aux élèves des problèmes impliquant ces deux modèles, leur faire prendre conscience des difficultés des élèves en lien avec ces problèmes et les rendre habiles à composer de tels problèmes. C'est autour de cette préoccupation que nous plongeons nos futurs enseignants de mathématiques dans différentes tâches qui vont rejoindre les questions suivantes : quels problèmes « à contexte » choisir et pourquoi ? Quelles difficultés peut-on anticiper chez les élèves?

3.1.2. Choix des problèmes à contexte proposés par la formatrice et premières tâches proposées aux futurs enseignants en lien avec ces problèmes

Diverses recherches faisant état de raisonnements, conceptions, difficultés et erreurs des élèves et des futurs enseignants du primaire et du secondaire face à des problèmes à contexte impliquant des multiplications et des divisions<sup>5</sup> guident la formatrice dans le choix ou la construction de problèmes à contexte à travailler avec les futurs enseignants. Ainsi le *modèle conceptuel sous-jacent de l'opération à l'étude* est une des « variables didactiques » (éléments d'une tâche permettant d'en varier les exigences) qui influence le choix de la formatrice, sachant qu'il y a reconnaissance plus immédiate de la division-partage que groupement par les élèves lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes numériques.

D'autres variables didactiques reliées au contexte choisi sont mises de l'avant. Pour les faire ressortir par les étudiants, une liste de différents problèmes à contexte leur est proposée, c'est-à-dire des problèmes choisis sur la base d'une analyse didactique préalable réalisée par la formatrice. Il est demandé aux futurs enseignants d'analyser la complexité de ces problèmes et d'anticiper l'engagement des élèves. Certains résultats de recherche viendront ici confirmer ou infirmer les hypothèses des étudiants quant aux raisonnements sollicités, difficultés et erreurs des élèves. La comparaison des taux de réussite dans la résolution des problèmes à contexte amènera également à dégager des variables didactiques telles que (a) ce à quoi réfère le problème et (b) la nature des nombres impliqués. En effet, face à deux problèmes qui sollicitent la même opération et qui font appel au même modèle conceptuel, les étudiants s'aperçoivent que l'histoire à laquelle on se réfère a une influence sur le taux de réussite des élèves. Ainsi, un problème mettant en scène des poissons dans des aquariums, par exemple, est plus familier aux élèves qu'un problème de même structure impliquant plutôt le taux de glucose chez les êtres humains. De plus, ces différents contextes amènent une réflexion quant à la nature des nombres en jeu. En effet, certains problèmes obligent un traitement sur des nombres naturels (contexte discret de distribution de poissons dans des aquariums, par exemple) alors que d'autres ouvrent la porte vers les nombres rationnels (contexte continu – de mesure ou de vitesse par exemple), ce qui n'est pas sans poser de difficultés aux élèves, en particulier lorsque le dividende est plus petit que le diviseur.

Forts de ce regard didactique sur les problèmes à contexte, les futurs enseignants vont alors être appelés à analyser les problèmes à contexte présents dans les manuels scolaires, une des ressources dans le quotidien de l'enseignant et de première importance pour plusieurs d'entre eux. Cette analyse les conduira à mettre en évidence que

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> À titre d'exemple, nous pouvons citer les recherches de Ball (1990), Simon (1993), Graeber, Tirosh et Glover (1986), Fischbein, Deri, Nello et Marino (1985).

les problèmes à contexte de division partage sont surreprésentés par rapport aux problèmes à contexte de division groupement. Les problèmes proposés par les manuels scolaires apparaissent ici limités pour développer chez les élèves l'habileté à résoudre des problèmes mobilisant différents modèles conceptuels. S'en dégage donc l'importance que l'enseignant puisse compléter la liste de problèmes existants par des problèmes qui ouvriront sur d'autres caractéristiques (autre modèle conceptuel, nature des nombres, etc.). Et c'est bien là une intention de la formatrice : développer l'habileté chez les futurs enseignants à construire des problèmes à contexte, mais pas n'importe lesquels, des problèmes préalablement déterminés par une analyse didactique éclairée par les résultats obtenus par la recherche. Mais ceci n'est pas une mince tâche!

### 3.1.3. Qu'implique la tâche de formuler des problèmes à contexte ?

S'appuyant sur la connaissance des difficultés des futurs enseignants à élaborer des problèmes impliquant une division<sup>6</sup>, la formatrice construit une suite de tâches visant à travailler cette difficulté. C'est par un retour en classe sur leurs productions que les étudiants sont amenés à prendre conscience de la complexité que représente la composition d'un problème à contexte selon des variables didactiques bien précises (par exemple le choix du *modèle groupement de la division*, le choix d'un *dividende plus petit que le diviseur*). Un travail assidu de composition de problème et d'analyse de ces productions peut alors suivre, au cours duquel les futurs enseignants développent leurs habiletés à manipuler ces variables.

#### 3.1.4. Autour d'un autre élément du « contexte » : le réalisme

Lors des discussions en grand groupe autour des problèmes énoncés par les futurs enseignants, un autre élément du contexte ressort régulièrement : celui relié au *réalisme*. En effet, l'authenticité potentielle d'un problème fait l'objet de vives discussions au cours desquelles un problème jugé peu réaliste par les futurs enseignants est généralement vu comme moins parlant, moins porteur de sens pour les élèves. Cette réflexion autour des contextes *réels ou réalistes* résonne avec certains énoncés du programme de formation de l'école québécoise dont le suivant :

« …la spécificité de la mathématique comme langage et comme outil d'abstraction exige de traiter dans l'abstrait des relations entre les objets ou entre les éléments de situations. Néanmoins, son enseignement au secondaire est plus efficace lorsqu'il prend appui sur des objets concrets ou sur des situations tirées de la réalité » (MELS, 2003, p. 232; MELS, 2005, p. 1).

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Cette connaissance provient des recherches citées dans la note de bas de page précédente.

Ainsi, les documents ministériels semblent fortement suggérer de prendre appui sur des situations tirées de la réalité pour soutenir l'apprentissage des mathématiques. Du côté des futurs enseignants, les discussions sur les problèmes à contexte qu'ils rencontrent en analysant les manuels scolaires ou ceux qu'ils composent les amènent à regarder de plus près cette composante du contexte. Par exemple, un problème qui présente une discussion où une personne propose d'échanger les 3/5 de son fromage (figure 1) laisse les futurs enseignants perplexes face au peu de vraisemblance qu'une telle situation ait lieu dans la « vraie » vie.

Mathilde : Mathieu, je suis prête à échanger les 3/5 de mon fromage contre ton orange. Es-tu d'accord ?

Mathieu : Je préfère conserver 4 des 12 morceaux de mon orange, Mathilde. Quelle fraction de ton fromage me donnes-tu en échange des autres morceaux ?

Quelle fraction de son fromage Mathilde devrait-elle offrir à Mathieu ? Explique ton raisonnement.

Figure 1. Problème tiré d'un manuel

Ce problème à contexte fait fortement réagir les futurs enseignants, le contexte leur apparaissant artificiel. Si le programme de formation de l'école québécoise semble souhaiter un travail autour de problèmes réalistes de manière à rendre cet enseignement plus efficace, les futurs enseignants dénoncent en revanche l'utilisation forcée de problèmes *faussement réalistes*. Ils réalisent que de chercher à tout prix à rejoindre l'élève en évoquant des situations du quotidien n'est pas nécessairement le meilleur choix.

3.1.5. Bilan sur le premier cas : quel sens prend, dans l'action, la contextualisation ? Quelle fonction ?

À la lumière de ce qui vient d'être présenté, un certain sens de l'idée de contexte émerge tout au long du travail mené par la formatrice avec les étudiants en formation. En effet, la contextualisation s'ancre ici dans les problèmes à contexte. Elle prend forme autour d'un travail mené sur ces problèmes, autour de certaines variables didactiques qui apparaissent des éléments incontournables, en particulier : le modèle conceptuel de l'opération, les nombres en jeu (ordre de grandeur relative, type de nombres, nature des nombres) reliés à l'histoire à laquelle réfère le problème et une réflexion concernant le réalisme du problème.

Que dire des intentions de la formatrice ? En demandant aux futurs enseignants de contextualiser en composant des problèmes, elle reconnaît vouloir les conscientiser à la difficulté d'un tel exercice, et leur faire prendre conscience du jeu possible des variables didactiques du problème en lien avec l'apprentissage de l'élève. Les futurs

enseignants pourront ainsi percevoir la portée du travail consistant à choisir des problèmes et à inventer des contextes pertinents et diversifiés pour les élèves. Cette préoccupation vient en partie d'un besoin identifié au niveau des manuels scolaires, visant à combler le peu de représentativité de certaines variétés de problèmes.

Présentée ainsi, la contextualisation évoque donc un travail sur l'énoncé de problèmes mathématiques regardés sous l'angle de ce que raconte le texte présenté à l'élève, des modèles conceptuels auxquels se rattachent ces énoncés, et du jeu sur des nombres. Ce sont là des éléments clés en lien avec l'interprétation et l'engagement dans le problème, et donc du travail avec les idées mathématiques que l'on cherche à convoquer à l'aide d'un problème donné. Ils évoquent, en d'autres mots, la particularité du regard didactique sur des problèmes où la contextualisation prise au sens de ces trois composantes (situation de référence, modèles conceptuels, nombres) devient un enjeu de formation particulièrement fort. De plus, la problématique émergeant autour du réalisme des situations de référence évoque ici un autre aspect lié à la contextualisation : celui des contraintes institutionnelles. En effet, un accent particulièrement fort observé sur la contextualisation d'une part et d'autre part sur des situations dites réalistes, dans les documents du Ministère, est confronté aux insuffisances potentielles des ressources à la disposition de l'enseignant. Un enjeu important apparaît concernant le développement d'un regard critique par cet enseignant face à cette « commande » institutionnelle. Évidemment, il ne s'agit pas ici d'un enjeu spécifiquement lié à la contextualisation, mais de quelque chose qui d'une certaine manière prend prétexte de la contextualisation pour être développé.

Nous allons à présent poursuivre l'analyse en examinant un second cas qui se situe dans le même cours de didactique, et qui, du point de vue de la formation offerte aux futurs enseignants du secondaire dans notre établissement, se place, dans le cursus, à la suite du cas dont nous venons de discuter. Ce deuxième cas se situe également en continuité avec ce qui précède dans la mesure où la contextualisation y est aussi une affaire de formulation et d'énoncés, de modèle conceptuel associé à l'opération et de nombres en jeu. S'y ajoutent toutefois, et ce sont les aspects sur lesquels nous insisterons, d'autres éléments qui viennent élargir la conceptualisation en cours.

# 3.2 Cas 2 : Un travail en contexte sur les opérations : le contexte comme point d'appui pour penser une progression

L'exemple qui suit s'attarde au travail sur la division sous ses deux aspects imbriqués : modèle conceptuel sous-jacent de l'opération et calcul. L'accent, comme nous le verrons dans la tâche présentée aux étudiants ci-dessous, est moins placée sur la reconnaissance de l'opération dans un ensemble de problèmes que sur des manières d'approcher le calcul sur de nouveaux nombres, un calcul qui se veut réfléchi, ainsi que sur l'explicitation de raisonnements clés permettant d'approcher ces nouveaux calculs.

### 3.2.1. Un premier regard sur une tâche proposée aux étudiants

Nous démarrons ici avec une tâche impliquant la division, visant à s'attarder au passage des opérations sur les nombres naturels aux opérations sur les nombres rationnels (figure 2), un enjeu central dans la transition entre l'école primaire et secondaire en enseignement des mathématiques. Nous nous attardons aux questions de contextualisation qu'elle convoque.

Vous êtes enseignant de 1re secondaire. Vous vous proposez d'aborder la division d'une fraction par une fraction en utilisant les nombres donnés cidessous :

(a) 
$$36 \div 3$$
 (b)  $36 \div 1/4$  (c)  $36 \div 3/4$  (d)  $36/5 \div 3/4$ 

Composer un problème à contexte accessible aux élèves, qui se résoudrait par une telle opération, et prévoir une illustration à utiliser pour l'ensemble des nombres à travailler. Montrer ensuite pour chaque cas à l'aide de l'illustration et de la verbalisation en référence au problème *comment on peut anticiper* la réponse en passant de (a) à (d).

**Figure 2.** Une tâche visant la division dans le passage des nombres naturels aux rationnels

Comme précédemment, on demande ici aux futurs enseignants de formuler un problème à contexte faisant référence à une certaine « histoire » et à des nombres dont la nature (nombres entiers naturels, fractions) et le rôle (fractions associées tantôt au dividende, tantôt au diviseur) varient. Liberté est toutefois laissée aux étudiants en formation quant à cette formulation : on ne parle pas de réalisme. Ici aussi toutefois, tout comme dans le premier cas, les problèmes à contexte formulés par les futurs enseignants sont souvent des problèmes réels ou réalistes.

Dans cet exemple, on ne demande pas, par ailleurs, de faire appel à un modèle conceptuel donné, l'idée étant de faire émerger de la discussion, lors du retour, les limites éventuelles de certaines contextualisations, notamment le modèle conceptuel sous-jacent, dans le passage aux opérations sur les rationnels. Ainsi, un modèle partage formulé sur les entiers naturels sera difficilement extensible aux rationnels.

Une différence encore plus importante apparaît dans la manière dont la contextualisation est *abordée ici en matière de progression* plutôt que de façon ponctuelle. Elle doit permettre une exploitation dans le temps. La contextualisation doit donc être envisagée dans cette idée de passage, de transformation de certains nombres à d'autres nombres, d'où la question formulée dans la tâche concernant l'anticipation du résultat d'un calcul à partir d'un autre résultat (c.-à-d. sans faire le second calcul au complet).

Une illustration est aussi appelée à jouer un rôle dans ce travail, et en ce sens on est en présence d'une présentation du problème qui n'est pas juste en mots, mais aussi imagée. Une *verbalisation* de cette progression est aussi demandée explicitant chacune des opérations et le passage de l'une à l'autre. Enfin, ce contexte est manifestement attaché au *travail de l'enseignant* et à l'activité professionnelle de préparation d'une suite de cours par l'enseignant.

Pour aller plus loin sur ce que met en jeu cet exemple, entrons plus à fond sur une analyse de la tâche.

3.2.2. Exigences et engagements dans la tâche, éclairage qu'ils amènent sur le plan de la contextualisation

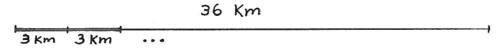
À la première étape, les futurs enseignants doivent formuler un problème à contexte, et anticiper le sens que cette formulation aura lorsque les nombres changeront par la suite. Ainsi, la situation de référence qui est élaborée doit être « plausible » pour tous les nombres proposés dans la tâche. Une nuance importante se fait ainsi par rapport à l'idée de réalisme présentée dans le cas précédent : c'est ici plus une question de *fécondité* par rapport à des *variations* du problème qui importe. Ces variations, on le comprend, permettent de jouer avec les exigences, sur le plan mathématique, d'un problème de division, qui doit être plausible à la fois pour un travail avec des nombres entiers naturels et des fractions.

L'enjeu de fécondité s'illustre assez bien avec l'exemple suivant. Un problème tel que « Marie fait des équipes dans sa classe, plaçant 3 enfants par équipe. Si 36 enfants sont présents, combien pourra-t-elle faire d'équipes ? », faisant appel au modèle conceptuel groupement de la division, sera difficilement récupérable quand on voudra travailler avec autre chose que des entiers. En revanche, la contextualisation suivante, faisant référence au même modèle conceptuel de la division, est beaucoup plus féconde au sens où il est possible d'en faire facilement des variations au niveau des nombres impliqués : « Jean parcourt chaque jour 3 kilomètres pour s'entraîner. S'il veut parcourir 36 kilomètres, combien de jours cela lui demandera-t-il ? ». Une réflexion sur les nombres prime dans le choix d'une contextualisation plutôt que l'autre : la première contextualisation met en jeu des quantités discrètes pour lesquelles l'extension aux fractions n'a pas grand sens, la deuxième réfère à des grandeurs continues pour lesquelles un fractionnement du tout est envisageable.

En sollicitant la production d'une illustration accompagnant le problème, une autre nuance fait jour. L'enjeu de contextualisation en lien avec la situation de référence

ne passe pas que par les mots. Elle se retrouve aussi dans d'autres éléments sur lesquels pourra s'articuler le travail mathématique (ici l'illustration). Fournir une illustration permettant de travailler le problème (en effet, il ne s'agit pas d'illustrer la situation de manière décorative!) exige donc, d'une part, de contextualiser de telle sorte que les éléments clés du point de vue mathématique soient représentés ou manipulables, que l'on puisse voir/faire la division avec/dans l'illustration. D'autre part, l'inscription dans une certaine progression (marquée ici par un changement dans les nombres) exige aussi de cette illustration qu'elle soit aisément ajustable.

Ainsi, le problème de course peut être richement illustré de la manière suivante, l'illustration permettant facilement de visualiser l'opération en jeu et le résultat (voir figure 3) :



**Figure 3.** Illustration pour  $36 \div 3$ 

On peut visualiser un parcours total de 36 kilomètres ainsi que la mesure de 3 kilomètres, une amorce de répétition de cette grandeur, qui permet de représenter le problème, mais aussi de travailler sa résolution. La répétition de la grandeur 3 kilomètres sur l'illustration dans le parcours global de 36 kilomètres fait bien voir le modèle conceptuel de la division sous-jacent, soit celui de groupement. Elle peut aussi se révéler utile à l'explication du quotient : « 3 kilomètres » est répété 12 fois pour atteindre 36 kilomètres, nous avons 12 fois 3 km dans 36 km.

Qui plus est, le passage de l'opération «  $36 \div 3$  » à «  $36 \div \frac{1}{4}$  », le point (b) de la tâche (voir figure 4), se fait assez bien. Si le problème devient « Jean parcourt chaque jour  $\frac{1}{4}$  de kilomètre... », la résolution pourra par exemple s'appuyer sur les raisonnements suivants, verbalisés en contexte, mais aussi *en lien* avec celui développé avec «  $36 \div 3$  » :

Si Jean parcourt quotidiennement  $\frac{1}{4}$  de kilomètre (au lieu de 3 kilomètres), il parcourt quotidiennement 12 fois moins de distance. On peut constater, dans l'illustration, que le  $\frac{1}{4}$  répété 12 fois pour atteindre 3 unités (figure 4), et on en déduit qu'on prendra donc 12 fois plus de temps pour parcourir la même distance :  $36 \div \frac{1}{4} = (36 \div 3) \times 12$ . La fécondité en lien avec les variations participe donc de manière forte à l'idée de progression discutée précédemment.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> De manière plus générale, on pourrait parler du *matériel didactique* proposé afin de s'engager dans un problème (de division, par exemple). Des exemples de telles tâches référant à l'algorithme de calcul de la division sont fournies dans Bednarz *et al.* (1995).

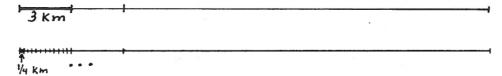
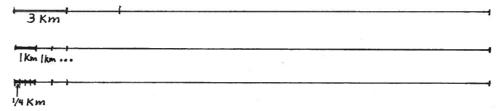


Figure 4. Passage de  $36 \div 3$  à  $36 \div 1/4$ 

Mais elle s'incarne aussi dans la possibilité *d'utilisations alternatives* de la contextualisation pour travailler mathématiquement. Ainsi, la situation de référence et l'illustration choisie ici sont particulièrement riches en ce qu'elles permettent d'autres lectures (voir figure 5). On peut par exemple passer de (a) à (b) par un intermédiaire et raisonner ainsi : au lieu de parcourir 3 kilomètres par jour, si Jean parcourt 1 kilomètre, il parcourt 3 fois moins de kilomètres qu'en (a), et il lui faudra donc 3 fois plus de temps pour parcourir la même distance. S'il parcourt maintenant 4 fois moins de kilomètres par jour (le 1/4 est ici vu comme 1/4 de 1 kilomètre), il prendra 4 fois plus de temps que s'il avait parcouru 1 kilomètre par jour, d'où :  $36 \div \frac{1}{4} = (36 \div 3) \times 3 \times 4$ . L'illustration qui appuie ce raisonnement (figure 6) met en évidence la grandeur intermédiaire (1 kilomètre, répété 3 fois) et le  $\frac{1}{4}$  (répété 4 fois dans ce 1 kilomètre) :



**Figure 5.** Passage de  $36 \div 3$  à  $36 \div \frac{1}{4}$  en passant par un intermédiaire

Le même type de travail peut être envisagé dans le passage à (c), avec le nombre 3/4 comme diviseur. Revenant à (a), on pourrait ainsi se dire que « Si Jean parcourt une distance de ¾ kilomètres quotidiennement, il parcourt 4 fois moins de kilomètres » que s'il en faisait 3 (3/4 est vu comme ¼ de 3 kilomètres), donc ça va lui prendre 4 fois plus de temps pour parcourir la même distance : 36 divisé par ¾ = (36 divisé par 3) × 4. Partant plutôt de (b) on pourrait raisonner (avec l'illustration, toujours) « Si Jean parcourt ¾ de kilomètre quotidiennement, il parcourt une distance 3 fois plus grande que lorsqu'il en faisait 1/4 » (3/4 de kilomètre est vu comme 3 fois ¼ de kilomètre), donc ça lui prendra 3 fois moins de temps pour parcourir la même distance : 36 divisé par ¾ = (36 divisé par ¼) divisé par 3.

Et il en va de même si on passe à (d) avec «  $36/5 \div \frac{3}{4}$  » (p. ex., partant de (c) : « Jean doit parcourir une distance de 36/5 km, une distance 5 fois plus petite, s'il parcourt chaque jour  $\frac{3}{4}$  km, ça va lui prendre 5 fois moins de temps pour parcourir une distance 5 fois plus petite ») : 36/5 divisés par  $\frac{3}{4}$  = (36 divisé par 3/4) divisé par 5.

L'articulation entre ces différentes manières de voir ou de traiter le problème conduit à un travail sur le sens de la fraction (vue ici comme partie d'un tout, le tout pouvant varier selon la modélisation, par exemple ¾ peut être vu comme ¼ de 3 km ou 3 fois ¼ de km). Des nuances peuvent aussi être mises en évidence concernant les difficultés à mener à terme un raisonnement en fonction de la contextualisation choisie. Par exemple, on peut tout à fait raisonner sur la fraction 36/5 en la prenant comme « 36 fois 1/5 de kilomètre, ou encore 7,2 kilomètres », mais la représentation et l'anticipation du résultat deviennent alors un peu plus difficiles.

Une anticipation apparaît nécessaire de la part de l'étudiant en formation, ce dernier devant faire sens de ces variations de nombres et d'opérations sur ces nombres dans/avec l'illustration, dans la verbalisation, dans l'histoire.

### 3.2.3. Imbrication dans un environnement contextuel

En seconde analyse, nous pouvons voir dans l'exemple qui précède toute *l'importance du jeu qui s'établit entre les différents éléments de contextualisation mobilisés dans une tâche, et qui sont imbriqués les uns aux autres* :

- La formulation en mots d'un énoncé évocateur d'une certaine « histoire », accompagnant et posant le problème à résoudre, et à laquelle on pourra se référer pour donner sens à l'opération et au passage d'une expression à l'autre (c.-à-d. lorsque les nombres sont modifiés);
- Un modèle conceptuel de l'opération : l'étudiant en formation doit considérer, dans cette formulation en mots qu'il a produite, un modèle conceptuel (ici une division-groupement);
- Une illustration : il faut là aussi pouvoir reconnaître dans cette illustration un modèle conceptuel et donner sens aux transformations sur les nombres permettant de passer d'une opération à l'autre. Le travail sur l'illustration, autant dans le cas de la division sur les entiers naturels (figure 3) que dans les passages aux autres nombres (figures 4, 5), montre bien en effet comment ce modèle conceptuel de la division (groupement) est sollicité dans l'action, avec et dans l'illustration, et comment la transformation d'un nombre en un nouveau nombre est mise en évidence.
- Une verbalisation des nombres et des opérations réfère à l'histoire (action, personnages, lieu...), mais aussi à l'illustration. Connotée du point de vue de la situation et appuyée par des gestes sur l'illustration, elle permet de mettre en évidence des raisonnements clés dans les passages d'une opération sur les nombres à l'autre.

Nous parlerons en ce sens d'*environnement contextuel* plutôt que de « contexte » pour bien traduire cette imbrication de différents éléments, et qui *peut inclure* un « habillage du problème » autour d'une situation de référence. En effet, nous voyons ici s'esquisser une nuance importante concernant non seulement le « réalisme » de ces situations de référence, mais aussi leur présence même au sein d'un environnement contextuel donné. Ainsi, une situation de référence fantaisiste ou peu vraisemblable pourrait très bien, dans le cadre de la tâche présentée ici, satisfaire aux exigences en ce qui concerne la fécondité, et pour cette raison être retenue par la formatrice comme un « bon » exemple de contextualisation. D'autre part, la tâche proposée à la figure 2 s'inscrit dans une série d'activités où la référence à une situation (une histoire) n'est pas toujours présente (voir à ce sujet pour plus de détails, Bednarz, Gattuso et Mary, 1995).

Dans toutes ces tâches, *la contextualisation est pensée en fonction d'un travail dans le temps*: il s'agit en quelque sorte *d'installer un terrain de familiarité et d'explorer cet environnement contextuel afin d'en percevoir ses possibilités sur le long terme*. Ultimement, cette inscription dans le temps a aussi pour objectif de faire émerger la *nature générique des raisonnements* développés dans un environnement contextuel particulier (le raisonnement mené sur des nombres particuliers, connotés dans la situation, permettant par exemple de passer de 36 divisé par 3 à 36 divisé par <sup>3</sup>/<sub>4</sub>, est un raisonnement plus général).

L'aspect de la *verbalisation* se distingue également comme élément de contextualisation. Si l'environnement contextuel, avec ses différentes dimensions, peut servir d'amorce ou de motivation pour donner un sens à l'opération, c'est sa fonction comme encouragement au travail mathématique et à son développement dans le temps qui est mise de l'avant. Les verbalisations associées pour penser le passage de certains nombres à d'autres nombres sont sollicitées : différentes verbalisations de la fraction (par exemple 3/4 km est verbalisé comme ½ de 3 km ou 3 fois ½ de 1 kilomètre), des verbalisations de la relation entre le diviseur initial et le diviseur transformé ainsi que de son effet sur le quotient (en référence à la situation et dans/sur l'illustration) - par exemple 4 fois moins de distance parcourue quotidiennement si au lieu de parcourir 3 km, on parcourt ¾ km, donc 4 fois plus de temps pour parcourir la même distance), etc.

L'environnement contextuel tel que mis de l'avant ici vise une certaine déconstruction ou reconstruction du calcul et de façons de lui donner sens. On verbalise des raisonnements et des manipulations de façon variée, mais aussi les liens entre eux dans le passage d'une manipulation ou d'une opération à l'autre. La déconstruction passe donc par une complexification dans les manières de voir (p. ex. les opérations ou même les nombres, à travers différentes interprétations du nombre <sup>3</sup>/<sub>4</sub> par exemple) autant que par une diversification des manières de faire (p. ex. de résoudre un problème donné).

La contextualisation n'est pas détachée des concepts en jeu et de leur analyse : elle vise à donner un sens aux concepts en *servant de support* au raisonnement, et à faire avancer conceptuellement par le jeu de déconstruction-reconstruction sollicité par les variations introduites dans l'environnement contextuel.

3.2.4. Bilan sur le second cas : quel sens prend, dans l'action, la contextualisation ? Quelle fonction ?

À la lumière de ce qui vient d'être présenté, la contextualisation qui émerge de l'étude de ce cas renvoie à :

- Différentes dimensions : une formulation accompagnant le problème référant à une histoire, des personnages, une action ; des nombres connotés dans la situation ; un modèle conceptuel ; une illustration ; une verbalisation<sup>8</sup>.
- Une imbrication profonde de ces différentes dimensions conduisant à des environnements contextuels dépassant de beaucoup le simple « habillage » du problème.
- Un accent mis sur la fécondité de ces environnements en fonction des variations possibles et de la diversité du travail mathématique qu'on pourrait y réaliser.
- Une dynamique pensée dans le temps, l'environnement contextuel étant appelé à bouger tout au long d'un processus (on peut parler en ce sens d'une sorte de contextualisation-recontextualisation): des variations qui obligent à repenser cet environnement contextuel (l'histoire, l'illustration, les visualisations possibles, le matériel, les verbalisations associées).
- Une activité mathématique riche et complexe sollicitée dans ces environnements contextuels mettant en jeu une flexibilité dans l'interprétation, dans les raisonnements, dans les passages, et où la contextualisation sert de support et joue un rôle « pivot ».

L'intention de la formatrice est ici de pousser le travail sur les environnements contextuels avec les futurs enseignants le plus loin possible. Elle cherche à confronter le futur enseignant, dans l'action et le retour, à ce qu'un tel travail exige du point de vue de la préparation : une anticipation (p. ex. d'un problème en mots et d'une illustration plausibles pour tous les nombres considérés) ; une réflexion sur les choix (de situations de référence, d'illustrations, de matériel..., p. ex. sur les possibilités, les difficultés particulières, les limites) ; une reconstruction des concepts impliqués (p.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> Pourrait s'y ajouter également une dimension matérielle comme le montrent d'autres exemples exploités dans le même cours à propos de l'algorithme de division. Le travail demandé sollicitera la formulation et un recours à un matériel pour appuyer la verbalisation d'une division sur certains nombres, multibases, jetons de couleur, abaque, etc. (voir Bednarz *et al.*, 1995).

ex. du sens accordé aux nombres ou à l'opération); une explicitation des raisonnements ou d'actions mathématiques (p. ex. pour résoudre un problème à partir d'un autre, pour passer d'une opération sur des nombres à l'autre, ou avec un matériel donné). Percevoir la richesse et la complexité des significations en jeu afin de mettre en valeur l'activité mathématique elle-même est ici fondamental. Ce n'est pas le résultat de 36 divisé par ¾ qui est intéressant, mais la multitude de manières dont on peut arriver à ce résultat de manière « parlante » à travers les éléments du contexte. Ainsi, contrairement au premier cas, c'est moins une prise de conscience des variables didactiques qui est visée que l'habileté à prendre appui sur les éléments de contextualisation pour penser le travail mathématique (par exemple, le passage d'opérations sur les nombres naturels à des opérations sur les nombres rationnels).

Les deux cas abordés jusqu'ici s'appuient essentiellement sur une analyse de pratiques de formation autour de quelques tâches. Nous proposons à la section suivante un troisième cas, que nous regarderons cette fois également à travers sa mise en œuvre auprès de futurs enseignants.

# 3.3 Cas 3 : Apprendre à exploiter (comme apprenant/comme enseignant) un contexte qui émerge

Au Québec, la formation des enseignants du primaire est offerte à l'intérieur de programmes de premier cycle universitaire d'une durée de quatre ans dédiés entièrement à l'éducation préscolaire et à l'enseignement au primaire. Le troisième cas est tiré du premier cours obligatoire de didactique des mathématiques que doivent suivre les futurs enseignants du primaire à l'UQAM, soit un cours de 45 heures de didactique de l'arithmétique.

Ce cas est développé autour de la division avec reste et ses algorithmes, incluant celui traditionnellement enseigné au Québec. Nous débutons par la présentation d'une tâche typique de ce qui se fait dans le cadre de cette pratique, suivie d'une analyse d'événements observés lors de sa réalisation avec un groupe d'étudiants.

# 3.3.1 La tâche proposée aux étudiants : un jeu de rôles autour de l'opération de division

La tâche proposée consiste en fait en un *jeu de rôles* (Lajoie et Pallascio, 2001; Lajoie, 2009). Ce jeu (voir figure 6) vise à travailler avec les étudiants l'intervention de l'enseignant – sur le moment – face à des erreurs liées à l'utilisation de l'algorithme traditionnel de division sur les entiers. Ce n'est toutefois pas sous cet angle que nous le développerons ici, mais davantage sous celui des contextes qui émergent en classe lorsque les étudiants abordent ce jeu de rôles.

Des élèves d'une classe de 3e cycle (10-12 ans) ont travaillé à résoudre différents problèmes impliquant des nombres rationnels, et ils font maintenant une mise en

commun de leurs résultats. On observe des erreurs mathématiques dans leur approche. Mia et Félix, par exemple, ont fourni des solutions erronées à la question :

La réponse suivante à une division a été fournie par un élève. Peux-tu trouver son erreur ?

$$18\ 181 \div 9 = 22,111\ reste\ 1.$$

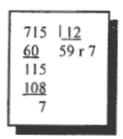
Solution de Mia : Nous avons trouvé l'erreur. Il aurait dû obtenir 2 020 reste 1/18 181.

Solution de Félix : Nous avons trouvé l'erreur. Il aurait dû obtenir 2 020 reste 0,111...

Un enseignant/acteur (choisi pour le jeu de rôles) aura quelques minutes pour amener un élève/acteur (choisi pour le jeu de rôles) à résoudre correctement le problème précédent tout en partant de la démarche de l'élève/acteur, en construisant à partir de sa manière de concevoir le problème et non en repartant à zéro.

Figure 6. Une tâche de jeu de rôles proposée aux futurs enseignants du primaire

Cette tâche est présentée aux étudiants du cours de didactique de l'arithmétique au primaire après qu'on leur ait demandé de lire à la maison un texte de G. Boulet (1998) portant sur la division. L'intention de la formatrice en proposant cette lecture préalable au jeu de rôles est de sensibiliser les étudiants au fait que (a) la division est un concept complexe à ne pas confondre avec celui d'algorithme de division, que (b) deux modèles conceptuels peuvent intervenir quand il est question de division. Elle souhaite aussi qu'ils réalisent que (c) il est possible, et même avantageux, lorsqu'on introduit un algorithme de division, de verbaliser chacune des étapes en cohérence avec un contexte donné, plutôt que de manière détachée ou incohérente avec celuici. En effet, l'article confronte les étudiants à certaines incohérences entre la verbalisation routinière de l'algorithme traditionnellement enseigné au Québec et les contextes sur lesquels on a tendance à s'appuyer, comme enseignants, pour enseigner la division. L'auteure mentionne ainsi que de futurs enseignants à qui on demande de créer une « mise en situation adéquate » qui permet de donner du sens à l'algorithme fournissent généralement un problème de division-partage (impliquant par exemple le partage équitable de pommes entre un certain nombre de personnes), alors qu'ils verbalisent l'algorithme en utilisant plutôt un langage faisant appel au modèle groupement. Ainsi, le calcul suivant (figure 7), accompagné d'une mise en situation dans laquelle on demande « Combien de pommes Marie devra donner à chacun de ses 12 invités sachant qu'elle a 715 pommes », s'accompagne généralement d'expressions telles que : « combien de 12 rentrent dans 71 ? » ou encore « 12 va 5 fois dans 71 ».



**Figure 7.** Une variante de l'algorithme de division (tiré de Boulet, 1998, p. 17)

Cela dit, la tâche de jeu de rôles proposée aux étudiants ne fait pas mention explicite de ce texte, ni des enjeux auxquels on a voulu les sensibiliser (voir figure 7). On remarque aussi que, contrairement aux deux premiers cas rapportés, la tâche ne fait pas appel à une contextualisation par rapport à une situation de référence ou à un matériel didactique, et qu'il n'est pas non plus question d'un modèle conceptuel sur lequel l'opération pourrait s'appuyer. Certaines dimensions de contextualisation sont tout de même présentes dans la tâche : les nombres impliqués dans la division n'ont rien d'anodin et les erreurs commises par Mia et Félix (figure 6) sont exprimées sous des formes qui résultent d'un choix de la formatrice. Les nombres retenus pour le diviseur et le dividende ont pour fonction d'amener les étudiants à explorer et à se questionner sur la division avec reste et les erreurs fournies ont été choisies de manière à ce qu'au cours de son intervention l'enseignant puisse difficilement se contenter d'exprimer le reste sous la forme d'un entier (soit ici 18 181  $\div$  9 = 2 020 reste 1), étant plutôt guidé vers un développement du quotient sous une forme décimale ou fractionnaire (18 181,111 1... ou 18 181 et 1/9). On réalise avec ceci que ce ne sont pas simplement les nombres impliqués qui participent à l'élaboration d'un environnement contextuel, mais aussi la forme d'écriture de ces nombres. Se dégage aussi peu à peu, comme nous le verrons plus loin, l'idée selon laquelle un algorithme peut lui aussi devenir l'élément central d'une contextualisation, au même titre qu'un matériel de manipulation ou une situation de référence

3.3.2 Engagement dans la tâche : une incursion dans des données de recherche

Nous souhaitons, pour la suite de l'analyse de ce cas, nous concentrer davantage sur les dimensions du contexte qui émergent du travail des étudiants. Nous avons choisi de reprendre des données de recherches, qui ont déjà été analysées sous un autre angle dans Lajoie et Maheux (2013), afin d'illustrer la construction d'une contextualisation n'ayant pas été explicitement sollicitée par la formatrice ou par la tâche, et analyser la manière dont ce contexte est exploité dans l'action.

L'extrait suivant, qui s'accompagne du calcul présenté à la figure 8, met en scène Dominique, une future enseignante jouant ici le rôle d'une élève devant expliquer ce

qui l'amène à croire que le quotient recherché est « 2 020 reste 1/18 181 » (la solution de Mia, figure 6). Dans cet extrait, l'élève Dominique introduit d'elle-même une idée de *partage* de bonbons entre 9 amis, une situation de référence qu'elle évoquera tout au long de son travail sur l'algorithme.

Dominique: Donc, ici je veux diviser un bonbon en 9 amis, j'peux pas. J'vais descendre mon 1 et mon 8, maintenant j'ai 18 bonbons en 9 amis; ils vont en avoir 2 chaque. J'vais faire la soustraction. Ensuite, je descends mon 1. Si j'veux diviser un bonbon encore, comme tantôt, en 9 amis... ben j'ai mis un 0 là, ben j'vais en mettre un là. Je vais descendre mon 8. Si j'veux diviser mon18 bonbons en 9 amis, ils vont en avoir 2 chaque encore. 18 – 18 = 0. Il me reste 1 à descendre. Si j'veux diviser 1 bonbon en 9 amis, ça (ne) marche pas [elle ajoute un 0 à son quotient]. Pis en fait, tu peux pas le diviser encore donc le 1... il me reste 1 bonbon à diviser sur 18 181. Reste 1 bonbon à diviser sur heu... [elle ajoute le mot « reste » entre 02 020 et 1/18 181]

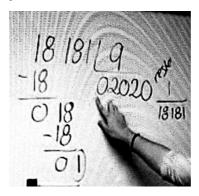


Figure 8. Calcul réalisé par Dominique au tableau

Des éléments de contextualisation qui se superposent

Il est difficile de savoir pourquoi Dominique introduit ici un partage de bonbons entre amis. Est-ce en relation avec la lecture qu'elle a faite de Boulet (1998)? Est-ce dans le but d'ancrer sa verbalisation de l'algorithme? Quoi qu'il en soit, cet élément de contextualisation ne semble pas jouer un rôle déterminant dans la verbalisation qui l'accompagne, soit un discours en apparence routinier et portant essentiellement sur les chiffres (les symboles) en présence. En effet, on ne peut pas dire que Dominique s'appuie de manière très éloquente sur la situation de référence que présente le partage de 18 181 bonbons entre 9 personnes pour faire sens de la division avec l'algorithme. Une lecture attentive de sa verbalisation révèle en fait plusieurs dimensions de l'environnement contextuel en jeu dans cette verbalisation qui parfois se complètent, parfois se superposent tout simplement : on se retrouve à la fois dans un contexte général de *partage*, mais aussi dans un contexte plus particulier de *partage de bonbons*, tout en étant plongé dans un contexte *algorithmique*.

Le modèle conceptuel de la division-partage « colle bien » avec l'idée de répartition de bonbons, et la verbalisation est aussi assez cohérente avec ce modèle (c'est du moins ce que suggère l'emploi de l'expression « divisé en » plutôt que « divisé par »). Par contre, s'il n'y a pas de contradiction évidente, on voit tout de même très peu intervenir la situation de référence dans le raisonnement sur l'algorithme, les deux semblant fonctionner de manière indépendante. Dominée par la dimension algorithmique, la verbalisation devient problématique lorsque, par exemple, les quantités de bonbons ne collent pas à la valeur du dividende (plutôt que 18 bonbons à la première étape il faudrait parler de 18 000 bonbons). Il y a aussi plusieurs étapes qui sont verbalisées sans qu'il leur soit donné un sens en lien avec le partage de bonbons (que signifie « descendre mon 1 » ?). Ainsi, l'histoire évoquée, soit le partage de bonbons, apparaît plutôt accessoire puisque ni le raisonnement de l'élève ni sa verbalisation ne semblent s'y appuyer, du moins à cette étape. Cette distance nous conduit donc à nuancer l'idée d'imbrication discutée au cas précédent. L'idée d'une distribution de bonbons est pour ainsi dire occultée par la dimension algorithmique où l'action de « descendre 1 » prend tout son sens.

Cette étape du jeu de rôles a le potentiel de mettre les futurs enseignants au défi de soutenir un raisonnement et une verbalisation par des éléments de contextualisation qui émergent naturellement dans l'action. En effet, si l'imbrication des différentes dimensions d'une contextualisation semble aller de soi lorsque celle-ci est le fruit d'une analyse didactique préalable, comme on a pu le voir dans le deuxième cas, cette articulation présente un défi de taille lorsque certains de ses éléments sont décidés dans l'action. Si l'article de Boulet pouvait déjà sensibiliser les futurs enseignants à cette question, vivre (pour ceux qui jouent) ou même observer (pour ceux qui assistent) l'importance de cette imbrication est tout autre chose.

Émergence, enrichissement et raffinement, dans l'action, d'un environnement contextuel susceptible d'appuyer l'intervention

À la suite de l'explication de « l'élève » Dominique, Justine, qui joue le rôle de l'enseignante, est plongée dans une contextualisation dont certaines dimensions ont été introduites par l'élève : en particulier le modèle partage de la division, et le fait que ce partage se fasse sur un certain nombre de bonbons avec un certain nombre de personnes. L'enseignante Justine a donc ici une occasion de tirer profit de la contextualisation en émergence pour appuyer son intervention auprès de Dominique. Elle pourrait par exemple tirer profit du contexte de partage de bonbons pour :

- Amener l'élève Dominique à réaliser qu'elle commet une erreur dans l'expression du reste, par exemple en abordant sa manière d'interpréter le reste ou son écriture;

- Verbaliser ou illustrer (ou amener l'élève à le faire) les étapes de l'algorithme jusqu'à l'obtention du quotient, par exemple, en se demandant à chaque étape combien (de milliers, de centaines, de dizaines...) de bonbons recevra chacune des 9 personnes.
- Amener l'élève à exprimer le reste sous forme fractionnaire (\*) ou décimale, à interpréter une période (dans le quotient exprimé sous forme décimale);

Au cours de son intervention, Justine propose plutôt de modifier la situation de référence en changeant les bonbons pour des chocolats, la rendant peut-être mieux adaptée au travail de partage du reste. Il est en effet plus facile d'imaginer le partage d'une tablette de chocolat en 9 parties égales que celui d'un bonbon! Ce faisant, l'enseignante Justine reste donc essentiellement dans la contextualisation proposée et, nous allons le voir, la développe en y ajoutant une illustration, et une verbalisation contextualisée, du travail sur le reste (en partie reprise par Dominique). L'imbrication de différents éléments de l'environnement contextuel se met donc peu à peu en place, structurant la verbalisation, et soutenant les raisonnements de l'élève Dominique et de son enseignante Justine:

Justine : Ok. Par 9 personnes. Donc, s'il me reste une barre de chocolat, pis j'veux pu qui m'en reste. Moi, j'veux pu rien avoir, j'veux tout distribuer ; je suis très généreuse. J'veux pu qui m'en reste. Par quoi j'pourrais diviser ma barre de chocolat ?

Dominique : Ben... heu... j'vais la séparer en 9 parties, pour en donner une à chaque personne

Justine : Une à chaque ami. C'est vrai. Donc, si on illustre ça, c'est comme si tu disais 1 à 9. (Frédérique : Ouais) Comment j'pourrais l'illustrer ? Est-ce que je pourrais l'illustrer ...

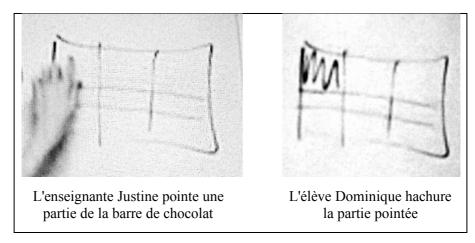
Dominique : Ben j'ai une barre de chocolat là, je la divise en 9... en parties égales. [Elle dessine une barre de chocolat de forme rectangulaire au tableau et la divise en 9, soit en 3 rangées et 3 colonnes]

Justine : Ouais. Donc, j'aurais... il m'en reste une... donc une partie... [Justine pointe avec insistance une des neuf parties de la barre, à la suite de quoi Frédérique hachure cette partie] ... sur 9. Ok donc, on pourrait illustrer ça sous forme de fraction...

Dominique : Ouais Justine : Qui serait ?

Dominique : 1 sur 9 [Elle l'écrit au tableau]

Justine : Donc, comme je ne veux plus qu'il m'en reste, chaque personne va avoir 2 020 barres de chocolat et un morceau sur la dernière barre qu'il me reste.



**Figure 9.** Introduction par Justine d'une illustration dans l'environnement contextuel

On constate que la verbalisation de Justine s'articule aux autres éléments de la contextualisation, en particulier à la situation de référence évoquée et à l'illustration qu'elle trace au tableau (figure 9). Le travail semble néanmoins par moments hasardeux : à la fin de l'échange, l'enseignante Justine paraît confondre ce qu'il reste suite au partage de 1 9191 barres en 9 (soit une barre) avec la partie de la barre qu'elle donnera à chacun suite au partage de ce reste (soit un neuvième). Comme si elle prenait conscience de cette confusion, elle reprend sa verbalisation lors du dernier énoncé (« chaque personne va avoir 2 020 barres de chocolat et un morceau sur la dernière barre qu'il me reste »). On peut penser que l'illustration ajoutée au problème est pour quelque chose dans cette prise de conscience : c'est bien *le reste* qui été représenté et partagé, et l'environnement contextuel *en garde la trace*.

Du point de vue de l'action, le côté vivant de la contextualisation joue donc de manière particulière sur différents niveaux. D'une part, cette contextualisation se transforme, se développe et se raffine, les ajustements successifs pouvant permettre une meilleure imbrication des éléments qui la composent. On constate aussi que cette évolution est elle-même « contextualisée » au sens où elle se fait en fonction de ce qui devient le point d'intérêt du travail en cours. Ici, les étudiantes ne sont pas revenues sur l'utilisation de l'algorithme, satisfaites de travailler au niveau du reste, soit au niveau de l'élément qui posait problème de manière peut-être plus évidente. Enfin, on retiendra la fonction de mémoire de certains éléments de l'environnement contextuel, qui peuvent contribuer à faire sens des idées en jeux.

Une discussion très riche pourrait aussi avoir lieu ici concernant la préservation et la transformation d'une contextualisation donnée. L'ajout de marques sur l'illustration (figure 9) ne constitue-t-il pas lui-même un enrichissement ? Une contextualisation

peut-elle devenir trop riche, trop structurée ? Quels risques y a-t-il à trop s'éloigner, ou à trop peu s'éloigner de ce qui est proposé comme environnement de départ ? La sous-section suivante s'intéresse particulièrement à cet aspect, que nos observations en classe ont permis de mettre en lumière.

Un environnement d'appui à l'intervention qui présente à la fois des possibilités et des limites

A la suite de l'expression du quotient sous forme fractionnaire, l'enseignante Justine propose à l'élève Dominique d'exprimer le quotient sous forme décimale. Elle s'appuie alors sur le travail réalisé précédemment et sur le contexte ayant émergé de l'action pour guider le travail de l'élève :

Justine : On a divisé ma barre de chocolat qu'il me restait tantôt en 9, donc c'est comme 1 divisé par 9, donc je pourrais le représenter sous forme décimale.

Dominique: Tu veux que je fasse la division?

Justine: Oui.

Dominique se met alors au travail, et produit au tableau (figure 10) un résultat qui ne semble pas convenir à l'enseignante Justine.

**Figure 10.** Division produite au tableau par l'élève Dominique :  $1 \div 9$ 

Cette dernière lui propose alors de faire le calcul avec des nombres plus gros, soit 100 et 90, dans lequel Dominique s'engage avec une verbalisation portant uniquement sur les nombres (par exemple : « 9 entre dans 10 une fois et il me reste 1 ») ... sans beaucoup plus de succès. On constate donc que le travail au tableau passe ici à une contextualisation dominée par les aspects numériques et algorithmiques : la situation de référence et l'illustration ne sont plus sollicitées. Il est intéressant de mettre en lien cette transformation avec la difficulté algorithmique, justement, observée dans le résultat (partiel) de « 0,10 » d'abord obtenu par Dominique. Au moment où un retour à l'illustration d'une barre de chocolat aurait pu aider à faire voir la nuance entre la division par neuf, le fractionnement de l'entier en dixièmes, et la nature du reste (un dixième), c'est plutôt une centration sur l'algorithme et sur les nombres qui prend le dessus. L'aspect algorithmique est même tellement dominant que le problème de l'équivalence entre les deux calculs proposés  $(1 \div 9 \neq 100 \div 90)$ 

n'est relevé par aucune des deux étudiantes. Qui plus est, Justine et Dominique semblent rapidement se trouver dans une impasse, toutes deux face à un résultat qui les laisse coites, jusqu'à l'intervention de la formatrice qui revient avec elles sur le modèle partage de la division :

Formatrice : Dans un de mes groupes, quand l'élève est arrivé à son reste 1 [figure 10] il s'est passé quelque chose d'intéressant... quelque chose d'imprévu surtout aux yeux de l'enseignante : l'élève a partagé son reste en 10 plutôt qu'en 9 ! Qu'est-ce que vous en pensez ?

Une discussion s'enclenche alors et la classe est amenée à voir le fait que le fractionnement en dix du morceau qui reste permet de distribuer de manière récursive un morceau (à chaque fois de plus en plus petit) à chacune des 9 personnes : 1/10, puis 1/100, puis 1/100, etc., ce qui permet d'écrire la part de chacun sous forme décimale ( $18181 \div 9 = 2020,111...$ ). La conversation avec le groupe s'est poursuivie encore un peu plus loin, amenant les étudiants à reconnaître des égalités surprenantes telles que « 1/9 = 1/10 + 1/100 + 1/1000 + ... » ou encore « 1 = 0,9999... ». À cette étape, l'intention rapportée par la formatrice est d'amener les étudiants à percevoir la richesse d'un contexte *a priori* très simple ... les amener à voir jusqu'où on peut aller dans l'enseignement du concept de division en s'appuyant sur le modèle partage.

Évidemment, il ne s'agit pas de dire que la recontextualisation proposée par Justine est « mauvaise » en soi. Un travail signifiant sur l'algorithme lui-même aurait probablement pu conduire à une prise de conscience par rapport à la difficulté en cours, par exemple en identifiant la position des unités, dixièmes, centièmes. De même, se pencher sur les nombres n'est pas non plus sans possibilité : par exemple, obtenir le résultat «  $100 \div 90 = 1$  reste 1 » pour ensuite raisonner sur ce qui est attendu de  $1 \div 9$ , soit un quotient et un reste dix fois plus petits. Par contre, on constate un éloignement graduel par rapport au travail précédent qui, naturellement, rend de plus en plus exigeant le retour aux contextualisations antérieures et à l'utilisation des traces laissées par ce travail. Ainsi, non seulement transformer un environnement contextuel pour avancer dans le travail mathématique ne va pas de soi, mais ces transformations peuvent aussi conduire à une sorte « d'égarement contextuel », un passage où on ne parvient plus à mettre en relation les différents éléments en présence de manières signifiantes, si bien que, devant cette confusion, on se trouve pour ainsi dire sans mots, ne sachant plus « de quoi on parle ». Développer une certaine aisance à faire (re-)émerger dans l'action un environnement contextuel productif à partir des éléments en présence est un enjeu de formation de taille dont, par cette analyse, nous commençons tout juste à prendre conscience.

Enfin, notons que l'anecdote proposée par la formatrice dans le dernier extrait a aussi

pour effet de ramener dans la conversation la question du réalisme de la référence à une situation du quotidien. Immanquablement, les étudiants réagissent au partage récurrent en 10 parties d'une tablette de chocolat en soulignant que « dans la vraie vie, on ne va pas séparer une tablette en 10 pour la partager entre 9 personnes » et que « dans la vraie vie, le fractionnement du reste en 10 s'arrêterait un jour ; on ne ferait pas un partage à l'infini ». Cet aspect est alors repris sous l'angle des *limites nécessairement associées à une contextualisation*. Il est alors important pour la formatrice de souligner qu'en effet, aucune situation de référence, ni aucun environnement contextuel, ne permet de « couvrir » l'ensemble des possibilités mathématiques qui peuvent intervenir (par exemple : la division par 0 et le travail sur l'infini mathématique – voir à ce sujet Lajoie et Mura, 1994). Il y a en ce sens un intérêt à *pouvoir se détacher* d'une contextualisation donnée, passer de l'une à l'autre, et ainsi de suite.

# 3.3.3 Bilan sur le troisième cas : quel sens émerge de ce travail sur la contextualisation par les futurs enseignants ? Quelle fonction ?

Dans ce qui précède, nous avons examiné les contextualisations qui émergent sur le vif dans le travail d'étudiants en formation des maîtres. Les deux grands modèles conceptuels de l'opération ont été spontanément évoqués, de même que le recours à une situation de référence et à une certaine illustration (comme dans le deuxième cas). Nous avons aussi introduit l'idée d'algorithme comme élément de contextualisation en plus du travail sur les nombres comme tels. L'analyse fait ressortir que ces différentes dimensions se superposent dans l'action sans nécessairement être articulées entre elles. L'accent a surtout été mis cependant sur le défi de mettre en œuvre de manière productive ces environnements contextuels, de les transformer, de les enrichir et de faire usage, en même temps, des traces en présence. En même temps, nous avons vu que l'action « dans » et « avec » une contextualisation ne va pas sans le risque, la possibilité et la nécessité d'un certain détachement. Pour nous, une certaine familiarité avec les idées mathématiques en jeu est sans aucun doute un aspect important dans le développement de cette aisance et il nous apparaît essentiel de favoriser cette familiarité en formation en même temps que des compétences plus « didactiques » liées au travail éventuel avec les élèves.

#### 4. Discussion

À travers ce qui précède, dégager un sens à « contextualiser » se révèle une entreprise d'autant plus riche et nuancée qu'elle s'articule sur trois différents exemples de pratiques de formation dont nous avons cherché à reconstruire le récit. Un premier regard transversal sur ces exemples évoque tout d'abord des façons différentes d'approcher la contextualisation. Dans le premier cas, les futurs enseignants sont appelés à travailler avec des contextes et leurs éléments, un travail guidé par une préoccupation de la formatrice envers un choix éclairé de situations, que Vergnaud (2002) considère comme le « premier acte de médiation ». L'idée de travailler en contexte en exploitant à fond un environnement contextuel est davantage au cœur du deuxième cas, le souci de la formatrice étant alors de jouer sur le potentiel d'un tel environnement sur un long terme, de même que sur l'explicitation concernant l'exigence d'un tel travail. Avec ce cas, on se rapproche des travaux en cognition située. À titre d'exemple, des parallèles intéressants pourraient être faits avec la conceptualisation de l'instrument chez Rabardel (1995). Dans le troisième cas, c'est plus la métaphore de « bricolage d'un contexte », sur le coup, qui nous vient en tête en réaction à un événement qui se produit dans la classe, une idée qu'on retrouve dans de nombreux travaux autour des situations d'enseignement (dans Vergnaud (2002) et Rogalski (2003) par exemple). Ces travaux, développés pour parler de la classe, auraient donc également du potentiel du point de vue de l'analyse des dispositifs de formation des maîtres.

Qu'il s'agisse de l'un ou l'autre aspect, nous touchons là à des composantes essentielles, et complémentaires, de la pratique des enseignants. Ceux-ci sont en effet appelés, en amont du travail en classe, à choisir des situations appropriées pour aborder un contenu donné avec les élèves ou encore à concevoir une progression sur le long terme. Travailler « avec les contextes », ou « en contexte », s'attaque à ce travail essentiel de conception de l'enseignant, lié à la planification de son enseignement, ou d'anticipation de ce qui pourrait arriver avec les élèves. Dans le travail en classe, toutefois, l'enseignant doit aussi, et même surtout, réagir sur le moment, dans l'action, aux propos, aux erreurs et aux productions des élèves. Nous sommes alors sans doute plus près de l'idée d'un contexte bricolé, « sur le tas », de manière à rejoindre à la fois l'élève et le contenu abordé dans le cours. À travers ces différents moments, les exigences au regard de l'utilisation de contextes ne sont pas nécessairement les mêmes, et les exemples présentés soulignent à leur façon les différences dans les manières d'aborder ce travail avec les futurs enseignants.

Des nuances importantes émergent également de l'analyse des trois cas autour de la contextualisation. En voici quelques éléments.

Une première conceptualisation se présente en termes de problème « à contexte »

dans lequel l'opération mathématique apparaît comme une modélisation d'une situation de référence plus ou moins réaliste. Cette conceptualisation se complexifie par la prise en compte des modèles conceptuels sollicités, des nombres en jeux et de leurs rôles. Ces éléments montrent bien la dimension didactique de nos réflexions comme formateurs, celles-ci étant ancrées dans une analyse liée aux mathématiques, à leur apprentissage et à leur enseignement. Ces éléments peuvent être considérés comme contextes (conceptuels, numériques) pour l'opération qui nous intéresse, leur coordination dans ou avec la situation de référence contribuant à faire du travail de composition de problèmes une activité riche du point de vue de la formation. Cette richesse émerge, tout particulièrement à ce stade, du croisement entre, d'une part, une demande du PFEQ (programme de formation de l'école québécoise) à plonger les élèves dans des situations « proches de la vie réelle » et, d'autre part, une analyse didactique révélant des insuffisances du côté des problèmes tirés des manuels scolaires (concernant par exemple les modèles conceptuels de l'opération qui y sont sollicités ou encore le type de nombres en jeu). Un enjeu important apparaît concernant le développement d'un regard critique par cet enseignant face à cette « commande » institutionnelle. Cet enjeu n'est pas spécifiquement lié à la contextualisation, mais il prend prétexte d'une certaine manière de la contextualisation pour être mis en lumière. Une analyse de ceci du point de vue ergonomique de Rogalski (2003) serait particulièrement pertinente dans l'analyse des tensions en présence.

Un second regard sur l'idée de contexte a mis l'accent sur l'idée de progression à travers des contextualisations aux exigences variables où on parle plus justement d'un travail « en contexte » sur l'opération, par exemple en faisant appel au matériel didactique ou à la verbalisation. Penser alors en matière d'environnements contextuels permet d'intégrer ces éléments (matériels, communicationnels) à ceux précédemment identifiés (aspects référentiels, conceptuels, numériques), et de mettre en valeur l'imbrication profonde de ces composantes dans le travail mathématique. C'est alors la fécondité du point de vue du sens qui apparaît comme l'élément central, avec ses variations possibles et son développement potentiel dans le temps. Ces mouvements font apparaître de manière vivante un enjeu pour la formation, soit celui de contextualiser et recontextualiser sous un angle où la formulation de problèmes à contexte n'est qu'une possibilité parmi d'autres. Une attention grandissante portée sur le travail mathématique envisagé nous conduit à voir l'environnement contextuel en tant que support (au raisonnement, par exemple). L'enjeu de formation est alors pour nous du côté du développement d'une habileté à prendre appui sur les éléments de contextualisation pour penser l'activité mathématique. Les travaux en théorie de l'instrumentation évoqués plus haut (Rabardel, 1995) pourraient enrichir cette analyse du point de vue du potentiel pour l'action.

Notre troisième cas a été l'occasion d'examiner le travail de contextualisation d'étu-

diants en formation où le côté dynamique des environnements contextuels se manifeste de manière très fine. Contextualiser se révèle alors en tant que mouvement continuel de mise à contribution de différents éléments, de raffinement, d'enrichissement, de complexification ou de simplification d'un environnement contextuel. Le travail mathématique prend forme, s'inscrit, s'écrit dans/avec différentes traces qui composent alors un « texte » d'où l'on cherche à dégager une certaine cohérence (le mot contexte vient du latin com, 'avec, ensemble' et texere, 'faire, tisser'). Celle-ci peut être envisagée de différents points de vue : du côté mathématique, extra-mathématique, ou dans cette zone un peu floue qui les réunit, où on cherche à faire sens mathématiquement d'observations du quotidien (le partage de bonbons ou de barres de chocolat) ou à faire sens en regard du quotidien de phénomènes mathématiques (le fonctionnement d'un algorithme). Les nécessaires va-et-vient et la perméabilité entre différents points de vue dans l'action font apparaître le défi inhérent posé par le jeu d'ouverture et de contrainte au cœur de la contextualisation elle-même, dont les possibilités d'action et les limites déborderont toujours, dans l'action, l'analyse que l'on peut en faire *a priori*. Ceci nous amène à mettre en évidence un enjeu pour la formation, soit le développement d'une capacité à improviser, à réagir sur le vif par rapport à la fécondité d'une contextualisation en émergence où l'on souhaite pouvoir aussi bien se détacher que se rattacher à différents aspects. C'est le défi de développer une certaine aisance à faire (re)-émerger, dans l'action, un environnement contextuel porteur à partir des éléments en présence. Des travaux récents autour de l'improvisation pourraient fournir ici des pistes intéressantes afin d'approfondir cet aspect (p. ex. Holdhus et al., 2016).

Des éléments des contextes traversent les trois cas, notamment les modèles conceptuels de l'opération et les aspects numériques, qui constituent des points d'ancrage au travail fait avec les étudiants. Là encore, des nuances émergent de cette analyse. Une posture analytique sous-tend le travail mené avec les contextes dans le premier cas. La formatrice cherche à isoler les différents modèles conceptuels, les nombres en jeu (leur nature, leur statut, la grandeur relative du diviseur par rapport au dividende, etc.), de manière à ce que l'enseignant développe une sensibilité à la complexité des éléments en jeu et à ce qu'il puisse éventuellement prendre appui sur cette analyse pour faire des choix adéquats. Dans le deuxième cas, la limite d'un certain modèle conceptuel émerge et conduit à passer à un autre modèle plus approprié aux opérations qu'on cherche à aborder, en cernant la fécondité d'un tel modèle. C'est aussi davantage dans le passage et la transformation d'un nombre à l'autre que se joue le développement recherché. C'est ici le jeu d'un modèle à l'autre, d'un nombre à l'autre, qui constitue le point d'ancrage au travail des futurs enseignants. Dans le troisième cas, le modèle conceptuel mis en œuvre par les étudiants de manière émergente est vivant; implicitement, on passe d'un modèle à l'autre sans en être conscient, sans s'en rendre compte. C'est ce même jeu qu'on retrouve dans le travail sur les nombres ; on passe du travail sur des nombres à un travail sur des quantités de palettes de chocolat ou de bonbons sans nécessairement en être conscient. Un certain chevauchement et une certaine ambiguïté dans l'action caractérisent cette contextualisation émergente qui sert de point d'ancrage pour rejoindre l'élève, pour dépasser l'erreur, mais aussi pour rejoindre l'idée mathématique en jeu (ici l'algorithme de division). L'enseignant s'ancre dans ce contexte, avance, crée en quelque sorte un certain modèle conceptuel. Cette émergence dynamique peut être vue comme un apport potentiel aux travaux sur les champs conceptuels (p. ex. Vergnaud, 2002).

Enfin, d'autres aspects ressortent des deuxième et troisième cas, le contexte n'étant pas limité dans ces cas au modèle conceptuel, au jeu sur les nombres ou à une histoire de référence. En effet, dans ces deux autres cas, le contexte renvoie également à un matériel, une illustration, une verbalisation. L'imbrication forte des différents éléments est sans doute caractéristique du caractère fécond de cet environnement contextuel, point d'ancrage possible d'une activité mathématique. Or, le troisième cas permet de montrer que cette imbrication en action ne va pas de soi. On assiste plutôt dans ce cas à des chevauchements de l'un et de l'autre dans le temps. Notons aussi que si le réalisme du contexte est un enjeu important dans le premier cas, de manière à ce que celui-ci puisse être parlant pour les élèves (pour qu'ils y raccrochent un sens au regard de ce qu'ils savent faire, voir le texte de Boaler, 1993), c'est davantage l'idée d'installer un terrain de familiarité qui sous-tend le travail en contexte mené sur la division dans le deuxième cas. On cherche ici en effet à ce que des analogies puissent se faire, à ce qu'un pont possible s'installe entre ce que l'on fait sur une division avec des nombres spécifiques et d'autres. En ce sens, on peut parler dans les deux premiers cas de situations de référence parlantes, imaginables. Dans le dernier cas, à l'image d'une improvisation que construit l'enseignant sur le moment, le contexte devient concevable, capable d'être saisi, puis travaillé.

### 5. Conclusion

L'analyse de la notion de contexte dans ces pratiques de formation nous a conduits à une complexification graduelle de l'idée de contextualisation par laquelle, loin d'épuiser la question, nous nous trouvons plutôt à la créer, pour ainsi dire, à l'exploser (Skovsmose, 2012). Ainsi, si le recours aux contextes apparaît d'emblée comme un point essentiel dans le travail et la formation de l'enseignant de mathématiques, ce *point* prend rapidement texture et dimension, devenant un objet aux détails complexes. Mais voici bientôt que cet objet se met en mouvement et ne nous intéresse plus seulement en raison de ses propriétés propres, mais aussi du point de vue du pouvoir d'action qu'il révèle : ce qu'on peut en faire, et tout particulièrement en ce qui a trait au mouvement qu'on peut lui associer. Nous sommes donc en présence d'un objet non statique et, pour ainsi dire, à géométrie variable. Enfin, nous rapprochant de situations où cette contextualisation est effectivement rencontrée, nous réalisons que cette mobilité et ces complications ne sont pas simplement celles d'une

mécanique très fine, mais l'animation et la complexité même du vivant, où l'imbrication d'une multitude d'éléments ressemble plutôt aux évolutions d'un organisme en interaction constante avec des écosystèmes auxquels il participe.

En introduction, nous avons évoqué plusieurs travaux autour de la notion de contexte, parmi lesquels des divergences sur le plan épistémologique peuvent être devinées. En distinguant le travail « avec » des contextes du travail « en contexte » et du travail de « contextualisation », on comprend mieux où se situent ces différents travaux, et les nuances qui peuvent être faites concernant leurs apports. Nous avons mis l'accent sur le potentiel de la contextualisation à l'égard de l'activité mathématique elle-même, en faisant voir des enjeux du point de vue mathématique. C'est cette dimension qui nous intéresse particulièrement. Maintenant que nous l'avons mise en évidence, nous la reconnaissons dans les travaux de chercheurs qui nous ont précédés. Nous pensons ici par exemple aux travaux de Lave (1988), Boaler (1993) et Noss (2002), qui ont permis de faire des nuances concernant l'utilité des contextes hors de la classe. Nous pensons aussi à ceux de Gravemeijer et Doorman (1999), Webb (1984) et Van den Heuvel-Panhuizen (2003), qui ont porté de différentes manières sur le potentiel des contextes du point de vue mathématique, de même qu'à ceux de Cotnoir (2010) et Corriveau (2013), qui ont abordé la question de l'intérêt de certains contextes en tant que ressources pour les enseignants. Cependant, malgré les efforts de conceptualisation des uns et des autres, il nous apparaît que la question des contextes n'est pas encore tout à fait réglée ...

Quand Jacques Derrida (1971) note « l'insuffisance théorique du concept courant de contexte [...] tel qu'il est reçu dans de nombreux domaines de recherche, avec tous les concepts auxquels il est systématiquement associé », il évoque la manière dont tout énoncé, toute proposition, est dans un rapport à une « réalité », se produit dans un mouvement sans fin de de contextualisation et de recontextualisation, où le « sens propre paraît plus problématique que jamais » (p. 2). D'une certaine manière, parler de contextualisation n'est pas simple, en partie parce que nous sommes toujours « en contexte », et que chacune de nos propositions (mathématique, didactique, etc.) est à la fois contextualisée et contextualisante. Les différentes dimensions du travail de contextualisation mises en lumière ici nous informent sur les rôles que nous faisons jouer à ces mouvements au fil de la formation à l'enseignement des mathématiques dans nos programmes. Même si elle est loin d'être exhaustive, cette analyse permet de repousser les frontières du connu en matière de contextualisation.

### **Bibliographie**

ALTET, M. (2002). Une démarche de recherche sur la pratique enseignante : l'analyse plurielle. *Revue française de pédagogie*, **138**, 85-93.

BALL, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding

of division. Journal for Research in Mathematics Education, 21, 132-144.

BEDNARZ, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 1(1), 61-80.

BEDNARZ, N., GATTUSO, L. & MARY, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, **35(1)**, 17-30.

BLAIS, M. & MARTINEAU, S. (2006). L'analyse inductive générale : description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives*, **26(2)**, 1-18.

BOALER, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do They Make Mathematics More « Real »? For the Learning of Mathematics, 13(2), 12-17.

BOULET, G. (1998). La nature dichotomique de la division : une analyse didactique. *Bulletin de l'AMQ*, **38(2)**, 14-22.

COTNOIR, G. (2010). Évolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours. Mémoire de maîtrise en éducation, Université de Sherbrooke.

COOPER, B. & HARRIES, T. (2002). Children's responses to contrasting « realistic » mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, **49(1)**, 1-23.

CORRIVEAU, C. (2013). Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire-collégial. Thèse de doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal.

DENZIN, N. (1989). Interpretative Interactionism. London: Sage.

DERRIDA, J. (1971). Signature, événement, contexte. Communication au Congrès international des Sociétés de philosophie de langue française (Montréal, août 1971). http://laboratoirefig.fr/wp-content/uploads/2016/04/SIGNATURE.pdf

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. & MARINO, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, 3-17.

GRAEBER, A., TIROSH, D. & GLOVER, R. (1986). Preservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems. Dans G. Lappan et R. Even (dir.), *Proceedings of the Eighth Annual Psychology of Mathematics Education-North America Conference* (262-267). East Lansing, MI.

GRAVEMEIJER, K. & DOORMAN, M. (1999). Context problems in Realistic Mathematics Education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, **39(1-3)**, 111-129.

HOLDHUS, K., HØISÆTER, S., MÆLAND, K., VANGSNES, V., ENGELSEN, K. S., ESPELAND, M., & ESPELAND, Å. (2016). Improvisation in teaching and education—roots and applications. *Cogent Education*, **3(1)**, 1-17.

HOUGH, S. & GOUGH, S. (2007). Realistic Mathematics Education. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, **203**, 34-38.

LAJOIE, C. (2009). Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l'UQAM. Dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles* (101-113). Sherbrooke : Éditions du CRP.

LAJOIE, C. & BEDNARZ, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. Revue canadienne en enseignement des sciences, de la technologie et des mathématiques, 12(2), 178-213.

LAJOIE, C. & BEDNARZ, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du 21e siècle : rupture ou continuité ? Revue canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 16(1), 1-27.

LAJOIE, C. & MAHEUX, J.-F. (2013). Richness and complexity of teaching division: prospective elementary teachers' roleplaying on a division with remainder. *Proceedings of the Eight Congress of European Research in Mathematics Education* (256-261).

LAJOIE, C. & MURA R. (1995). La division par zéro ou le danger d'un trop grand attachement au concret. *Instantanés mathématiques*, **31(4)**, 7-15.

LAJOIE, C. & PALLASCIO, R. (2001). Role-play by pre-service elementary teachers as a means to develop professional competencies in teaching mathematics. *Proceedings of SEMT '01 - International Symposium Elementary Mathematics Teaching*.

LAVE, J. (1988). Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge University Press.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2003). Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle. Québec : Gouvernement du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2005). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire deuxième cycle*. Document de travail aux fins de validation. Québec : Gouvernement du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU QUEBEC (MEQ) (2001). Programme de formation de l'école québécoise. Version approuvée, éducation préscolaire, enseignement primaire. Québec : Gouvernement du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU QUEBEC (MEQ) (1988). Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes, orientation générale. Fascicule K (document 16-2300-00). Québec : Ministère de l'Éducation, DGDP, Gouvernement du Québec.

NGUALA, J.B. (2006). Faire varier le contexte pour aider à la résolution de problèmes. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la socialisation*, **33**, 177-185.

NOSS. R. (2002). Mathematical epistemologies at work. *Proceedings of PME-26*, **1**, 47-63. Norwich, England : PME.

RABARDEL, P. (1995). *Qu'est-ce qu'un instrument? Appropriation, conceptualisation, mises en situation.* En ligne: http://www.cndp.fr/archivage/valid/13420/13420-1126-1194.pdf

RASMUSSEN, C.L. ET KING, K.D. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **31(2)**, 161-172.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. Revue canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2(4), 505-528.

RODITI, E. (2005). Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique. Paris : L'Harmattan.

RODITI, E. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques*, **1**, 39-60.

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe? *Recherches en didactique des mathématiques*, **23(3)**, 343-388.

SKOVSMOSE, O. (2012). Explosive problems in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 32(2), 4-5.

SIMON, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **24**, 233-54.

STREEFLAND, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of Developmental Research. Dordrecht: Kluwer.

TREFFERS, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education. Dans L. Streefland (dir.), *The legacy of Hans Freudenthal* (89-108). Springer.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). The didactical use of models in Realistic

Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, **54(1)**, 9-35.

VERGNAUD, G. (2002). La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. Dans Bessot, A. (dir.), *Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant* (3-20). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01528050/document

WEBB, N. (1984). Content and context variables in problem tasks. Dans C. Golding et C. McClintock (dir.), *Task variables in mathematical problem solving* (69-102). Philadelphie: The Franklin Institute Press.

WUBBELS, T., KORTHAGEN, F. & BROEKMAN, H. (1997). Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, **32(1)**, 1-28.

CAROLINE LAJOIE Université du Québec à Montréal Montréal, Québec, Canada lajoie.caroline@uqam.ca