

LAURENT MOUTET

ANALYSE D'UNE SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE : L'APPORT DU MODÈLE DE L'ETM ÉTENDU

Abstract. Analysis of a special relativity teaching sequence: The contribution of the extended MWS. The aim is to analyse the tasks performed during the modelling process of a special relativity teaching sequence in a “Terminale S” class in France (grade 12). Didactic engineering will be the methodological framework chosen for this study. Three theoretical frameworks will be used (DST, ADT and extended MWS) during the *a priori* analyses of the tasks to be performed in this sequence. The extended MWS framework will only be used for *a posteriori* analyses.

Résumé. Il s'agit d'analyser les tâches mises en œuvre lors du processus de modélisation d'une séquence d'enseignement de relativité restreinte en terminale S en France (grade 12). L'ingénierie didactique sera le cadre méthodologique retenu pour cette étude. Trois cadres théoriques vont être utilisés (TSD, TAD et ETM étendu) lors des analyses *a priori* des tâches à réaliser dans cette séquence. Le cadre de l'ETM étendu sera uniquement retenu lors des analyses *a posteriori*.

Mots-clés. Espace de travail mathématique étendu, mathématiques, physique, relativité restreinte.

Introduction

La mise en place des nouveaux programmes de sciences physiques en terminale S en 2012 a fait apparaître des éléments de savoir relevant de la théorie de la relativité restreinte. Les notions d'événement, d'invariance de la vitesse de la lumière dans un référentiel galiléen et de caractère relatif du temps (avec l'introduction de la notion de durée propre et du phénomène de dilatation des durées) sont maintenant au programme.

Les travaux de Walter (1996) illustrent, lors de la description de la genèse de la théorie de la relativité restreinte, l'apport des mathématiciens à cette théorie avec en particulier l'influence de Poincaré et de Minkowski. L'étude historique de la genèse de la théorie de la relativité restreinte par Walter (1996) montre ainsi un lien important avec les mathématiques, en particulier avec les diagrammes d'espace-temps.

D'un point de vue à la fois cognitif et sémiotique, les travaux de Duval (1993) ont montré que la compréhension d'un concept est améliorée lorsqu'au moins deux registres de représentation sont mobilisés et lorsque les traductions entre registres sont favorisées. Ainsi un registre sémiotique basé sur les diagrammes nous a paru

mobilisable pour des séquences d'enseignement. Les diagrammes de Minkowski (1909a, 1909b), présentés la première fois lors de la conférence de Cologne en 1908, sont intéressants, car ils sont associés à la genèse de la théorie de la relativité restreinte. De plus, en parcourant les notions et les compétences exigibles du programme de sciences physiques en terminale S (MEN, 2011), on s'aperçoit qu'il n'y a pas d'allusion à l'aspect graphique, néanmoins la présentation du programme parle de « constructions graphiques » comme un support d'informations possible.

Nous avons émis l'hypothèse qu'une manière de donner plus de sens aux concepts utilisés en relativité restreinte pourrait être de les mobiliser dans le cadre d'espaces diagrammatiques et il serait ainsi intéressant d'évaluer l'impact d'une telle séquence auprès d'élèves de terminale S. Nous nous sommes également inspirés des travaux de Cazes et Vandebrouck (2014). Ils ont étudié l'impact d'un logiciel de géométrie dynamique, GeoGebra, sur le déroulement d'une séquence visant à un apprentissage des fonctions dans un contexte de cinématique classique. Notre étude s'appuiera donc sur ce logiciel afin de représenter et d'utiliser des diagrammes d'espace-temps.

Une séquence de classe a été conçue en utilisant les principes méthodologiques de l'ingénierie didactique décrite par Artigue (1988) : analyses préalables, conception et analyse *a priori*, expérimentation, analyse *a posteriori* et validation. Trois cadres théoriques ont été utilisés pour effectuer les analyses *a priori* : la théorie des situations didactiques (TSD), la théorie anthropologique du didactique (TAD) et le cadre théorique de l'espace de travail mathématique étendu (ETM étendu) qui a été développé dans le cadre de cette étude. Il permet d'analyser spécifiquement les interactions entre le plan cognitif et les plans épistémologiques de la physique ou des mathématiques. La séquence d'enseignement développée par Moutet (2016) est destinée à des élèves de terminale S sur le thème de la relativité restreinte à la suite des travaux de de Hosson, Kermen et Parizot (2010).

La conception de notre ingénierie didactique nous a conduits à réaliser des analyses préalables sur les éléments épistémologiques et didactiques associés aux diagrammes d'espace-temps et à la théorie de la relativité restreinte. La conception de séances pilotes et leurs analyses *a priori* et *a posteriori* nous ont amenés à adapter le cadre théorique de l'ETM (Kuzniak et al., 2016) en ETM étendu (Moutet, 2016) et à évaluer son intérêt par rapport à l'utilisation de deux autres cadres théoriques (TSD et TAD). Une nouvelle séquence a ainsi été conçue puis expérimentée. Les analyses *a priori* et *a posteriori* basées sur l'étude des tâches effectuées par quelques élèves ont ensuite été effectuées.

Deux questions de recherche ont guidé ce travail :

- Comment le cadre de l'ETM étendu permet-il d'analyser les jeux de cadres de rationalité entre les mathématiques et la physique lors d'une séquence traitant de la relativité restreinte avec des élèves de terminale S via une approche géométrique ?
- Dans quelle mesure l'analyse de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par le cadre de l'ETM étendu permet-il de montrer qu'il favorise une conceptualisation chez les élèves ?

1. Présentation des cadres théoriques utilisés

La théorie des situations didactique (TSD) a été mise au point par Brousseau (1998) dans les années 1980. Cette théorie propose une modélisation du savoir, des situations d'enseignement et du rôle du professeur et des élèves en classe. Le rôle du professeur est de réaliser une transposition didactique des savoirs savants afin que ses élèves puissent être acteurs de leurs apprentissages et s'approprier les situations proposées qui doivent être motivantes, contextualisées et personnalisées. Selon Brousseau, un professeur doit concevoir un problème préservant le sens de la connaissance visée. Il s'agit de la situation fondamentale. Ses élèves s'approprient le problème dans une étape de dévolution, dans laquelle le professeur s'efface temporairement, puis doivent le résoudre dans une étape qualifiée de situation d'action. L'élève agit pour cela sur le milieu avec qui il est en interaction permanente et qui lui permet de faire évoluer sa stratégie de résolution. L'élève doit expliciter ses actions sur le milieu en dialoguant avec le système mis à sa disposition par le professeur (le milieu ou un autre élève). Il s'agit de la situation de formulation. La phase de proposition de résolution du problème par l'élève correspond à une situation de validation s'il y a une phase de discussion avec un autre élève ou une équipe adverse afin de prouver ou réfuter sa conjecture. Dans les phases d'action, de formulation et de validation, le professeur n'intervient pas pour proposer des connaissances, mais il s'assure que l'élève est en situation d'apprentissage. Ces règles de fonctionnement relatives à l'apprentissage du savoir constituent le contrat didactique dans une situation qualifiée d'a-didactique. Le professeur s'assure enfin, dans une partie d'institutionnalisation, de la décontextualisation et de la dépersonnalisation des connaissances acquises afin qu'elles puissent prendre le statut de savoir scolaire. Cette dernière partie correspond à la situation didactique (figure 1).

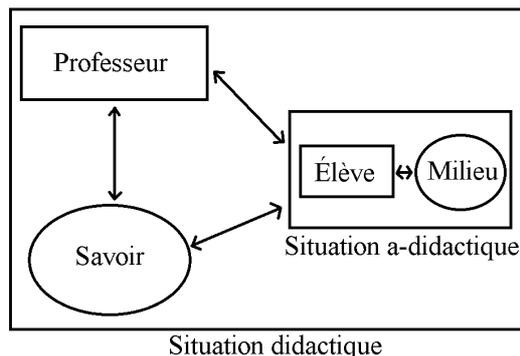


Figure 1. La TSD de Brousseau (tiré de Brousseau, 1998)

La théorie anthropologique du didactique (TAD) a été développée par Chevallard (1999). Elle situe l'activité mathématique dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Toute activité humaine peut être décrite par une praxéologie. Un type de tâche, noté T , nécessite une technique τ afin d'être menée à bien. Le bloc $[T/\tau]$ de la praxéologie s'appelle le bloc pratico-technique et il est associé à ce qui est généralement appelé un savoir-faire. La technologie, notée θ , permet de décrire « rationnellement » la technique utilisée en s'assurant que la tâche T est bien traitée. Enfin la théorie, notée Θ , permet de justifier théoriquement le discours de la technologie. Le bloc $[\theta/\Theta]$ est identifié à un savoir. La praxéologie associée à un type de tâche T peut donc être décrite par une tâche T , une technique τ , une technologie θ et une théorie Θ , le tout noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$. La TAD permet de mettre en valeur la dynamique praxéologique du monde institutionnel. En effet, des praxéologies vieillissent, certains composants théoriques et technologiques sont moins utilisés alors que de nouvelles technologies apparaissent, ce qui conduit à abandonner des techniques ou d'en développer de nouvelles afin d'accomplir certains types de tâches. La TAD étudie des questionnements associés à l'accomplissement de tâches particulières. Cela conduit au développement de nouvelles praxéologies dont l'efficacité peut être évaluée.

L'espace de travail mathématique (ETM) a été développé afin de mieux comprendre les enjeux didactiques autour du travail mathématique dans un cadre scolaire (Kuzniak, Tanguay et Elia., 2016, figure 2). L'ETM comporte deux niveaux : un de nature cognitive en relation avec l'apprenant et un autre de nature épistémologique en rapport avec les contenus mathématiques étudiés. Le plan épistémologique contient un ensemble de représentations (signes utilisés), un ensemble d'artéfacts matériels (instruments de dessins ou logiciels) ou symboliques (instruments techniques et algorithmes) et un ensemble théorique de référence (définitions et propriétés). Le plan cognitif contient un processus de visualisation (présentation de l'espace dans le cas de la géométrie), un processus de construction (fonction des

outils technologiques utilisés) et un processus discursif (argumentations et preuves). Le travail mathématique résulte d'une articulation entre les plans cognitifs et épistémologiques grâce à une genèse instrumentale (opérationnalisation des artefacts), une genèse sémiotique (basée sur le registre des représentations sémiotiques) et une genèse discursive (présentation du raisonnement mathématique). Les différentes phases du travail mathématique associées à une tâche peuvent être mises en évidence par la représentation de trois plans verticaux sur le diagramme de l'ETM. Les interactions de type sémiotique-instrumental conduisent à une démarche de découverte et d'exploration d'un problème scolaire donné. Celles de type instrumental-discursive privilégient le raisonnement mathématique en relation avec les preuves expérimentales. Enfin, celles de type sémiotique-discursive sont caractéristiques de la communication de résultats de type mathématique.

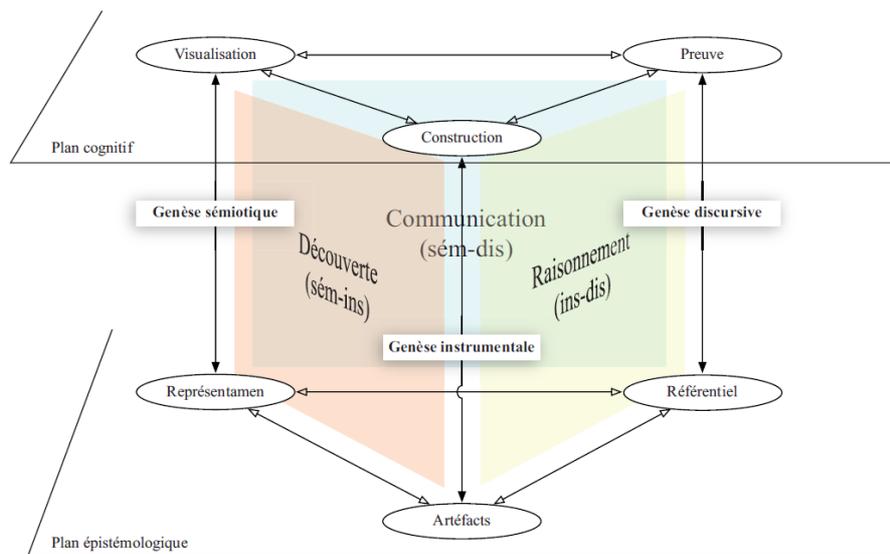


Figure 2. Le cadre des ETM (Kuzniak et al., 2016).

Pour que le travail réalisé sur des résolutions de problèmes en mathématiques soit utilisable en sciences physiques, il convient d'étudier au préalable un modèle d'analyse de processus de conceptualisation mettant en jeu des relations entre processus mathématiques et processus physiques. Un tel exemple de mise en lien a été développé par Malafosse, Lerouge et Dusseau (Malafosse et Lerouge, 2000; Malafosse et al., 2000). Son étude portait sur la loi d'Ohm, ce qui explique l'importance qu'il a consacrée aux relations algébriques. Il a ainsi défini la notion de cadre de rationalité comme un ensemble cohérent du fonctionnement de la pensée culturelle ou familière caractérisé par quatre composantes : l'ensemble des objets

« conceptuels », le type de procédé de validation, les éléments de rationalité, qui constituent les règles de traitement et de validation, ainsi que les registres sémiotiques qui sont supports à la conceptualisation et à la communication.

Dans l'exemple ci-après, trois cadres de rationalité sont étudiés : le cadre de rationalité des mathématiques, le cadre familial et celui de la physique (tableau 1). Des objets conceptuels et des éléments de rationalité ont été explicités à chaque fois.

Exemples d'objets conceptuels et d'éléments de rationalité

	Cadre de rationalité des mathématiques	Cadre de rationalité familial	Cadre de rationalité de la physique
Objets conceptuels	La droite, la croissance, la continuité, l'additivité, la dérivée, le point, etc.	Le chaud et le froid, la lumière, les fées, la peur, le point, etc.	L'énergie, la vitesse, la résistance électrique, l'électron, le point, etc.
Éléments de rationalité	La déduction logique, le raisonnement par récurrence, l'analyse combinatoire, l'infini, etc.	La validation par constat (fréquence de répétition, mesurage sur dessin), la ressemblance, la déduction, etc.)	L'homogénéité des formules, la réfutabilité, la validation par induction, la déduction logique, etc.

Tableau 1. Les cadres de rationalité. Extrait de Malafosse et Lerouge (2000).

La comparaison des processus de conceptualisation entre les mathématiques et les sciences physiques peut être réinvestie à l'aide des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique (figure 3).

Couplage entre les notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique

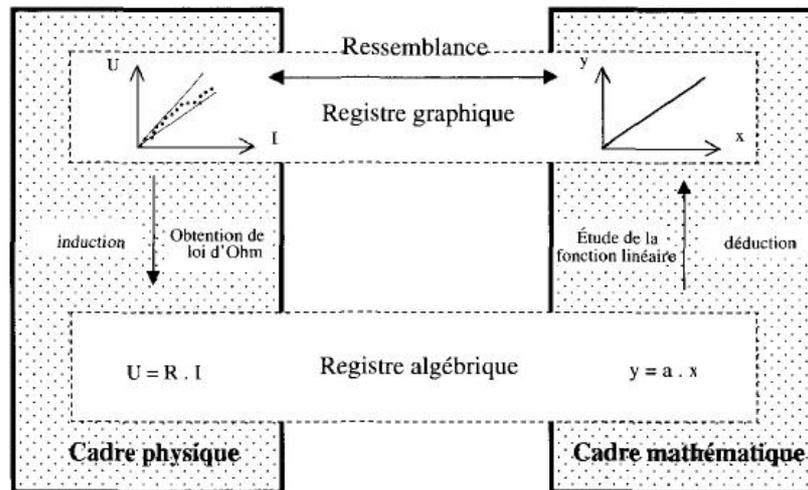


Figure 3. Cadres de rationalité et registres sémiotiques (tiré de Malafosse et Lerouge (2000)).

Le diagramme des ETM a été adapté (Moutet, 2016) en rajoutant pour la première fois un plan épistémologique correspondant au cadre de rationalité de la physique (figure 4). Il a été choisi de ne garder qu'un seul plan cognitif. Nous avons fait l'hypothèse que les conceptions des élèves en mathématiques et en physique peuvent être mises en évidence à l'aide d'un ETM étendu personnel de l'élève. Le fonctionnement des schèmes (Vergnaud, 2013) propre à ces conceptions pourrait apparaître lors de l'activation des différentes genèses. Les conceptions en mathématiques seraient mises en évidence par l'activation de genèses entre le plan cognitif et le plan épistémologique de mathématiques, celles en physique seraient mises en évidence par l'activation de genèses entre le même plan cognitif et le plan épistémologique de physique. Un seul plan cognitif serait donc suffisant pour décrire les conceptions en mathématiques et en physique. Le terme « preuve » est conservé, mais il prendra dans le cas de l'ETM étendu un sens plus restreint de justification ou de raisonnement. Le cadre de l'ETM étendu permet d'analyser finement les interactions entre les différents cadres de rationalité et le plan cognitif de l'élève puis de qualifier la nature du travail réalisé par l'élève ou celui qui lui est demandé. Lors de l'analyse *a priori* des doubles flèches noires sont utilisées pour décrire les genèses mobilisables. Lors de l'analyse *a posteriori*, un code supplémentaire permet de caractériser les genèses : flèches noires pour une genèse conforme à l'analyse *a priori*, en pointillé pour une présence non conforme et noires barrées pour une absence.

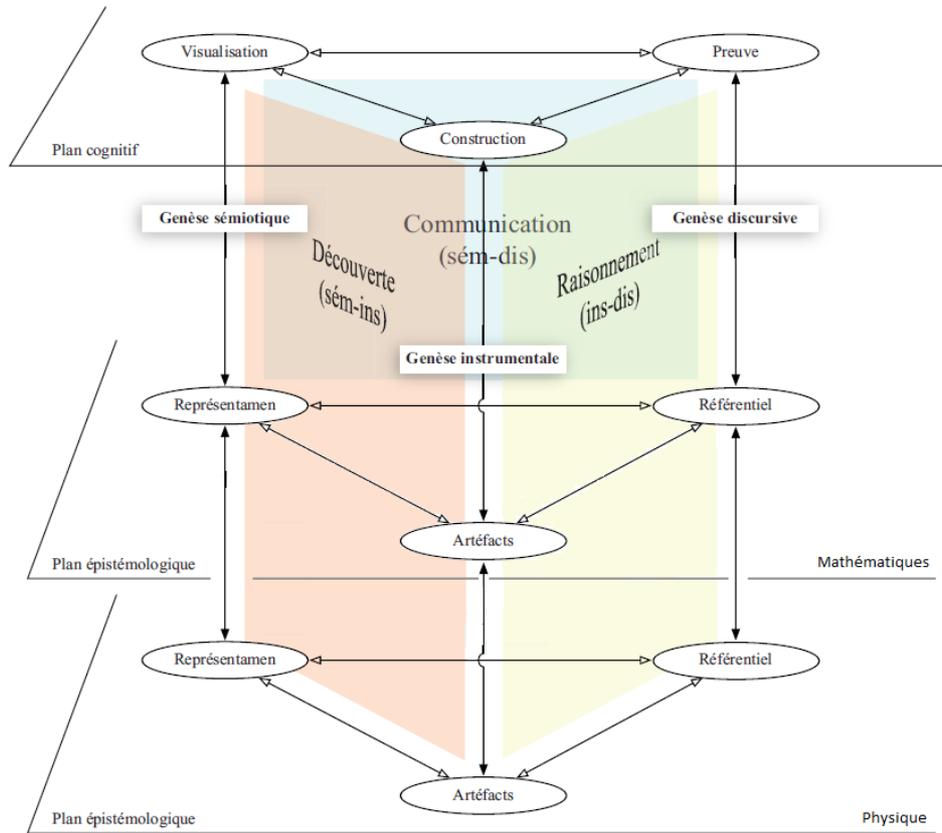


Figure 4. Modèle de l'ETM étendu.

2. De la « situation modèle » aux « résultats réels »

Nous nous sommes basés sur un cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2005, figure 5) pour analyser une séquence d'enseignement (Moutet, 2016) portant sur le changement d'ordre chronologique d'événements en fonction du référentiel dans le cadre de la relativité restreinte (de Hosson et al., 2010).

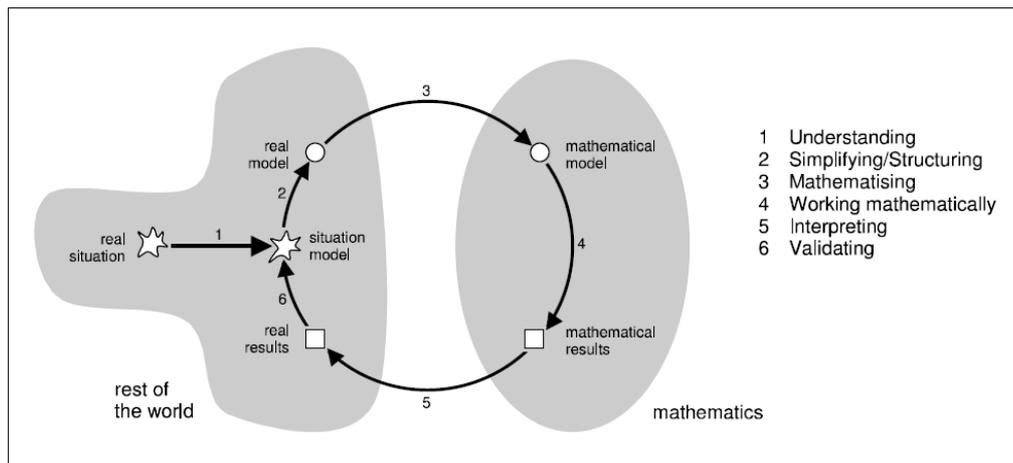


Figure 5. Cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005)

La séquence d'enseignement est destinée à des élèves de terminale S (grade 12). Deux référentiels liés à deux observateurs, Armineh et Daniel, sont utilisés. Armineh conduit une voiture se déplaçant à une vitesse proche de la vitesse de la lumière par rapport à Daniel. Ce dernier se trouve sur le bord de la route à côté de trois flashes lumineux S_1 , S_2 et S_3 associés à trois événements particuliers, et initialement connus dans le référentiel de Daniel (figure 6, activité détaillée en annexe).

Le diagramme de Minkowski (figure 7) est un diagramme d'espace-temps permettant de connaître les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dans un repère du référentiel d'Armineh ou de Daniel. Le diagramme de Minkowski permet de représenter le repère $(xOc.t)$ relatif au référentiel de Daniel et le repère $(x'Oc.t')$ relatif au référentiel d'Armineh. Dans ce diagramme, la droite $x = 0$ est décrite par l'axe $(Oc.t)$ dans le repère du référentiel de Daniel. De même la droite $x' = 0$ est décrite par l'axe $(Oc.t')$ dans le repère du référentiel d'Armineh. Les projections sur ce type de diagramme se font parallèlement aux axes. L'axe (Ox') est le symétrique de l'axe $(Oc.t')$ par rapport à la droite $x = c.t$. C'est la même chose pour les axes (Ox) et $(Oc.t)$. Les droites (Ox) ou (Ox') correspondent à la route dans les référentiels de Daniel ou d'Armineh.

Le diagramme d'espace-temps de Minkowski a été construit par les élèves et utilisé en classe à l'aide d'une activité papier-crayon préliminaire relativement guidée par l'enseignant afin qu'ils puissent s'approprier le modèle mathématique (figure 7) et comprendre les liens qu'il a avec le modèle réel (figure 6). Il nous fallait réinvestir les notions vues par les élèves dans un contexte différent avec cette fois-ci une large autonomie. Le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra a ainsi été choisi afin de réinvestir le diagramme d'espace-temps de Minkowski. La 2^{cv} conduite par Armineh se déplace initialement à la vitesse v de 0,6 fois la vitesse de la lumière

dans le vide (on considère que la vitesse de la lumière dans le vide est à peu près égale à celle dans l'air) par rapport à Daniel suivant un axe (Ox) (figure 6).

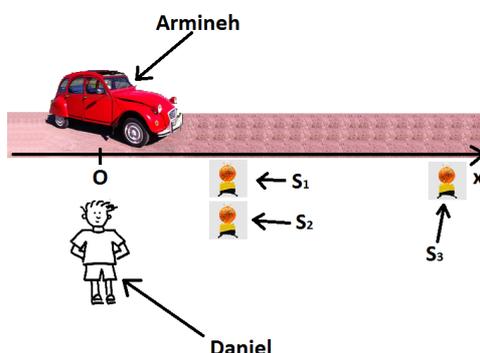


Figure 6. Le « modèle réel » de la situation

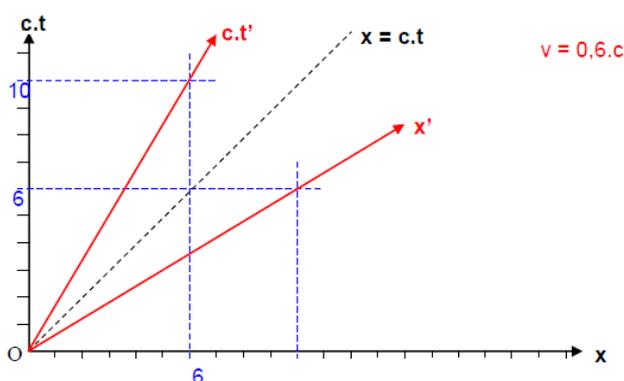


Figure 7. Le « modèle mathématique » : Diagramme de Minkowski pour $v = 0,6.c$

GeoGebra permet d'utiliser un curseur modifiant les conditions expérimentales en changeant la vitesse v . Les axes Ox' et $Oc.t'$ sont modifiés en fonction de la vitesse v , ces deux axes se rapprochent de la droite $x' = c.t'$ lorsque la vitesse v se rapproche de c . Les droites $x = c.t$ et $x' = c.t'$ sont confondues. Elles correspondent à la traduction graphique du second postulat d'Einstein (invariance de la vitesse de la lumière dans des référentiels inertiels), car elles sont les bissectrices des angles formés par les axes Ox et $Oc.t$ ou par les axes Ox' et $Oc.t'$. Le logiciel GeoGebra permet aux élèves de conclure sur l'ordre chronologique des événements suivant les référentiels d'Armineh ou de Daniel (figure 8 et lien hypertexte ci-après : https://drive.google.com/file/d/0B_f8SgBLz2P0N0xfazFCSmU3MHM/view).

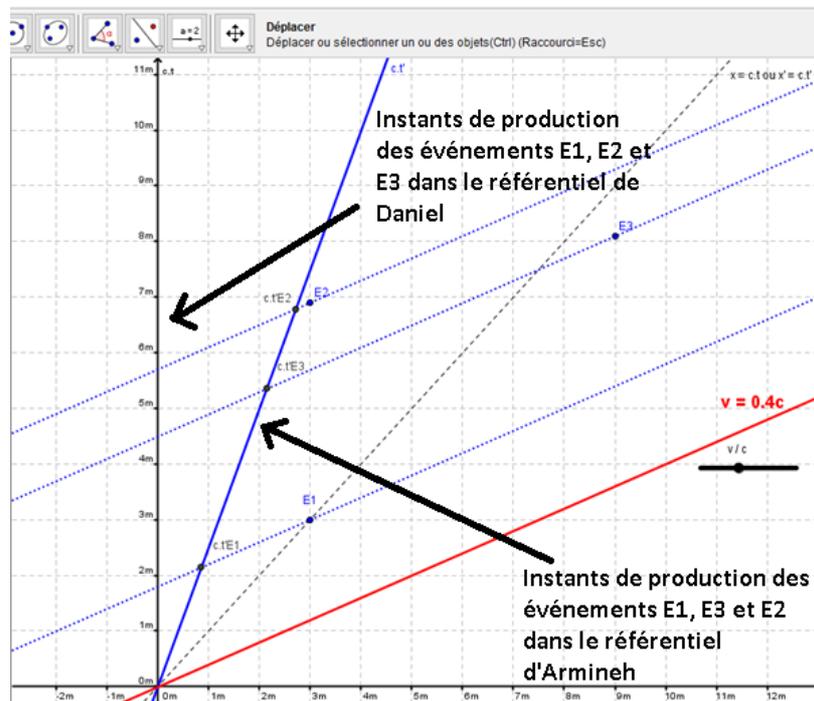


Figure 8. Les « résultats réels » : Diagramme de Minkowski avec GeoGebra

Le travail à réaliser par les élèves peut être décrit par les opérations ci-après. Il s'agit de tracer la droite $x = c.t$ ou $x' = c.t'$ en entrant à l'aide de la barre de saisie de GeoGebra l'équation $y = x$ et en renommant la droite obtenue. Il faut placer également les trois événements E_1 , E_2 et E_3 . Ils doivent éventuellement recadrer l'échelle du repère orthonormé initialement présent. C'est un repère du référentiel lié à Daniel. Ils nomment les axes Ox (axe Ox sur GeoGebra) et $Oc.t$ (axe Oy sur GeoGebra) avec éventuellement une unité en mètre. L'axe $Oc.t'$ est ensuite construit en entrant sur la barre de saisie de GeoGebra l'équation $y = \frac{x}{0,6}$ si par exemple la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel est $v = 0,6.c$. L'axe Ox' est construit en traçant le symétrique de l'axe $Oc.t'$ par rapport à la droite $x = c.t$ à l'aide de la fonctionnalité « symétrie axiale » de GeoGebra ou en entrant sur la barre de saisie l'équation $y = 0,6.x$. Cela permet de construire un repère du référentiel lié à Armineh. Les élèves tracent les parallèles à l'axe Ox' passant par les différents événements et coupant l'axe $Oc.t'$ à l'aide de la fonctionnalité « droite parallèle » de GeoGebra. Les ordonnées $c.t'$ des différents événements dans un repère lié à Armineh sont repérés à l'aide de la fonctionnalité « intersection entre deux objets ». Les élèves tracent éventuellement les parallèles à l'axe $Oc.t'$ passant par les différents

événements et coupant l'axe Ox' également à l'aide de la fonctionnalité « droite parallèle » de GeoGebra. Les abscisses x' des différents événements dans un repère lié à Armineh sont repérées à l'aide de la fonctionnalité « intersection entre deux objets ». Les élèves peuvent également représenter les abscisses et les ordonnées des différents événements dans un repère du référentiel lié à Daniel. Ensuite, il faut introduire, par exemple, un paramètre ε compris entre 0 et 1 tel que $\varepsilon = \frac{v}{c}$. L'équation de l'axe $Oc.t'$ est modifiée en changeant $y = \frac{x}{0,6}$ en $y = \frac{x}{\varepsilon}$. La valeur de v peut également être affichée. L'utilisation de la fonction « curseur » du logiciel permet de faire varier les conditions expérimentales en changeant la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel en modifiant la valeur de ε . Les diagrammes de Minkowski obtenus sont ensuite exploités pour traiter l'ordre chronologique relatif des événements en fonction du référentiel.

3. Analyse *a priori* de la séquence d'enseignement à l'aide de la TSD

L'activité papier-crayon permet aux élèves de s'appropriier le diagramme de Minkowski puisque chaque élève est amené à le construire pas à pas à l'aide de leur enseignant. Une nouvelle activité est ensuite donnée en utilisant un logiciel de géométrie dynamique qui permet de modifier le milieu dans lequel les élèves vont devoir travailler (voir en annexe). Les deux référentiels Armineh et Daniel, et les trois événements considérés E_1 , E_2 et E_3 sont les mêmes. Les élèves doivent construire le diagramme de Minkowski à l'aide de GeoGebra. La fonctionnalité « curseur » qui est évoquée dans la consigne donnée aux élèves doit leur permettre de faire varier la vitesse d'un référentiel par rapport à un autre. Il est indiqué qu'ils doivent utiliser le modèle mathématique (le diagramme de Minkowski) pour en déduire des résultats. Les élèves travaillent cette fois-ci en binôme afin de favoriser les échanges entre pairs, au début dans le cadre d'un travail à faire à la maison et ensuite en salle informatique afin de finaliser leur travail. L'enseignant se contente de s'assurer que le travail des élèves est effectif et il donne des indications techniques sur l'utilisation du logiciel ou sur la construction du modèle mathématique. Il laisse ainsi ses élèves en autonomie dans une situation de dévolution. Lors de l'utilisation du modèle mathématique, les élèves sont amenés à utiliser le curseur et à s'apercevoir de l'évolution du diagramme de Minkowski lorsque la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel est modifiée. Le tâtonnement afin de construire et utiliser le diagramme de Minkowski à l'aide de GeoGebra correspond à la situation d'action. Un dialogue permanent s'instaure à l'intérieur de chaque binôme afin de comprendre la signification physique des résultats obtenus par le modèle mathématique, en particulier l'inversion de l'ordre chronologique des événements dans le référentiel d'Armineh en fonction de sa vitesse par rapport à Daniel. Nous nous trouvons ici dans une situation de formulation. Chaque élève doit enfin enregistrer sur un fichier MP3 ce qu'il a retenu de l'ensemble de la séquence

d'enseignement (activité papier-crayon et activité GeoGebra) lors d'une situation également de formulation. La situation de validation ne peut pas être observée puisque l'étude ne se focalise pas sur l'évolution des confrontations d'idées entre membres de binômes ou entre binômes (conjectures suivies de preuves ou de réfutations). Une concertation générale de la classe avec l'enseignant permet de construire ensuite un nouveau savoir sur la notion d'événement, sur le lien entre eux et sur la notion d'ordre chronologique relatif en fonction du référentiel considéré.

La TSD permet d'analyser et comprendre l'organisation générale de la séquence d'enseignement, mais l'ingénierie didactique ne se focalise pas sur les échanges langagiers entre les membres des binômes ou entre les binômes tout au long de l'activité avec GeoGebra.

4. Analyse a priori de la séquence d'enseignement à l'aide de la TAD

Trois moments associés à trois types de tâches sont étudiés dans la séquence d'enseignement. L'appropriation de l'utilisation de GeoGebra avec le début de la construction du diagramme de Minkowski, pour une vitesse d'Armineh fixe par rapport à Daniel (axes Ox et $Oc.t$), puis le placement des trois événements E_1 , E_2 et E_3 correspond à la tâche T_1 . La finalisation de la construction du diagramme de Minkowski avec la construction des axes Ox' et $Oc.t'$ correspond à T_2 . T_3 est associé à l'utilisation du curseur de GeoGebra afin d'obtenir la modification du diagramme de Minkowski lorsque la vitesse d'Armineh est modifiée par rapport à Daniel. Le modèle mathématique est ensuite utilisé pour étudier l'influence de la modification des conditions expérimentales de vitesse.

La tâche T_1 a déjà été réalisée par les élèves lors d'une séance préliminaire dans laquelle le diagramme de Minkowski a été construit sur feuille. La technique τ_1 est partiellement la même ici puisque même s'il faut utiliser un logiciel de géométrie dynamique, la méthode de construction demeure identique. La technologie θ_1 est identique aux technologies θ_2 ou θ_3 . Il s'agit des règles de construction et de fonctionnement du diagramme de Minkowski qui est un diagramme d'espace-temps. Enfin la théorie Θ_1 est également la même que Θ_2 ou Θ_3 : il s'agit de la théorie de la relativité restreinte.

La tâche T_2 correspond à la construction des axes $Oc.t'$ et Ox' . Cette tâche a également été effectuée lors de la séance papier-crayon. Il faut écrire l'équation de l'axe $Oc.t'$ avec son coefficient directeur lié à la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel puis prendre son symétrique par rapport à la droite $x=c.t$ pour construire l'axe Ox' . La technique τ_2 a également été partiellement travaillée lors de l'activité papier-crayon, il faut la retranscrire avec le logiciel de géométrie dynamique.

La tâche T_3 permet aux élèves de travailler sur la modification du diagramme de Minkowski lorsque le paramètre de la vitesse change. En ce qui concerne la

description de la technique τ_3 , les élèves utilisent ensuite la fonctionnalité « curseur » proposée par GeoGebra afin de changer les conditions de vitesse d'Armineh par rapport à Daniel. Ils sont amenés à changer l'équation de l'axe $Oc.t'$ en introduisant un paramètre qui va dépendre de la vitesse. Ils doivent également tracer la projection des trois événements sur l'axe $Oc.t'$ parallèlement à l'axe Ox' . Le modèle mathématique est ensuite utilisé en affichant les ordonnées ct' des différents événements pour que l'ordre chronologique des événements dans le référentiel lié à Armineh soit observable.

La TAD permet d'analyser les différents temps forts associés aux trois types de tâches que doivent réaliser les élèves lors de la séquence d'enseignement. Les techniques mises en jeu sont proches de l'activité préliminaire de type papier-crayon, mais il faut adapter au logiciel GeoGebra. Les cadres de rationalité mis en jeu ne sont pas en revanche bien clarifiés.

5. Analyse *a priori* de la séquence d'enseignement à l'aide de l'ETM étendu

GeoGebra donne une genèse sémiotique différente de l'activité préliminaire papier-crayon grâce au côté dynamique du logiciel qui permet de voir plus facilement l'évolution du diagramme de Minkowski lorsque les conditions expérimentales sont modifiées. La genèse instrumentale est également modifiée, car les élèves manipulent un logiciel à la place d'instruments de géométrie. Enfin, la genèse discursive change, car les élèves concluent plus facilement sur l'ordre chronologique des événements suivant les deux référentiels qu'avec une activité de type papier-crayon avec laquelle il faudrait reconstruire plusieurs diagrammes de Minkowski avec des conditions expérimentales différentes. Cela permet de montrer que les tâches à traiter par les élèves avec GeoGebra ne sont pas les mêmes que celles de l'activité papier-crayon.

Les trois moments étudiés sont associés aux trois mêmes types de tâches que lors de l'analyse *a priori* par la TAD : l'appropriation de l'utilisation de GeoGebra avec le début de la construction du diagramme de Minkowski, la finalisation de la construction du diagramme de Minkowski avec la construction des axes Ox' et $Oc.t'$ et enfin l'utilisation du curseur de GeoGebra afin d'obtenir la modification du diagramme de Minkowski avec les conditions expérimentales de vitesse puis l'utilisation du modèle mathématique.

Le premier moment de l'activité correspond à une tâche mettant en jeu initialement majoritairement une démarche de découverte (genèses sémiotique-instrumentale) lors de l'utilisation du logiciel GeoGebra dans le contexte de la relativité restreinte (figure 9). C'est tout d'abord le cadre de rationalité des mathématiques qui est mobilisé.

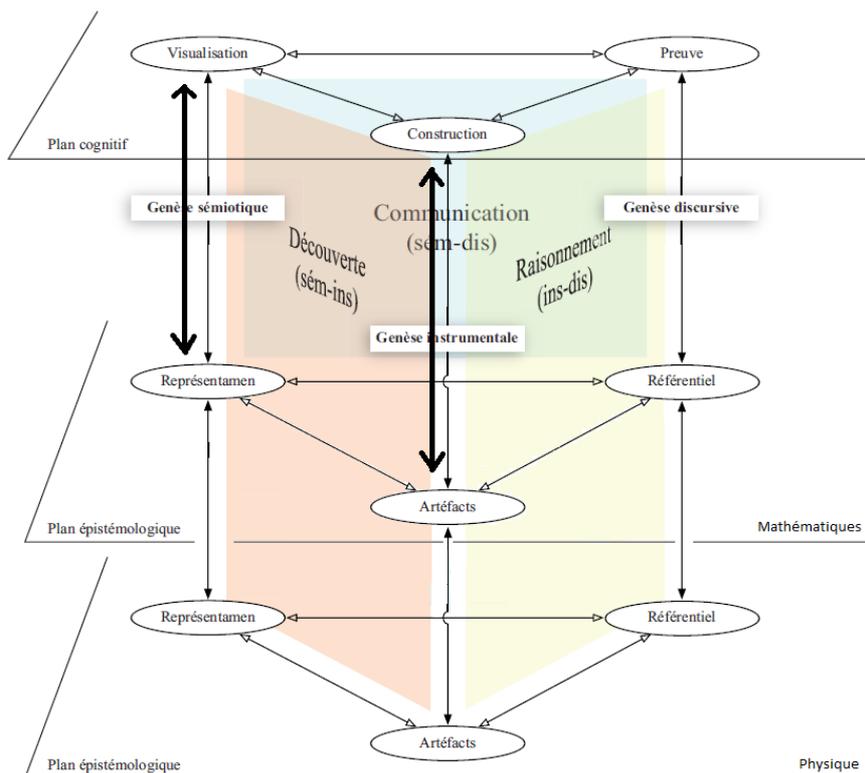


Figure 9 : Analyse du début de l'activité

C'est ensuite majoritairement une démarche de raisonnement (genèses instrumentale-discursive) qui est mise en jeu lors de la finalisation de la construction du diagramme de Minkowski grâce aux fonctionnalités du logiciel. C'est encore le cadre de rationalité des mathématiques qui est mobilisé (figure 10).

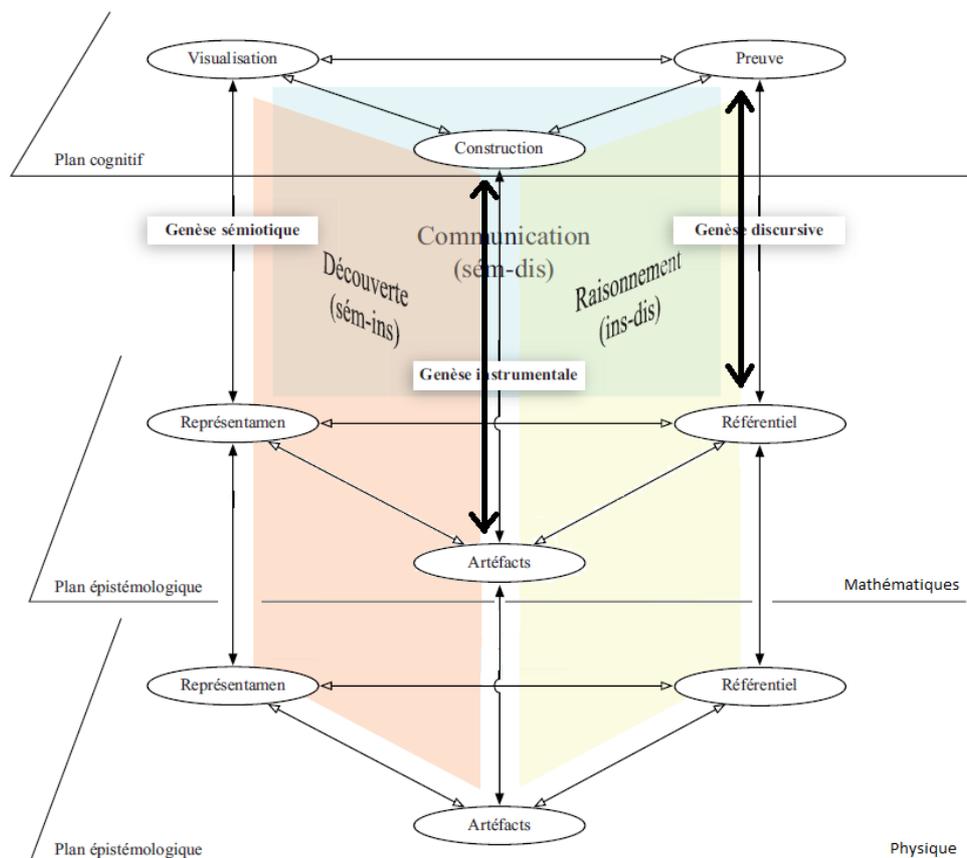


Figure 10 : Analyse de la fin de la construction du diagramme de Minkowski

Dans un dernier temps, ce sont les cadres de rationalité de la physique et des mathématiques qui sont mobilisés. Ce sont des genèses de type sémiotiques et instrumentales qui sont associées au cadre de rationalité des mathématiques lorsque les élèves doivent adapter le diagramme de Minkowski aux conditions expérimentales. C'est une démarche associée au cadre de rationalité de la physique, qui est mise en jeu lorsque les élèves étudient la modification de la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel et en concluent des résultats physiques sur l'ordre chronologique des événements en fonction du référentiel utilisé. Ce sont des genèses de type sémiotiques et discursives qui sont alors mobilisées (figure 11).

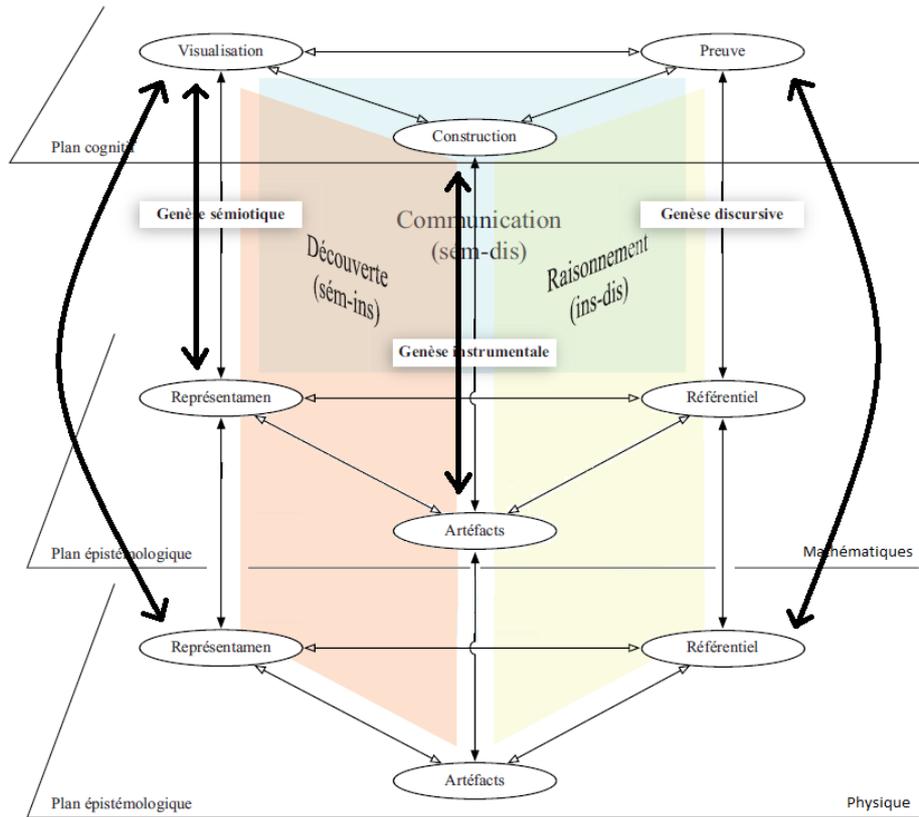


Figure 11. Analyse de l'utilisation du curseur avec GeoGebra

Le modèle de l'ETM étendu nous a permis de réaliser l'analyse a priori de chaque type de tâches à effectuer par les élèves. La contribution des cadres de rationalité des mathématiques et de la physique est bien explicitée à chaque fois. Les types de tâches sont également décrits par trois genèses. Les élèves sont amenés à utiliser plusieurs registres sémiotiques (registre algébrique, registre géométrique) traduits par une genèse sémiotique. Les constructions géométriques sont représentées par une genèse instrumentale. Enfin les phases de raisonnement sont illustrées par une genèse discursive. Le niveau de difficulté de chaque type de tâche peut être apprécié en regardant la part des genèses instrumentale-discursive, plus difficiles, par rapport aux genèses sémiotique-instrumentale.

6. Analyse a posteriori de la séquence d'enseignement

Nous avons choisi d'utiliser par la suite le cadre de l'ETM étendu, car il nous permet d'étudier les types de tâches à effectuer par les élèves tout en tenant compte des

cadres de rationalités des mathématiques et des sciences physiques ainsi que des genèses mises en œuvre.

Une classe de 34 élèves de terminale S a suivi le cours de relativité avec la recherche et la correction d'exercices proposés par le manuel scolaire. Une première séance papier-crayon a été effectuée afin de construire et d'utiliser le diagramme de Minkowski avec un guidage fort de l'enseignant. L'activité, correspondant à la seconde séance, a été ensuite donnée en devoir à réaliser à la maison. Les conditions de vitesses étaient différentes d'un binôme à l'autre. La très grande majorité des élèves n'avait pas utilisé le logiciel GeoGebra au lycée. Ils ont rendu une première version de leur devoir maison puis ils ont travaillé deux heures en demi-classe en salle informatique afin de finaliser leur fichier GeoGebra (seconde version). Chaque élève a réalisé également un enregistrement MP3 permettant de résumer la totalité de la séquence qui a duré cinq heures en tout. Quatre élèves représentatifs de la classe ont été choisis (deux filles A, B et deux garçons C, D). A et D avaient de très bons résultats scolaires alors que B et C avec des résultats scolaires décevants. Ils ont cependant tous eu le baccalauréat série S, spécialité sciences physiques à la fin de l'année.

6.1. L'élève A

Le groupe de l'élève A a représenté avec le logiciel GeoGebra un diagramme de Minkowski complet avec la fonctionnalité curseur qui est opérationnelle pour changer la valeur de $\frac{v}{c}$. Les trois événements ont leur abscisse qui est représentée sur l'axe Ox' dans le référentiel d'Armineh. Les notions d'événements et de référentiel sont mobilisées puisque les trois événements sont présents ainsi que les repères des deux référentiels. La notion d'ordre chronologique relatif n'est pas bien prise en compte par les élèves puisque ce sont les abscisses x' des événements qui sont représentés et pas les ordonnées $c.t'$ (figure 12).

Sur la seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour préciser la signification de l'axe $Oc.t'$), ce sont les ordonnées sur l'axe $Oc.t'$ qui sont représentées afin de pouvoir mettre en évidence plus facilement l'inversion de l'ordre chronologique d'événements dans le référentiel d'Armineh.

Ce travail met en évidence des interactions de type sémiotiques-instrumentales (découverte du logiciel GeoGebra) ainsi qu'instrumentales-discursives (raisonnement élaboré afin de construire le diagramme de Minkowski et d'utiliser convenablement la fonctionnalité curseur). L'enregistrement audio de l'élève A montre qu'il utilise correctement le diagramme de Minkowski pour conclure sur l'ordre chronologique relatif des événements (genèse discursive avec le plan épistémologique de la physique), même si la visualisation des ordonnées $c.t'$ n'était pas présente dans la première version de leur travail (genèse sémiotique inadéquate avec le plan épistémologique de la physique, figure 13).

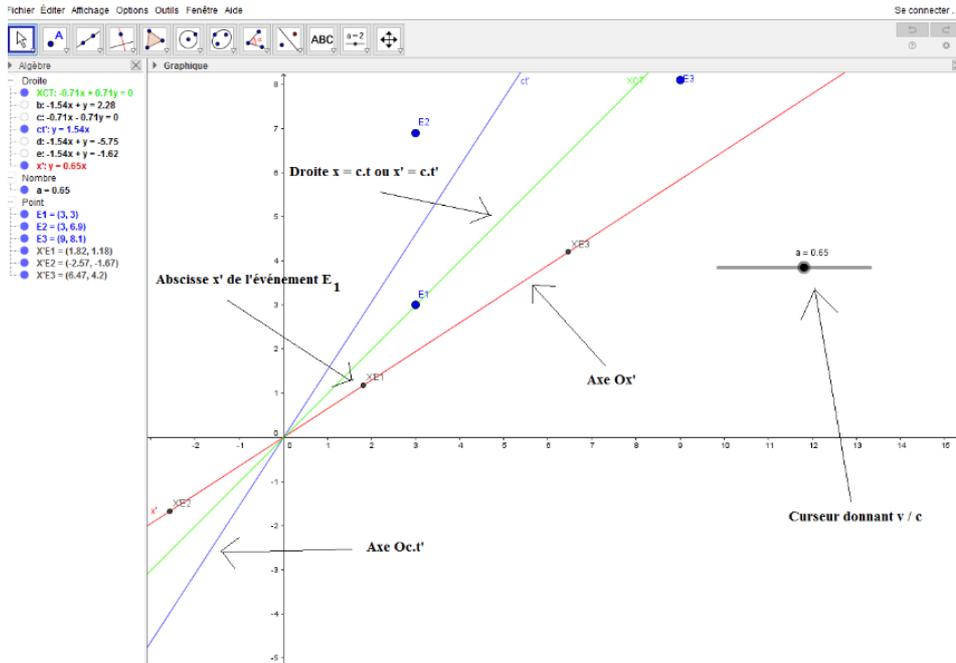


Figure 12 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève A

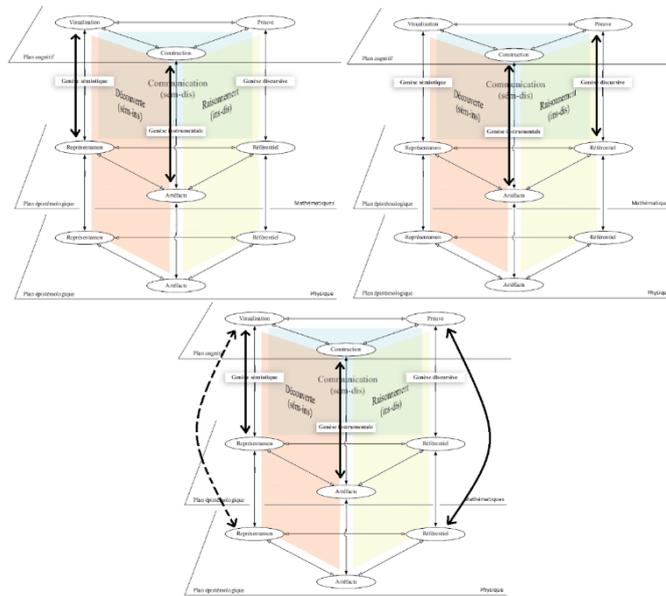


Figure 13 : Analyse a posteriori des tâches effectuées par l'élève A

6.2. L'élève B

Le diagramme de Minkowski comporte les trois événements, les axes Ox , $Oc.t$, $Oc.t'$, la droite $x = c.t$, et des projections parallèlement à l'axe $Oc.t'$ coupant un axe Ox' qui n'est pas correctement placé. De plus, le curseur n'apparaît pas. La notion d'événement semble mobilisée ainsi que celle de référentiel puisque les deux repères apparaissent explicitement même si cela demeure imparfait. La notion d'ordre chronologique relatif ne semble pas acquise (figure 14).

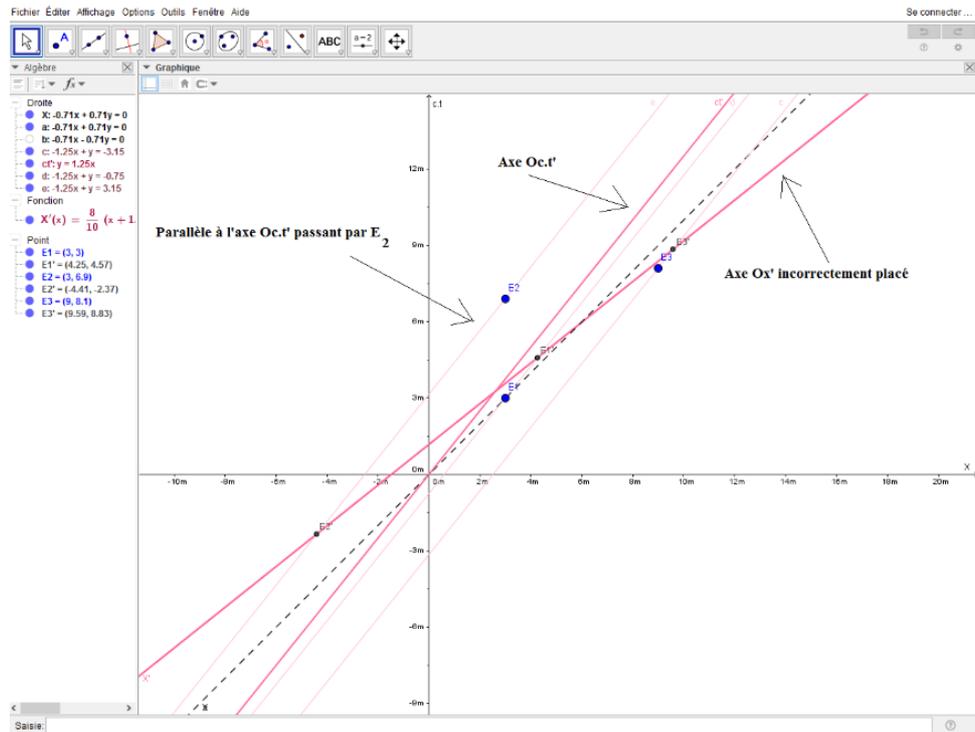


Figure 14 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève B.

La seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour amener des informations techniques sur le curseur et sur la signification des droites $x = c.t$ ou $x' = c.t'$) comporte les différents éléments qui manquaient dans la première version. L'axe Ox' est bien placé, le curseur permettant de changer la valeur de $\frac{v}{c}$ apparaît et les ordonnées $c.t'$ des différents événements également. Des parallèles à l'axe $Oc.t'$ ou à l'axe Ox' passant par les différents événements sont aussi représentées.

Ce travail met en évidence des interactions de type sémiotiques-instrumentales et de façon plus épisodique des interactions instrumentales-discursives car des confusions

importantes sont mises en évidences avec l'enregistrement audio sur la construction de la droite $O.c.t'$ avec un coefficient directeur incorrect (coefficient directeur de 0,6 au lieu de $\frac{1}{0,6}$). L'enregistrement audio montre que l'élève B énonce des résultats sans utiliser véritablement le diagramme de Minkowski ou alors de façon élémentaire. Des confusions subsistent sur le but de l'activité (consistant à comparer des vitesses d'après l'élève B) ou sur la notion de vitesse d'un système dans un référentiel donné (B parle plutôt de la vitesse d'un référentiel). Les explications du tracé de la droite $x = c.t$ sont vagues ainsi que les positions des ordonnées $c.t'$ des différents événements (figure 15).

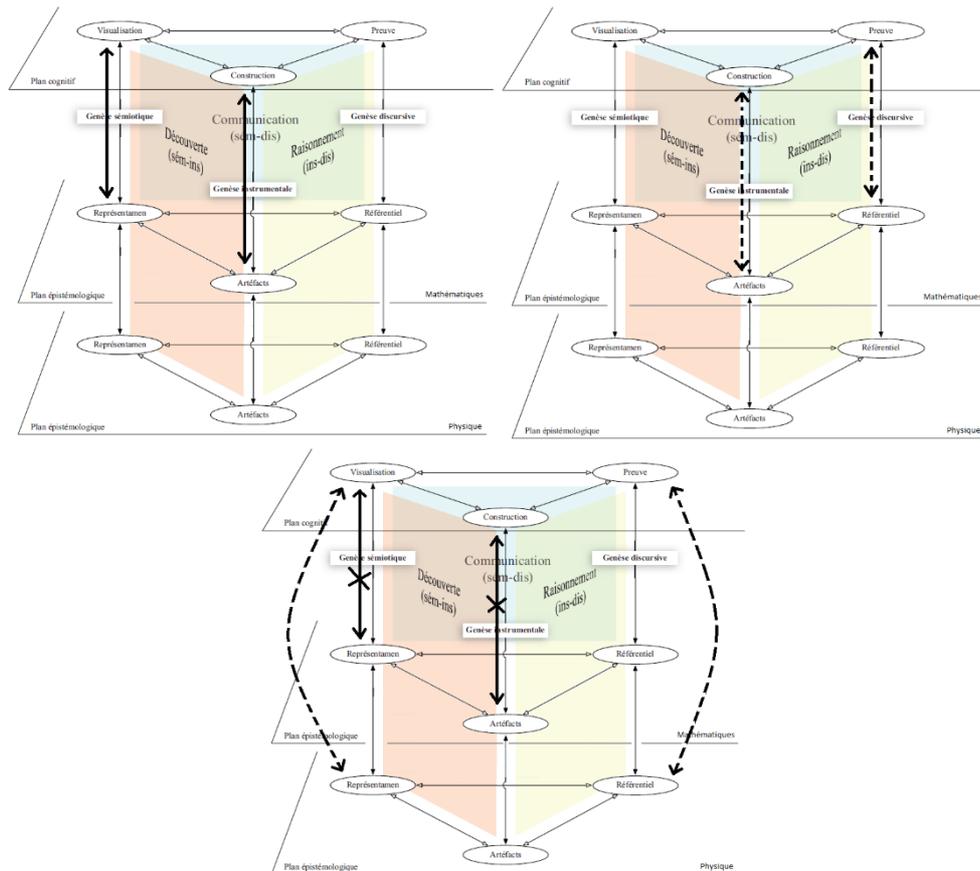


Figure 15 : Analyse *a posteriori* des tâches effectuées par l'élève B

6.3. L'élève C

Le diagramme de Minkowski comporte les trois événements correctement positionnés, les différents axes, la droite $x = c.t$, et des projections parallèlement à l'axe $Oc.t'$ coupant l'axe Ox' . Néanmoins les différents éléments ne sont pas nommés sur GeoGebra et le curseur n'apparaît pas. La notion d'événement semble mobilisée. Celle d'ordre chronologique relatif n'est pas traitée, le curseur permettant de changer la vitesse n'apparaît pas, les coordonnées des événements sur l'axe $oc.t'$ non plus (figure 16).

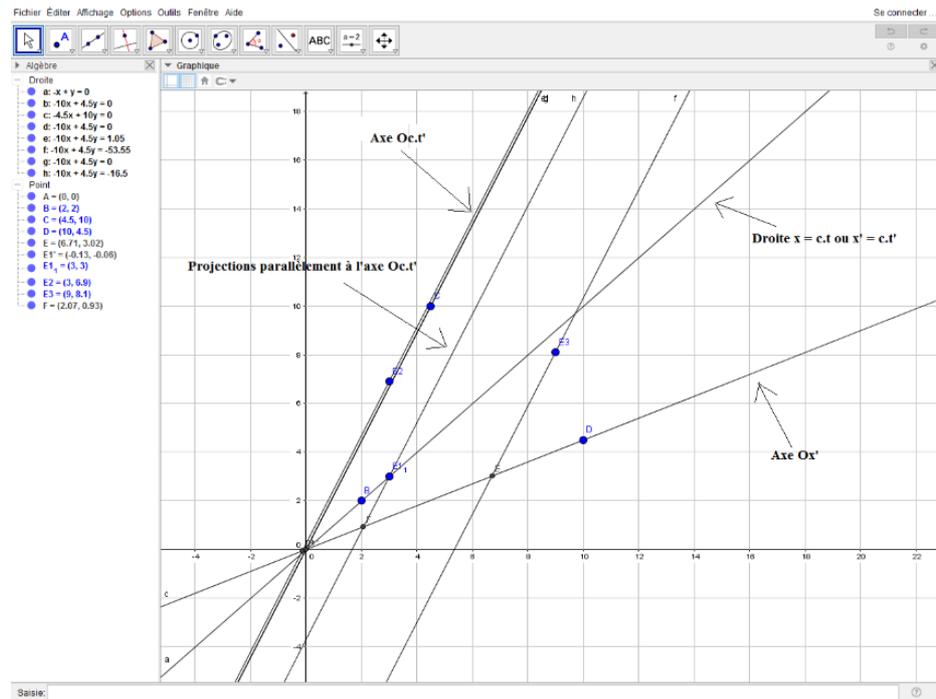


Figure 16 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève C.

La seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour donner des informations techniques sur le curseur et la façon de nommer des éléments sur GeoGebra) comporte les différents éléments qui manquaient dans la première version et il est possible maintenant de traiter la notion d'ordre chronologique relatif.

Ce travail met en évidence des interactions de type sémiotiques-instrumentales ainsi que des interactions instrumentales-discursives. L'enregistrement audio de l'élève C montre des erreurs de physique (confondre le référentiel d'Arminéh et de Daniel, se tromper dans l'ordre chronologique des événements, figure 17).

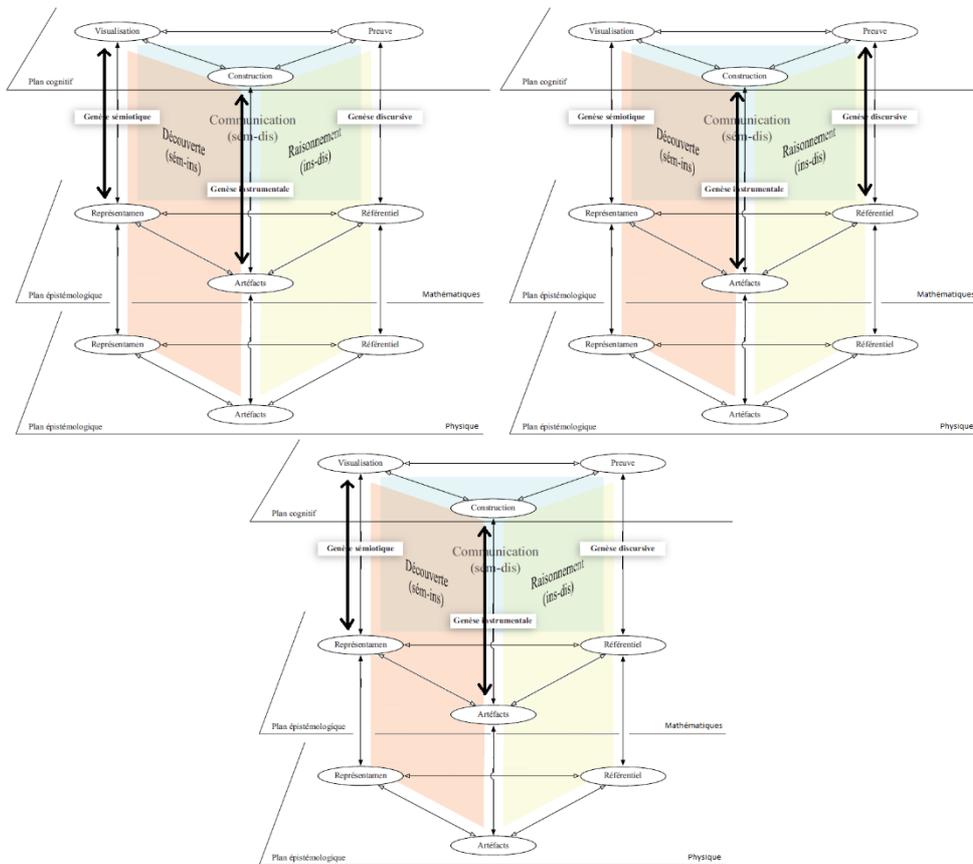


Figure 17 : Analyse *a posteriori* des tâches effectuées par l'élève C

6.4. L'élève D

Le groupe de l'élève D a représenté un diagramme de Minkowski contenant les trois événements, la droite $x = c.t$, les quatre axes Ox , $Oc.t$, Ox' et $Oc.t'$ ainsi que les projections des trois événements parallèlement à l'axe $Oc.t'$ sur l'axe Ox' . Les noms des différents axes n'apparaissent pas. Le curseur est utilisable, mais les axes ne correspondent pas à Ox' et $Oc.t'$ et la droite $x = c.t$ n'est pas la bissectrice de l'angle formé par les deux droites ainsi créées. La valeur affichée par le curseur n'est pas rattachée à la valeur de la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel (figure 18).

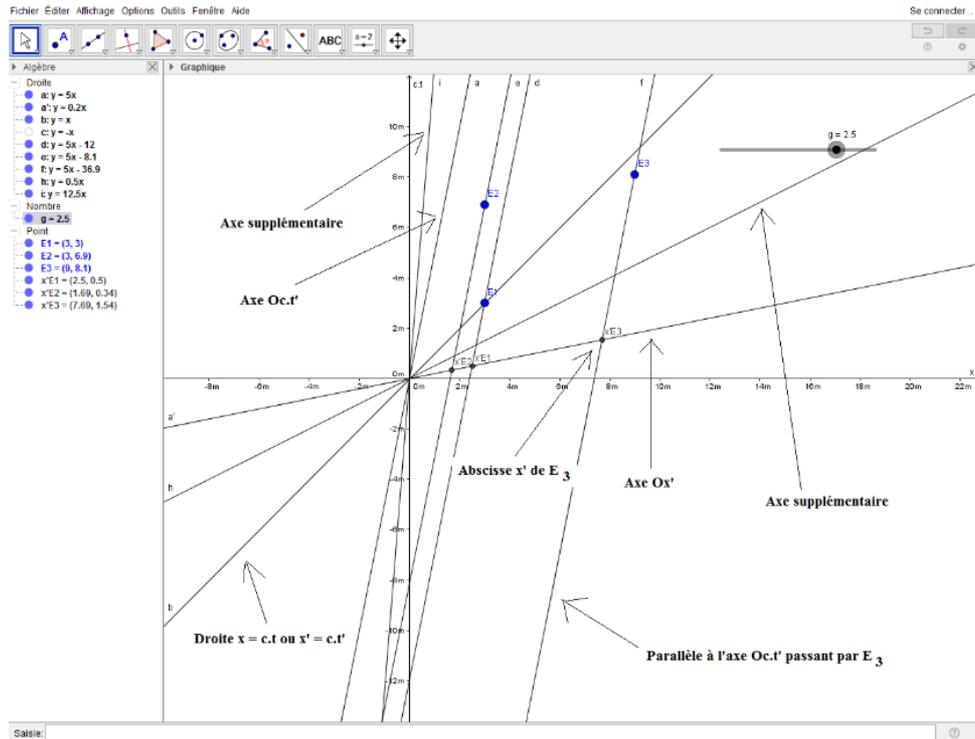


Figure 18 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève D.

Sur la seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour préciser les significations de l'axe $Oc.t'$ et des droites $x = c.t$ ou $x' = c.t'$) les ordonnées des événements sur l'axe $Oc.t'$ sont représentées. Elles sont nommées y_{E1} , y_{E2} ou y_{E3} . Les abscisses des événements sur l'axe Ox' sont nommées A , B ou C . Les noms des axes Ox' , $Oc.t'$ et de la droite $x = c.t$ ne sont toujours pas représentés. Bien qu'imparfait, ce travail met en évidence des interactions de type sémiotique-instrumentale ainsi qu'instrumentale-discursive.

L'enregistrement audio de l'élève D montre des erreurs d'interprétation du diagramme de Minkowski lors de la description des différentes positions d'Armineh au cours du temps dans le référentiel de Daniel et lorsqu'il semble penser que les événements sont en mouvement. L'ordre chronologique relatif des événements est en revanche bien traité (figure 19).

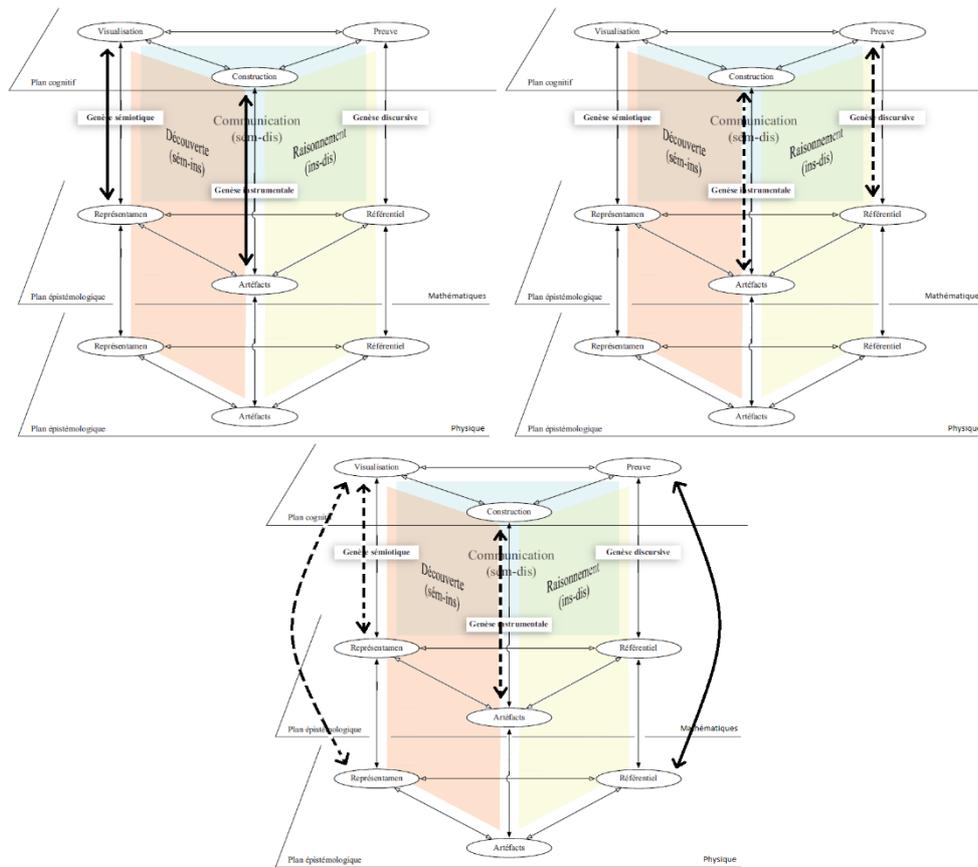


Figure 19 : Analyse *a posteriori* des tâches effectuées par l'élève D

7. Bilan des quatre analyses

Les analyses précédentes ont permis d'étudier les tâches dévolues aux élèves et celles réellement réalisées par eux en tenant compte des cadres de rationalité des mathématiques et de la physique. Cette étude préliminaire s'est focalisée sur les liens entre les plans épistémologiques et le plan cognitif. Elle a permis de mettre en évidence les jeux de cadres de rationalité lors de la résolution de ce problème de relativité restreinte traité par une approche diagrammatique. Le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra permet de mettre en œuvre ici une genèse sémiotique supplémentaire avec son aspect dynamique. Le curseur favorise le changement des conditions de vitesses d'un référentiel par rapport à un autre et l'élève voit le résultat directement sur l'écran. Une genèse instrumentale différente de l'activité papier-crayon est également mise en jeu lors de la construction du diagramme de

Minkowski. Enfin nous émettons l'hypothèse que GeoGebra, en permettant de tirer plus facilement des conclusions sur l'ordre chronologique relatif des événements, permet l'activation d'une genèse discursive originale. L'enregistrement audio des élèves leur permet de communiquer sur le diagramme de Minkowski sans le mettre en œuvre directement. C'est le signe d'interactions sémiotiques et discursives favorisant une conceptualisation des notions de relativité restreinte.

Conclusion

Nous avons utilisé trois cadres théoriques (TSD, TAD et ETM étendu) afin de réaliser l'analyse *a priori* des tâches mises en œuvre lors de la séquence d'enseignement. Le cadre de l'ETM étendu nous a permis de réaliser une analyse plus complète et une meilleure évaluation des types de tâches associés à certaines étapes du cycle de modélisation. Il permet la prise en compte de la mobilisation des plans épistémologiques des mathématiques ou de la physique pour chacune des tâches. Le cadre de l'ETM étendu nous a également permis de montrer que le logiciel GeoGebra développe des genèses spécifiques par rapport à une activité papier-crayon. Une nouvelle genèse sémiotique conduit à une visualisation du changement des coordonnées temporelles des événements en fonction de la vitesse v d'Armineh par rapport à Daniel. Une nouvelle genèse instrumentale correspond à la manipulation du logiciel de géométrie dynamique avec la fonctionnalité curseur permettant de changer simplement les conditions expérimentales. Enfin une nouvelle genèse discursive permet de conclure sur l'ordre chronologique des événements en fonction du référentiel d'étude et de la vitesse v . Le modèle de l'ETM étendu conduit à la réalisation de l'analyse *a priori* de chacune des tâches à effectuer par les élèves et à tester avec succès l'analyse *a posteriori* du travail effectué par eux. Nous envisageons, par la suite, d'analyser grâce au modèle de l'ETM étendu ou à une de ses évolutions, les tâches mises en œuvre à chacune des étapes du cycle global de modélisation lors d'autres séquences utilisant la relativité restreinte. Des résultats préliminaires tendent à montrer que les genèses ainsi que les plans épistémologiques des mathématiques et de la physique ne sont pas mobilisés de la même façon en fonction de l'étape du cycle de modélisation. Un nouveau cadre de rationalité est également à l'étude avec la chimie.

Bibliographie

- ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble, La pensée Sauvage éditions, **9(3)**, 281-308.
- BLUM, W., LEISS, D. (2005). « Filling up » - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings for the CERME 4*, Spain. 1623-1633.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble, La pensée Sauvage éditions, **19(2)**, 221-266.
- CAZES, C., VANDEBROUCK, F. (2014). Vil Coyote rattrapera-t-il Bip - Bip ? Un exemple d'introduction de fonctions à partir d'une situation concrète. *Repères. Irem.* **95**, 5-22.
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg*, **5**, 37-65.
- DE HOSSON, C., KERMEN, I. & PARIZOT, E. (2010). Exploring students' understanding of reference frames and time in Galilean and special relativity. *European Journal of Physics*, **31**, 1527-1538.
- KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM mathematics Education*, **48**, 721-737.
- MALAFOSSE, D., LEROUGE, A. (2000) Ruptures et continuités entre physique et mathématiques à propos de la caractéristique des dipôles électriques linéaires. *Aster*, **30**, 65-85.
- MALAFOSSE, D., LEROUGE, A. & DUSSEAU, J.M. (2000) Étude, en inter didactique des mathématiques et de la physique, de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité. *Didaskalia*, **16**, 81-106.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (MEN) (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de physique-chimie. Classe terminale de la série scientifique. *Le Bulletin Officiel*, **Spécial n°8**.
- MINKOWSKI, H. (1909a) Raum und Zeit. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **18**, 75-88.
- MINKOWSKI, H. (1909b) Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 104-111.

MOUTET, L. (2016). *Diagrammes et théorie de la relativité restreinte : une ingénierie didactique*, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

VERGNAUD, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? *Infancia y aprendizaje*, **36(2)**, 131-161.

WALTER, S.A. (1996) *Hermann Minkowski et la mathématisation de la théorie de la relativité restreinte*. Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

LAURENT MOUTET

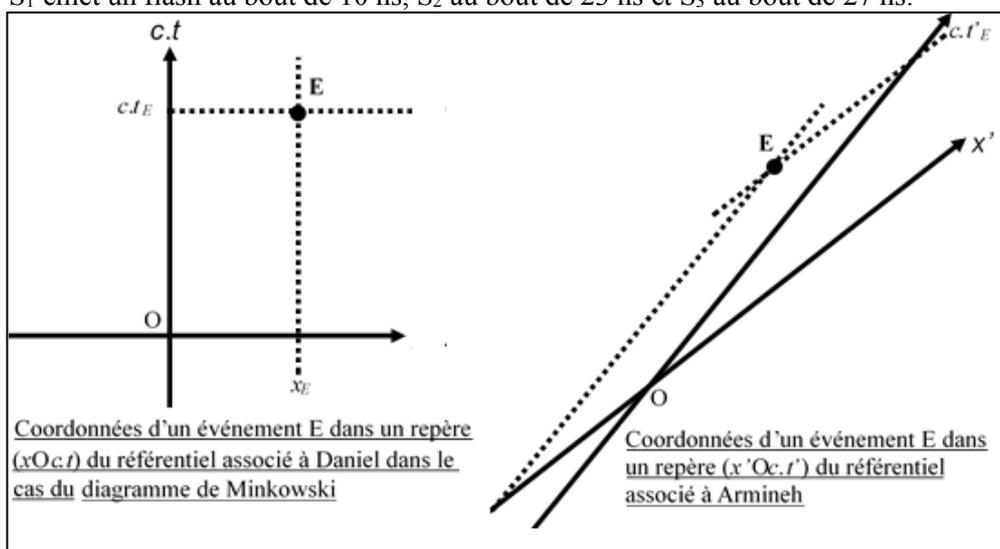
Laboratoire de Didactique André Revuz
UFR de mathématiques – Université Paris Diderot
laurent.moutet@ac-amiens.fr

Annexe Activité proposée : Relativité restreinte et géométrie

Note : Le but de l'activité proposée est de modéliser une situation par un diagramme de Minkowski à l'aide du logiciel GeoGebra, de repérer trois événements E_1 , E_2 et E_3 dans le repère des référentiels associés à deux personnages, nommés Daniel et Armineh, et d'utiliser le modèle mathématique lorsque l'on fait varier la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel à l'aide de l'outil curseur.

Une route horizontale comporte trois dispositifs émettant des flashes lumineux afin de repérer un danger. Daniel est immobile sur le côté de la route qui peut être modélisée par une droite Ox orientée. Une voiture conduite par Armineh se déplace à une vitesse de $+0,6c$ sur la route à côté de Daniel et se dirige vers les dispositifs lumineux.

L'origine des dates et des positions correspond à l'événement pour lequel les coordonnées de Daniel et Armineh coïncident. Dans le référentiel associé à Daniel, les deux premiers dispositifs notés S_1 et S_2 se trouvent à $+3$ mètres de Daniel et le troisième, noté S_3 , se trouve à $+9$ mètres de lui. Dans le référentiel associé à Daniel, S_1 émet un flash au bout de 10 ns, S_2 au bout de 23 ns et S_3 au bout de 27 ns.



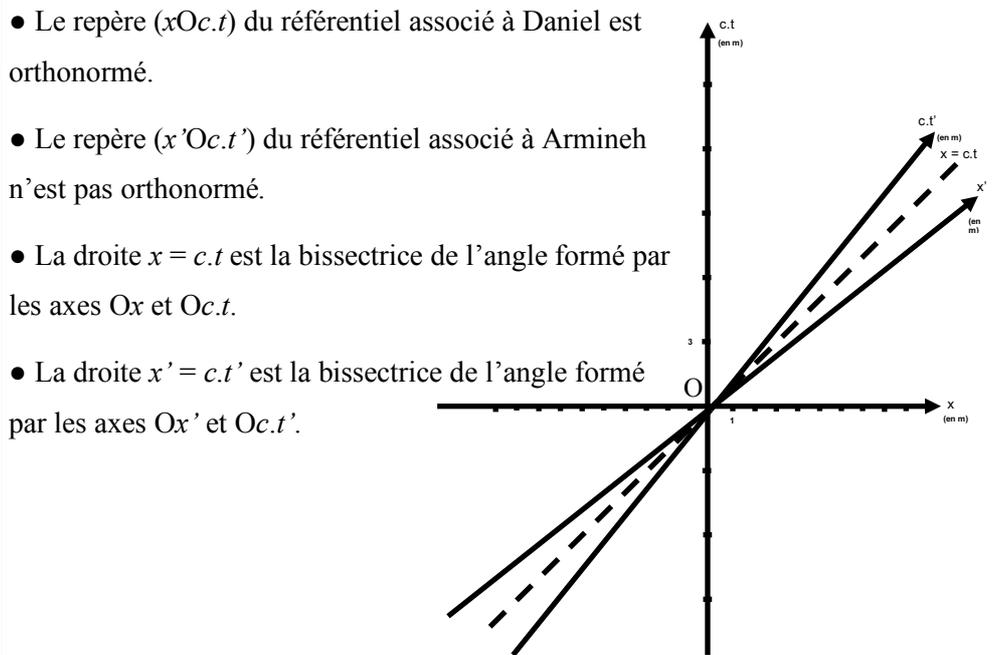
Document 1 : Coordonnées d'un événement E

La durée propre, notée Δt_p , correspond à la durée entre deux événements A et B ayant les mêmes coordonnées spatiales, dans un référentiel galiléen donné. Cette durée est mesurée par une horloge unique, fixe dans ce référentiel, et ayant les mêmes coordonnées spatiales que les deux événements. ∴/..

Une durée impropre, notée Δt_m , correspond à la durée entre les deux mêmes événements A et B n'ayant pas les mêmes coordonnées spatiales, dans un référentiel galiléen donné. Cette durée est mesurée par deux horloges, fixes dans ce référentiel et situées à la même coordonnée spatiale de chaque événement.

Les durées Δt_m et Δt_p sont reliées par la relation suivante : $\Delta t_m = \gamma \cdot \Delta t_p$.

Document 2 : Dilatation des durées, durée propre et durée impropre



Document 3 : Diagramme de Minkowski

Donnée : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. c représente la vitesse de la lumière dans le vide.

Le coefficient de dilatation des durée γ est défini par l'expression suivante :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Correction de l'activité

Une proposition de résolution est donnée avec le lien suivant.

https://drive.google.com/file/d/0B_f8SgBLz2P0N0xfazFCSmU3MHM/view