THOMAS BARRIER, AZZEDINE HAJJI

EXEMPLE, EXPLICATION ET PROCESSUS DE DEMONSTRATION

Abstract. Example, explanation and proving. The article looks at the proving process in mathematics from a didactic perspective. The study seeks to identify what metamathematics knowledge is at stake when mathematicians produce proof of implications with universal quantifiers. For this reason, we propose a modelling of the proof process – from the manipulation of examples to the finished product – based on dialogic logic tools. This modelling leads us to a characterization of the enunciative position which is needed to elaborate proofs. The results are derived from two cases: one in arithmetic integers, another in plane geometry. Their comparison allows us to discuss the limits of a transversal approach to this meta-mathematical knowledge without taking into account the specificity of mathematical fields.

Résumé. L'article s'intéresse au processus d'élaboration des démonstrations en mathématiques dans une perspective didactique. L'étude cherche à identifier les savoirs métamathématiques en jeu dans le cadre de la validation des énoncés qui s'expriment sous la forme d'implications universellement quantifiées. A cette fin, nous proposons une modélisation de ce processus – depuis la manipulation d'exemples jusqu'au produit fini – en appui sur des outils de logique dialogique. Cette modélisation nous conduit à une caractérisation de ces enjeux de savoir sur le plan de la position énonciative. Les résultats sont dégagés à partir de l'étude de deux cas : un en arithmétique des entiers, l'autre en géométrie plane. Leur comparaison nous permet de discuter des limites d'une approche transversale aux mathématiques de ces savoirs sur l'activité de démonstration.

Mots-clés. Démonstration, exemple, logique dialogique, position énonciative, géométrie, arithmétique.

Introduction

Cet article s'intéresse aux processus d'élaboration des démonstrations en mathématiques en tant que pratique langagière propre à cette discipline. Ces processus de validation sont familiers des mathématiciens et des enseignants de mathématiques. Pour autant, il n'y a que peu de consensus sur les caractéristiques de cette activité qui pourraient faire l'objet d'un enseignement explicite, d'une institutionnalisation, y compris dans le contexte de dispositifs spécifiquement conçus à cette fin[1]. L'enjeu de cet article est de contribuer à mieux identifier les savoirs métamathématiques qui sont en jeu dans les processus d'élaboration des démonstrations. La perspective est didactique : en proposant un éclairage épistémologique sur les savoirs qui y sont relatifs, notre objectif est d'alimenter la

[1] Problème ouvert, problème pour chercher, situation de recherche pour la classe, etc.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 24, p. 47 - 74.

réflexion sur son enseignement. Il faut souligner qu'en tant qu'objet d'enseignement et d'apprentissage, la démonstration se distingue d'autres contenus mathématiques. Son enseignement n'est en effet que rarement adossé à une théorie comme peut l'être celui des nombres, des fonctions ou encore de l'algèbre. Bien sûr, elle n'est pas seulement un objet logico-mathématique, c'est aussi une pratique discursive propre à la communauté mathématique, une forme particulière de preuve reposant sur les connaissances d'un sujet psychologique, etc., et il n'y a selon nous aujourd'hui pas de consensus sur le ou les points de vue à adopter dans le contexte de l'enseignement ordinaire des mathématiques. Dans cet article, nous proposons d'ancrer nos analyses didactiques pour l'essentiel dans le cadre général de la logique dialogique[2] avec également quelques emprunts du côté de la didactique du français (notion de position énonciative et de secondarisation). Sur le plan didactique, cette recherche relève de la perspective de la théorie des situations didactiques au sens où nous proposons une étude de la démonstration essentiellement centrée sur les situations (les jeux de validation) plutôt que sur les sujets psychologiques. « Ne peut-on pas étudier le jeu d'échecs indépendamment du joueur ? » nous interpelle Brousseau (1997, p. 4). L'originalité de cet article est de prolonger le travail de modélisation des situations, souvent centré sur les situations d'action (l'exemple paradigmatique étant celui de la course à 20), vers les situations de validation.

Une des principales problématiques concernant l'élaboration des démonstrations est celle de l'articulation du travail empirique sur les objets avec l'activité de manipulation des énoncés (Barrier, 2008). Afin d'avancer dans cette direction, Hersant (2010) prend appui d'une part sur les travaux de Bachelard (1938), à travers notamment la lecture qu'en fait le cadre didactique de la problématisation (Orange, 2005 ; Hersant & Orange, 2015), et d'autre part sur le point de vue d'un mathématicien sur la dimension expérimentale des mathématiques (Perrin, 2007). Notre recherche se distingue de ces travaux du point de vue des outils théoriques mobilisés. Si le cadre de la problématisation met bien au cœur de ses préoccupations la question de l'articulation entre le registre des faits (la validation empirique, les exemples) et le registre discursif des raisons, nous avons préféré retenir un outil de modélisation spécifiquement conçu pour modéliser le processus d'élaboration des démonstrations mathématiques (Barrier, 2016) dans le prolongement de la modélisation des situations de validation élaborée par Brousseau (1998). Nos travaux diffèrent aussi de ceux de Hersant du point de vue du niveau scolaire et du type de conjecture considéré[3] : nous nous intéressons à la validation des implications

[2] Par logique dialogique, nous désignons les approches pragmatiques de la logique reposant sur des notions de théorie des jeux (notamment celle de stratégie gagnante), les travaux de Rahman (par exemple Rahman & Keiff, 2005) notamment, mais aussi l'approche modèle-théorétique de Hintikka (par exemple Hintikka & Sandu, 1997).

[3] Ici nous considérerons les conjectures à valider comme étant déjà-là, plutôt qu'à construire ce qui constitue une nouvelle différence. Nous pourrions encore mentionner le niveau

universellement quantifiées – les énoncés de la forme $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ – et non à des problèmes de recherche de maximum dans le contexte des mathématiques discrètes et de l'enseignement primaire. Nous considérons donc nos travaux comme complémentaires à ceux de Hersant.

Au début de l'enseignement secondaire, la problématique de l'articulation de l'empirique et du déductif est souvent abordée dans une perspective négative où les exemples sont de mauvais objets. Il s'agit d'avertir les élèves de la rupture qu'il est nécessaire d'opérer pour accéder à la validation intellectuelle, sur l'écueil que constitue l'empirisme naïf (Balacheff, 1987). De fait, le contrat didactique usuel se caractérise par une focalisation sur la forme du produit fini, sur un jeu formel de manipulation d'énoncés à distinguer selon leur statut opératoire, le processus d'élaboration étant peu considéré (Gandit, 2008). Pourtant, les travaux de Balacheff l'ont mis en évidence, le travail sur les exemples peut s'inscrire dans une perspective de preuve intellectuelle dès lors que les exemples sont considérés non pour eux-mêmes, mais comme porteur d'une certaine généralité (les exemples génériques).

> C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en œuvre. (Balacheff, 1987, p. 165)[4]

Dans ce texte, nous cherchons à souligner le potentiel heuristique des exemples pour l'élaboration des démonstrations, leur potentielle contribution à l'activité mise en œuvre pour construire des raisonnements déductifs, et à caractériser les savoirs métamathématiques en jeu, c'est à dire à mieux saisir ce « quelque part » à l'articulation des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles. En cohérence avec la citation précédente, nous en proposerons une analyse en matière de pratiques langagières et plus particulièrement en termes de position énonciative (Bernié, 2002).

Nous commençons par présenter les outils théoriques que nous mobilisons pour modéliser les processus de démonstration, à savoir les approches dialogiques de la logique (Redmond & Fontaine, 2011) et pour penser l'inscription des élèves dans ces processus. Ajoutons pour éviter tout malentendu que ce texte ne s'intéresse pas à la question de la pertinence de ces outils en tant que potentiels objets d'enseignement, que ce soit dans le secondaire ou dans la formation des enseignants. Notre projet est plus modeste : s'appuyer en tant que chercheurs sur ces éléments théoriques pour contribuer à mieux caractériser un enjeu de savoir sur l'activité de

---

scolaire considéré (fin de l'enseignement primaire d'une part et enseignement secondaire de l'autre).

[4] Nous remercions Nicolas Balacheff pour sa lecture critique d'une précédente version de ce texte.

démonstration. Ces outils sont par la suite convoqués pour deux études de cas, la première en arithmétique et la seconde en géométrie. L'objectif est de caractériser le rapport aux énoncés et aux objets que ces processus des preuves supposent tout en profitant du contraste offert par les deux cas pour discuter de l'influence du domaine mathématique et plus particulièrement des registres de représentation des objets en jeu (Duval, 1995).

Une dernière précaution avant d'engager le travail de modélisation. En français, le terme de démonstration peut renvoyer aussi bien à l'activité mathématique ainsi désignée qu'au produit de cette activité c'est-à-dire le texte de démonstration. Dans cet article, nous nous intéressons à l'activité, au processus d'élaboration, et non au produit. Cette distinction est fondamentale dans la mesure où la fonction d'un tel texte n'est pas nécessairement de rendre compte de l'ensemble du processus d'élaboration de la preuve. Une focalisation sur le produit pourrait conduire à une minoration du rôle des exemples en tant qu'éléments susceptibles de contribuer au processus sous-jacent. Dans un article portant sur les schèmes de démonstration des étudiants, Recio et Godino (2001, p. 91) soulignent que même s'ils infèrent dans leur étude la nature de ces schèmes à partir de productions écrites d'étudiants, il n'y a pas nécessairement lieu d'opposer les schèmes empirico-inductifs des schèmes déductifs au niveau des processus d'élaboration des démonstrations. Evoquant une autre étude auprès d'étudiants à l'université autour du problème de la valeur de la somme des angles d'un triangle, ils écrivent avoir observé qu'un même étudiant pouvait commencer par une approche empirico-déductive pour ensuite terminer par une procédure relevant d'un schème déductif plus ou moins formel. Dans notre recherche, notre objectif est de parvenir à caractériser la position énonciative dans laquelle s'inscrire pour que le travail empirique puisse effectivement venir soutenir l'élaboration d'un argument déductif.

1. Modélisation du processus de démonstration : les outils

Le modèle dialogique proposé dans cette partie consiste en une adaptation à notre questionnement didactique des travaux en logique dialogique de Rahman et de ses collaborateurs situés pour leur part en philosophie de la logique et du langage. Le formalisme auquel nous recourons est inspiré de celui de Redmond et Fontaine (2011). Notons que cette piste est évoquée par Brousseau lorsque celui-ci fait référence aux travaux de Lorenzen (qu'il présente même comme fondateurs de son projet en didactique des mathématiques) :

> Sur la même représentation théorique, il met en scène la production de certains théorèmes et axiomes de logique comme moyen de régler des conflits entre un proposant et un opposant. C'est exactement ce ''jeu'' proposé par P. Lorenzen en 1967 dans son ouvrage Métamathématique qui est à l'origine de la théorie des situations. (Brousseau, 2002, p. 102)

La théorisation par Brousseau (1998) des situations de validation conserve d'ailleurs quelques traces de cette référence à travers les termes *opposant* et *proposant*. La modélisation qui sera proposée ci-dessous reprend et prolonge l'approche de Lorenzen (un jeu essentiellement « syntaxique » qui consiste en la manipulation d'énoncés, mais pas d'objet d'un domaine d'interprétation) : il s'agit d'une nécessité dès lors que l'on souhaite pouvoir rendre compte de la contribution des exemples à l'élaboration des démonstrations (Barrier, 2008). Nous y intégrons par ailleurs certains éléments d'une réflexion de Dowek (2013) sur les relations entre explication et démonstration que nous présentons maintenant.

1.1. Explication et démonstration

Hanna (2018) distingue deux manières de concevoir la problématique de l'explication mathématique dans sa relation avec les démonstrations. On peut tout d'abord s'intéresser à la démonstration pour elle-même, à la façon d'une théorie de logique mathématique, et à ses propriétés intrinsèques susceptibles de lui conférer une dimension explicative. Le lecteur ou scripteur, ses connaissances propres, ne sont pas particulièrement prises en considération. Il s'agit de l'entrée privilégiée dans les recherches en philosophie des mathématiques, y compris celles qui s'intéressent aux pratiques plutôt qu'aux questions de fondements. Par ailleurs, il est également possible d'entrer dans le questionnement dans une perspective de communication et d'apprentissage. Démonstrations et explications sont alors considérées comme des productions langagières au sein d'une communauté discursive donnée. Le questionnement porte alors sur leur élaboration et leur réception par les élèves à partir de leurs connaissances et de leur familiarité avec la forme des jeux de langage impliqués. C'est souvent cette entrée qui a été privilégiée dans les travaux en didactique des mathématiques, par exemple par Balacheff (2010).

Cependant, comme le signale Hanna (2018), les éclairages proposés par les analyses philosophiques sur la nature explicative d'une démonstration mathématique peuvent parfois être utiles aux recherches didactiques, quand bien même il n'existe pas aujourd'hui de consensus clair sur ce qui distingue les démonstrations qui expliquent de celles qui ne le font pas (ou moins). Nous commençons par nous situer dans une telle perspective en empruntant librement à Dowek (2013) des éléments de caractérisation de la notion d'explication reposant sur des caractéristiques logiques internes aux démonstrations. Nous reprenons ci-dessous son analyse.

Celui-ci s'appuie sur le fait mathématique suivant pour chercher à identifier ce qui caractérise une démonstration qui explique : $12\,345\,679 \times 36 = 444\,444\,444$. Pour démontrer ce fait, une méthode consiste à poser la multiplication en colonne. Mais un tel calcul, s'il permet de s'assurer du résultat et constitue bien une démonstration de la proposition ci-dessus, ne peut que difficilement être considéré comme une explication : chaque chiffre est déterminé de manière individuelle avec des procédures spécifiques sans lien apparent les unes avec les autres si bien que la régularité qui saute aux yeux dans l'énoncé apparaît comme un « accident ». Dowek (2013) commence par inviter à observer que l'énoncé en question peut se déduire d'un autre, plus général, et qui par ailleurs permet également d'établir d'autres résultats du même type : pour tout entier naturel n compris entre 1 et 9 on a $12\,345\,679 \times 9 \times n = 111\,111\,111 \times n$. Ce nouvel énoncé pourrait constituer une forme d'explication de l'énoncé initial précédent, mais il reste lui-même à expliquer. Un nouveau calcul (en figure 1) permet d'avancer dans cette direction :

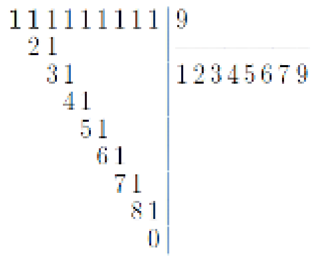

Figure 1. Calcul posé de 111 111 111 : 9 = 12 345 679

A la différence de la première situation, on voit ici apparaître des régularités dans la manière de procéder. Si l'on s'intéresse aux 7 premiers chiffres, le calcul du k-ième ($k < 8$) prend la forme de la division euclidienne générique suivante : $10k + 1 = 9k + k + 1$. On peut lire sur cette égalité que k est le chiffre du quotient et que $k + 1$ le reste ($k + 1 < 9$). Cette dernière formule peut se démontrer de manière générique par un calcul algébrique, autrement dit d'un seul mouvement. Cette possibilité de rendre compte d'un ensemble de faits par un même argument constitue un élément central des éléments de caractérisation d'une explication que nous utiliserons. Nous en rendons compte à partir des deux critères ci-dessous.

1.1.1. Critères n°1

Une démonstration générique est plus explicative qu'une autre qui procède cas par cas. Si l'on considère le cas d'un énoncé universellement quantifié sur un ensemble infini, cette idée peut se traduire par l'affirmation selon laquelle, si le recours à des évaluations empiriques sur certains objets de l'ensemble peut contribuer à faire avancer la conviction, des évaluations empiriques au cas par cas[5] ne relèvent pas d'un processus d'explication au sens où nous l'entendons ici.

[5] Nous traduirons plus bas cette idée de « cas par cas » par une position énonciative relevant du *niveau de la partie* pour le Proposant.

1.1.2. Critère n°2

Nous avons considéré que le fait d'obtenir 12 345 679 × 36 = 444 444 444 comme étant une conséquence d'un énoncé universellement quantifié (pour tout entier naturel n compris entre 1 et 9 on a 12 345 679 × 9 × n = 111 111 111 × n) était plus explicatif que de procéder par un simple calcul. 12 345 679 × 36 = 444 444 444 s'explique par le fait que 4 soit compris entre 1 et 9. De manière générale :

> Généraliser une proposition B qui porte sur un objet t, en une proposition ∀n ∈ E A(n), telle que B soit l'instance de A correspondant à l'objet t, et qui peut se démontrer de manière générique, c'est-à-dire sans énumérer les éléments de E, montre que c'est uniquement son appartenance à E qui est à l'origine du fait que l'objet t vérifie la propriété A. (Dowek, 2013)

Appliqué au contexte des implications qui est celui de cet article, cela donne l'idée suivante : une démonstration générique d'une implication universellement quantifiée $\forall x \in E\ P(x) \rightarrow Q(x)$ peut faire office d'explication pour toute implication matérielle $P(a) \rightarrow Q(a)$, ce qui peut encore se traduire par le fait que $Q(a)$ peut être expliqué par $P(a)$ et par une démonstration générique de l'implication universelle. Pour prendre un exemple qui nous sera utile pour la suite, on pourrait expliquer le fait que « 12^2 est pair » par le fait que « 12 est pair » et par une démonstration générique de l'implication universellement quantifiée correspondante.

Ces deux critères (désignés par la suite critère n°1 et critère n°2) nous seront utiles pour intégrer la question de l'explication dans la modélisation des situations de validation que nous développons ci-dessous.

Avant d'introduire nos outils, il nous a semblé intéressant d'établir un parallèle avec une recherche de Weber et Alcock (2005) portant sur l'interprétation des implications dans la lecture et l'évaluation des démonstrations. Voici la manière dont ils résument leur thèse :

> En résumé, lorsqu'un mathématicien lit une implication dans le contexte d'une démonstration, celui-ci ne s'intéresse pas seulement à la question de la valeur de vérité, mais aussi à la question de la justification – c.-à-d. l'existence ou non d'une raison mathématique légitime pour que l'assertion de la conclusion de l'implication soit bien une conséquence de son antécédent. (Weber & Alcock, 2005, p. 35, notre traduction)

Les auteurs prennent pour exemple l'implication « si 7 est un nombre premier, alors 1 007 est un nombre premier ». Confrontés à cet énoncé présent dans une démonstration qu'ils avaient à évaluer, deux mathématiciens interrogés font part de leur perplexité et la rejettent, bien qu'à l'évidence l'énoncé soit vrai (1 007 est bien un nombre premier). L'un des deux affirme qu'accepter cet énoncé dans la preuve revient à accepter un principe général du type « pour tout x, si x est un nombre premier, alors 1 000 + x est un nombre premier », et qu'il ne voit aucun principe général de ce type qui soit valide et qui puisse venir justifier l'énoncé. Formuler dans les termes de notre article nous interprétons cette exigence de justification comme une exigence d'explication. Qui énonce une telle implication devrait être en mesure d'expliquer par un argument général en quoi le fait que 7 soit premier pourrait venir fonder le fait que 1 007 le soit (critère 2).

Ce dernier exemple nous amène à une précision sur notre choix terminologique. Il met en effet en évidence une certaine proximité entre ce que nous avons appelé explication et ce que d'autres appellent une justification. Nous avons préféré utiliser le terme d'explication, suivant en cela Dowek, plutôt que celui de justification, car il nous semble que les usages de ce dernier terme ne coïncident que partiellement avec ce qui nous intéresse et que nous avons cherché à caractériser à travers les deux critères. Par exemple, dans le cas de la multiplication, le fait de la poser et de procéder à une vérification chiffre par chiffre pourrait constituer pour un mathématicien une justification acceptable, mais probablement pas une explication vraiment satisfaisante. Mais un élève du début de l'enseignement secondaire partagerait-il nécessairement ce point de vue sur ce qui peut ou non constituer une explication ? Cela ne va pas de soi. Comme nous le mentionnions, des auteurs comme Balacheff (2010) considèrent que l'analyse du caractère explicatif d'une démonstration doit prendre en considération le système de connaissance de celui qui élabore ou lit la démonstration. Dans cet article, le choix que nous avons fait de nous focaliser sur le jeu de la démonstration plutôt que sur les élèves ou l'enseignant nous amène à mettre temporairement de côté cette problématique du sujet psychologique. Nous faisons l'hypothèse que les éléments de caractérisation précédents sont suffisamment significatifs des usages de la communauté mathématique, c'est-à-dire des usages de référence, pour qu'ils nous soient utiles dans notre tentative d'identifier et de décrire certains savoirs relatifs à l'activité de démonstration, cette dernière étant également provisoirement analysée indépendamment des élèves et de leur système de connaissances.

1.2. Une modélisation dialogique de la validation mathématique

Dans ce paragraphe, nous présentons nos outils de modélisation. Une présentation plus détaillée peut se trouver dans Barrier (2016). Dans les approches dialogiques, la validation d'une proposition prend la forme d'un dialogue opposant deux joueurs organisé selon un ensemble de règles. Le joueur qui propose l'énoncé à valider est appelé *Proposant*, son adversaire est l'*Opposant*. Certaines règles sont associées aux constantes logiques (conjonction, disjonction, implication, etc.). Elles régissent le déroulement pas-à-pas du dialogue. Le cadre plus général du jeu (comment commencer, quand le dialogue est-il terminé, etc.) est organisé par d'autres règles appelées ci-dessous règles structurelles.

Chaque joueur réalise chacun à son tour une action : une assertion, une question, un choix de lettre (dans le cas d'un processus de validation exclusivement déductif – nous parlerons de jeu d'intérieur[6]) ou un choix d'objet dans le domaine sur lequel l'énoncé est interprété (dans le cas d'une preuve pragmatique – nous dirons un jeu d'extérieur). Le jeu commence par l'assertion de la proposition à évaluer, il se termine après un nombre fini de coups par la victoire de l'un des deux joueurs. Une proposition sera dite logiquement valide (jeu d'intérieur) ou vraie relativement à un domaine d'interprétation (jeu d'extérieur) s'il existe une stratégie gagnante, c'est-à-dire une manière de jouer qui assure la victoire, quelles que soient les décisions de son adversaire, pour le Proposant dans le dialogue qui l'oppose à l'Opposant. Nous présentons ci-dessous le cadre réglementaire de ces actions. Pour des raisons de place, mais aussi pour souligner les points communs et les différences entre les jeux d'extérieur et d'intérieur, nous le faisons d'un seul tenant en signalant les variations lorsqu'il y en a.

1.2.1. Règles pour les constantes logiques

<u>R-ET</u> : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \wedge B$ est en jeu, une attaque consiste à choisir l'un des deux membres de la conjonction, une défense consiste à répliquer par l'assertion[7] du membre choisi par l'attaquant.

<u>R-OU</u> : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \vee B$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir l'un des deux membres de la disjonction, une défense consiste à choisir ce membre et à en faire l'assertion.

<u>R-IMPLIQUE</u> : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \rightarrow B$ est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion A, une défense à faire l'assertion B. Dans le cas d'un jeu d'extérieur, faire l'assertion A conduit à l'ouverture d'un sous-jeu qui doit être gagné par celui qui fait l'assertion.

<u>R-NON</u> : Lorsqu'un énoncé de la forme $\neg A$ est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion de A, et il n'y a pas de défense possible.

<u>R-UNIV</u> : Lorsqu'un énoncé de la forme $\forall x\, P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à choisir un symbole a (jeu d'intérieur) ou un objet noté a du domaine d'interprétation (jeu d'extérieur), une défense consiste à faire l'assertion $P(a)$.

---

[6] Cette terminologie est empruntée à Hintikka (2007, p. 67) : « Malgré ces liens, il est philosophiquement très important de les distinguer nettement l'un de l'autre. Les jeux sémantiques sont des jeux d'extérieur (*outdoor games*). On les joue sur les objets du langage que l'on parle, et ils consistent principalement pour les deux joueurs à choisir entre différents objets. A l'opposé, les jeux de preuve sont des jeux d'intérieur (*indoor games*). On les joue avec un crayon et du papier, avec une craie et un tableau, ou de nos jours avec un ordinateur. »

[7] En somme tout joueur qui affirme $A \wedge B$ est ensuite tenu d'affirmer A ou B au bon vouloir de son adversaire.

R-EXIST : Lorsqu'un énoncé de la forme $\exists x\ P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir un symbole (jeu d'intérieur) ou un objet du domaine d'interprétation (jeu d'extérieur), une défense consiste à réaliser ce choix d'un certain a (symbole ou objet selon les cas) et à faire l'assertion de $P(a)$.

1.2.2. Règles structurelles

R-Lancement du jeu : Le jeu commence par l'assertion par le Proposant de la proposition qui fait l'objet de la validation. Les joueurs jouent ensuite chacun à leur tour.

R-Fin de partie :

- Cas des jeux d'intérieur : Le jeu se termine lorsqu'un joueur ne peut plus produire de coup, l'autre joueur a alors gagné la partie.

- Cas des jeux d'extérieur : Le jeu se termine lorsqu'un joueur fait l'assertion d'une proposition atomique $P(a)$ (c'est-à-dire élémentaire, ne comportant plus de constantes logiques)[8]. Cette proposition est conjointement évaluée. Si a satisfait P alors ce joueur gagne la partie.

R-Jeu formel (jeu d'intérieur – exclusivement discursif) : Pour que le Proposant puisse faire l'assertion d'une proposition atomique, il est nécessaire que celle-ci ait été préalablement avancée par l'Opposant.

R-Classique : Chaque joueur peut soit attaquer toute assertion (non élémentaire) faite par son adversaire, soit se défendre contre toute attaque de son adversaire.

1.2.3. Remarques

(1) Dans le cas des jeux d'extérieur (validation empirique), la version retenue pour la règle *R-Fin de partie* est empruntée à Vernant (2011). Cette règle donne la possibilité aux joueurs de prendre des informations sur les objets qu'ils manipulent en cours de partie ce qui ne peut être le cas dans une perspective fondationnelle en logique (le domaine d'interprétation est dans ce cas supposé déjà parfaitement connu des joueurs). Le point de vue pragmatique de Vernant est mieux adapté à nos préoccupations didactiques dans la mesure où il autorise l'enrichissement empirique du milieu en cours de validation.

(2) La règle *R-jeu formel* garantit le caractère exclusivement discursif et déductif des jeux d'intérieur. Pratiquement, cette règle signifie qu'il n'est pas possible d'affirmer un énoncé élémentaire à moins que celui-ci ne soit une hypothèse (on peut voir les assertions de l'Opposant comme des hypothèses à exploiter pour le Proposant).

---

[8] P peut tout aussi bien être une relation à n arguments. Dans ce cas a désigne un n-uplet.

(3) Cette modélisation opérationnalise l'idée de Brousseau d'une approche des situations de validation sous la forme dialogique d'une opposition entre un Opposant et un Proposant en remontant aux outils qu'il cite lui-même sans pour autant les mobiliser formellement. Dans un tel cadre, les aspects pragmatiques de la validation sont explicites : les pratiques langagières sont réglées, mais aussi finalisées, les énoncés relèvent de véritables coups dans des jeux de langage (Barrier, Durand-Guerrier & Mesnil, 2019). Il s'agit donc d'un bon candidat dans la perspective d'une étude des caractéristiques des positions énonciatives associées à l'élaboration des démonstrations.

(4) La modélisation par le jeu a divers avantages. Outre l'articulation des dimensions systémique et téléologique évoquée ci-dessus (Sensevy, 2012), ce type de modélisation permet de distinguer entre le niveau de la partie et celui de la stratégie (les notions de vérité et de validité logique sont définies par l'existence de stratégies). Cette distinction ouvre un espace pour analyser le processus d'élaboration des démonstrations et des explications : il est possible de s'engager dans une partie sans disposer à priori de stratégie gagnante. Elle permet aussi de penser la distinction entre suivre une partie coup par coup (s'accorder avec chaque usage d'une règle d'inférence) et la comprendre par l'accès à la dimension stratégique du jeu (comprendre la démonstration, accéder à l'explication). Ceci permet d'envisager des mouvements de positionnement des joueurs dans le jeu (des mouvements de position énonciative, cf. prochain paragraphe).

(5) Cette modélisation est adaptée au questionnement de ce texte dans la mesure où elle permet d'intégrer dans un même canevas les jeux d'extérieur pouvant rendre compte de la validation empirique (jeu sur les exemples) et les jeux d'intérieur ne mobilisant que les ressources propres au langage. La souplesse des approches dialogiques permet ce pluralisme (Rückert, 2011), par l'intermédiaire de variations sur les règles du jeu (notamment *R-Fin de partie* et *R-Jeu formel*).

1.3. Position énonciative

Dans une prochaine partie, nous allons exemplifier le fonctionnement de la modélisation pour analyser l'élaboration d'une démonstration en arithmétique et d'une autre en géométrie. Avant cela, revenons sur le concept de position énonciative qui nous sera utile pour caractériser l'attitude qu'il s'agit d'adopter dans les jeux d'élaboration de démonstration. Ce concept vise à rendre compte des spécificités disciplinaires des activités langagières. D'une manière générale, il s'agit de souligner le fait que si les différents locuteurs d'une même langue partagent quelques ressources transversales communes, les pratiques langagières sont spécifiques des contextes d'usage. Les apprentissages langagiers sont alors conçus comme des apprentissages disciplinaires (et réciproquement !), ce qui n'est pas sans questionner l'extension de la discipline scolaire « français » et ses relations avec les autres disciplines scolaires (Jaubert & Rebière, 2011). Elaborer des démonstrations suppose de s'inscrire dans des jeux de langage tout à fait spécifiques, de se positionner dans une communauté discursive scolaire en y pratiquant le genre de discours caractéristique de cette activité :

> Leur orchestration progressive, indissociable de la réitération et de la longueur des situations de débat oral et sensible à la progression de la cohérence des écrits, signifie la construction d'un positionnement énonciatif particulier, amenant l'élève à se constituer en sujet « scientifique scolaire » tout en « secondarisant » ses pratiques langagières – à s'instituer acteur dans une communauté transposée à l'école en s'appropriant ses pratiques à la fois technologiques et langagières, en changeant de contexte social, en déplaçant son point de vue à travers une recontextualisation et une reconfiguration de ses pratiques initiales, y compris langagières, à l'aide des genres discursifs reconnus dans la communauté de référence. (Bernié, 2002, pp. 82-83)

En somme la fonction théorique du concept de position énonciative est de se donner les moyens de penser ce qui caractérise les différentes activités langagières disciplinaires. Nous relevons notamment le fait que selon Bernié, la construction d'un positionnement énonciatif de sujet « scientifique scolaire » passe par un processus de secondarisation de ses pratiques langagières :

> La notion de « secondarisation » des discours réfère aux processus de transformation des usages langagiers initiaux des élèves, indissociable de la transformation de leurs modes d'agir et de penser dans une discipline. Elle cherche à rendre compte des mouvements de « saisie » (utilisation réfléchie) des outils culturels, via la construction de leurs schèmes d'utilisation. Le processus d'appropriation de ces outils génère des réorganisations ainsi que des transformations cognitives et langagières : réorganisation des systèmes lexicaux, des moyens discursifs du point de vue, des genres discursifs, etc., corrélés à des positionnements énonciatifs spécifiques, plus adéquats à la communauté discursive disciplinaire en voie d'institution dans la classe (Jaubert & Rebière, 2011, p. 123)

Il nous semble que cette idée de secondarisation rend bien compte de ce qui se joue dans la construction d'une position énonciative permettant une articulation entre le travail d'exploration empirique et la formulation d'une démonstration déductive. Le travail sur les exemples change de nature lorsqu'il s'inscrit dans une perspective de validation intellectuelle plutôt que pragmatique. Il s'agit pour les élèves de s'approprier les jeux de langage des démonstrations, d'élaborer des schèmes d'utilisation de ses règles du jeu, en particulier la règle R-Jeu formel, d'en faire un instrument de validation et d'explication.

Dans ce texte, les outils de modélisation qui précèdent ont pour finalité de se donner les moyens d'une caractérisation de la position énonciative à construire dans le contexte disciplinaire qui nous intéresse (les pratiques de démonstration en mathématiques), voire de telles caractérisations pour les différents domaines de ce contexte disciplinaire. La modélisation par le jeu paraît particulièrement adaptée à cette perspective : on peut jouer à un jeu (y compris des jeux de langage) dans différentes perspectives stratégiques (des positions énonciatives).

2. Modélisation du processus de démonstration : un premier exemple

Dans cette partie, nous détaillons l'analyse d'un processus d'élaboration d'une démonstration pour un énoncé d'arithmétique de la forme générique $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ dans la perspective de dégager les caractéristiques de la position énonciative associée. Cette étude de cas a selon nous une dimension générique sur laquelle nous reviendrons en fin d'analyse. La conjecture considérée est la suivante : *pour tout entier naturel, si cet entier est pair alors son carré l'est aussi* [$\forall n \in \boldsymbol{N}\ (\exists k \in \boldsymbol{N}\ n = 2k \to \exists k' \in \boldsymbol{N}\ n^2 = 2k')$].

2.1. Approche par un jeu d'extérieur

Le tableau 1 rend compte d'une approche par un jeu d'extérieur avec des choix arbitraires[9] pour les nombres considérés. D'une manière générale, les nombres figurant dans les colonnes extérieures du tableau (colonnes 1 et 6) servent à repérer l'ordre dans lequel les coups sont joués. Ils définissent donc un ordre possible de lecture. Une attaque fait avancer d'une ligne alors qu'une défense est représentée sur la même ligne que l'attaque correspondante. Le cas échéant, les numéros des assertions qui sont attaquées sont mentionnés dans les colonnes centrales (colonnes 3 et 4). Certaines défenses sont parfois laissées en attente ce qui explique que les nombres figurant dans les colonnes extérieures ne soient pas nécessairement rangés par ordre croissant[10].

	Opposant			Proposant	
				$\forall n \in \boldsymbol{N}\ (\exists k\ n = 2k \to \exists k'\ n^2 = 2k')$	0
1	$? - \forall\ [n = 12]$*	0		$\exists k\ 12 = 2k \to \exists k'\ 12^2 = 2k'$	2
3	$\exists k\ 12 = 2k$	2		$\exists k'\ 12^2 = 2k'$	6
5	$12 = 2 \times 6\ [k = 6]$**		3	$? - \exists$	4
7	$? - \exists$	6		$12^2 = 2 \times 72\ [k' = 72]$***	8

Tableau 1. Modélisation par un jeu d'extérieur

Commentaires : Le domaine d'interprétation pour les choix d'objet (R-UNIV et R-EXIST) est l'ensemble des entiers naturels. La partie commence par l'assertion de

[9] Mais qui conduisent le Proposant à gagner la partie.
[10] Le fait de mettre en attente une défense peut permettre de se donner l'occasion de collecter de nouvelles informations qui pourraient être utilisées pour la défense.

la conjecture par le Proposant (coup n°0 ; *R-Lancement du jeu*). Ce coup n°0 est attaqué par l'Opposant qui procède au choix d'un nombre entier (coup n°1 ; $n = 12$; R-UNIV). Le Proposant se défend par l'assertion d'une implication (coup n°2 ; R-UNIV). La partie se poursuit par une nouvelle attaque de l'Opposant qui fait l'assertion de l'antécédent de l'implication (coup n°3 ; R-IMPLIQUE) ce qui a pour effet d'ouvrir un sous-jeu (cas d'un jeu d'extérieur). Le Proposant s'engage dans ce sous-jeu en sollicitant le choix d'un entier de la part de l'Opposant (coup n°4 ; R-EXIST). L'Opposant fait un tel choix ($k = 6$) et avance une proposition atomique (coup n°5 ; R-EXIST ; cas des jeux d'extérieur). Cette proposition est conjointement évaluée (*R-fin de partie*, cas des jeux d'extérieur) : la relation $12 = 2 \times 6$ est bien vérifiée, l'Opposant gagne le sous-jeu. La partie se poursuit par le retour à une défense laissée en attente par le Proposant (coup n°6 ; R-IMPLIQUE). L'Opposant sollicite alors le choix d'un objet du domaine d'interprétation (coup n°7 ; R-EXIST ; cas des jeux d'extérieur). Le Proposant fait ce choix ($k' = 72$) et se défend par la proposition atomique $12^2 = 2 \times 72$ qui est évaluée conjointement par les joueurs (coup n°8 ; R-EXIST ; jeu d'extérieur). La relation a bien lieu, le Proposant gagne la partie (*R-Fin de partie*, jeu d'extérieur).

A un premier niveau d'analyse, on peut voir cette modélisation comme un moyen de rendre compte d'une phase d'exploration de la conjecture, qu'il s'agit dans un premier temps de mettre à l'épreuve de choix d'objets. Au coup n°1, l'Opposant choisit un nombre pair ($n = 12$) sans quoi la partie s'arrêterait dès le 5^e^ coup (impossibilité de choisir un nombre permettant de gagner le sous-jeu). L'enjeu principal de la partie réside pour le Proposant dans la sélection d'un entier naturel qui lui permette de gagner au coup n°8. Ce type de partie peut être rejoué pour d'autres choix de l'Opposant ($n = 12$, $n = 2\,376$, etc.)[11], donnant lieu à de nouveaux calculs, tous indépendants les uns des autres si l'on en reste *au niveau de la partie*. Comme signalé plus haut, le gain de ces parties ne relève pas d'un processus d'explication (critère n°1). La conviction peut progresser, mais pas l'explication. Du point de vue du genre de discours, il faut signaler que le coup n°8 est joué pour lui-même, que le travail empirique mené par le Proposant pour cette partie est orienté vers le gain immédiat de la partie, sans considération pour les assertions en amont de l'attaque à laquelle le Proposant réagit (coup n°7).

Si l'on se place cette fois *au niveau stratégique* plutôt qu'au niveau des parties successives, la question devient : est-il nécessaire que le Proposant puisse trouver un entier k' (coup n°8) dès lors que l'Opposant a fait des choix (coups n°1 et n°5) lui ayant permis de gagner le sous-jeu ouvert par l'attaque de l'implication (coup n°3). Plus formellement, cette question peut se traduire par la question de l'existence d'une fonction $f_n : n \in \boldsymbol{N} \to k' \in \boldsymbol{N}$ telle que l'on ait $n^2 = 2 \times f_n(k)$ à chaque fois que l'on a $n = 2k$. La position énonciative des joueurs évolue à travers un processus de

[11] Empirisme naïf, expérience cruciale... (Balacheff, 1987)

secondarisation : mise à distance des coups qui ne sont plus joués seulement pour eux-mêmes, recherche de généralité, de nécessités, de relations entre les énoncés. Si l'on revient sur la partie décrite dans le tableau 1, il s'agit de porter un nouveau regard sur le calcul réalisé au coup n°8 en se demandant, au-delà des spécificités du nombre n en jeu, si le fait de pouvoir diviser n^2 par 2 dépend seulement ou non du seul fait que n le soit (coup n°5), autrement dit, si la réussite du coup n°8 peut s'expliquer par la réussite du coup n°5. Nous rejoignons ici – par une analyse de la dimension stratégique du jeu – l'idée selon laquelle une explication d'un énoncé portant sur un objet particulier peut trouver sa source dans l'explication d'un énoncé plus général dont cet énoncé serait un cas particulier (critère n°2). Le fait que 12^2 soit pair peut-il s'expliquer par le fait que 12 le soit ? L'objectif devient alors de construire une stratégie générique qui puisse être utilisée quel que soit le choix de n par l'Opposant (coup n°1). Il s'agit de dépasser les calculs au cas par cas, le besoin d'explication prenant alors le pas sur l'exploration de la conjecture ou le renforcement de la conviction.

Une telle stratégie peut se construire en cherchant à mettre en relation l'énoncé défendu par l'Opposant au coup n°5 avec celui défendu par le Proposant au coup n°8 comme ci-dessous :

$12 = 2 \times 6$ (coup n°5)

$12^2 = 2^2 \times 6^2$

$12^2 = 2 \times 2 \times 6^2$

$12^2 = 2 \times 72$ (coup n°8)

Cette mise en relation est indépendante du choix de $n = 12$, elle peut trouver un équivalent dans le langage d'un jeu d'intérieur (avec des lettres de variable plutôt qu'avec des noms d'objet) à partir duquel il devient possible de formuler une démonstration générique explicative (critère n°1)[12].

$n = 2 \times k$

$n^2 = 2^2 \times k^2$

$n^2 = 2 \times 2k^2$

d'où $f_n(k) = 2k^2$

[12] Dans tout ce paragraphe, nous avons fait le choix d'interpréter le prédicat « être pair » par un argument de divisibilité plutôt que par un critère de numération décimale (se terminer par 0, 2, 4, 6 ou 8). Dans ce dernier cas, il est possible de raisonner par disjonction de cas en travaillant sur le chiffre des unités de n plutôt qu'à travers un seul et même argument général. Cette dernière preuve est moins générale, car elle est dépendante du système d'un système de numération.

Il est important de relever le fait que dans le cadre de cette modélisation, nous faisons remonter l'amorce du processus de positionnement au niveau stratégique du jeu dans la recherche d'une explication d'un fait à travers un positionnement au niveau stratégique : le coup n°8 se trouve expliqué par le coup n°5 et la preuve générique de l'énoncé $\forall n \in \boldsymbol{N}\, \forall k \in \boldsymbol{N}\, (n = 2k \to n^2 = 2 \times 2k^2)$. De ce point de vue, le travail sur les exemples joue un rôle essentiel pour l'avancée du processus.

2.2. Approche par un jeu d'intérieur

Nous rendons compte dans le tableau 2 de la forme que pourrait prendre une démonstration de la conjecture.

	Opposant			Proposant	
-1	$\forall n\, \forall k\, (n = 2k \to n^2 = 2 \times 2k^2)$				
				$\forall n\, (\exists k\, n = 2k \to \exists k'\, n^2 = 2k')$	0
1	$?-\forall\, [n]$	0		$\exists k\, n = 2k \to \exists k'\, n^2 = 2k'$	2
3	$\exists k\, n = 2k$	2		$\exists k'\, n^2 = 2k'$	10
5	$n = 2k\, [k]$		3	$?-\exists$	4
7	$n = 2k \to n^2 = 2 \times 2k^2$		-1	$?-\forall\, [n, k]$	6
9	$n^2 = 2 \times 2k^2$		7	$n = 2k$	8
11	$?-\exists$	10		$n^2 = 2 \times 2k^2$ [$k' = f_n(k)$]	12

Tableau 2. Modélisation par un jeu d'intérieur

Commentaires : Ce tableau doit se lire dans le cadre de la grammaire spécifique des jeux d'intérieur. Les choix à opérer en lien avec les règles R-UNIV et R-EXIST sont des choix de lettres de variable et non plus de noms d'objet. Il n'y a plus d'évaluation (empirique) conjointe envisageable. Une partie se termine lorsque l'un des deux joueurs ne peut plus jouer de nouveau coup (*R-fin de partie*) et une nouvelle règle vient contraindre les coups du Proposant qui ne peut avancer de propositions atomiques que si celles-ci ont préalablement été avancées par l'Opposant (*R-formel*). La partie commence par une concession de l'Opposant (coup n°-1) correspondant à l'énoncé « explicateur » qui a émergé du jeu d'extérieur. Cet énoncé pourra librement être attaqué par le Proposant dans la suite de la partie, on peut le considérer comme une « donnée ». Le Proposant lance à proprement parler la partie par l'assertion de la conjecture à évaluer (coup n°0 ; *R-Lancement du jeu*). Ce coup est attaqué par l'Opposant qui choisit la lettre de variable *n* (coup n°1 ; R-UNIV). Le Proposant se défend (coup n°2 ; R-UNIV). L'Opposant attaque ensuite l'implication en faisant l'assertion de l'antécédent (coup n°3 ; R-IMPLIQUE). Le Proposant remets à plus tard sa défense et réplique par la sollicitation d'un nouveau choix de lettre de variable (coup n°4 ; R-EXIST ; *R-Classique*). L'Opposant choisit la lettre k et se défend (coup n°5 ; R-EXIST). Le jeu se poursuit alors par l'exploitation par le Proposant de la concession faite en préambule par l'Opposant. Il reprend à son compte les choix faits par l'Opposant aux coups n°1 et n°5 pour attaquer cet énoncé universel (coup n°6 ; R-UNIV ; double application) et l'Opposant se défend (coup n°7 ; R-UNIV). Utilisant le coup n°5 de l'Opposant, le Proposant peut alors attaquer cette dernière implication en faisant l'assertion de l'antécédent (coup n°8 ; R-IMPLIQUE ; *R-formel*). L'Opposant se défend (coup n°9 ; R-IMPLIQUE) ce qui permet alors au Proposant de revenir à une défense laissée en suspens (coup n°10 ; R-IMPLIQUE ; *R-Classique*). L'Opposant attaque cette défense en sollicitant un choix de lettre de variable (coup n°11 ; R-EXIST). Le Proposant choisit $k' = f_n(k) = 2k^2$ ce qui lui permet de se défendre (coup n°12 ; R-EXIST ; *R-Jeu formel*). Il gagne la partie puisqu'il n'y a plus de coup à jouer pour son adversaire (*R-fin de partie* – jeu d'intérieur). Le canevas de cette partie constitue une stratégie gagnante puisque la manière de jouer du Proposant peut s'adapter aux ouvertures stratégiques de l'Opposant qui sont essentiellement réduites à des choix de lettre de variables n et k ($k' = f_n(k) = 2k^2$ est une fonction de k). La conjecture est démontrée, elle est valide. Le caractère explicatif de la démonstration tient dans l'usage au coup n°1 de la règle R-UNIV ce qui correspond à la production d'une démonstration générique dans une perspective monologique (critère n°1).

2.3. Dynamique de l'élaboration de la démonstration : synthèse

Il est intéressant de remarquer les ressemblances et différences entre cette modélisation par un jeu d'intérieur (ne mobilisant que les ressources propres au langage) et la précédente (jeu d'extérieur intégrant une dimension empirique, des choix d'objets). Au niveau de la structure, on remarque des éléments d'une dynamique commune : ce sont les « mêmes » règles qui ont été utilisées (moyennant quelques adaptations liées au contexte spécifique intérieur / extérieur). Dans les deux cas, la problématique pour le Proposant est de parvenir à se défendre d'une attaque de l'implication par l'assertion de son antécédent (coup n°3, R-UNIV). Cette similitude entre les structures rend possible l'articulation du travail sur les exemples dans le cadre d'un jeu d'extérieur avec le travail exclusivement déductif au sens du jeu d'intérieur. Du point de vue de la modélisation, l'articulation repose sur l'intégration dans le jeu d'intérieur d'une propriété (coup n°-1) qui a émergé d'un positionnement énonciatif relevant du niveau stratégique dans le jeu d'extérieur correspondant. En somme le travail sur les exemples peut s'avérer utile à l'avancée du processus de démonstration « pour peu » que l'on se positionne au niveau stratégique et non au niveau de la partie. Bien évidemment, ce positionnement ne va pas de soi, mais il nous semble essentiel de bien identifier ce phénomène et de ne pas réduire la problématique des relations entre exemple et démonstration à la seule rupture qu'il s'agit d'opérer avec l'empirisme naïf. D'autres auteurs mentionnent également la fécondité des procédures sémantiques de démonstration (c'est-à-dire reposant sur des instanciations d'objets), notamment Weber et Alcock (2004, p. 232, notre traduction)[13] :

> Tout comme en ville la plupart des rues croisent de nombreuses autres rues, à tout moment d'une preuve, il y a de nombreuses inférences pouvant être faites qui peuvent paraître utiles à un œil novice [...]. Par conséquent, écrire une preuve par les seuls moyens syntaxiques peut être une tâche redoutable. Cependant, lorsque l'on écrit une preuve par des moyens sémantiques, il est possible d'utiliser des instanciations pertinentes d'objets pour guider la conduite des inférences formelles, tout comme on peut utiliser une carte pour suggérer les directions qu'ils devraient emprunter.

Comme nous l'avons souligné en introduction, l'idée d'un rôle positif qui pourrait être joué par les exemples est déjà présente à travers la notion d'exemple générique. Les analyses qui précèdent permettent selon nous de préciser ces enjeux en caractérisant le positionnement énonciatif qu'il s'agit de construire avec les élèves. Dans le cas d'un travail autour d'une conjecture de la forme $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$, le travail peut prendre appui sur une exploration de la conjecture, sur la construction d'une conviction, à travers des choix d'objets et des calculs ou autres procédures particulières (mesure, vérification instrumentée, etc.) : $P(a)$ est-il vrai ? Si oui qu'en est-il de $Q(a)$? Le basculement vers le niveau stratégique du jeu de langage, qui constitue l'enjeu principal, peut se penser comme l'inscription dans des pratiques langagières visant la construction d'une explication pour l'énoncé $Q(a)$ à partir de $P(a)$ au sens du critère n°2 dégagé plus haut. Ce processus de secondarisation se caractérise par une prise de distance vis-à-vis de l'action (la validation pragmatique au sens de Balacheff, 1987 ; les évaluations conjointes au sens de la règle R-*fin de partie* des jeux d'extérieur) et une montée en généralité à travers la recherche de relations génériques entre les énoncés $P(a)$ et $Q(a)$. L'énoncé $Q(a)$ n'est plus considéré pour lui-même, mais à travers des liens potentiels à construire avec les autres coups du jeu de langage. Ce processus passe par un travail sur les objets en jeu (les exemples), dans le cas particulier que nous avons étudié une décomposition en facteurs des entiers. Une fois dégagé, l'énoncé universel constitutif de l'explication de $Q(a)$ à partir de $P(a)$ (critère n°2) peut alors être intégré dans un processus déductif du fait de la proximité structurelle entre le jeu d'extérieur et le jeu d'intérieur correspondant. Nous obtenons alors une démonstration et une explication de l'implication universellement quantifiée $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ (critère n°1).

3.

[13] cf. Barrier (2016) pour une revue de littérature.

Une étude de cas en géométrie

Dans cette nouvelle partie, nous mettons notre modélisation à l'épreuve d'un nouveau cas relevant d'un autre domaine des mathématiques : la géométrie. En mettant en regard les analyses précédentes élaborées dans le contexte de l'arithmétique, il s'agit de chercher à dégager ce qu'il y a de spécifique et de générique dans les éléments de caractérisation des postures énonciatives qui s'inscrivent dans les jeux de langage des processus de démonstration.

3.1. Une nouvelle modélisation

Nous considérerons l'énoncé suivant (cf. figure 2) : « soit un triangle *ABC* et *O* son orthocentre. Soient d_1 la droite perpendiculaire à (*OA*) passant par *A*, d_2 la droite perpendiculaire à (*OB*) passant par *B* et d_3 la droite perpendiculaire à (*OC*) passant par *C*. On appelle *D* le point d'intersection de d_1 et d_2, *E* celui de d_1 et de d_3 et *F* celui de d_2 et de d_3. Démontrer que *O* est le centre du cercle circonscrit à *DEF* ».

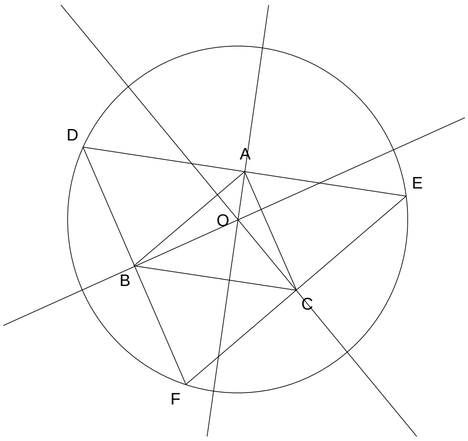

Figure 2. Figure associée à l'énoncé

Commençons par approcher ce problème de validation par un jeu d'extérieur (tableau 3).

	Opposant			Proposant	
				$\forall A \forall B \forall C \forall O$ $ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	0
1	? $-\forall$ $[A, B, C, O]$	0		$ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	2
3	$ortho_{ABC}(O)$ [ok]	2		$centre_{DEF}(O)$ [ok]	4

Tableau 3. Modélisation par un jeu d'extérieur

Commentaires. Nous avons fait le choix de modéliser l'énoncé à valider par une implication universellement quantifiée comprenant quatre variables (*A*, *B*, *C* et *O*) sans préciser le statut des lettres *D*, *E* et *F*. Cette petite entorse à la rigueur mathématique nous permet de limiter la longueur de la modalisation. Elle est sans conséquence sur notre propos dans cet article. Le domaine d'interprétation pour ces variables est l'ensemble des points du plan. La partie commence par l'assertion de la thèse par le Proposant (coup n°0 ; *R-Lancement du jeu*). S'ensuit une attaque de cette thèse par l'Opposant et une défense du Proposant consistant en l'assertion d'une implication (coups n°1 et n°2 ; R-UNIV). Cette implication est attaquée ce qui ouvre un sous-jeu (coup n°3 ; R-IMPLIQUE ; cas d'un jeu d'extérieur) dont on peut émettre l'hypothèse qu'il est gagné par l'Opposant, sans quoi la partie s'arrête là (*R-fin de partie* ; cas des jeux d'extérieur). La partie se poursuit et se termine par l'assertion du conséquent de l'implication (coup n°3 ; R-IMPLIQUE) suivie d'une nouvelle évaluation empirique conjointe (perceptive, instrumentée, etc.) : le Proposant gagne la partie (*R-fin de partie*, cas des jeux d'extérieur). Si l'on se place cette fois au niveau stratégique, il s'agirait de chercher à expliquer le fait que *O* soit le centre de *DEF* par le fait que *O* soit l'orthocentre de *ABC* moyennant un argument universel (critère n°2). Comment construire une telle relation ?

Cette fois, le lien entre les deux énoncés paraît moins direct que dans le cas de l'énoncé sur la conservation de la parité par passage au carré d'un entier où il s'agissait pour l'essentiel de repérer des similarités entre des décompositions en facteur d'un nombre entier et de son carré. Il semble ici nécessaire de passer par des observations intermédiaires, par exemple le fait que les droites (*AE*) et (*BC*) sont parallèles, tout comme les droites (*AB*) et (*EC*), puis que le quadrilatère *AECB* est un parallélogramme, etc. Ces différentes observations (éventuellement instrumentées) peuvent être mises en relation, expliquées, via des énoncés universels, en l'occurrence des théorèmes ou des définitions[14]. Notons que ce processus de construction d'une explication complexe (au sens de la multiplicité des étapes) peut aussi procéder par chaînage arrière, c'est-à-dire en se demandant ce qu'il suffirait d'expliquer pour avoir une explication du fait que *O* soit le centre du cercle circonscrit à *DEF* (par exemple le fait que les droites (*AO*), (*BO*) et (*CO*) soient respectivement les médiatrices des segments [*DE*], [*DF*] et [*EF*]). Au final, au sens d'un jeu d'intérieur, l'explication complète peut être vue comme la collection de l'ensemble des explications intermédiaires $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ selon le tableau 4.

[14] Le théorème selon lequel deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la définition d'un parallélogramme…

	Opposant			Proposant	
-i	$(E_i)_{1\leq i\leq n}$				
				$\forall A\forall B\forall C\forall O\ ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	0
1	$? - \forall\ [A, B, C, O]$	0		$ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	2
3	$ortho_{ABC}(O)$	2		$centre_{DEF}(O)$	3+*n*+2
	…		*-i*	$(A_i)_{1\leq i\leq n-1}$ (attaques des $(E_i)_{1\leq i\leq n-1}$)	3+*i*
3+*n*+1	$centre_{DEF}(O)$		*-n*	A_n	3+*n*

Tableau 4. Modélisation par un jeu d'intérieur

Ce travail d'élaboration est rendu possible par une posture énonciative déjà décrite plus haut concernant le cas étudié en arithmétique et consistant à se situer au niveau stratégique dans le jeu d'extérieur afin d'élaborer des explications (au sens du critère n°2) qui puissent être réinvesties au niveau d'un jeu d'intérieur en tant que concessions initiales de l'Opposant ($(E_i)_{1\leq i\leq n}$). Dans ce cas-ci l'explication à construire est plus complexe, mais le processus reste de même nature. Dans les deux cas, la dynamique décrite est celle d'un déplacement au niveau d'un jeu d'extérieur depuis le niveau de la partie vers le niveau de la stratégie dans lequel il s'agit de construire une explication (plus complexe dans ce cas-ci) permettant de tisser le lien entre deux faits. Nous voudrions maintenant insister sur un élément de variation qui nous semble significatif : s'il relève d'une même logique globale, le travail sur les objets en jeu est spécifique du domaine mathématique (géométrie, arithmétique, etc.).

3.2. Manipuler des figures, manipuler des nombres

Les objets mathématiques n'étant accessibles ni au sens ni aux instruments, la manipulation des exemples suppose le recours à des représentations sémiotiques. En complément du langage naturel, nous avons considéré dans ce texte deux registres de représentations (Duval 1995) : le registre des figures géométriques et le registre numérique de l'écriture décimale. Ces registres ne fonctionnent pas de la même manière, les traitements envisageables ne sont pas de même nature. Reprenons le cas de la démonstration de géométrie et considérons les différents points de vue sur la figure qu'il est nécessaire de porter dans le cadre de l'élaboration de la démonstration. Les faits considérés dans le premier temps du jeu d'extérieur (niveau de la partie) sont relatifs à l'orthocentre d'un triangle et au centre d'un cercle (figure 3).

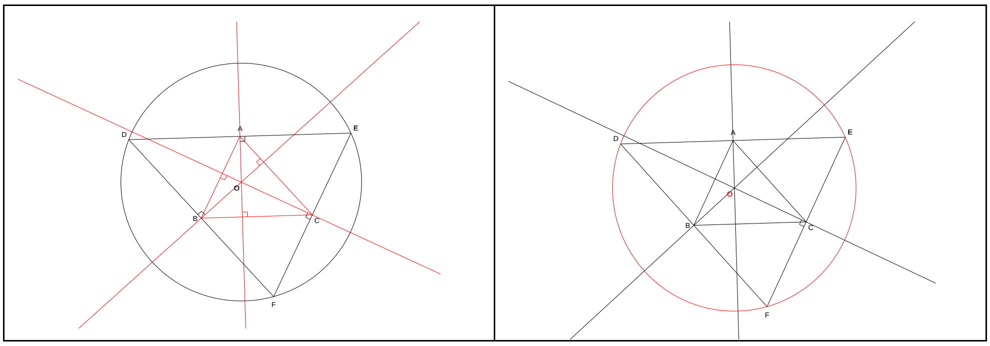

Figure 3. Deux points de vue à articuler[15]

S'il s'agit bien de travailler avec une même figure, ce ne sont pas à proprement parler les mêmes objets (un point, un triangle et des droites dans un cas, un point et un cercle dans l'autre) dont il est question même s'ils sont en relation (tout comme 12 et 12^2 étaient en relation dans le cas de l'arithmétique). Comme nous l'avons décrit, le processus de mise en relation des deux faits – $ortho_{ABC}(O)$ et $centre_{DEF}(O)$ – conduit à introduire dans le jeu d'autres observations. La collection de figures (figure 4) vise à en rendre compte.

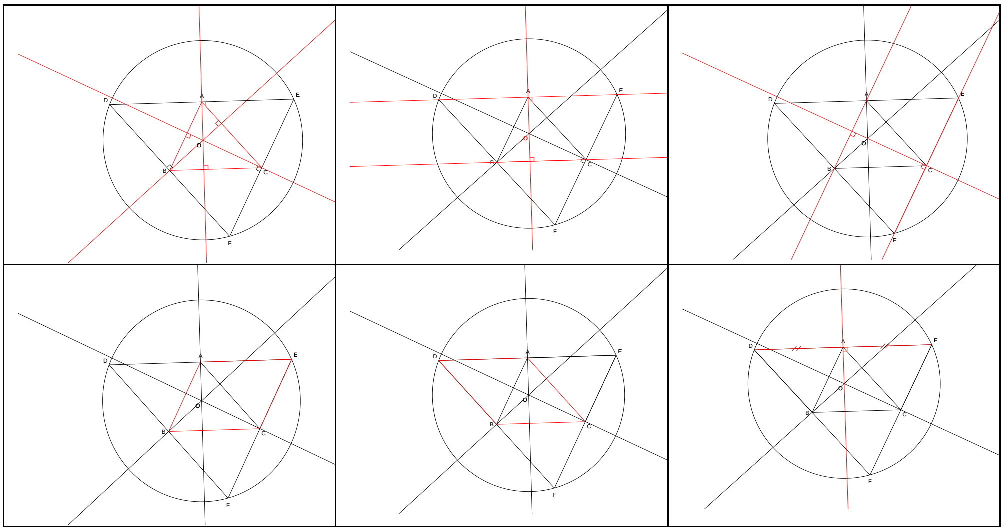

Figure 4. Ensemble de points de vue[16]

[15] Les traits en rouge sont ceux qui rendent compte des faits qui nous intéressent : dans cette figure $ortho_{ABC}(O)$ et $centre_{DEF}(O)$.

[16] Les différentes figures ne sont pas numérotées pour éviter d'induire un ordre de lecture dans la mise en relation entre $ortho_{ABC}(O)$ et $centre_{DEF}(O)$.

En géométrie plane, ce type de travail sur la représentation sémiotique est une composante essentielle de l'activité mathématique. Le processus de visualisation sous-jacent à l'élaboration des démonstrations est qualifié par Duval (2005, p. 26) de processus de déconstruction dimensionnelle :

> Avec la déconstruction dimensionnelle, la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. Autrement dit toute figure, en géométrie plane, est une configuration transformable en d'autres, chacune se détachant d'une même trame, au gré des propriétés ou des objets que l'on nomme.

On voit bien dans l'exemple ci-dessus comment une même trame, peut donner lieu aux détachements de diverses sous-figures (que nous avons soulignées en rouge) dans le cadre de la recherche d'une explication permettant d'articuler les deux points de vue de la figure 3. Il faut insister sur l'idée de *processus* : à l'inverse du mode ordinaire de fonctionnement de la visualisation (celui qui nous permet par exemple d'identifier un cercle et des triangles superposés dans la figure et que Duval appelle la visualisation iconique), la déconstruction dimensionnelle relève d'une visualisation dynamique et intimement liée à un processus discursif, « on pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif » (Duval, 2005, p. 23). Dès lors, il serait risqué de ne considérer la position énonciative pour l'élaboration des démonstrations mathématiques qu'au niveau indifférencié de la discipline mathématique. Le rapport aux exemples qu'il s'agit de construire avec les élèves est dépendant des moyens sémiotiques qui permettent au locuteur de manipuler lesdits exemples. Dans le cas de la géométrie, Duval (2005) considère d'ailleurs la bonne articulation entre les dimensions verbales et figurales de l'activité mathématique comme une condition de possibilité des apprentissages en géométrie.

Ces réflexions nous amènent à la question suivante concernant les savoirs métamathématiques sur le processus de démonstration qui pourraient faire l'objet d'un enseignement : dans quelle mesure est-il souhaitable d'aborder ces savoirs métamathématiques, de manière indépendante des spécificités des domaines mathématiques, dans lesquels ils fonctionnent ? Là encore, il nous semble important d'établir la distinction entre les domaines disciplinaires. Dans l'étude de cas en arithmétique, nous avons vu que la possibilité de mettre en relation les propositions $P(a)$ et $Q(a)$ reposait sur des décompositions en facteur des nombres en jeu. Une décomposition en facteurs premiers permet de faire « apparaître » les relations recherchées dans les deux conjectures considérées. Ce type de traitement dans le registre numérique de l'écriture décimale possède une certaine légitimité dans le cas de l'arithmétique des entiers puisqu'il repose sur le « théorème fondamental de l'arithmétique »[17]. Même si la perspective est plutôt mathématique (propriétés des nombres) plutôt que métamathématique (savoirs sur l'activité mathématique), on peut émettre l'hypothèse d'une prise en charge partielle des enjeux relatifs à la manipulation des écritures numériques (travail des techniques notamment). Dans le cas de la géométrie, le type de traitement des figures en jeu ne dispose pas d'une telle légitimation mathématique, encore moins d'une algorithmisation dans le traitement, mais il n'en est pas moins fondamental d'un point de vue cognitif. Si un nombre significatif de travaux de recherche se sont intéressés ces dernières années aux façons d'amener les élèves à s'approprier les modes de visualisation propres à la pratique géométrique (Mathé & Mithalal, à paraître), il n'en reste pas moins que la situation paraît moins favorable en géométrie. Ce savoir pourrait bien rester transparent au sein des classes, c'est-à-dire fonctionner comme outil de résolution de problèmes mais sans être à proprement parler enseigné ni institutionnalisé (Margolinas & Lappara, 2011 ; Barrier, 2016).

Conclusion

Cet article s'est intéressé à la démonstration, en tant que processus, et aux enjeux de savoir afférents. Nous nous sommes plus particulièrement focalisés sur le rôle des exemples pour des énoncés de la forme $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$. Afin de dégager les savoirs métamathématiques en jeu, nous avons eu recours à une modélisation dialogique du processus que nous avons fait fonctionner sur un premier exemple en arithmétique des entiers. Dans le cadre de cette modélisation, le processus de démonstration est décrit comme une activité langagière impliquant deux protagonistes s'opposant dans un dialogue argumentatif. L'analyse de cette activité langagière nous a permis de dégager des éléments de caractérisation de la position énonciative à construire pour parvenir à mobiliser les exemples de manière efficiente. La dynamique du processus de preuve suppose un déplacement depuis un travail d'exploration de la conjecture visant la construction d'une conviction (a qui satisfait P satisfait-il aussi Q ?) vers un niveau stratégique dans lequel il s'agit de chercher à expliquer $Q(a)$ par $P(a)$. La validation pragmatique est mise à distance, il s'agit cette fois de chercher à mettre en relation les énoncés $P(a)$ et $Q(a)$ par l'intermédiaire d'un argument universel à construire via un travail générique autour l'exemple a. En bout de course, l'énoncé tissant le lien entre la vérité de $Q(a)$ et celle de $P(a)$ peut être mobilisé dans une démonstration de l'implication $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ constitutive d'une explication de l'énoncé $Q(a)$.

Afin de dégager précisément les apports de ce texte, nous revenons maintenant sur la notion d'exemple générique telle qu'elle a été introduite par Balacheff (1987, p. 166) :

[17] Ce théorème affirme l'existence et l'unicité des décompositions en facteurs premiers des entiers naturels non nuls.

> L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus.

Commençons par une remarque. Dans l'expression *exemple générique*, la généricité est grammaticalement un attribut de l'exemple. On voit néanmoins que la citation fait référence à l'explicitation de raisons et à des opérations et des transformations dans la définition, introduisant par là une idée que nous avons développée dans cet article. Pour nous, tout exemple, en tant qu'objet mathématique, est particulier. La généricité est relative à la manière dont l'exemple est manipulé. Il s'agit dans les termes de notre modélisation de se situer au niveau stratégique et non plus au niveau de la partie dans le jeu d'extérieur. Dans le cadre d'une conjecture s'exprimant sous la forme d'une implication universellement quantifiée $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$, ce positionnement stratégique s'exprime au niveau des relations entre $P(a)$ et $Q(a)$. Dans le premier exemple il s'agit de mettre en relation les énoncés $12 = 2 \times 6$ et $12^2 = 2 \times 72$ de manière générique. Cette mise en relation fonctionne alors comme une explication dans un sens que nous avons précisé. Au regard de l'approche de Balacheff (1987), nos analyses déplacent la focale depuis les objets vers les propriétés des objets que sont P et Q. La parité d'un nombre a-t-elle un lien avec la parité de son carré ? Pour que la stratégie fonctionne comme une explication, il faut dépasser une construction au cas par cas. La fonction de stratégie de notre premier cas $f_n : k \rightarrow 2k^2$ ne constitue une explication que dans la mesure où nous disposons d'une expression algébrique. C'est d'ailleurs cette expression algébrique qui se trouve au cœur de l'énoncé $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \forall k \in \boldsymbol{N}\ (n = 2k \rightarrow n^2 = 2 \times 2k^2)$ qui permet la construction d'une stratégie gagnante dans le jeu d'intérieur. Bien sûr, les opérations et transformations sur les *objets* ne sont pas absentes du processus. Nous avons mis en avant que cette mise en relation reposait sur une décomposition en facteurs des nombres en jeu et c'est bien parce que cette décomposition est toujours possible, indépendamment du choix d'un exemple particulier, qu'elle peut être associée à une stratégie gagnante.

Pour terminer, nous allons revenir sur un autre aspect de ce travail visant à identifier quelques limites à l'approche logique et langagière que nous avons proposée. Notre deuxième étude de cas a été réalisée en géométrie, un domaine des mathématiques dans lequel les outils sémiotiques utilisés pour manipuler les objets sont assez différents de ceux utilisés par exemple en arithmétique. L'objectif de cette deuxième étude était de dégager des similarités et des différences entre les pratiques langagières de démonstration dans les domaines de l'arithmétique et de la géométrie. Nous avons montré en nous appuyant sur les travaux de Duval notamment que certains enjeux de savoir étaient spécifiques des registres sémiotiques utilisés. Ceci nous a conduits à nuancer l'idée d'une position énonciative unique (même si elle comporte des invariants tels que la recherche de généralité, de nécessité et de relations entre les énoncés) pour les processus de démonstration en mathématiques. La nature des objets considérés, et plus particulièrement les registres de représentation sémiotique utilisés, donne une forme particulière à ces processus dont il s'agit de tenir compte si l'on souhaite dégager les savoirs en jeu.

Bibliographie

BACHELARD, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*, Paris, Vrin.

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, **18(2)**, 147-176.

BALACHEFF, N. (2010), Bridging knowing and proving in mathematics. An essay from a didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Heidelberg : Springer.

BARRIER, T. (2008), Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques, *Éducation et Didactique*, **2(3)**, 35-58.

BARRIER, T. (2016), Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique, *Recherches en Éducation*, **27**, 94-117.

BARRIER, T., MATHE, A.-C. & MITHALAL, J. (2016), Formation initiale des enseignants du premier degré en géométrie : quels savoirs ?, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 317-342.

BERNIE, J.-P. (2002), L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?, *Revue Française de Pédagogie*, **141**, 77-88.

BROUSSEAU, G. (1997), La théorie des situations didactiques, *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*.

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (2002), Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques, *Revue du Centre de Recherche en Éducation*, **22-23**, 83-155.

DOWEK, G. (2013), *Une démonstration est-elle une explication ?* En ligne http://www.lsv.fr/~dowek/Philo/rochebrune.pdf.

DUVAL, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Berne.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5-53.

GANDIT, M. (2008), *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

HANNA, G. (2018), Reflections on proof as explanation. In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective* (pp. 3-18). Cham, Switzerland: Springer.

HERSANT, M. (2010), *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques*, Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Nantes, Nantes.

HERSANT, M. & ORANGE-RAVACHOL, D. (2015), Démarche d'investigation et problématisation en mathématiques et en SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union, *Recherches en Éducation*, **21**, 94-107.

HINTIKKA, J. (2007), *Les principes des mathématiques revisités* (trad. française de M. Rebuschi, *The principles of mathematics revisited*, 1996, Cambridge University Press), Vrin, Paris.

HINTIKKA, J. & SANDU, G. (1997), Game-Theoretical Semantics. In J. Van Benthem & A. Ter Meulen, *Handbook of Logic and Language* (pp. 361-410), Amsterdam: Elsevier.

JAUBERT, M. & REBIERE, M. (2011), Positions énonciatives pour apprendre dans les différentes disciplines scolaires : une question pour la didactique du français ? *Pratiques*, **149-150**, 112-128.

LORENZEN, P. (1967), *Métamathématiques*. Paris : Gauthier-Villars.

ORANGE, C. (2005), Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques, *Les sciences de l'éducation – Pour l'ère nouvelle*, **38(3)**, 69-94.

MARGOLINAS, C. & LAPARRA, M. (2011), Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19-32). Rennes : Presses universitaire de Rennes.

MATHE, A.-C. & MITHALAL, J. (à paraître), L'usage des dessins en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. In *Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques de l'ARDM*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

PERRIN, D. (2007), L'expérimentation en mathématiques, *Petit x*, **73**, 6-34.

RAHMAN, S. & KEIFF, L. (2005), On how to be a dialogician. In D. Vanderveken (Eds.), *Logic, Thought and Action* (pp. 359-408). Dordrecht: Springer.

RECIO, A. M. & GODINO, J. D. (2001), Institutional and personnal meanings of mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, **48(1)**, 83-99.

REDMOND, J. & FONTAINE, M. (2011), *How to play dialogues. An introduction to dialogic logic*. Londres: College Publications.

RÜCKERT, H. (2011), Why dialogical logic. In *Dialogues as a dynamic framework for logic*. Chapter 1. College Publications, Londres.

SENSEVY, G. (2012), Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques remarques, *Nouvelles Perspectives en Sciences Sociales*, **7(2)**, 105-132.

VERNANT, D. (2011), The dialogical logic of veridicity. In A. Trognon, M. Batt, J. Caelen & D. Vernant (Eds.), *Logical properties of dialogues* (pp. 123-145). Nancy : Presses Universitaires de Nancy.

WEBER, K. & ALCOCK, L. (2004), Semantic and syntactic proof productions, *Educational Studies in Mathematics*, **56(2-3)**, 209-234.

WEBER, K. & ALCOCK, L. (2005), Using warranted implications to understand and validate proofs, *For the Learning of Mathematics*, **25(1)**, 34-38.

THOMAS BARRIER
Centre de recherche en sciences de l'éducation
Université libre de Bruxelles
thomas.barrier@ulb.ac.be

AZZEDINE HAJJI
Centre de recherche en sciences de l'éducation
Université libre de Bruxelles
azzedine.hajji@ulb.be