### FERNANDO HITT, SAMANTHA QUIROZ RIVERA

## FORMATION ET EVOLUTION DES REPRESENTATIONS FONCTIONNELLES-SPONTANEES A TRAVERS UN APPRENTISSAGE SOCIOCULTUREL

Abstract. Training and Evolution of Functional-Spontaneous Representations through Sociocultural Learning. The present research aims to understand the role of the students' functional-spontaneous representations through the study of the pupils' external spontaneous representations in the process of solving a problem research situation. Through a qualitative methodology, the spontaneous representations of secondary students in the learning of covariation between variables are analysed. A particular goal is to study how these representations are likely to evolve through internal communication of students and through communication and validation with their pairs. Hence the importance of having a method that promotes a social construction of learning. In our case, we have opted for a learning process in a sociocultural environment: ACODESA (Collaborative Learning, Scientific Debate, Self-reflection and Institutionalization). From this perspective, in this paper, we consider collaborative research that allows the researcher to acquire knowledge about the teacher's practice, and vice versa, the teacher acquiring research knowledge in the mathematics classroom through the evolution of pupils' representations. The results show that the functional-spontaneous representations are the engine of the learning process of mathematical concepts.

Résumé. Cette recherche vise à comprendre le rôle des représentations fonctionnellesspontanées dans l'étude des représentations spontanées (externes) des élèves pendant le processus de résolution d'une situation d'investigation. Plus précisément, nous analysons, grâce à une méthode qualitative, les représentations spontanées des élèves du secondaire lors d'un apprentissage sur la covariation entre variables. Nous portons un intérêt particulier à la manière dont ces représentations sont susceptibles d'évoluer grâce à une réflexion personnelle des élèves suivie d'un travail de collaboration et validation par les pairs, d'où l'importance d'avoir une méthode qui favorise la construction sociale de l'apprentissage. Dans notre cas, nous avons opté pour un apprentissage dans un environnement d'enseignement socioculturel : l'ACODESA (apprentissage collaboratif, débat scientifique, autoréflexion et institutionnalisation). Dans cette perspective, nous avons choisi la recherche collaborative pour mener à bien notre expérimentation. En effet, celle-ci permet au chercheur d'acquérir des connaissances sur la pratique de l'enseignant et, réciproquement, l'enseignant acquiert des connaissances sur la recherche dans la classe de mathématiques sur l'évolution des représentations des élèves. Dans notre article, nous nous interrogeons sur le rôle des représentations fonctionnelles-spontanées comme moteur du processus d'apprentissage des concepts mathématiques.

**Mots-clés**. Représentation fonctionnelle-spontanée, représentation socialement construite, apprentissage dans un milieu socioculturel, ACODESA.

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 24, p. 75 – 106. © 2019, IREM de STRASBOURG.

#### 1. Introduction

Avant 1980, Tall et Vinner (1981) et Vinner (1983) promouvaient les notions de Concept image et de Concept definition, dans lesquelles ils mettaient en avant les contradictions cognitives des élèves dans la construction des concepts mathématiques en essayant de connaître le type de construction mentale réalisée par les élèves. Des chercheurs qui s'intéressaient au rôle des représentations dans la construction des concepts mathématiques (Janvier, 1987; Duval, 1993, 1995) montrèrent le revers de la médaille. Le cadre théorique de Janvier fait référence à des systèmes de signes, aux opérations qui peuvent être effectuées au sein de ces systèmes et au processus de « traduction » entre les représentations (les éléments de ces systèmes). Celui de Duval fait référence à la formation d'un registre de représentations à l'intérieur d'un système de signes, à l'importance des processus de conversion entre les représentations et à l'articulation des registres pour la construction des concepts (Duval, 1993, 1995). Dans ces modèles, les représentations sont des éléments d'un sous-système symbolique (un registre) généralement culturellement établi. Les représentations institutionnelles ou officielles désignent les représentations que l'on trouve dans les programmes, les manuels scolaires, les écrans des ordinateurs, etc.

Quand les chercheurs se sont orientés vers l'analyse des processus de résolution de problèmes contextualisés, ils ont mis en évidence, une nouvelle problématique, d'ordre cognitif, sur le rôle des représentations *non institutionnelles* dans l'apprentissage des mathématiques. Dans cette approche, les processus de modélisation mathématique ont pris beaucoup d'importance (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007; Gravemeijer, 2007) et les représentations *non institutionnelles* ont commencé à avoir de l'intérêt pour les chercheurs qui les ont associées à la créativité et à la construction des concepts mathématiques (diSessa, Hammer, Sherin & Kolpakowski, 1991; Duval, 2005, 2006; Hitt, 2003, 2004, 2006).

Précisément, sous cet angle, un cadre théorique centré sur les représentations institutionnelles ne permet pas d'analyser au complet le processus de la construction des connaissances chez les élèves (Arzarello, 2006; Bartolini & Mariotti, 2008; diSessa et al., 1991; Ernest, 2006; Hitt, 2003; Radford, 1998, 2003).

Dans une approche différente, nous trouvons aussi une définition de ce qu'est une représentation chez Davis, Young et McLoughlin (1982, p. 54). Pour eux, une représentation peut être une combinaison de quelque chose d'écrit sur papier, de quelque chose existant sous la forme d'objets physiques et d'un arrangement d'idées soigneusement construit dans la pensée. Cette définition, dans un contexte socioculturel, donne plus de force à la conception de Voloshinov (1973) : « [...] la construction du signe est totalement une question déterminée par la communication. Après tout, l'existence du signe n'est que la matérialisation de

cette communication. » (p. 13). Cela implique que la représentation est une unité qui a des composantes internes et externes liées par les schémas d'action. Ces schémas d'action comprennent des actes de médiation, de production, d'assimilation et de rééquilibration à travers la communication. En fait, le médium véritable de la communication, dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques, n'est pas uniquement la langue, mais aussi les gestes et les représentations que nous utilisons dans cette communication.

Ainsi, nous nous intéresserons aux processus d'objectivation dans un milieu socioculturel pour regarder l'évolution des représentations dans la construction du signe. Arzarelo (2006), en prenant en considération le travail de Bartolini et Mariotti (2008) sur la médiation sémiotique dans la classe de mathématiques, analyse les gestes, le langage corporel et les représentations sur papier lors de la résolution d'une tâche dans un travail en collaboration :

Observer les étudiants qui résolvent des problèmes en travaillant en groupe, leurs gestes, leurs regards et leur langage corporel en général se révèlent également des ressources sémiotiques cruciales. À savoir, les signes non écrits et les procédures non algorithmiques doivent également être pris en compte dans une approche sémiotique. (Arzarelo, 2006, pp. 74-75)

Étant donné que nous considérons la classe comme une microsociété tout comme Arzarello (2006) et Bartolini et Mariotti (2008), notre recherche aura une perspective vygotskienne.

Notre objectif est d'analyser le processus d'objectivation quand l'élève débute une activité mathématique seul et comment, à travers la communication avec ses pairs, ses représentations initiales (non nécessairement institutionnelles) se développent pour arriver à un type de représentations socialement construites, qui pourraient être des représentations non institutionnelles (Hitt, 2013). En d'autres termes, nous voulons analyser les processus d'objectivation des élèves dans un contexte de travail en collaboration, dans la classe de mathématiques.

## 2. L'organisation de la classe et les représentations dans une approche socioculturelle

#### 2.1. Sur l'organisation de la classe

Nous allons considérer la classe de mathématiques comme une microsociété où nous voulons promouvoir la connaissance mathématique. Comment pouvons-nous, ou devons-nous, l'organiser à cette fin, dans un milieu socioculturel ? En d'autres termes, comment organiser la coconstruction des savoirs de façon dynamique dans un contexte socioculturel ?

Dans notre approche vygotskienne, étant donné que la construction du signe a un caractère social puisqu'il est construit dans un processus de communication

(Voloshinov, 1973), ce qui nous intéresse, c'est le processus d'objectivation lié à cette construction sociale dans la classe de mathématiques avant l'introduction du symbolisme officiel (dans l'étape d'institutionnalisation de la méthode utilisée). Nous empruntons l'approche de Radford (1998), qui souligne que les signes sont construits à partir d'un « système culturel sémiotique » (SCS):

les signes ne se trouvent pas au hasard dans l'espace culturel des individus. Étant donné que la culture n'est pas homogène, les signes ne sont ni distribués harmonieusement ni utilisés de manière indifférente. Au contraire, les signes sont culturellement adaptés et distribués socialement [...]. Ils sont incarnés par ce que nous voulons appeler différents systèmes sémiotiques culturels [...]. (Radford, 1998, p. 11)

#### Radford (2003) insiste:

Le fait est que les processus de production de connaissances sont enchâssés dans des systèmes d'activité qui incluent d'autres moyens d'objectivation physique et sensorielle que l'écriture (comme les outils et la parole) et qui donnent également une forme corporelle et tangible à la connaissance. (Radford, 2003, p. 41)

Dans cette perspective, l'individu lui-même joue un rôle au sein de cette microsociété :

- dans les interactions entre les membres d'une équipe ;
- dans les interactions entre toutes les personnes présentes dans la classe, y compris l'enseignant;
- dans l'utilisation et la construction des normes sociomathématiques (Yackel & Coob, 1996) (qui passent par la répartition du travail, l'argumentation, le processus de validation, etc.);
- dans la médiation des artéfacts dans un processus dynamique de l'apprentissage (Arzarello, 2006; Bartolini & Mariotti, 2008; Radford, 1998, 2003).

Ces éléments appartiennent à l'activité de la classe. Quand il s'agira de réaliser une activité individuelle, la classe sera entourée par un réseau de différents types d'activités qui favoriseront l'apprentissage dans ce milieu socioculturel. Ainsi, la construction des significations et des concepts est le produit de l'interaction dynamique des éléments au cours d'une activité mathématique spécifique.

# 2.2. Les représentations fonctionnelles-spontanées et les représentations spontanées dans une approche socioculturelle

Selon les recherches que nous avons menées sur la résolution de tâches non routinières, l'émergence de représentations non institutionnelles est fréquente (Hitt,

2004, 2006). Comme nous l'avons dit antérieurement, nous entendons par représentations institutionnelles (RI) celles que l'on trouve dans les curriculums, les manuels, les écrans d'ordinateur, ainsi que celles que l'enseignant utilise en classe. Lors de la résolution d'une activité non routinière, les élèves mobilisent des représentations fonctionnelles-spontanées (RF-S), s'appuyant sur des représentations mentales internes fonctionnelles (RF). Ils sont amenés à produire des représentations spontanées (RS) lesquelles sont externes à l'individu.

Les élèves, face à une activité non routinière, produisent des représentations RF-S qui sont chargées du sens que les élèves eux-mêmes leur ont donné. Le caractère spontané de ces représentations demande habituellement un processus de raffinement pour évoluer vers les représentations officielles, dans lequel la communication joue un rôle important. Ainsi, dans la classe, l'évolution des RF-S par un *processus de communication et de validation* est très important, et demande l'implémentation d'une méthode d'enseignement *ad hoc*. Les élèves, dans la classe, doivent donc être organisés socialement pour travailler sur un objectif commun, le rôle de l'enseignant étant de les guider sans leur donner la réponse.

Les RF-S ont une structure cognitive qui régule, contrôle et organise les actions ultérieures comme un pont vers la compréhension, et ce, dans un processus de rétroaction. Lorsque la RF-S est externalisée (par écrit, oralement, de manière kinesthésique, etc.), une RS est produite (Hitt, 2004, 2006; Hitt & González-Martín, 2015; Hitt, Saboya & Cortés, 2017). Dans cet article, nous voulons approfondir le sens de ces représentations et les intégrer de manière plus cohérente dans une perspective d'enseignement.

Les RS permettent l'étude des RF-S puisque celles-ci, étant composées d'une partie mentale, ne sont pas directement accessibles au chercheur. Dans notre recherche, nous définirons les représentations RF-S de la façon suivante :

**Définition.** Une RF-S est une représentation qui émerge chez les individus dans la pratique, face à une activité non routinière : les actions liées à l'interaction avec la situation ont des caractéristiques fonctionnelles (mentales, orales, kinesthésiques, schématiques) et sont liées à une représentation spontanée (externe). La représentation est fonctionnelle dans le sens où l'élève a besoin de donner un sens à la situation et elle est spontanée, car elle s'exprime naturellement dans l'action quand on essaye de comprendre et de résoudre la situation non routinière.

Notre but est d'analyser les RS (associées aux RF-S) et leur évolution vers les représentations institutionnelles (RI).

Question générale de recherche. Dans le contexte socioculturel qu'est la classe de mathématiques, avec une méthode d'enseignement liée à l'apprentissage en collaboration et des activités dont la construction a été guidée par cette méthode, le

but est d'observer l'évolution des RS (associées à des RF-S) vers les représentations institutionnelles (RI). La question qui mobilise cette recherche est la suivante : comment les RS des élèves (associées à des RF-S) évoluent-elles dans un milieu socioculturel d'apprentissage des mathématiques ?

Questions spécifiques de recherche. En prenant en considération les éléments théoriques précédemment décrits, nous avons réalisé avec des élèves de troisième année du secondaire au Québec une expérimentation qui visait le concept de covariation entre variables comme prélude au concept de fonction, en ciblant les questions spécifiques suivantes :

- 1. Quelles caractéristiques pouvons-nous dégager des RS (associées à des RF-S) des élèves de troisième secondaire, quand ces derniers font face à une situation d'investigation concernant la covariation entre variables ?
- 2. Comment les premières RS (associées à des RF-S) évoluent-elles dans un apprentissage collaboratif en utilisant une méthode d'enseignement, de débat scientifique et d'autoréflexion ?

Pour répondre à la question générale de recherche et aux questions spécifiques, nous avons suivi le cadre méthodologique suivant.

#### 3. Cadre méthodologique

#### 3.1 Protocole

Pour cette expérimentation, la population étudiée était composée de deux groupes d'élèves de troisième année du secondaire au Québec (l'un de 24 élèves et l'autre de 36). L'échantillon sélectionné pour cet article, est le groupe de 24 élèves (classé par l'enseignant comme un groupe faible). Nous avons choisi de suivre une équipe de ce groupe afin d'observer l'influence de la méthode sur son travail. Notre choix a été d'observer une équipe faible qui pourrait nous donner plus d'informations sur les caractéristiques des RS et leur évolution. La première activité que nous allons analyser dans cet article n'a été réalisée que par 22 des 24 élèves. Nous allons nous concentrer sur les productions d'une équipe de quatre élèves et sur l'évolution des représentations de ces élèves tout au long de la discussion en équipe et en grand groupe. Cela va permettre de comparer leurs productions individuelles et en équipe, et de constater l'influence des autres équipes dans la discussion en grand groupe.

Pour notre recherche, une série de cinq activités en lien avec le concept de variation et de covariation entre variables, comme prélude au concept de fonction, a été construite (voir Figure 1). Les échanges préliminaires que nous avons eus

\_

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> L'âge des élèves est de 14 à 15 ans.

avec l'enseignant ont été faits dans une approche de recherche collaborative, dans laquelle les chercheurs s'intéressent aux pratiques de l'enseignant et l'enseignant s'approprie l'approche théorique des chercheurs.

Il est important de signaler que, dans notre méthode, l'élaboration des activités qui s'enchaînent est un travail important. L'enseignant doit connaître les difficultés que les élèves sont susceptibles d'éprouver et il doit pouvoir les guider, sans leur donner la réponse, pendant les étapes de la méthode précédant l'étape d'institutionnalisation.

La durée totale de la mise en œuvre a été d'un mois et demi. À la suite d'une réflexion avec l'enseignant autour de la covariation entre variables et son enseignement, il a décidé de remplacer le chapitre de la modélisation en lien avec la covariation entre variables et les fonctions par les cinq activités proposées (Hitt & González-Martín, 2015). L'enseignant a participé à la rédaction de ces activités, ce qui lui a permis de mieux comprendre le rôle qu'il avait à jouer pendant l'expérimentation.

Nous avons suivi un protocole dans l'élaboration des activités, avec le propos d'analyser les production des RS des élèves (voir Figure 1) : schématiques, verbales, numériques, graphiques et algébriques.

Situation/représentation	Schématique	Verbale	Numérique	Graphique	Algébrique
Le photographe	٧	٧	X	X	Х
Le randonneur	٧	٧	Х	٧	Х
Le jacuzzi	٧	٧	٧	٧	٧
Les carrés	٧	٧	٧	٧	٧
Les ombres	٧	٧	٧	٧	٧

Figure 1. Les cinq situations d'investigation et différentes représentations attendues

La conception des cinq situations d'investigation (voir Figure 1) visait à promouvoir la production des RS (schématique, verbale, graphique, numérique et algébrique). L'élaboration des situations d'investigation voulaient prioriser la construction des représentations selon un ordre établi (voir Figure 1). Ainsi, au début, nous avons demandé certains types de représentations et, à partir de la situation 3, nous avons demandé tous les types de représentations signalés dans la figure 1.

Dans cet article, nous restreignons l'analyse des productions des élèves (RS) aux représentations liées à la première situation d'investigation « Le photographe ».

#### 3.2 La méthode d'enseignement (ACODESA)

Une méthodologie qualitative d'étude de cas multiples semble pertinente, car, face à des activités non routinières, nous voulons en premier lieu analyser les représentations individuelles des élèves à travers les différentes étapes (en équipe, puis en grand groupe). En second lieu, nous nous intéressons à l'évolution de ces représentations tout au long du processus, à ce qui a été retenu des échanges vécus en classe ainsi qu'à ce qui a été retenu après une étape de reconstruction individuelle de ce qui a été fait en classe autour de la situation d'investigation. Notre intérêt porte sur le produit obtenu après cette étape de reconstruction.

Dans cette étude, nous considérons ces représentations RF-S comme des entités qui seront analysées à travers les RS en utilisant la méthode d'enseignement ACODESA (Hitt, 2007; Hitt & González-Martín 2015; Hitt, Saboya & Cortés, 2017). Nous allons décrire ci-dessous les différentes étapes de la méthode d'enseignement suivie dans l'expérimentation.

### 3.2.1 Première étape : le travail individuel

Après avoir lu l'énoncé, les élèves ont été invités à illustrer la situation. Par la suite, il leur a été demandé d'expliquer en mots leur dessin. À ce stade, l'élève se fait une représentation interne de la situation et l'extériorise. En même temps, l'élève établit un dialogue intérieur dans le sens de Vygotsky (1973). Cette étape prépare l'élève à la deuxième étape, dans laquelle il devra confronter ses idées à celles de ses pairs, cela en vue de la co-construction d'une connaissance plus élaborée pour un raffinement des RF-S initiales.

### 3.2.2 Deuxième étape : le travail en équipe

Après la première approche individuelle décrite ci-dessus, les élèves ont donc débattu de leurs idées avec les membres de leur équipe. Plus précisément, ils ont été invités à échanger sur leurs productions sémiotiques (RS<sub>1</sub>) produits dans la première étape et, éventuellement, à les modifier. Ces modifications ont été notées en rouge. Nous codons comme RS<sub>2</sub> ces nouvelles RS. Elles sont le produit de la *communication* et de la *validation* dans un processus d'objectivation (Radford, 1998, 2003).

#### 3.2.3 Troisième étape : la discussion en grand groupe

Dans cette troisième étape, en suivant la même idée de développement du processus de communication et validation, nous avons demandé à chaque équipe de présenter ses productions sémiotiques RS<sub>2</sub> (celles sur lesquelles il y a consensus) et de les expliquer à toute la classe. Ainsi, chaque élève a eu la possibilité d'analyser les propositions de représentations des autres équipes et une nouvelle discussion (un débat) entre les élèves a pu s'établir. Il est important de noter que le rôle de l'enseignant consiste à orienter la discussion en créant une

atmosphère de débat scientifique (Legrand, 1993) afin de faire évoluer ces représentations. Les RS<sub>3</sub> ainsi générées sont un produit de la *communication* et de la *validation* dans un milieu socioculturel plus large, dans un processus d'objectivation. À ce stade de l'expérimentation, toutes les productions des élèves ont été recueillies.

#### 3.2.4 Quatrième étape : l'autoréflexion (retour au travail individuel)

Après la collecte des productions des élèves, l'enseignant doit fournir une version vierge de la situation-problème et demander aux élèves de reconstruire, individuellement à la maison, les résultats obtenus en classe. Nous pensons que la reconstruction permet une acquisition plus stable et plus durable des connaissances. C'est pour cette raison que la production des RS<sub>4</sub> dans cette étape est très importante dans notre méthode d'enseignement. Nous allons considérer la construction sociale effectuée pendant les quatre premières étapes comme une représentation socialement construite (RSC), voir Figure 2.

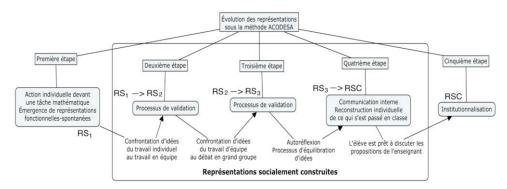


Figure 2. Étapes d'ACODESA et attentes

**Représentation socialement construite (RSC).** Dans un processus d'apprentissage en collaboration, face à une activité non routinière qui passe par le travail individuel, le travail en équipe, la discussion en grand groupe et un processus d'autoréflexion, les RF-S initiales se transforment et donnent lieu, à la fin des quatre premières étapes, à une représentation interne-externe que nous nommerons « représentation socialement construite ».

#### 3.2.5 Cinquième étape : le processus d'institutionnalisation des connaissances

Dans cette étape, l'enseignant fait un résumé des productions générées par les élèves en discutant de la pertinence de chaque représentation, avant de procéder à l'introduction des représentations institutionnelles (RI). Les RSC des élèves peuvent être loin des RI, mais dans ce processus les élèves ont construit une structure cognitive qui, on l'espère, permet de faire face aux RI des enseignants avec une posture plus critique, que dans un enseignement traditionnel.

### 3.3 La situation d'investigation « Le photographe » et une analyse a priori

La modélisation est l'une des activités difficiles de l'apprentissage des mathématiques. En général, à l'école secondaire, elle est enseignée après les fonctions. Dans le cas présent, nous avons inversé le processus en considérant la modélisation comme le déclencheur d'idées intuitives autour de la variation et de la covariation entre variables, idées qui doivent s'harmoniser pour que l'élève arrive ultérieurement à un modèle mathématique, de type algébrique, de la fonction, selon notre modèle de construction de situations d'investigation (voir Figure 1).

Cet article porte sur la première activité : « Le photographe » (voir Figure 3). Celle-ci avait pour but d'introduire la méthode d'enseignement aux élèves, qui étaient habitués à une approche d'enseignement magistral. Nous avions l'intention d'initier les élèves à la méthode d'enseignement adoptée (ACODESA), qui aurait pu les troubler. Les caractéristiques suivantes ont été prises en compte dans l'élaboration des deux premières situations d'investigation :

- a) Un énoncé ambigu a été formulé pour déclencher une pensée qui va vers plusieurs directions (appelée dans la littérature pensée divergente, voir par exemple, Guilford, 1967), et qui va promouvoir les représentations fonctionnelles-spontanées. En même temps, dans cette première situation d'investigation, nous avons voulu introduire la méthode d'enseignement ACODESA dans l'action.
- b) Cet énoncé suggère une approche discrète de la situation et le passage à une approche continue (dynamique) au fur et à mesure que l'élève interagit avec le milieu.
- c) L'enseignant, conscient de l'ambiguïté des deux premières situations, était prêt à répondre aux questions des élèves pour promouvoir l'évolution des représentations spontanées, et éventuellement, pour favoriser une pensée convergente (Guilford, 1967), surtout avec les situations 3, 4 et 5, vers les représentations demandées, selon la Figure 1.

d) Les deux premières situations d'investigation ont été conçues de façon à promouvoir une évolution dans les processus d'argumentation des élèves et dans les productions correspondantes de ces derniers.

Nous avons utilisé la situation d'investigation du photographe pour promouvoir la production de schémas et de représentations verbales selon l'organisation de la situation (voir Figure 1). L'ambiguïté de l'énoncé avait pour finalité de promouvoir une pensée divergente sans viser une solution déterminée et d'engendrer des représentations spontanées (institutionnelles ou non) autour de la covariation entre variables dans un processus de modélisation.

Individuellement, les élèves ont reçu un questionnaire (voir version résumé Figure 3) et du matériel (corde, compas, fil de fer, etc.). La première page comportait les consignes générales en plus de la partie à remplir par l'élève (nom, prénom, etc.) ; la deuxième page décrivait l'activité. Les deux autres pages contenaient les questions visant à faire représenter la situation de différentes façons.

Page 1				
CAHIER DE L'EQUIPE	Directives: utiliser un stylo à l'encre noire, si vous avez			
Nom de l'équipe :	changé d'avis dans la discussion en équipe, écrire avec un			
Noms des membres de	stylo à l'encre rouge. Après la discussion avec toute la classe,			
l'équipe :	si vous avez changé d'opinion, utiliser un stylo à l'encre verte.			
	Activité du photographe professionnel			

#### Résumé (pages 2-3-4-5-6)

Un photographe professionnel se promène sur le trottoir près de la statue de Jacques Cartier. Il souhaite la photographier et voudrait, pour cela, s'assurer qu'il choisit le meilleur angle (ou la meilleure position). Il doit donc calculer la distance entre lui et la statue. Pour cela, il doit vérifier cette distance à différents endroits sur le trottoir. Une fois que les photos seront développées dans son laboratoire, l'enregistrement lui permettra de savoir quels sont les endroits où il doit se placer pour obtenir les meilleures photos. Par exemple, voici deux positions possibles pour prendre une photo.



- 1) Faire une description verbale du phénomène et faire un dessin de la situation.
- 2) Maintenant que nous avons obtenu l'information nécessaire (description en mots, dessin, enregistrement de l'information, etc.), nous voulons trouver différentes façons de transmettre cette information à d'autres photographes. Qu'est-ce que nous pouvons faire de différent de ce que nous avons déjà fait pour transmettre l'information de la situation ?
- Après les présentations des réponses des autres équipes, vous pouvez choisir de garder votre réponse ou d'en adopter une autre qui vous semble plus efficace.
- Si vous avez adopté une nouvelle réponse, réexpliquez le phénomène en utilisant votre nouveau choix.

Figure 3. Situation-problème « Le photographe »

L'énoncé de la situation propose une variable (distance du photographe à la statue) et laisse ouvert le choix d'autres variables (comme l'angle qui est évoqué dans l'énoncé). Nos attentes étaient que la statue soit dessinée en 3D par quelques élèves et représentée par un point par d'autres. Nous nous attendions aussi à ce que le travail en équipe provoque des changements dans la représentation initiale, à ce que les élèves fixent une position pour la statue, à ce que, à partir de celle-ci, le photographe diminue ou augmente sa distance à la statue de façon régulière (un « triangle dynamique » en 2D ou 3D) et, enfin, à ce que cela entraîne l'émergence d'une relation entre les variables (relation de dépendance), soit de façon discrète, soit de façon continue. Parmi toutes les idées qui pouvaient émerger, nous nous attendions aussi à ce que les élèves s'aperçoivent de la présence de variables, sélection de deux variables, et des hypothèses entre deux d'entre elles.

La structure de la méthode ACODESA permet à l'élève de s'engager dans une communication interne dans la première étape et dans une communication et validation externes dans les deuxième et troisième étapes. La communication externe est aussi considérée dans la cinquième étape, dans le processus d'institutionnalisation. Cette dernière étape permet à l'enseignant de caractériser les représentations extériorisées par les élèves avant de fournir les représentations institutionnelles liées à l'activité proposée. Par exemple, dans le processus d'institutionnalisation, l'enseignant a mentionné l'importance de considérer dans la situation du photographe des triangles rectangles (comme ceux utilisés par les équipes dans la Figure 17b et 17c) qui permettre, éventuellement, l'utilisation de la relation de Pythagore, modélisation qui implique implicitement que la statue soit représentée par un point.

Pour la construction de nos situations d'investigation et les processus de résolution de problèmes en classe lié au « milieu », nous avons retenu l'approche de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). La tâche devait donc être facile à comprendre et c'est dans l'interaction des élèves avec le milieu (dans un travail en collaboration) qu'allait émerger la mathématique sous-jacente. Dans l'élaboration de situations problèmes, nous avons aussi retenu la notion de débat scientifique de Legrand (1993).

En nous appuyant sur la méthode d'enseignement ACODESA, et sur les notions théoriques antérieurement exprimées, nous voulions caractériser la notion de représentation socialement construite dans la classe de mathématiques dans une approche socioculturelle. Dans la section qui suit, nous présenterons les résultats obtenus et une discussion théorique.

#### 4. Analyse de résultats

Notre expérimentation nous a permis d'obtenir deux types de données : en premier lieu, les productions des élèves sur papier ou sur transparents (il ne faut pas oublier

que, pour chacune des étapes de la méthode, des stylos de couleurs différentes ont été utilisés); en second lieu, les enregistrements vidéo (provenant de deux caméras) pour l'analyse des données.

Pour fournir une réponse à la première question de recherche, liée à la caractérisation des représentations RS (associées à des RF-S) nous analyserons les RS produites lors de la première étape de la résolution de la première situation d'investigation par les 22 élèves.

Pour répondre à la deuxième question de recherche, liée à l'évolution des RS produites dans un milieu d'apprentissage collaboratif en utilisant ACODESA, nous analyserons l'évolution des RS (RS<sub>1</sub>, RS<sub>2</sub>, RS<sub>3</sub>, RS<sub>4</sub>) d'une seule équipe de quatre élèves, en comparaison avec les productions initiales de toute la population et la production finale des autres équipes.

### 4.1 Caractéristiques des RS de toute la population

## 4.1.1 Représentations utilisées pour décrire les éléments impliqués dans la situation-problème

Pendant le travail individuel, l'enseignant demandait ici et là aux élèves si l'énoncé était clair (quelques-uns lui ont posé des questions spécifiques, par exemple, si le trottoir pouvait être exclusivement horizontal ou si le mouvement de l'appareil photo pouvait faire varier l'angle vers le haut ou vers le bas). Certains n'ont pas posé de questions et ont simplement fait ce qui était demandé.

Les RS produites par les 22 élèves montrent des représentations des différents éléments en jeu dans la situation-problème. Ils ont tous identifié les trois éléments importants de la situation : la statue, l'appareil photo et le trottoir. Cependant, la manière de représenter ces éléments n'a pas été la même chez tous les élèves. Ainsi, douze élèves ont utilisé des dessins proches de la réalité, comme le montre la figure 4. Ces dessins de la statue montrent les différentes parties du corps humain : les mains, les pieds, la tête et même le visage. Ces élèves représentent de plus certains détails de l'appareil photo, le trépied, des boutons ou le flash. La situation, les expériences antérieures des élèves avec les objets en jeu et la nécessité de faire une représentation ont déclenché des processus sémiotiques chez les élèves (médiation sémiotique dans le sens de Bartolini & Mariotti, 2008). Les productions des élèves représentent une réalité extérieure. Dans les différentes productions (par exemple, celles de la Figure 4), la notion de variation est présente (différentes positions de l'appareil photo). Dans la production 4a, 4b et 4c, de la même figure, une notion de covariation entre variables discrètes est présente. On relève les variables suivantes : distance parcourue par le photographe avec l'appareil photo et la distance de l'appareil photo à la statue.

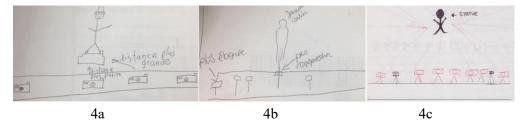


Figure 4. Différentes RS qui montrent une statue complète

La deuxième façon de représenter les éléments de la situation-problème utilise des schémas composés de figures géométriques (voir Figure 5). Dans ces représentations, il est possible de remarquer plus de précision quant à l'emplacement de chacun des éléments. Dans certaines représentations, des mots ont été utilisés pour identifier les éléments, alors que, dans d'autres, leur sens reste implicite. Dans les schémas (voir Figure 5), on peut remarquer deux types de variables, à savoir les segments pour représenter la distance appareil photo-statue (explicite) et la distance repère-position de l'appareil photo (repère face à la statue et éloignement de l'appareil photo de cette position, implicite). Encore une fois, la médiation sémiotique a eu lieu et la réflexion pour représenter la réalité a commencé à être transformée au sein d'un processus d'objectivation. Chez ces élèves, les notions de variable et de covariation entre variables ont également émergé. Il est difficile de décider sur la nature de la variable (discrète ou continue) en analysant seulement les représentations figurales, il est absolument nécessaire d'analyser les représentations verbales (voir par exemple la représentation 6c de la Figure 6).

Remarquons que, dans cette situation, on parle de relation entre variables (discrètes ou continues) et non de fonction. Par exemple, dans la Figure 5a, on pourrait penser à une relation qui n'aboutira pas, dans la forme présentée, à une relation fonctionnelle (au sens y = f(x) avec des grandeurs x et y).

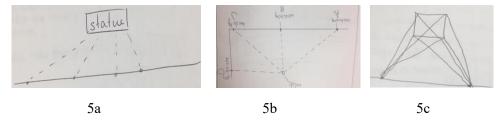


Figure 5. RS utilisant des formes géométriques

Six élèves ont fait deux dessins pour répondre à la consigne. Les différences entre les deux représentations proposées consistent dans le raffinement de certains éléments de la situation-problème. Dans les représentations 6a et 6b de la Figure 6,

nous ne pouvons pas assurer qu'il s'agit d'une représentation discrète ou continue des variables, sauf quand on analyse la représentation 6c. La verbalisation fait référence a des variables continues.

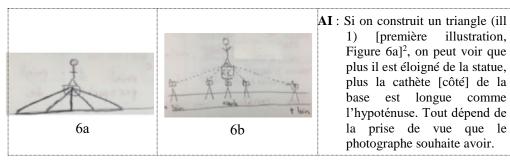


Figure 6. Travail individuel

Un autre exemple de verbalisation est :

AJ: Plus l'angle qui est formé par notre trajectoire et la statue est petit, plus la distance entre l'appareil et la statue est petite.

Un procédé de modélisation 3D est présenté dans la Figure 7a, où l'élève, dans un premier temps (phase individuelle avec stylo à l'encre noire) a représenté par des points les emplacements possibles de l'appareil (plus ou moins à égale distance les uns des autres) et les a reliés à la statue représentée par un parallélépipède. Par contre dans la Figure 7b, la statue a été représentée par un point. La notion de covariation entre variables semble être présente dans ces types de représentation figurales, comme on a dit plus haut, il faut la représentation verbale pour confirmer s'il s'agit de variables discrètes ou continues.



Figure 7. Raffinement d'une RS initiale après discussion en équipe

## 4.1.2 Construction de relations entre les éléments de la situation d'investigation

Les RS des élèves ne montraient pas uniquement la statue, le trépied ou l'appareil photo : elles montraient aussi des lignes qui indiquaient visuellement une variation de la distance entre l'appareil photo et la statue (voir Figure 8). Pour ce faire, des flèches ou d'autres modes de relations possibles entre ces éléments ont été utilisés. Ainsi, nous avons constaté que 18 des 22 élèves avaient remplacé, dans un

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ce qui est entre crochets sont des interprétations faites par les auteurs de ce document.

processus de communication, soit en équipe ou en grand groupe, le trottoir par une ligne droite. Dans certains cas, on ne sait pas, dans le processus de modélisation, si les élèves pensaient à une variable continue (sur le déplacement de la position de l'appareil photo) ou discrète.



Figure 8. Approche visuelle de la variation de la distance entre l'appareil photo et la statue

La variation de la variable position de l'appareil photo a entre autres été suggérée par des lignes figurant dans les RS, marquant la position de l'appareil photo par rapport à la statue. Cette relation a également été soulignée par des flèches (illustration de droite dans la Figure 9) indiquant possiblement, la distance entre deux emplacements possibles.

# 4.1.3 Identification de facteurs non mentionnés dans le problème et prise de décisions au sujet de leur implication dans la situation-problème

Dans les RS des élèves, on peut identifier certains facteurs qui pourraient avoir une influence sur le phénomène analysé, mais qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé de la situation-problème. Parmi ceux-ci figure le positionnement possible de l'appareil photo sur un trottoir non représenté par une ligne droite (voir figures 4a, 4b, 6b, 8a et 9b). Il y a d'autres positions où les élèves font la restriction de la position de l'appareil photo sur le trottoir en ligne droite (Figure 9b). L'élève mentionne :

AA: Il y a plusieurs autres façons de présenter la caméra, les deux qui sont pardessus sont les deux principales. Il peut y en avoir d'autres. Mais elles doivent être sur le trottoir. Il y a plusieurs angles par endroit. Il peut aussi [y] avoir [une] autre longueur.

Cette affirmation a aussi été partagée par un autre élève qui a dit (voir le geste sur la photo 9a) :

AN: Donc juste à partir d'un point, il peut y avoir plusieurs possibilités, cela peut dépendre de la façon dont la caméra est placée. Il peut y avoir plusieurs angles sous lesquels on peut prendre la photo.

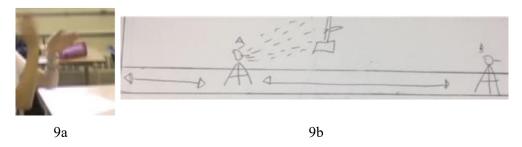


Figure 9. Autres facteurs montrés dans les RS

L'élève de la figure 9a a demandé à l'enseignant si l'on pouvait considérer un mouvement vertical de l'appareil photo (angle vertical). L'enseignant a dit qu'il pouvait accepter une telle interprétation.

## 4.1.4 Processus de modélisation mathématique à travers les éléments et les relations identifiés

La plupart des RS proposées par les élèves présentaient des éléments que l'enseignant et les chercheurs ont identifiés comme un processus de modélisation à travers la reconnaissance des variables et de leur covariation. Les segments, flèches, triangles et angles ont été utilisés pour montrer une variation (par exemple, celle de des figures 8a et 9b) dans certains cas, et une covariation dans d'autres (par exemple, celle décrite par l'élève en Figure 6c). On trouve même des mesures métriques (voir la Figure 10a). D'autres éléments possibles sont l'angle entre la statue et les différentes positions de l'appareil photo (Figure 10b). Seuls deux élèves introduisent dans leurs explications les propriétés des triangles (Figure 6c).

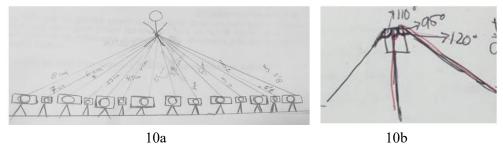


Figure 10. Mesures métriques et autre type d'interprétation de la situation

À travers cette activité d'introduction, nous pouvons voir apparaître des processus de modélisation qui permettent de comprendre la situation. On peut voir plus bas des manifestations écrites autour de la notion de variation et de covariation entre variables discrètes et variables continues qui émerge naturellement ce qui était le but principal de cette situation-problème.

Voyons de plus près une autre explication et le dessin correspondant, à la Figure 11. Dès le début, l'élève (AG) désigne dans sa RS la statue par un point et, pour montrer la variation de la position de l'appareil photo par rapport à la statue, dessine les différentes positions à l'aide de lignes pointillées. Il place un point de référence (repère) pour indiquer où se trouve le photographe (à droite ou à gauche du point de repère).

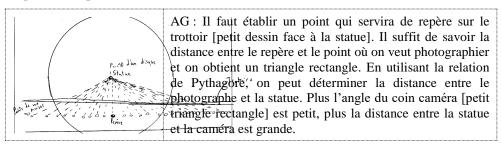


Figure 11. RS d'AG où dessin et texte font allusion à la covariation entre variables

Dans le texte de la Figure 11, l'élève AG fait explicitement mention de la covariation entre la variable angle (angle qui est formé par la statue, l'appareil photo et le point nommé « repère ») et la variable distance (celle entre la statue et l'appareil photo). Implicitement, dans le dessin d'AG, il y a aussi la représentation de la variable liée à la position de l'appareil photo. Comme prévu dans le scénario de l'activité, la notion de relation entre variables a été travaillée par cet élève. Même si celui-ci ne connaît pas les situations d'investigation qui suivent (voir Figure 1), il y a un raffinement des RS (médiation des représentations), qui devrait mener à la construction d'une structure cognitive proche de la covariation entre variables.

## 4.1.5 Soutien aux processus de compréhension de la situation et établissement de conjectures

Nous voyons aussi apparaître dans les RS des transformations qui vont engendrer des conjectures. Cela peut se voir dans les processus de raffinement des RS initiales de quelques élèves, ainsi que par les explications qu'ils ont données oralement ou par écrit. Un exemple clair est donné par l'élève AM, qui, dans sa première RS (Figure 12a), montre différents appareils photo situés sur le trottoir. Dans 12b, elle place la statue à côté d'un bord du trottoir pour analyser la situation de façon plus précise. Elle écrit :

AM: Il y a un million de possibilités. C'est simple [;] tu peux te mettre à un endroit et il y a différents endroits au cm². S'il reste sur le trottoir, il peut se placer n'importe où sur la longueur et la largeur du trottoir. Le plus rapproché[,] c'est directement en face et à la limite la plus proche de la statue[,] et le plus allongé[,] c'est en diagonale du côté le plus éloigné à l'extrême droite.

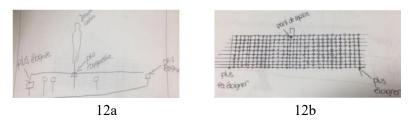
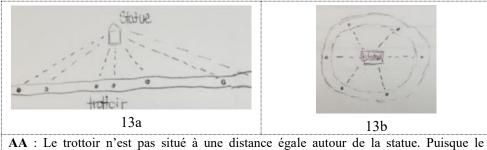


Figure 12. Un processus de compréhension à travers les RS

En fait, cette élève n'a pas représenté le trottoir par une ligne, comme d'autres élèves l'ont fait, mais par un plan cartésien (Figure 12b). A noter que d'autres élèves représentent le trottoir par une bande (4a, 6b, 8a, 9b et 13a).

Un second exemple qui illustre ce processus de raffinement de la première production est donné par AA. Sa première RS est montrée à la figure 13a. L'élève a bien repéré les différents éléments de la situation. Visuellement, on pourrait arriver à la covariation, mais, de façon surprenante, l'élève a imaginé une autre situation (Figure 13b) pour laquelle il a donné une explication tout à fait cohérente avec sa nouvelle représentation.



AA: Le trottoir n'est pas situé à une distance égale autour de la statue. Puisque le trottoir est droit, la distance varie. Si on se met plus proche de la statue, la distance est ouverte [angle entre statue et trottoir], et si on se met plus loin de la statue, la distance est plus longue.

Si le trottoir était autour de la statue afin qu'elle soit au centre, les distances seraient égales.

13c

**Figure 13.** Production de conjectures et raffinement de la RS initiale ; AA montre visuellement la variation d'une variable (distance statue-position du photographe)

Cette trajectoire du mouvement du photographe d'un trajet circulaire placé autour de la statue a été formulée par plusieurs élèves soit on peut la voir comme une interprétation des caractéristiques de la situation (étude d'un cas extrême), soit un souvenir (dans la ville de Québec, il y a une statue de Jacques Cartier avec ces caractéristiques). Il faut noter que la description verbale donnée par l'élève de la

Figure 13 fait seulement mention de « la distance entre l'appareil photo et la statue ». Un autre élève écrit :

**AL**: Puisque le trottoir est en ligne droite et que la statue ne bouge pas, la distance varie. Mais si le trottoir était rond, autour de la statue, la distance ne varierait pas.

On peut observer que, dans certains cas, lors de l'extériorisation des RF-S, l'élève revient en arrière pour produire une nouvelle RS afin de mieux comprendre la situation à l'étude (voir Figure 13). Le rôle de la langue orale et écrite et des gestes est fondamental dans les processus de médiation sémiotique de ce processus d'extériorisation. Cela soutient, d'une part, l'importance de la *communication interne* et, d'autre part, les processus d'objectivation à travers la *communication avec un autre interlocuteur*, ce que Radford (1998, 2003) considère, précisément, comme une partie essentielle dans la construction de signes et de concepts.

En résumé, les caractéristiques des représentations RS des 22 élèves sont les suivantes :

- a) Des schémas liés, du point de vue physique, au contexte (statue, corps humain, etc.);
- b) Des schémas qui utilisent différents types d'éléments pour représenter la statue, la distance de l'appareil photo à la statue, la représentation de la statue par un point, etc.;
- c) Des représentations verbales et des gestes pour exprimer des variations (déplacement de l'appareil photo) et des covariations (entre la position de l'appareil photo et la distance de l'appareil photo à la statue, ou entre la position de l'appareil photo et l'angle formé par la statue, la position de l'appareil photo et sa position initiale). La variation et la covariation entre variables, exprimées par quelques élèves avec des variables discrètes et d'autres avec des variables continues. Des conjectures sur la forme du trottoir (horizontale, circulaire), qui entraînent une réflexion sur la relation entre les variables en jeu;
- d) Dans les schémas, l'importance du triangle comme figure saillante dans le processus de modélisation.
- e) L'évolution des représentations est caractérisée par l'émergence de la mathématique sous-jacente à la situation. Comme dans le cas des situations de Brousseau (1998), la mathématique émerge dans l'interaction avec le milieu et dans l'interaction entre les élèves.

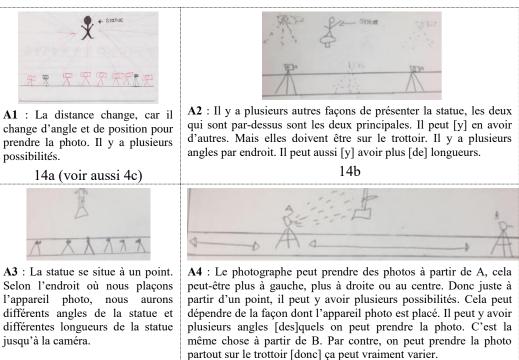
Nous essayerons maintenant de rendre compte de toute la richesse des processus de médiation sémiotique à travers l'analyse des productions d'une seule équipe.

### 4.2 Évolution des RF-S liées aux RS d'une équipe

Pour répondre à la deuxième question de recherche, nous analyserons le processus d'évolution des RF-S liées aux RS d'une équipe composée de quatre élèves que nous nommerons  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ . Nous allons analyser leur production et leur évolution en contraste avec les productions finales d'autres équipes. Comme signalé dans les caractéristiques de la population, cette équipe a été choisie parce qu'il s'agit d'une « équipe faible [sic] », en espérant mieux identifier l'évolution des représentations qu'avec une équipe forte. Voici l'analyse des productions de ces quatre élèves pour chacune des étapes de la méthode ACODESA :

### 4.2.1 Première étape : le travail individuel des membres de l'équipe

Voici les RS des élèves de l'équipe considérée lors de la première étape (voir Figure 14).



**Figure 14.** RS individuelle de chaque membre de l'équipe (sauf A1, qui a ajouté des appareils photo et des lignes après confrontation avec ses coéquipiers)

14c

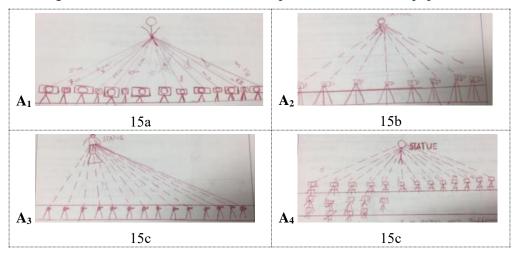
Dans l'analyse des représentations de toute la population (section 4.1) nous avons discuté quelques représentations des élèves. Nous allons les analyser à nouveau,

mais cette fois-ci pour analyser leur évolution dans un travail collaboratif. Nous pouvons voir que, dans ces RS (voir Figure 14), les éléments en lien avec la situation sont présents (l'appareil photo, la statue et le trottoir). Les quatre élèves ont utilisé des dessins réalistes de la statue. Les représentations des élèves ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ ) font appel à une variation explicite de l'angle (horizontale ou verticale) ; de la position de l'appareil photo et variation de la distance entre l'appareil photo et la statue. Les premiers schémas ont été élaborés pour mieux comprendre la situation (voir Figure 14) ; par exemple,  $A_1$  considère la position de l'appareil photo comme une variable discrète (il a dessiné deux appareils photo et il en a ajouté d'autres après le travail en équipe) et  $A_4$  considère la position de l'appareil photo comme une variable continue.

Une variable fréquemment présente, plus ou moins explicitement, dans les RS des quatre élèves (Figure 14) est la distance entre l'appareil photo et la statue. Deux variables sont considérées explicitement par A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, et par A<sub>3</sub>. La RS de A<sub>4</sub> décrit trois variables : la position de l'appareil photo, l'angle (variation verticale) de l'appareil photo et, de manière implicite, la distance de la statue. L'élève A<sub>3</sub> explicite une double covariation entre la variable position de l'appareil photo et l'angle avec la statue ainsi qu'avec la distance entre l'appareil photo et la statue.

### 4.2.2 Deuxième étape : le travail en équipe

Après la première étape de travail individuel avec possibilité de demander à l'enseignant des éclaircissements, les élèves passent au travail en équipe



**Figure 15.** RS modifiées (représentation discrète et uniformisée) à la suite du travail en équipe

La Figure 15 nous montre les nouvelles productions RS de chaque membre, mais dans un travail d'équipe. Au cours de cette étape, les élèves doivent écrire en

rouge. On peut y voir que, pendant ce travail en équipe, des changements ont eu lieu. Par exemple, dans les quatre nouvelles RS (Figure 15) quelques élèves ont ajouté, en pointillés, les lignes allant de l'appareil photo à la statue. On peut aussi remarquer que, bien que la représentation de la statue continue à avoir un aspect plus ou moins réaliste, les lignes de A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub> ont une tendance à converger en un point, alors que celles de A<sub>3</sub> et A<sub>4</sub> semblent converger vers un élément de la statue (la taille et la tête) Il semble que les représentations des élèves dans la Figure 15 soient des représentations de transition pour le passage d'une idée de la statue en 3D à une représentation en 2D (A<sub>4</sub>) ou 1D (A<sub>3</sub>), puis finalement à une représentation de la statue par un simple point, 0D (A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub>). Un autre changement des RS réside dans l'emplacement des appareils photo de A<sub>4</sub>, l'élève a mis deux rangées d'appareils photos sur le trottoir. Cette option a été éliminée lors de la présentation en grand groupe (voir Figure 16). Ces détails montrent un certain processus de modélisation et de traitement des RS lors du travail en équipe et/ou en grand groupe.

Le travail en équipe, la *communication entre pairs* et le *processus d'objectivation* (Radford, 1998, 2003) ont permis une amélioration des RF-S initiales. Cette communication a permis de donner des explications de la situation en termes de variation (les variables sont ambigües à cette étape) et de covariation entre variables. Voici l'exemple de l'élève A<sub>1</sub> lors du travail en équipe :

A<sub>1</sub>: Selon l'angle où est placée la caméra, la mesure varie. Plus la caméra est placée en dessous de la statue, plus la mesure est courte. Plus la mesure est placée sur les côtés de la statue, plus la mesure est longue.

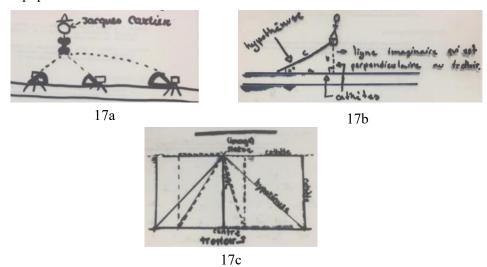
# 4.2.3 Troisième étape : la discussion en grand groupe (présentation des résultats par équipe à toute la classe)

Dans une troisième étape, encore une fois dans un objectif de communication et de validation entre pairs, les équipes ont été invitées à présenter leurs résultats au groupe. Pour cette présentation, les équipes écrivent leurs représentations sur un transparent dans le but de le projeter. La Figure 16 montre la production de l'équipe 1 (A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub> et A<sub>4</sub>). On peut y remarquer que l'équipe a résumé les idées exprimées au cours du travail en équipe. Pour la présentation en grand groupe, l'équipe n'a pas repris les appareils photo des deuxième et troisième rangées, comme les avait dessinées A<sub>4</sub> (Figure 16), pour ne laisser qu'une seule rangée.



Figure 16. Représentation de l'équipe formé par A1, A2, A3 et A4

Dans la Figure 17, nous présentons les productions des équipes 2, 3 et 4 (élèves classés comme plus forts) afin que l'on puisse comprendre ultérieurement (étape 4, celle de l'autoréflexion) l'influence que celles-ci ont pu avoir sur chaque membre de l'équipe 1.



**Figure 17.** RS des équipes 2, 3 et 4 présentées dans la discussion en grand groupe L'équipe 2 (Figure 17a) montre trois variables :

- la position de l'appareil photo,
- l'angle entre la ligne horizontale et la ligne entre la statue et l'appareil photo,
- la distance entre l'appareil photo et la statue (plus implicitement).

Les équipes 3 et 4 (Figures 17b et 17c) montrent un schéma où on peut voir des triangles (des triangles rectangles, explicites dans l'équipe 3 et implicites dans l'équipe 4, ils font référence à l'hypoténuse lié à un triangle rectangle) :

- les deux équipes 3 (Figure 17b) et 4 (Figure 17c) prennent comme hypoténuse la distance entre l'appareil photo et la statue ;
- un côté semble vertical (triangle rectangle);
- les deux équipes prennent comme référence la ligne perpendiculaire au trottoir passant par le point qui représente la statue ;
- l'autre côté est formé par le segment entre la position de l'appareil photo et la statue ; c'est-à-dire l'hypoténuse.

Les deux équipes 3 et 4 expliquent dans leurs présentations écrites, de façon explicite, la relation de Pythagore (équipe 3, Figure 17b) :

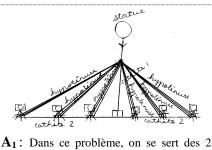
Équipe 3: La statue ne se déplace pas, mais le photographe, lui, oui, donc il change son point de vue et transforme aussi sa perspective de la statue. Certaines variantes se présentent, comme la hauteur du trépied, l'angle, l'inclinaison du trottoir, etc. Si l'on construit un triangle, on peut trouver nos résultats. En utilisant la relation de Pythagore, on pourrait trouver les mesures. Exception: si le photographe est en ligne droite avec la statue.

Ces idées se rapportant à la relation de Pythagore ont été débattues en grand groupe à la demande de l'enseignant. D'autres idées ont été discutées sur le point de repère face à la statue. L'idée d'utiliser des angles, proposée par l'équipe 2, a également intéressé les élèves des autres équipes. L'idée principale que nous pouvons tirer de l'analyse de cette partie du travail des élèves est que l'organisation de la classe selon l'approche ACODESA a favorisé un riche processus d'objectivation, engendré par la communication entre les équipes.

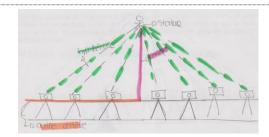
L'enseignant a demandé aux élèves leur opinion sur les différentes présentations. Ceux-ci ont répondu que la construction de triangles était essentielle pour expliquer la situation. Ils ont aussi nommé plusieurs variables importantes : la variation de l'angle lié à la position de l'appareil photo, l'hypoténuse du triangle et le côté horizontal du triangle. L'enseignant a résumé ce que les élèves ont exprimé sur la covariation entre variables en utilisant un triangle rectangle dynamique. L'enseignant n'est pas revenu sur le trottoir circulaire. Il a donné la priorité aux variables hypoténuse et côté horizontal du triangle ainsi qu'à la variable angle qui avaient été mentionnées par les élèves.

# 4.2.4 Quatrième étape : l'autoréflexion. Processus de reconstruction individuelle par chaque membre de l'équipe

Dans cette étape, l'enseignant demande aux élèves de refaire, seuls, l'activité, c'està-dire de résoudre seuls la situation-problème en prenant en considération ce qui a été discuté en classe. Les élèves doivent reconstruire les résultats obtenus à chacune des étapes. On peut voir ci-dessous (voir Figure 18) les productions (dessin et texte) de chaque élève de l'équipe 1 ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ ) à l'issue de l'étape d'autoréflexion.

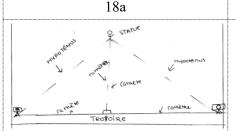


A<sub>1</sub>: Dans ce problème, on se sert des 2 cathèthes de chaque triangle[s] pour calculer la mesure de l'hypoténuse (pitagore) [Pythagore]. La caméra et la statue sont la mesure de Pitagore [Pythagore].



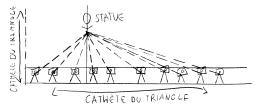
 $A_2$ : Sur ce schéma[,] je présente que nous avons aussi plus[ieurs] mesures qui varient. Mais pour les trouver, nous pourrions [nous] servir de la relation de Pythagore. Nous nous servirons des deux cathètes et ensuite ça nous donnera l'hypoténuse qui sera la mesure de la distance de la caméra à la statue.

18b



A<sub>3</sub>: On s'imagine une ligne imaginaire sur le côté à gauche, selon la distance entre la caméra et la statue, on utilise la relation de Pyhtagore pour trouver l'hypoténuse.

18c



 $A_4$ : Si l'on fait un triangle rectangle, on peut l'hypoténuse qui est la distance entre la caméra et la statue à l'aide de la relation de Pythagore. (cathète 1)<sup>2</sup> + (cathète 2)<sup>2</sup> = hypothénuse<sup>2</sup>. Il peut y avoir plusieurs distances d'une certaine caméra à la statue, car la photo peut être prise de différentes angles et perspectives.

18d

**Figure 18.** RSC après un processus d'autoréflexion (quatrième étape, reconstruction individuelle)

Les dessins et les représentations verbales montrent des changements substantiels par rapport aux premiers **RS** du dessin initial des membres de l'équipe 1 (voir Figure 14). Les idées discutées en grand groupe ont été reprises (triangles rectangles et relation de Pythagore). Il est important de mentionner que les élèves reprennent certains éléments des RS qu'ils ont produites aux étapes précédentes (comparaison avec les productions des figures 14, 15, 16 et 17): dessins de l'appareil photo et de la statue réalistes, alignement des positions de l'appareil photo. Le plus grand changement réside dans l'inclusion d'éléments non explicités par tous antérieurement (A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>): un dessin 2D avec un point pour désigner les sommets des triangles (le dessin de la statue est toujours présente dans ses représentations). Les quatre élèves ont fait une reconstruction de ce qui a été fait en

classe, dans laquelle ils ont incorporé les éléments qui avaient été discutés. À partir de cette activité, l'élève A<sub>4</sub> est devenue la leader de cette équipe dans la résolution des autres situations d'investigation (voir Figure 1).

Si nous analysons les caractéristiques de ce que l'ensemble des groupes a produit (voir résumé à la fin de la section 4.1), nous pouvons vérifier qu'à la fin des quatre étapes, cette équipe 1 a changé ses représentations initiales (RS) en ajoutant des caractéristiques que les autres équipes ont utilisées. Même s'ils ont retenu la possibilité d'utiliser la relation de Pythagore dans le processus de modélisation, ils ont conservé une représentation réaliste de la statue (Figure 18); représentations que nous avons nommées « représentations socialement construites » (RSC), selon notre approche théorique (voir section 2.2).

Cette étape est cruciale dans la méthode ACODESA, puisqu'elle demande une reconstruction individuelle à la toute fin d'un processus de coconstruction (travail en collaboration). L'autoréflexion autour de la reconstruction de ce qui a été discuté en classe est le summum de la construction des connaissances dans un processus de communication et de validation entre pairs. Nous pensons que ce que l'élève construit à la fin de la quatrième étape lui donne un support solide pour les nouvelles connaissances mathématiques que l'enseignant va institutionnaliser dans la cinquième étape.

Dans la dernière étape, celle du processus d'institutionnalisation, l'enseignant, après avoir analysé les productions des élèves, a souligné l'importance du choix des variables présentées. L'enseignant a donné une priorité aux représentations 2D, à la construction de triangles et à la relation de Pythagore, ainsi qu'à la représentation de la statue par un point. Il a parlé de la covariation entre variables en prenant en compte, comme première covariation entre variables, la position de l'appareil photo (distance de l'origine à l'appareil photo) et l'angle formé par l'hypoténuse et la cathète horizontale. Et comme deuxième covariation entre variables, la position de l'appareil photo (distance de l'origine à l'appareil photo) et la distance appareil—statue.

#### Conclusion

Cette recherche visait à comprendre plus en détail les caractéristiques des représentations notées RF-S, à travers les RS et leurs évolutions vers les représentations socialement construites (RSC) qui surgissent quand les élèves résolvent une situation-problème par un travail individuel, puis en collaboration. L'analyse du présent article, a été réalisée à l'aide des RS produites tout au long des quatre premières étapes de la méthode ACODESA, dans la résolution de la situation d'investigation : *le photographe*. Cette situation qui vise à initier l'élève à une méthode d'enseignement différente qui cherche à promouvoir la production des RS.

Notre analyse sur les RS a été centrée sur leurs apports à la compréhension de la situation et à la naissance de conjectures (par exemple, ce qui se passerait si le trottoir était circulaire). Cela a permis à certains élèves d'analyser un type particulier de covariation entre variables. Il est important de noter que l'extériorisation des RF-S à travers les RS a permis aux élèves d'expliquer la situation étudiée à travers différents types de représentations.

Parmi les 22 élèves qui ont participé à la première séance, seulement deux ont évoqué la relation pythagoricienne dans le travail individuel. Cela montre qu'une même situation-problème peut déclencher des idées complètement différentes (une pensée divergente) chez différents élèves et que la difficulté est d'amener ces élèves à une pensée convergente vers le concept de covariation entre variables. C'est pendant le travail en équipe que les élèves ont constaté la nécessité du passage de dessins représentant la statue en 3D à une représentation en 2D et finalement en un point. À la fin de la section 4.1, nous avons caractérisé les productions de toute la population, répondant ainsi à notre première question de recherche.

Pour répondre à la deuxième question de recherche, qui porte sur l'évolution des RS (associées aux RF-S), les résultats de l'expérimentation montrent que dans chacune des étapes de la méthode, les RS subissent des changements significatifs dans un processus d'acculturation vers une explication de la situation étudiée. En prenant une équipe faible, nous avons voulu montrer cette évolution, cette explicitation de la covariation entre variables dans les dernières productions RSC (voir Figure 18). C'est par le travail en équipe (communication et validation) que les élèves ont été amenés à réfléchir sur les éléments liés à la situation et à trouver des relations sur la variation et la covariation entre variables. Dans la discussion en grand groupe, les membres de cette équipe ont vu et entendu les présentations des autres équipes avec la mention explicite d'expressions telles que « triangles rectangles » et « relation de Pythagore ». La discussion qui a suivi, proposée par l'enseignant, a donné lieu à encore plus de raffinement des RS. Les élèves ont explicitement dit que l'utilisation des triangles était essentielle pour expliquer la situation. Les triangles dynamiques ont été adéquats pour expliquer la situation en termes de covariation entre variables. On peut constater cette affirmation dans les RSC que chaque membre de l'équipe a produite à l'étape d'autoréflexion (voir Figure 18).

Cette expérimentation nous montre bien que chacune des étapes de la méthode a été essentielle pour le développement des RF-S (selon l'analyse des productions des figures 14, 15, 16, 17 et 18). Ainsi, avant le travail d'équipe, la production des RS soutient individuellement une première approche de la situation et favorise le processus d'identification des éléments-clés de la situation-problème et des relations possibles entre eux. Ainsi, lorsqu'il est temps de faire le travail en équipe,

chacun des membres a déjà une idée de base qui lui permet de faire valoir ses points de vue et donc de proposer une RS plus raffinée aux autres membres de l'équipe. À l'étape suivante, on observe qu'une discussion de groupe amène les équipes à un échange des idées qui leur ont permis d'introduire plus de relations mathématiques dans leur propre RS.

La quatrième étape de la méthode permet de montrer comment les idées échangées entre les différentes équipes ont été intériorisées par les élèves de l'équipe 1. La méthode ACODESA nous permet de créer une approche dynamique dans la classe de mathématiques pour la co-construction des premiers éléments de la covariation entre variables comme prélude au concept de fonction. Dans cette approche socioculturelle, les élèves ont besoin d'interagir entre eux et avec le groupe dans un milieu propice à l'argumentation et à la communication externe et interne.

Étant donné que les RF-S sont les premières représentations face à une situation non routinière et que les RS associées sont confrontées dans les processus de réflexion individuelle, discussion et validation en équipe, discussion et validation en grand groupe et autoréflexion, il est impératif de les analyser pour savoir à ce stade ce que l'élève a retenu du processus d'apprentissage et comment expliquer avec les nouvelles représentations socialement construites (RSC) la situation étudiée; et tout cela avant le processus d'institutionnalisation.

Nous avons discuté de l'importance du concept de covariation entre variables comme prélude au concept de fonction et de situations d'investigation pour développer ce concept important. Une piste de réflexion importante pour l'organisation d'un cours complet à l'école secondaire est le rôle des exercices, problèmes et situations d'investigation.

**Remerciements**. Nous remercions tout particulièrement le XVI<sup>e</sup> Groupe de travail Québec-Mexique 2017-2019, qui permet une communication plus étroite entre les chercheurs du Mexique et du Québec.

### **Bibliographie**

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process, *Relime*, **numéro** spécial, p. 267-299.

BARTOLINI BUSSI, M.G. & M. A. MARIOTTI (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. ENGLISH et al. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746-783). Londres: Routledge.

BLUM, W., P. GALBRAITH, H. HENN & M. NISS (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, New York: Springer.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DAVIS, R., S. YOUNG & P. MCLOUGHLIN (1982). *The Roles of "Understanding" in the Learning of Mathematics* [Rapport n° NSF/SED-82008]. En ligne: <a href="http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220279.pdf">http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220279.pdf</a>.

DISESSA, A., D. HAMMER, B. SHERIN & T. KOLPALOWSKI (1991). Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children, *Journal of Mathematical Behavior*, **10**, 117-160.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37-65.

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine, Berne: Peter Lang.

DUVAL, R. (2005). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM* (pp. 67-89). Strasbourg.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 103-131.

ERNEST, P. (2006). A Semiotic Perspective of Mathematical Activity: The Case of Number, *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 67-101.

GRAVEMEIJER, K. (2007). Emergent Modelling as a Precursor to Mathematical Modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 137-144). New York: Springer.

GUILFORD J.P. (1967). The Nature of Human Intelligence. New York: McGraw-Hill.

HITT, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 255-271.

HITT, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique, *Revue des Sciences de l'Éducation*, **30(2)**, 329-354.

HITT, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 253-268.

HITT, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion. In M. BARON, D. GUIN & L. TROUCHE (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

HITT, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques?, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **18**, 9-27.

HITT, F. & GONZÁLEZ-MARTÍN A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method, *Educational Studies in Mathematics*, **88(2)**, 201-219.

HITT, F., SABOYA, M. & CORTÉS C. (2017). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment, *Educational Studies in Mathematics*, **94(1)**, 97-116.

JANVIER, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In D. JANVIER (Eds.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM*, **10**, 123-159.

RADFORD, L. (1998). *On Culture and Mind: a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought*. Article présenté à la 23<sup>e</sup> rencontre annuelle de la Semiotic Society of America, En ligne à : <a href="http://www.luisradford.ca/pub/102">http://www.luisradford.ca/pub/102</a> On culture mind2.pdf

RADFORD, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization, *Mathematical Thinking and Learning*, **5(1)**, 37-70.

TALL, D. & VINNER S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics With Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12(2)**, 151-169.

VINNER, S. (1983). Concept Definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **14(3)**, 293-305.

VOLOSHINOV, V.N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*, traduction du russe par L. MATEJKA et I. R. TITUNIK. Cambridge, MA: Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. S. (1973). Pensamiento y lenguaje, Buenos Aires: La pléyade.

YACKEL, E. & P. COOB (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(4)**, 458-477.

### FERNANDO HITT

Université du Québec à Montréal hitt.fernando@uqam.ca

## SAMANTHA QUIROZ RIVERA

Universidad Autónoma de Coahuila samantha.quiroz@uadec.edu.mx