**BLANDINE MASSELIN**

# DYNAMIQUE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE EN CLASSE ENTRE UN ENSEIGNANT ET DES GROUPES D'ÉLÈVES SUR LA SIMULATION EN PROBABILITÉS : UNE ÉTUDE DE CAS

**Abstract**. **Dynamics of mathematical work in class between a teacher and groups of students on simulations in probability: a case study.** The purpose of this contribution is to characterize the work of a teacher on simulations in probability in grade 9 course in France (14-15 year-old students). In a case study, we report in particular on what is at stake in the solving of a probability task with simulations when the teacher decides to organize small group work. Methodological tools, such as the chronogram, related to the specificity of this type of work in class are defined in the article. We have used the theory of Mathematical Work Spaces (MWS) and concepts such as potential suitable MWS and actual suitable MWS have been defined to conduct our study. The analysis of the teacher's interventions in the classroom revealed a standardization of the probabilistic model produced by the teacher during the simulation. The role of the teacher and the choice of the digital artefact transformed the students' work. We matched blockages, rebounds or identified containments in the actual MWS with the potential MWS. Our research has clarified first cognitive task routes in probability on The Hare and the Tortoise game.

**Résumé**. Le propos de cette contribution est de caractériser le travail d'une enseignante sur la simulation en probabilités au niveau troisième en France (élèves de 14-15 ans). A partir d'une étude de cas, nous rendons compte en particulier de ce qui se joue lors de la résolution d'une tâche de probabilités, en particulier sur la simulation, quand une enseignante décide de faire travailler ses élèves en petits groupes. Des outils méthodologiques, comme le chronogramme, reliés à la spécificité de cette modalité de travail en classe sont précisés dans l'article. Nous avons utilisé la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) et des concepts comme l'ETM idoine potentiel et l'ETM idoine effectif ont été définis pour mener notre étude. L'analyse des interactions entre l'enseignante et les groupes d'élèves dans la classe a mis en évidence une uniformisation du modèle probabiliste produite par l'enseignante lors de la simulation. Le rôle de l'enseignante dans l'apparition de blocages, ou dans la façon de les prendre en compte a transformé le travail des élèves. Nous avons mis en relation ces blocages, rebonds ou confinements repérés dans l'ETM idoine effectif avec l'ETM potentiel. Notre recherche a précisé de premiers itinéraires cognitifs de tâche en probabilités sur le jeu du lièvre et de la tortue.

**Mots-clés**. Probabilités, simulation, espaces de travail mathématique, itinéraire cognitif, blocage, rebond, confinement.

---

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 25, p. 49 – 88.

## Introduction

Des recherches existantes s'intéressent au travail de l'enseignant comme dans la théorie de l'action conjointe développée par Sensevy (Sensevy (2007), Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni (2000)) où l'action didactique est précisée dans différentes formes au sein de situations, avec une approche anthropologique de la didactique. Si notre étude porte également sur le travail de l'enseignant, nous adoptons un autre point de vue en considérant le développement du travail des élèves lors de la résolution d'une tâche. Plus spécifiquement, nous nous intéressons à l'orientation du travail mathématique des élèves sous l'effet d'interventions de l'enseignant quand il décide de faire travailler ses élèves en petits groupes de trois ou quatre. Nous avons pour cet article choisi de nous centrer sur une tâche de probabilités.

En France, que ce soit au collège ou au lycée, les programmes actuels préconisent d'effectuer des simulations d'expériences aléatoires, reliant ainsi probabilités et statistique par l'incitation à une approche fréquentiste des probabilités. En effet, les programmes actuellement en vigueur du collège (MENESR, 2015) précisent la nécessité de :

> Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire (à une ou deux épreuves). (p. 373)

Pour la classe de seconde, le programme de 2019 (MENJ, 2019) s'inscrit dans la continuité du collège où l'usage de la simulation est mentionné ainsi dans les capacités attendues :

> Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur. (p.14)

Parce que la simulation nous paraît pouvoir permettre une dialectique entre les probabilités et la statistique, nous souhaitons interroger dans cet article comment les liens entre ces domaines vivent dans une classe avec, en arrière plan, l'élaboration d'une formation continue en probabilités.

Notre problématique s'organise à partir des conditions curriculaires précédemment évoquées qui justifient notre intérêt pour l'étude de situations de classe où des tâches de probabilités sont résolues en s'appuyant sur des simulations, et en mettant les élèves en situation de recherche. Plus précisément, nous nous interrogeons sur le travail mathématique qui peut se développer en classe sur de telles situations. Si d'autres chercheurs se sont intéressés à la simulation en probabilités (Gaydier, 2011 ; Kiet, 2015 ; Parzysz, 2014 ; ou encore Laval, 2018), notre étude porte plus spécifiquement sur la façon dont le travail mathématique impliquant de la simulation est influencé par les interactions entre élèves et enseignant, dans un contexte de travail en petits groupes en classe (qui est le plus souvent privilégié lorsque l'on veut mettre les élèves en situation de recherche).

Pour cela, nous allons nous appuyer sur une tâche précise, le jeu du lièvre et de la tortue, que nous avons étudié de façon approfondie dans notre thèse (Masselin, 2019), et nous allons nous centrer sur l'analyse d'une classe particulière, celle animée par l'enseignante Lucie. Cette dernière a choisi de faire travailler ses élèves de troisième sur cette tâche, en petits groupes et en utilisant des simulations.

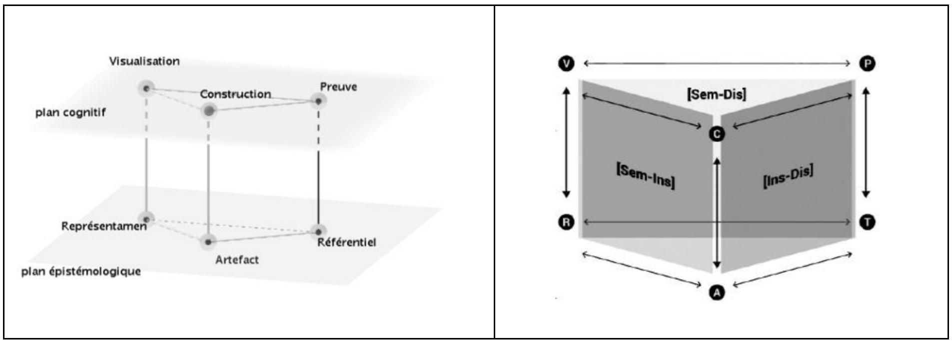
Pour répondre à notre problématique sur le travail mathématique et comme nous l'avons réalisé dans notre thèse sur la trajectoire d'un avatar (Masselin, 2018) inspirée de la trajectoire d'un problème (Kuzniak, Parzysz &Vivier, 2013), nous allons adopter le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016), noté ETM. Nous ciblerons en particulier l'étude des moments critiques du déroulement du travail mathématique (ce qui nous amènera à introduire les concepts de blocage, de rebond et de confinement dans l'ETM) et celle du rôle des interactions entre enseignante et élèves dans l'apparition et le devenir de ces moments critiques. Ainsi, nous préciserons nos questions de recherche sur la gestion par l'enseignante du travail mathématique développé par divers groupes d'élèves lors d'une séance de classe sur la tâche de probabilités considérée. Nous présenterons une analyse épistémologique de la tâche complétée par une analyse, côté chercheur, de sa ou ses possibles mises en œuvre. Nous décrirons la dynamique de circulation du travail dans l'ETM à travers ce que nous appellerons des itinéraires cognitifs de tâche afin de préciser l'ETM idoine attendu. L'examen du travail de préparation de la séance (ETM idoine potentiel) permettra également de mieux comprendre la gestion de la séance de classe par l'enseignante. Les données sont issues de notre recherche doctorale (Masselin, 2019) qui porte sur le travail de plusieurs enseignants sur la tâche du jeu du lièvre et de la tortue. Notre méthodologie de recherche intègrera des outils spécifiques en lien avec l'organisation du travail en groupe des élèves, tels que le chronogramme. Il permettra d'analyser l'agencement des interactions entre l'enseignante et les élèves au fil de la séance et aidera à préciser les itinéraires cognitifs effectivement empruntés dans la classe de l'enseignante.

## 1. Cadrage théorique

### 1.1. La théorie des Espaces de Travail Mathématique et son modèle

Nous souhaitons décrire et repérer la nature et la spécificité du travail mathématique quand des enseignants et des élèves sont effectivement engagés dans une tâche. Afin d'analyser la forme du travail mathématique, nous inscrivons notre travail dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique développée par Kuzniak (Kuzniak (2011) ; Kuzniak & Richard (2014) ; Kuzniak, Tanguay & Elia, (2016)). La théorie comporte un modèle de l'Espace de Travail Mathématique (noté ETM) qui est représenté par un diagramme articulant deux plans (Kuzniak, 2011). Le plan épistémologique concerne les contenus mathématiques tandis que le plan cognitif est en lien avec l’usage ou la génération de connaissances.

Le plan épistémologique contient trois composantes : un ensemble de signes (le representamen) ; un ensemble d’outils et d’instruments technologiques (artefact), et un ensemble de définitions, propriétés ou théorèmes (le référentiel théorique).
Les arêtes verticales du diagramme (figure 1) qui relient les plans épistémologique et cognitif définissent la dimension sémiotique (reliant representamen et visualisation), la dimension instrumentale (reliant artefact et construction) et la dimension discursive (lien entre référentiel et preuve).




**Figures 1 et 1bis.** Diagramme de l’Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) et ses trois plans verticaux (Kuzniak & Richard, 2014)

Le diagramme de l'ETM (figure 1) permet une étude de l’articulation des aspects épistémologiques et cognitifs du travail mathématique. Il permet de repérer une dynamique des rôles partagés entre élèves et enseignants sur une tâche. Les plans verticaux définis par Kuzniak et Richard (2014) (figure 1bis), aideront à décrire la circulation des savoirs. Il s’agit des plans sémiotico-instrumental, noté [Sem-Ins], sémiotico-discursif, [Sem-Dis], et instrumental-discursif, [Ins-Dis]. Nous repérerons les plans (ou dimensions) verticaux activés lors de la résolution d'une tâche mathématique par les élèves et ceux encouragés par les enseignants. Nous recherchons aussi à comprendre les raisons de ces activations ou au contraire du fait que certaines genèses ne sont pas mobilisées.

### 1.2. Trois types d’ETM

Pour étudier le travail mathématique dans toute sa complexité, Kuzniak, Tanguay et Elia (2016) distinguent trois types d’ETM : l’ETM de référence, l’ETM idoine et l’ETM personnel. Vivier (2020) précise que pour rendre compte du travail mathématique dans une institution, il est nécessaire de considérer les trois niveaux :

> Le niveau des différentes institutions qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques (ETM de référence) ;
>
> Le niveau de la classe avec le travail proposé par un enseignant et mis en œuvre avec ses élèves (ETM idoine) ;
>
> Le niveau du sujet (ETM personnel) où l'on cherche à caractériser le travail mathématique d'un individu. (Ibid, p. 59)

Un ETM idoine permet de préciser comment le savoir est enseigné dans une institution avec ses propres visées. Il dépend de l'élève, de l'enseignant et de la mise en œuvre de la situation étudiée. À la suite de la mise en place d'un ETM idoine par un enseignant, les élèves construisent petit à petit des ETM personnels, incorporant des connaissances. Notre étude porte à la fois sur la préparation des séances et sur leur mise en œuvre effective, ce qui nous conduit à distinguer deux types d'ETM idoines : l'ETM idoine potentiel et l'ETM idoine effectif.

### *1.2.1 L'ETM idoine potentiel*

Le travail mathématique proposé par un enseignant, lorsqu'il donne une tâche à ses élèves, est influencé par l'ETM de référence, mais aussi par son ETM personnel qui sera prégnant dans la conception et la mise en œuvre d'un ETM idoine pour sa classe. Pour déceler des éléments de l'influence de l'ETM personnel de l'enseignant, nous considérerons l'ETM idoine potentiel qui est l'ETM dans lequel un enseignant se projette et qu'il élabore en amont de la mise en place d'une tâche dans une classe.

### *1.2.2 L'ETM idoine effectif*

Afin de cerner le travail mathématique développé autour d'une tâche, nous étudierons l'ETM idoine observé lors de la mise en œuvre effective dans la classe de l'enseignant. Cet ETM idoine effectif (au sens de Derouet, 2019) sera comparé à l'ETM idoine potentiel en étudiant les choix initiaux et les choix réellement opérés lors de la mise en œuvre en classe. Les écarts éventuels qui pourront apparaître nous livreront des éléments de réponse à nos questions de recherche.

## 1.3. Blocages, confinements et rebonds

Pour analyser le travail de l'enseignant à travers ses ETM idoine potentiel et ETM idoine effectif, nous prendrons appui sur les interactions en classe entre l'enseignant et ses élèves soumis à la résolution du « jeu du lièvre et de la tortue ». Afin de préciser la dynamique de la circulation du travail dans l'ETM et parce que nous nous intéressons aux moments critiques dans le déroulement du travail, nous définissons les concepts de blocage, de rebond et de confinement dans l'ETM. Un blocage dans l'ETM est la manifestation d'un arrêt de la circulation du travail mathématique sur une tâche par l'élève qui est empêché de le poursuivre. Un rebond est le développement nouveau du travail d'un individu ou d'un collectif après un arrêt momentané. En cela il permet d'éviter que l'arrêt ne se transforme en blocage. Un confinement dans l'ETM est la manifestation d'une restriction du travail de l'élève dans un plan, sur une unique dimension ou encore sur un modèle donné.

### 1.4. Ajout de cadrage sur la simulation pour notre étude

La proximité entre simulation et modèle sera un axe retenu dans notre analyse du travail développé en classe lors des interactions entre l'enseignante et ses groupes d'élèves. En effet, selon Parzysz (2009), simuler suppose de se référer à un modèle probabiliste, concept uniquement accessible en classe de première grâce au « schéma d'expérience » :

> Simuler c'est prendre conscience des points communs entre des expériences diverses, de l'existence d'un modèle d'expérience associée. (Ibid., p. 91)

Il est donc important d'associer simulation et modèle. Mais ce lien n'est pas simple comme le précise Parzysz (2009) qui considère que le tableur peut aider à mettre sur la voie de la modélisation.

### 1.5. Précision de nos questions de recherche

L'étude de la structuration de l'ETM idoine autour d'une tâche de probabilités (le jeu du lièvre et de la tortue) nécessite l'analyse de la dynamique du travail dans l'ETM idoine effectif mis en œuvre par l'enseignante Lucie. Elle sera effectuée sous la focale des moments critiques matérialisés par des interactions entre Lucie et ses groupes d'élèves. Nous repérerons des blocages, confinements ou encore des rebonds au fil de la résolution de la tâche et en rechercherons la ou les causes éventuelles dans l'ETM idoine potentiel.

Nos deux questions de recherche sont les suivantes :

- Dans son organisation effective de l'ETM idoine, comment l'enseignante Lucie gère-t-elle des moments critiques du déroulement de séance comme des blocages, confinements et rebonds ?
- Quelle est l'influence de l'enseignante sur l'évolution de l'ETM idoine effectif ?

## 2. Analyse de la tâche

### 2.1. Présentation et premiers éléments d'analyse de la tâche

Voici l'énoncé (figure 2) de la tâche donnée par Lucie pour sa classe de troisième :

*Une course du lièvre et de la tortue s'effectue avec un dé à 6 faces sur un parcours à six cases.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *Arrivée* |

*Cette course se déroule de la manière suivante.*

- *A chaque manche de la course, on lance le dé :*
    - *Si le dé tombe sur 6, le lièvre atteint directement l'arrivée*
    - *Sinon, la tortue avance d'une case*
- *Le premier à atteindre la case « Arrivée » gagne.*
- *On réalise autant de manches que nécessaire pour avoir un gagnant.*

*Qui du lièvre ou de la tortue a le plus de chance de gagner cette course ?*

**Figure 2**. L'énoncé de Lucie du jeu du lièvre et de la tortue (Masselin, 2019)

Dans son énoncé des règles du jeu, l'enseignante inclut un dé précisé équilibré à six faces. Le parcours représenté indique un total de six cases sans situer le départ, ce qui permet d'envisager deux modélisations du parcours illustrées en figure 3.

*Cas 1 : Cinq lancers de dés sans obtenir « 6 » sont nécessaires pour que la tortue gagne.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Départ* | | | | | *Arrivée* |

*Cas 2 : Six lancers de dés sans obtenir « 6 » sont nécessaires pour que la tortue gagne.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Départ* | | | | | | *Arrivée* |

**Figure 3.** Exemples de parcours modélisés à six cases (Masselin, 2019)

Les probabilités varient selon le nombre de cases intermédiaires[1] du parcours.

| Nombre de cases intermédiaires | Valeur exacte de P(T)[2] | Valeur approchée de P(T) | Valeur exacte de P(L) | Valeur approchée de P(L) |
|---|---|---|---|---|
| 4 (Cas 1) | $\frac{3125}{7776}$ | 0,402 | $\frac{4651}{7776}$ | 0,598 |
| 5 (Cas 2) | $\frac{15625}{46656}$ | 0,335 | $\frac{31031}{46656}$ | 0,665 |

**Tableau 1**. Probabilités selon le nombre de cases intermédiaires du parcours.

---

[1] Une case intermédiaire est une case située entre le départ et l'arrivée (exclus).

[2] P(T) et P(L) désignent respectivement la probabilité que la tortue gagne et la probabilité que le lièvre gagne.

La question posée est ouverte et porte sur la comparaison des probabilités de gain des deux animaux. Ce choix d'énoncé de Lucie s'explique par le contexte de travaux dans lesquels il s'inscrit. Préciser d'autres choix possibles à propos de la tâche permettra ensuite de mesurer les impacts des choix de Lucie sur le travail mathématique.

## 2.2. Eléments épistémologiques d'analyse *a priori* via les ETM

### *2.2.1 Présentation de la grille d'analyse*

La théorie des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak, 2011, Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) nous permet de réaliser une analyse épistémologique basée sur l'énoncé présenté en figure 3 selon une grille spécifique (annexe 1). Cette grille s'appuie sur quatre axes dont trois sont portés par les dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) du modèle des ETM (figure 1). La tâche considérée est intégrée dans la thèse de Masselin (2019) ; elle a nécessité une analyse épistémologique approfondie en suivant quatre axes afin de comparer des choix de plusieurs enseignants dans leur classe. Par la suite, nous livrons des éléments de cette analyse afin d'éclairer les choix opérés par l'enseignante Lucie au regard des possibles.

### *2.2.2 L'analyse a priori des solutions*

Plusieurs modélisations du parcours sont possibles à partir de l'énoncé. Le nombre de cases intermédiaires influe sur les valeurs des probabilités de gain des deux animaux qui sont plus ou moins proches. Les solutions varient selon le nombre de cases du parcours (annexe 2). Le positionnement des « départ » et « arrivée » modifie les valeurs des probabilités de gain des animaux. Les solutions dépendent aussi de la probabilité que le lièvre gagne au énième lancer (selon le type de dé, ou selon les règles du jeu).

Lucie mentionne un « dé équilibré à 6 faces », ce qui implicitement considère le modèle de la loi uniforme avec équiprobabilité[3] sur chaque face. Elle aurait pu choisir un dé avec moins de faces ou avec des faces non équiprobables en donnant par exemple la probabilité d'obtenir la face $i$ ($i$ variant de 1 à 6), égale à $\frac{i}{21}$ . L'enseignante aurait pu également faire inventer une règle du jeu par ses élèves ou en proposer une variante[4].

---

[3] En particulier P(S) = $\frac{1}{6}$ si S désigne l'événement « Obtenir 6 ».

[4] Un exemple de variante : « *On lance un dé équilibré à six faces. Si un multiple de 3 sort, alors le lièvre gagne, sinon la tortue avance de deux cases*.»

### *2.2.3 L'analyse a priori relative à la modélisation*

La modélisation renvoie à l'émission d'hypothèses. Deux modèles sont possibles pour la simulation numérique. Dans l'énoncé de Lucie, une course est une partie du jeu qui s'arrête dès qu'un animal gagne. La loi géométrique tronquée est un premier modèle où l'expérience aléatoire consiste à répéter dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli de paramètre $1/6$, avec au maximum six répétitions. Le jeu s'arrête au premier six obtenu car le lièvre a alors gagné ; si le nombre maximum de répétitions est atteint (six), c'est la tortue qui gagne.

Un deuxième modèle peut être considéré. L'expérience aléatoire consiste alors à répéter autant de fois que de cases du jeu (six) des lancers de dé successifs, sans tenir compte du fait qu'un six soit apparu auparavant. Ainsi, même si le lièvre a gagné, les lancers de dé se poursuivent. Une épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer six fois un dé de façon identique et indépendante intervient alors. Soit $Y$ la variable aléatoire dénombrant le nombre de 6 obtenu en lançant six fois un dé, $Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/6$. La probabilité que le lièvre gagne est $P(Y \geq 1)$.

### *2.2.4 L'analyse a priori en termes de registres*

Cette analyse tient compte du nombre de cases du parcours et des accès possibles des élèves de troisième aux modèles probabilistes par différents registres familiers. Les arbres ou tableaux sont inexploitables pour des parcours à plus de deux cases intermédiaires. Cette analyse n'est pas détaillée, car nous la jugeons secondaire pour la focale d'analyse choisie dans cet article .

### *2.2.5 L'analyse a priori en termes d'artefacts*

Dans notre étude de cas, Lucie s'est focalisée sur le tableur où le choix du modèle de la loi géométrique tronquée nécessite de réaliser des lancers conditionnés à l'obtention d'un six avec des tests SI (figure 4).

**1er choix de modèle (loi géométrique tronquée)**

| A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| course | 1er lancer | 2e éventuel | 3e éventuel | 4e éventuel | 5e éventuel | 6e éventuel | gagnant | fréquence L |
| 1 | 4 | 1 | 6 | | | | lièvre | 1 |
| 2 | 3 | 5 | 6 | | | | lièvre | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 4 | 2 | 1 | 6 | lièvre | 1 |

C3 contient le test conditionnel =SI(B3<6 ; ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) ; " ")

**Figure 4.** Simulation tableur avec la loi géométrique tronquée

L'emploi de la loi binomiale avec six lancers systématiques pour une course nécessite six fois la saisie de la commande « =ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) » et un décompte des six obtenus (avec « =NB.SI() »), puis un test SI pour dénombrer si au moins un six est sorti lors des six lancers) comme indiqué en figure 5.

**2e choix de modèle (loi binomiale)**

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Lancer | Lancer 1 | Lancer 2 | Lancer 3 | Lancer 4 | Lancer 5 | Lancer 6 | Nombre de 6 | Gagnant | Fréquence lièvre |
| | Course 1 | 4 | 1 | 5 | 2 | 5 | 2 | 0 | tortue | 0,733333333 |
| | Course 2 | 6 | 2 | 2 | 3 | 6 | 2 | 2 | lièvre | |
| | Course 3 | 5 | 5 | 2 | 2 | 5 | 2 | 0 | tortue | |

H2 contient =NB.SI(B2 :G2 ;6) et I2 contient =SI(H2>=1 ; "lièvre" ; "tortue")

**Figure 5.** Simulation tableur, avec la loi binomiale

La simulation au plus près des règles du jeu de l'énoncé de Lucie (figure 5) est complexe à implémenter dans le tableur ; le recours à la loi binomiale facilite la simulation, mais au détriment de la proximité.

## 2.3. Analyse des itinéraires cognitifs de la tâche précisant l'ETM attendu

### *2.3.1 Vers une définition*

Nous intéressant aux interactions entre l'enseignant et ses élèves et au développement du travail en classe, nous avons jugé notre grille d'analyse insuffisante. En effet, elle ne nous renseigne pas sur des moments critiques tels que des blocages ou confinements dans la dynamique du travail mathématique en classe. Afin de tenir compte des aspects cognitifs de la tâche, nous avons décrit un ETM idoine caractérisant ce qui pourrait être attendu de façon optimale, sans pour autant représenter un idéal. Il permet de repérer les potentialités d'adaptations par rapport à une tâche initialement proposée aux enseignants. Nous avons réalisé, une analyse *a priori* d'un ETM idoine attendu par la personne chercheure, avec lequel nous allons pouvoir étudier l'ETM idoine de Lucie. Cet ETM idoine attendu est un ETM pour la recherche. Il comporte différentes phases relatives à l'ETM de référence de la classe considérée. Trois grandes phases d'exploration, de simulation et de preuve (et leurs sous-phases) permettent de décrire l'ETM attendu. L'itinéraire cognitif d'une tâche est une succession de phases de l'ETM attendu visant à résoudre la tâche.

### *2.3.2 Description de l'ETM attendu*

***Phases d'Exploration (Expl.)***

Il s'agit d'une phase de dévolution et de compréhension d'une expérience aléatoire autour du problème du jeu du lièvre et de la tortue à partir d'un énoncé fixé par l'enseignant et donné à ses élèves. Cette phase peut être décomposée en trois sous-phases suivantes :

*Expl.1 : découverte du problème (SansDé, DéMan)*

Elle pourrait être envisagée avec un dé à jouer ou un dé numérique prêté aux élèves pour faire des expériences aléatoires. Le dé à jouer est soumis aux lois de la physique, tandis qu'un dé numérique réfère à un modèle attribué « au lancer de dé ». Lors de cette phase d'action, l'enseignant repérerait peut-être des interprétations erronées des règles du jeu (blocage éventuel) en se situant dans le plan [Sem-Ins], l'élève produisant des signes lors des divers lancers. Les élèves pourraient convoquer des registres sémiotiques tels que des arbres (sans usage de dé). Le travail situé alors dans le plan [Sem-Dis] pourrait être purement descriptif chez l'élève quand l'enseignant apporterait possiblement des éléments du référentiel théorique (expérience aléatoire, événements considérés) situant son intervention sur la dimension discursive.

*Expl.2 : Mise au point sur la compréhension des règles du jeu*

Cette phase aurait comme objectif pour l'élève de comprendre les règles du jeu, en cas de blocage lié à une mauvaise interprétation ou non-compréhension de ces règles. Une circulation du travail possible est décrite en figure 6.

Après une interprétation erronée des règles du jeu, un élève pourrait verbaliser celles-ci, produisant alors des signes dans le plan [Sem-Dis] (vignette 1, figure 6). L'enseignant pourrait alors introduire un dé à jouer et activer la dimension instrumentale (vignette 2, figure 6) pour faire réaliser manuellement des courses. L'élève travaillerait ensuite dans le plan [Sem-Ins] (vignette 3, figure 6). Avec les signes produits par faces obtenues, il pourrait rectifier son interprétation des règles et identifier le gagnant des courses jouées manuellement. L'enseignant pourrait ainsi lever un blocage potentiel.

La dynamique se résume dans l'ETM attendu par : [Sem-Dis]→**dim Ins**→[Sem-Ins]. Le fléchage indique la succession de plans et dimensions qui pourraient être activés (en gras ceux par l'enseignant, en maigre, ceux par l'élève).

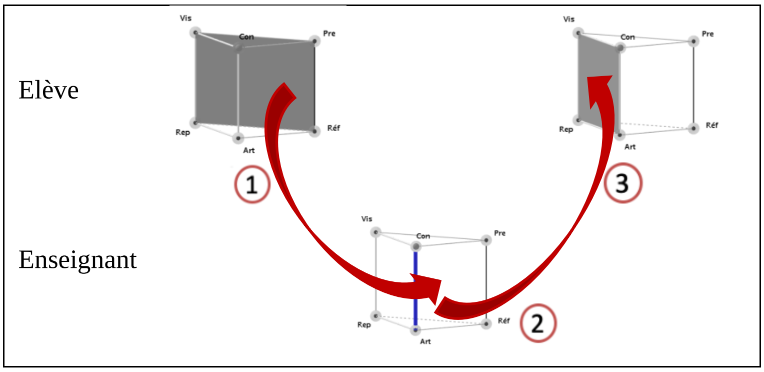



**Figure 6.** Dynamique de circulation, Expl.2, ETM attendu

*Expl.3 : Explicitation des expériences aléatoires (Expl.)*

La réalisation de lancers ne garantit pas le repérage des expériences aléatoires en jeu. Identifier une course est nécessaire pour résoudre la tâche et cette identification prend appui sur le référentiel théorique. Plusieurs événements peuvent être considérés après un lancer de dé (ceux élémentaires ou les événements « la tortue avance d'une case » et « le lièvre gagne »). Cette phase participe de la dévolution. Il s'agira de ne pas confondre l'événement contraire de « Obtenir 6 » avec « La tortue gagne ». L'enseignant peut ici jouer sur le nombre de cases du parcours pour donner accès à cette identification de l'événement contraire de « Ne pas obtenir 6 ».

***Phases de Simulation (Sim.)***

Elle se découpe en trois sous-phases décrites succinctement.

*Sim.1 : Justification de l'introduction de la Sim*

Elle pourrait s'appuyer sur un recueil d'échantillons de petite taille où élèves et enseignant travaillent dans deux plans distincts (respectivement [Ins-Dis] et [Sem-Dis]). L'élève émettrait une conjecture à partir des données d'un petit nombre de courses réalisées et il se confronterait aux résultats des autres élèves de la classe. Les différents résultats mobiliseraient la notion de fréquence pour les comparer. La simulation serait alors un outil au service de la résolution de la tâche activant la dimension instrumentale.

*Sim.2 : Elaboration d'un outil de simulation*

Cette phase pourrait se diviser en deux : la création d'un outil de simulation et son emploi. L'élaboration d'un outil de simulation renverrait un travail initial dans le plan [Sem-Ins], avec des lancers de dé numérique et la référence à un modèle.

*Sim.3 : Traitement des données issues de la simulation*

L'exploitation des données de simulation (signes produits en lien avec la dimension instrumentale), permettrait d'estimer les probabilités en jeu via l'obtention des fréquences calculées pour un grand nombre de courses. Du plan [Sem-Ins], le travail se déplacerait alors dans [Ins-Dis] en mobilisant la loi faible des grands nombres implicitement. L'organisation des données pourrait (ou non) être indiquée à l'élève en suggérant des registres de représentation sémiotique. Des allers et retours auraient ainsi lieu entre [Ins-Dis] et [Sem-Ins], avec un travail plus ou moins guidé par l'enseignant qui pourrait demander de relancer la simulation afin de faire visualiser une convergence des fréquences.

***Phases de Preuve (Preuv.)***

Nous signalons ici la nature des phases de preuve sans les détailler.

*Preuv.1 : Preuve expérimentale*

Elle correspondrait, pour l'élève, à l'emploi de la loi faible des grands nombres sous forme vulgarisée et à conclure grâce à un grand nombre de courses obtenues, en observant un phénomène de convergence grâce à un outil de simulation.

*Preuv.2 : Preuve formelle*

En mobilisant l'approche laplacienne[5], l'élève conduirait des calculs de probabilités en s'appuyant sur un outil sémiotique (tels un arbre ou un tableau). Il pourrait ici changer de point de vue en considérant l'événement « la tortue avance d'une case ».

*Preuv.3 : Rapprochement des Preuv.1 et Preuv.2*

L'enseignant pourrait (si ce n'est pas réalisé par l'élève) rapprocher les deux types de preuve obtenus s'ils émergent dans une même classe. Ce serait l'occasion d'un enrichissement du référentiel théorique et d'un rapprochement entre l'ETM des Probabilités et l'ETM de la Statistique descriptive tout en exposant les approches fréquentielle et laplacienne. Il s'agirait d'articuler les deux approches.

### *2.3.3 Dynamique de la circulation du travail dans l'ETM attendu*

Nous avons défini l'ETM idoine attendu comme l'ensemble des phases qui pourraient se produire idéalement et où les rôles respectifs des enseignants/élèves dans la circulation du travail sont décrits. Cet ETM « idéal » permet de repérer des adaptations réalisées par les enseignants et constitue pour le chercheur un outil de référence. Les différentes phases identifiées en classe livrent dans leur agencement, ce que nous appelons des itinéraires cognitifs de tâche dans l'ETM.

L'ensemble des possibilités *a priori* de circulation du travail dans les différentes phases entourant la simulation (tableau 2) précise la dynamique du travail entre élèves et enseignant. Les plans de l'ETM figurant en gras seraient, idéalement, ceux qui pourraient être activés par l'enseignant tandis que les autres seraient relatifs au travail de l'élève. Le tableau 2 est donc un ensemble de possibilités *a priori* repéré par le chercheur qui complète notre analyse épistémologique d'un point de vue cognitif.

---

[5] Dans de nombreux écrits scientifiques rédigés en français et en anglais, cette approche probabiliste est nommée l'approche théorique.

| | Exploration (Expl.) | | |
|---|---|---|---|
| | Expl.1 | Expl.2 | Expl.3 |
| Dé Manuel ou Dé Numérique | [Sem-Ins]→**[Sem-Ins]** | [Sem-Dis] → **Dim Ins** →[Sem-Ins] | [Sem-Ins]→**[Sem-Dis]**→[Sem-Dis] |
| Sans Dé | [Sem-Ins]→**[Sem-Dis]** | | [Sem-Dis]→**[Sem-Dis]**→[Sem-Dis] |

| Simulation (Sim.) | | |
|---|---|---|
| Sim.1 | Sim.2 | Sim.3 |
| [Dis-Ins] → [**Sem – Dis** ] →[Sem-Ins] | [Sem-Ins] → **Dim Sem**, **Ins**, **Dis** →[Sem-Ins] | [Sem-Ins] → **Dim Sem** →[Dis-Ins] |

| Preuve (Preuv.) | | |
|---|---|---|
| Preuv.1 | Preuv.2 | Preuv.3 |
| [Sem-Dis] → **Dim Dis** | [Sem-Ins] → **Dim Dis** →[Sem-Dis] | **[Sem-Dis]** → Dim Sem |

**Tableau 2**. Circulation du travail dans l'ETM$_{\text{attendu}}$ (Masselin, 2019)

## 2.4. Étude du cas de l'enseignante Lucie

Lucie est une enseignante de mathématique experte[6] du secondaire (collège en France) qui a décidé de faire travailler ses élèves d'une classe de troisième (grade 9) durant deux heures non consécutives par groupes de trois ou quatre sur le jeu du lièvre et de la tortue (figure 2). Son objectif pour sa classe était de faire réinvestir la loi faible des grands nombres implicitement tout en faisant élaborer par petits groupes une simulation avec un tableur. Nous avons filmé l'enseignante ainsi que ses différents groupes d'élèves lors de sa mise en oeuvre du jeu du lièvre et de la tortue dans sa classe.

### *2.4.1 Quelques blocages potentiels liés à l'énoncé de Lucie*

L'énoncé de Lucie nous fait envisager un certain nombre de blocages dont voici une liste non exhaustive.

– Le « départ » qui peut être considéré sur la première case, ou avant, ne fixe pas le nombre de cases que la tortue à parcourir pour gagner (cinq ou six) ;

– L'emploi des mots « course » et « manche» est ambigu. L'élève pourra assimiler une course à un lancer de dé et confondre les événements

[6] Lucie est membre d'un groupe « Activités » de l'IREM de Rouen (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) depuis 2014 et anime des formations continues au PAF de l'académie de Rouen. Elle a une quinzaine d'années d'ancienneté.

« obtenir six » et « le lièvre gagne », car l'énoncé sous-entend qu'une course peut être constituée de plusieurs manches et le lien entre « des lancers de dé » et « des manches » n'est pas explicité ;

– La formulation conditionnelle « Si …, sinon … » nécessite des connaissances de logique. Certains élèves pourraient considérer que l'événement contraire de « le lièvre gagne » est « la tortue gagne », ce qui n'est pas toujours le cas ;

– La formulation « on lance le dé » : une tierce personne lance le dé, chose peu usuelle dans les jeux de société connus des élèves. Ils pourront considérer une avancée simultanée des deux animaux à chaque lancer de dé.

## 3. Méthodologie d'étude de l'ETM idoine effectif

Lucie a choisi de faire travailler ses élèves en groupe : cette organisation a nécessité une méthodologie spécifique. Nous avons réalisé des diagrammes de circulation du travail de chaque groupe d'élèves[7] et défini le concept de chronogramme (Masselin, 2019) comme outil méthodologique au service de l'étude de la dynamique du travail mathématique organisé en groupe.

### 3.1. Diagramme de circulation du travail des groupes d'élèves

Réaliser un diagramme de circulation du travail permet de repérer, au fil des interventions de l'enseignant, les plans (ou dimensions) successivement activés lors du travail. Les plans convoqués sont représentés pleins, et les dimensions sont épaissies. Comme présenté dans le diagramme (figure 9), les interventions de l'enseignant dans un groupe sont situées au niveau inférieur en gras tandis que le travail des élèves est au niveau supérieur. Les vignettes numérotées sont organisées au-dessus d'un axe du temps (temporalité) qui permet de repérer chronologiquement la dynamique des échanges entre les divers intervenants. Ce diagramme se parcourt de gauche à droite en alternant entre la ligne du groupe (Gr) et celle de l'enseignant. Il précise au niveau supérieur l'itinéraire cognitif emprunté par le groupe d'élèves sur la tâche.

[7] Les groupes sont constitués de trois ou quatre élèves mis ensemble par proximité géographique.

### 3.2. Le chronogramme : un outil spécifique au service de notre étude

Afin de repérer la dynamique du travail dans l'ETM idoine sur une tâche par des petits groupes d'élèves, nous étudions les interactions entre ces collectifs et l'enseignante. Cette organisation de l'ETM idoine effectif a nécessité pour chaque groupe de repérer pour chacun comment la circulation se bloque ou pas et comment l'enseignante gère, ou provoque éventuellement un blocage du travail mathématique. Nous avons initialement réalisé un diagramme de circulation du travail pour chaque groupe d'élèves tout en cherchant des cohérences d'actions, l'idée étant de répertorier les interventions de l'enseignant de manière plus globale en les situant chronologiquement pendant ses séances.

Nous avons également étudié comment, généralement pour sa classe, l'enseignante opère un rebond. Cette deuxième étape, à une échelle plus macroscopique, nous a incités à créer un nouvel outil méthodologique de recherche adapté à un scénario de classe incluant du travail de groupe avec pour visée une appréciation plus fine de l'ETM idoine effectif. Dans Masselin (2019), nous avons défini un chronogramme (figure 7) comme étant un outil méthodologique qui représente, au fil d'une séance, les temps et durées d'interventions d'un enseignant dans différents groupes d'élèves et permet de visualiser les passages de l'enseignant d'un groupe à un autre.

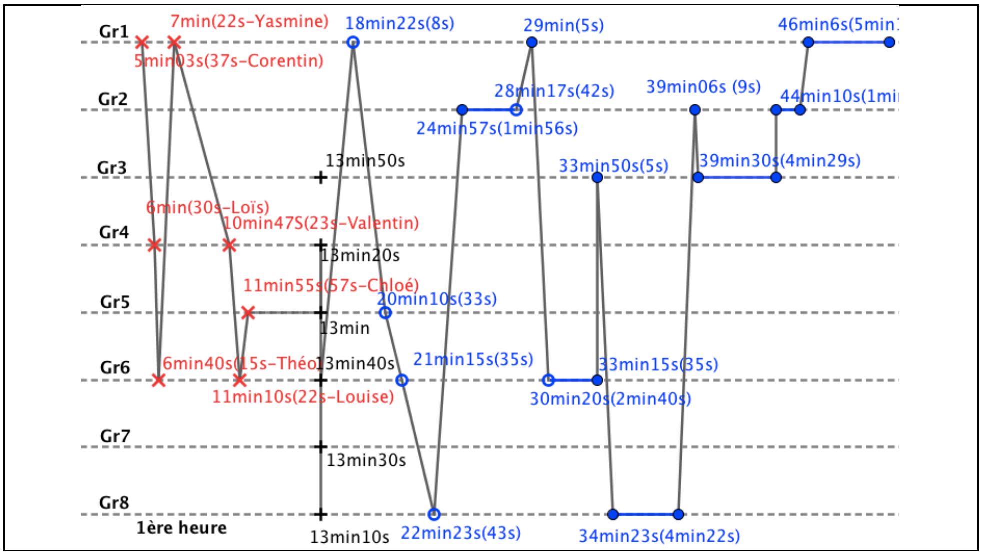



**Figure 7.** Extrait du Chronogramme de Lucie, (Masselin, 2019)

Les interventions de l'enseignant sont de deux sortes, et elles se matérialisent de manière distincte. Des points situés sur chaque ligne de groupe représentent une intervention ponctuelle de l'enseignant, isolée et courte (moins de 30s), qui n'engage pas un dialogue précis sur le contenu des démarches existantes. Les interventions plus longues et significatives sur des démarches mathématiques sont figurées par des segments dessinés en trait plein sur les lignes pointillées des groupes. Les interventions de l'enseignant de groupe en groupe sont précisées par une ou des lignes brisées, parfois coupées, qui illustrent ainsi la chronologie de leur agencement. Le travail en autonomie des groupes est figuré en pointillés. Les interventions de l'enseignant adressées à un élève sont notées en rouge, celles destinées à un groupe d'élèves sont en bleu. Nous nous appuierons sur ce chronogramme pour répondre à nos questions.

## 4. Description de l'ETM idoine effectif de Lucie

### 4.1. Itinéraires cognitifs effectifs empruntés dans l'ETM idoine effectif

De leur propre initiative, les différents groupes ont entrepris des itinéraires cognitifs variés (tableau 3) et Lucie est intervenue en orientant leur travail de façon tangible.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Expl.** | **Expl. 1**<br>Découverte de la situation | **Expl. 2**<br>Mise au point sur les règles du jeu | **Expl. 3**<br>Explicitation autour de l'expérience aléatoire |
| | Expl.1 dé manuel ou sans dé<br>Nombre de courses libre, dés à volonté dans un pot sur le bureau de Lucie | Absente dans Expl.<br>Présente dans Sim.2 | Absente |
| **Sim.** | **Sim. 1**<br>Introduction de la simulation | **Sim. 2**<br>Simulation effective | **Sim. 3** |
| | Absente | Artefact tableur, Sim élaborée par les élèves et modèle libre *a priori*. Puis Sim.2 où modèle imposé par Lucie | Relance du fichier tableur et observation des valeurs affichées dans chaque groupe |
| **Preuv.** | **Preuv. 1**<br>Preuve expérimentale | **Preuv. 2**<br>Preuve par calcul des probabilités | **Preuv. 3**<br>Rapprochement des preuves |
| | Présente, dans la majorité des groupes | Existe dans un groupe | Absente |

**Tableau 3.** Déroulement effectif de la séance de Lucie (Masselin, 2019)

Lucie a consacré du temps à une mise au point sur les règles du jeu (phase Expl.2 de l'ETM attendu), une fois la phase de simulation engagée par plusieurs groupes, ce qu'elle a déclaré *a posteriori* ne pas avoir anticipé suffisamment. Elle imaginait que la règle du jeu serait comprise plus aisément.

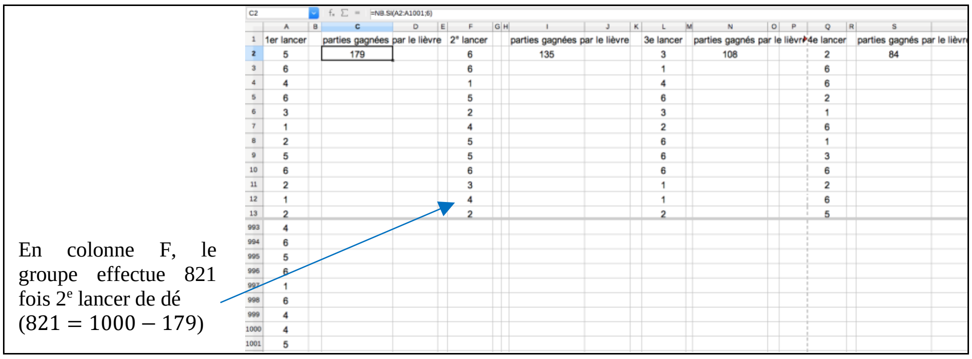
Lucie n'a jamais explicité les expériences aléatoires en jeu ni justifié l'introduction de la simulation (phases Expl.3 et Sim.1 de l'ETM attendu). Concernant la phase exploratoire, Lucie n'a pas utilisé le caractère aléatoire du problème comme levier pour mener un débat en classe sur le gagnant potentiel. Lucie n'est pas intervenue sur la dimension discursive pour décrire l'expérience aléatoire, l'univers, les événements. Certains élèves étaient bloqués pour avoir interprété qu'une course correspondait à un unique lancer de dé (comme le Gr8). Les parties de jeu effectuées dans le groupe Gr2 sont restées confinées et restreintes à peu de courses, sans être partagées à la classe entière pour un traitement, ce qui explique en partie l’absence de phase d’introduction de la simulation (Sim.1). La phase d’élaboration d’un outil de simulation (Sim.2) est arrivée précocement dans l’ETM idoine effectif. Si les élèves partaient d’un fichier vierge, leur travail a été canalisé petit à petit par l’enseignante. Elle a dirigé dans six groupes sur huit (tous sauf le Gr1 et Gr5) le choix du modèle probabiliste à intégrer lors de la simulation.

## 4.2. Données des circulations du travail des groupes de l’ETM idoine effectif

La classe de Lucie a été organisée en huit groupes. Nous présenterons précisément le travail de cinq groupes d’élèves avec des extraits de diagrammes de circulation sans le même grain de détail pour tous . De façon complémentaire à l’étude de Derouet et Masselin (2018) se focalisant sur le travail d’un groupe d’élèves, nous tiendrons compte du travail des élèves et du professeur. Seuls les groupes qui nous semblent significatifs en termes de blocages, rebonds ou confinements, et caractérisant le travail de l’enseignante Lucie seront précisés. L’ordre des groupes est lié à la numérotation incluse dans le chronogramme.

### *4.2.1 Groupe Gr6*

Ce groupe demande dès le début de la séance un ordinateur sans effectuer de lancers manuels malgré la présence de dés à disposition sur le bureau de l’enseignante. Il élabore un fichier de simulation à partir d'une feuille vierge de tableur (figure 8).


C2 =NB.SI(A2:A1001;6)

| | A | C | F | I | L | N | Q | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1er lancer | parties gagnées par le lièvre | 2e lancer | parties gagnées par le lièvre | 3e lancer | parties gagnés par le lièvre | 4e lancer | parties gagnés par le lièvre |
| 2 | 5 | 179 | 6 | 135 | 3 | 108 | 2 | 84 |
| 3 | 6 | | 6 | | 1 | | 6 | |
| 4 | 4 | | 1 | | 4 | | 6 | |
| 5 | 6 | | 5 | | 6 | | 2 | |
| 6 | 3 | | 2 | | 3 | | 1 | |
| 7 | 1 | | 4 | | 2 | | 6 | |
| 8 | 2 | | 5 | | 6 | | 1 | |
| 9 | 5 | | 5 | | 6 | | 3 | |
| 10 | 6 | | 6 | | 6 | | 6 | |
| 11 | 2 | | 3 | | 1 | | 2 | |
| 12 | 1 | | 4 | | 1 | | 6 | |
| 13 | 2 | | 2 | | 2 | | 5 | |
| 993 | 4 | | | | | | | |
| 994 | 6 | | | | | | | |
| 995 | 5 | | | | | | | |
| 996 | 6 | | | | | | | |
| 997 | 1 | | | | | | | |
| 998 | 6 | | | | | | | |
| 999 | 4 | | | | | | | |
| 1000 | 4 | | | | | | | |
| 1001 | 5 | | | | | | | |



**Figure 8**. Extrait de la feuille de simulation tableur, Gr6, feuille 1

Le groupe initie un travail dans le plan [Sem-Ins] (1ère vignette, figure 9) en effectuant en colonne A du tableur 1000 fois un premier lancer de dé avec =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6). Dans la colonne C, il saisit la formule =NB.SI(A1:A1000 ;6)[8] qui compte le nombre de « parties gagnées » par le lièvre dès

[8] NB.SI (plage, critère) est une fonctionnalité du tableur qui renvoie l’effectif du critère choisi dans une plage de données sélectionnée.

le premier lancer. Le groupe relance alors des dés autant de fois que le nombre obtenu en soustrayant à 1000 le nombre de 6 apparus en colonne, nombre qu'il trouve à la calculatrice. Il procède pour chaque lancer de manière identique. La relance conditionnée à l'obtention d'un 6 à l'étape précédente n'est pas automatisée au tableur, elle est effectuée à l'aide d'une calculatrice. Après la pause méridienne, à la réouverture du fichier tableur, les lancers sont réinitialisés, modifiant le nombre de 6 de la colonne A. Le nombre de dés relancés en colonne C (obtenu à la calculatrice l'heure précédente) n'ayant pas été automatisé n'est plus adapté. Le groupe appelle alors à l'aide l'enseignante, qui indique pour une partie[9] :

> P : Je peux vous donner le conseil de reprendre les 1000 parties à chaque fois, même celles qui sont gagnées, ce n'est pas grave, vous rejouez quand même.

L'enseignante incite à faire 1000 courses avec six lancers de dés systématiques Elle situe son intervention dans le plan [Sem-Ins]. Elle ajoute :

> P : Ça ne vous coûte rien au niveau des coûts de calculs de l'ordinateur.

Son indication, située dans le plan [Sem-Ins] ne fait pas référence au changement de modèle qu'elle tente de faire opérer. Elle tente de faire basculer le groupe du modèle de la loi géométrique tronquée à celui de la loi binomiale.

L'enseignante quitte ce groupe et des échanges ont lieu entre deux élèves E1 et E2 :

> E1 : Elle ne t'a pas dit *fais étape par étape*.
>
> E2 : Pourquoi si le lièvre gagne la première manche[10], on s'en fiche ?
>
> E1 : Parce que s'il gagne la première manche, il gagne.
>
> E2 : Oui, mais par rapport aux résultats, ça nous coûte!
>
> E1 : Elle a dit que ça ne nous coûte rien.

Nous repérons un blocage du travail chez l'élève E2 lors de son questionnement à E1 (4e vignette, figure 9) sur l'impact de lancers pour rien sur les résultats. Se situant dans le plan [Ins-Dis], E2 explicite qu'il n'est pas nécessaire de relancer le dé si un six est déjà obtenu et pense que la poursuite d'une course (avec le modèle de la loi binomiale) va perturber, voire modifier les résultats en lien avec des lancers pour rien par rapport à l'usage de la loi géométrique tronquée lors de la simulation.

---

[9] Pour Lucie, une « partie » correspond à une course.
[10] Pour l'élève, une « manche » correspond à un lancer de dé.

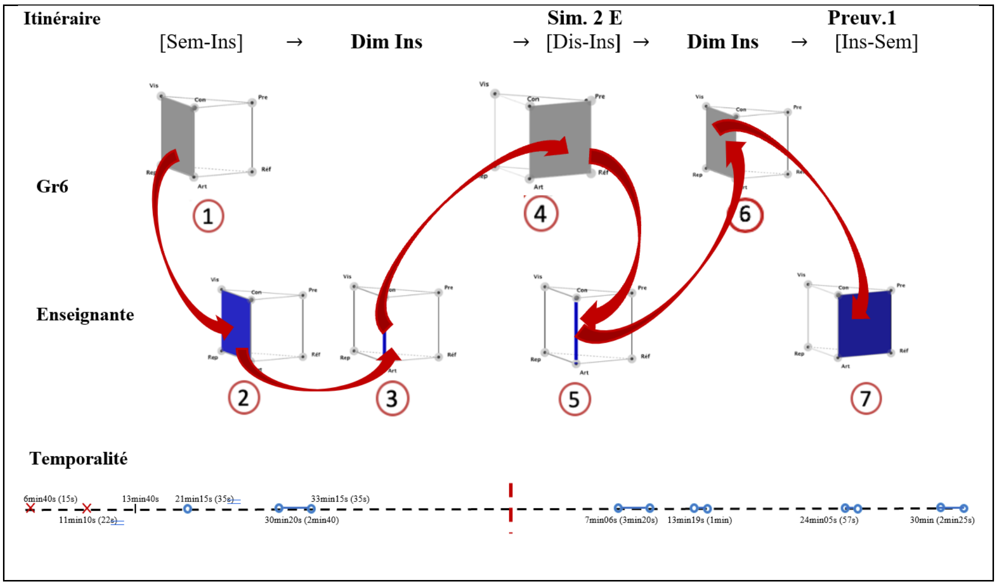



**Figure 9.** Diagramme de la circulation du groupe Gr6, (Masselin, 2019)

L'enseignante intervient de nouveau au sein du groupe et indique d'employer la fonctionnalité du tableur =NB.SI(critère, plage), qui correspond à Nombre Similaire, afin de faire dénombrer au tableur le nombre de 6 obtenus dans une plage donnée. L'enseignante fait considérer le nombre de parties gagnées par la tortue. Ses indications techniques sur des fonctionnalités du tableur sont situées sur la dimension instrumentale.

Après un arrêt momentané du travail en cours et suite aux échanges avec l'enseignante, l'élève E1 réalise pour chaque course six lancers de dés systématiques, et exécute ainsi la modification de modèle suggérée par Lucie. L'enseignante a provoqué un rebond (5e vignette, figure 9), car le groupe développe, un nouveau travail dans le plan [Sem-Ins]. Il modifie son tableur (6e vignette, figure 9). Lucie impulse alors des relances de la simulation (7e vignette, figure 9) pour observer une stabilisation de la fréquence. Dans le plan [Ins-Dis], le travail réalisé mobilise une « forme vulgarisée de la loi faible des grands nombres » (MENESR, 2015), et le groupe observe la stabilisation des fréquences. Lucie favorise une approche fréquentielle.

*Conclusion sur la circulation du groupe Gr6*

Si le groupe tente initialement d'élaborer une simulation au tableur (en se situant dans [Sem-Ins]) tout en choisissant la loi géométrique tronquée, il se trouve bloqué pour relancer de manière conditionnelle un deuxième dé. L'enseignante gère ce blocage en imposant un autre modèle avec la loi binomiale. Son intervention crée une résistance de la part d'une élève du groupe. Située dans le plan [Ins-Dis] (4e vignette, figure 9), elle émet comme frein que cette modification changera les valeurs des probabilités. Finalement, le groupe accepte de simuler des courses en conformité avec le modèle de l'enseignante. L'ETM idoine potentiel de Lucie montre qu'elle n'avait pas imaginé *a priori* une telle simulation avec la loi géométrique tronquée au tableur avant la séance. L'enseignante impose au groupe d'emprunter un modèle probabiliste lors de la simulation.

#### *4.2.2 Groupe Gr2*

Initialement un des élèves du groupe, E1, effectue 11 courses manuellement avec des feutres qui incarnent les animaux et qu'il déplace sur le parcours de l'énoncé. Ses lancers de dés produisent des signes qu'il interprète en termes de gagnant (en notant des bâtons pour chaque gagnant), son travail se situant dans le plan [Sem-Ins]. Une autre élève du groupe, E2, écrit 1/6 et 5/6 sur son brouillon. Le travail de E2 est situé dans le plan [Sem-Dis] avec des calculs de probabilités sans emploi de dé. Elle amorce un raisonnement impliquant la loi uniforme avec l'équiprobabilité d'obtenir chaque face du dé. La circulation initiale du travail dans le groupe emprunte deux plans distincts (1ere et 2e vignettes, figure 10). À sa première intervention dans le groupe, l'enseignante répond à E1 :

> E1 : On est obligé de prendre l'ordinateur ?
>
> P : Alors, on n'est pas obligé de prendre l'ordinateur, mais il peut peut-être nous permettre de gagner du temps.

L'intervention de Lucie oriente le travail vers l'approche fréquentiste et un effet immédiat de celle-ci est que E1 rature sa production. L'enseignante interroge E2 :

> P : Pour que le lièvre gagne, il y a une chance sur 6, mais pour la tortue ?
>
> E2 : Il y a 5 chances sur 6 qu'elle avance.
>
> P : Voilà, donc en fait une partie, ce n'est pas un lancer de dé.
>
> E2 : Il faut donc faire six parties pour que le lièvre gagne.
>
> P : Alors tu t'es emmêlé les pinceaux, mais ton idée était bonne. Il peut suffire d'une manche pour que le lièvre gagne une partie, mais pour que la tortue gagne la partie, il faut que le lièvre perde six fois les manches. Donc effectivement, pour pouvoir simuler/pour pouvoir obtenir une expérience aléatoire qui représente une partie gagnée par la tortue, il faut avoir fait six lancers de dé.

L'enseignante tente de commencer un rebond du travail de E2 où elle détecte une confusion entre une partie et un lancer de dé. Face à ce blocage, elle insiste sur la dimension instrumentale, incitant les élèves à effectuer des simulations. L'explication de Lucie, dans sa dernière intervention, fournit également des informations aux élèves qui leur permettent de mieux interpréter la consigne.

> P : Il y a deux possibilités, soit on utilise un tableur pour faire un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, d'accord et on calcule les fréquences, soit on écrit toutes les possibilités. Il va y en avoir 6 fois 6 fois 6 fois 6 fois 6 donc ça va faire beaucoup de possibilités. (…) je vous laisse choisir la méthode… Ce n'est pas parce que j'ai une manche que j'ai forcément la tortue qui gagne. Avec une manche, la tortue ne gagne pas forcément, d'accord ? Donc il va falloir faire une première manche.

Lucie balaie du doigt la colonne A du fichier tableur vierge de haut en bas.

> P : Mais si la tortue n'a pas gagné, il va falloir faire une deuxième manche. Est-ce qu'avec deux manches la tortue peut gagner ? Non. Combien de manches faut-il pour que la tortue gagne ?

L'enseignante conseille alors l'emploi de « ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) ». E2 reste cependant bloquée par l'asymétrie d'avancée des deux animaux dans le jeu. Quand l'enseignante revient dans le groupe, l'état du fichier est celui de la figure 11.

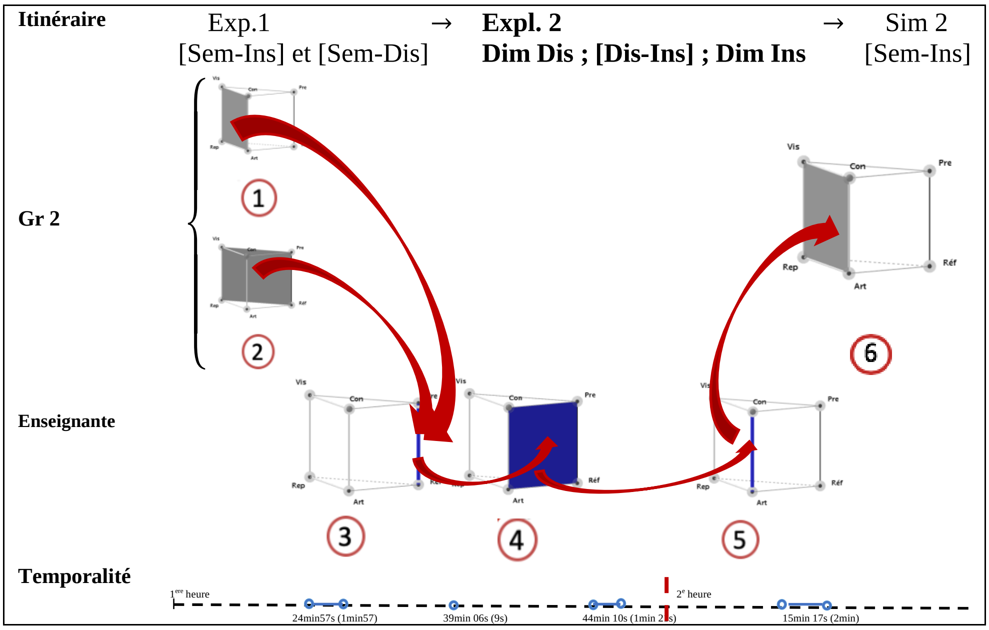



**Figure 10.** Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr2

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 5000 lancers de dés | | nombre | Nombre de 6 | | |
| | | 1 | 800 | | |
| =NB.SI(A2 : A5002 ; 6) | | 4 | | | |
| | | 6 | | | |
| | | … | | | |

**Figure 11.** Reconstitution d'extrait du tableur, Gr2, état 2

Lucie interroge le groupe sur sa feuille de tableur :

> P : Vous avez fait 5000 parties, mais en ne lançant qu'à chaque fois un seul dé. Est-ce que votre première partie elle est terminée ?
>
> E2 : Non
>
> E1 : Il faut le faire six fois
>
> E3 : C'est ce que j'avais dit.
>
> P : Vous avez vu où était le problème ? Donc là effectivement les 800 ceux sont bien des victoires du lièvre, mais les 4200 qui vous restent, elle a juste avancé d'une case. Mais pour autant, la partie n'est pas terminée. Effectivement, pour savoir si la partie elle est gagnée par le lièvre ou la tortue, il faut avoir joué les six manches. Je vous laisse reprendre votre feuille de tableur.

Le modèle de la loi géométrique tronquée est bloquant pour la relance automatisée conditionnée à l'obtention d'un 6. Lucie impose alors une organisation horizontale des courses et le modèle de la loi binomiale par ses propos « *pour savoir si une partie est gagnée, il faut jouer six manches*[11] », occasionnant une rupture d'organisation du tableur. Après cette intervention, le groupe modifie sa feuille de tableur (figure 12).

Le groupe compte le nombre de 6 obtenus pour les six lancers effectués par course (colonne G), puis parmi les 5000 courses réalisées, il extrait le nombre de courses où il n'y a pas eu de 6 avec la formule « =NB.SI(G2:G5002; 0) » en colonne H. Cette formule automatise le calcul de l'effectif de courses gagnées par la tortue sur 5000.

| A | B | C | D | E | F | G | H | Tortue | Lièvre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Nombre de 6 | Nombre de 0 | 1675 | 3325 |
| 1 | 1 | 5 | 5 | 3 | 1 | 0 | 1675 | | |
| 3 | 3 | 6 | 4 | 6 | 2 | 2 | | | |
| 2 | 2 | 6 | 5 | 3 | 6 | 2 | | | |
| 1 | 6 | 5 | 3 | 6 | 6 | 3 | | | |
| 1 | 6 | 5 | 2 | 6 | 1 | 2 | | | |
| 4 | 4 | 3 | 5 | 1 | 1 | 0 | | | |
| … | … | … | … | … | … | … | | | |

= NB.SI(A2:A5002 ; 6) = NB.SI(G2:G5002; 0) = H2 = 5000-H2

**Figure 12 .** Reconstitution d'extrait du tableur, Gr2, état 3

*Conclusion sur la circulation du groupe Gr2*

Le groupe présente deux types de démarches initiales, dont une avec des expériences réalisées à la main. L'enseignante questionne la fraction 5/6, puis fait dénombrer le nombre de sextuples existants, imposant au passage le modèle probabiliste de la loi

[11] Une manche est assimilée à un lancer de dé par l'enseignante.

binomiale. Elle suggère alors de ne pas rechercher manuellement les 46656 cas et fait renoncer à une démarche de preuve formelle. Elle insiste sur la dimension instrumentale (5e vignette, figure 10) en réactivant des connaissances antérieures des élèves sur des instructions tableur. Le groupe considère alors comme expérience aléatoire un seul lancer de dé pour une course (figure 11). Lucie impose alors six lancers par course au tableur (figure 12) et la relance de la simulation (dans [Ins-Dis]).

### *4.2.3 Groupe Gr3*

Le groupe tente une simulation au tableur en lançant 5000 fois un seul dé dans la colonne A (état 1), puis utilise =NB.SI() afin de dénombrer les six obtenus (816).

> P : Pourquoi avez-vous compté les 6 ?
>
> E1 : Pour savoir, vu que pour le lièvre, il y a une chance sur six qu'il gagne.
>
> P (*balayant la colonne A du doigt*) : Vous avez directement la première partie, vous avez fait une manche ? Une manche, je lance le dé. Si le dé donne 6, le lièvre a gagné, mais si le dé ne donne pas 6, qu'est-ce qui se passe ?
>
> E1 : La tortue gagne.
>
> P (*montrant un premier lancer affichant 5*) : Est-ce que là la tortue gagne ?
>
> E1 : Non, mais elle a changé de case.
>
> P (*montrant la colonne A de haut en bas*) : Oui, mais elle n'a pas gagné, elle a avancé d'une case. Donc là en fait, j'ai une manche.

L'enseignante fait verbaliser le nombre nécessaire de manches pour que la tortue gagne (identiquement au Gr2) puis elle demande de modifier le fichier. Quand elle intervient de nouveau dans le groupe, le fichier a sept colonnes marquées Manche *i* avec à chaque fois six lancers de dés. L'enseignante relie cette structuration du fichier à une compréhension erronée des règles du jeu et imagine que le groupe considère qu'une course possède 7 manches (7 lancers) par lecture horizontale (figure 13).

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Manche 1 | Manche 2 | Manche 3 | Manche 4 | Manche 5 | Manche 6 | Manche 7 |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 5 | 6 | 1 |
| 4 | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 5 | 5 | 2 | 2 |
| 2 | 5 | 1 | 1 | 6 | 6 | 3 |
| 6 | 2 | 3 | 3 | 1 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 6 | 6 | 6 | 1 | 2 |

**Figure 13.** Reconstitution d'extrait du tableur, Gr3, état 2

Une autre interprétation de cette feuille de calcul est possible en considérant que chaque course est lue verticalement et est appelée « Manche » par le groupe d'élèves.

Afin de faire comprendre au groupe quand une course s'arrête, l'enseignante introduit un dé à jouer et fait réaliser des parties manuelles. Elle réintroduit ainsi une phase d'exploration puis, une fois terminée, Lucie supprime elle-même la colonne « Manche 7 » du fichier tableur des élèves.

> P : En six manches, c'est sûr il y a un gagnant d'accord ? S'il y a un six, alors c'est le lièvre qui a gagné, mais s'il n'y a pas de six parmi les six manches, c'est la tortue. Donc on n'a pas besoin de faire la dernière manche ici, donc j'enlève la 7e manche.

Nous repérons un blocage après cette phase d'exploration par l'échange suivant :

> P (*montrant la colonne A*): Alors la première partie, elle se joue à chaque fois que j'ai joué une manche. Là, vous êtes en train de me jouer des manches. Vous avez joué six fois la manche une. Une partie se joue quand on a joué six manches, donc la partie, tu ne la lis pas ici (*avec un geste du doigt descendant de A2 à A7*) / la première partie, c'est la Manche 1, puis la Manche 2, puis la Manche 3, etc., jusqu'à la Manche 6 (*geste du doigt de Lucie qui souligne la deuxième ligne*).

Lucie sélectionne ensuite la ligne 2 (en bleu, figure 14) et interroge le groupe :

> P : Dans cette première partie, qui gagne ?
>
> E1 : La tortue .
>
> P : Tu es d'accord E3, c'est la tortue ?
>
> E1 : La tortue gagne, car elle gagne juste à la manche 6, le lièvre a fait 6.

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Manche 1 | Manche 2 | Manche 3 | Manche 4 | Manche 5 | Manche 6 | |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 5 | 6 | |

**Figure 14.** Reconstitution d'extrait du fichier du groupe Gr3, état 3

Lucie utilise le parcours et fait avancer la tortue en interrogeant E1 :

> E1 (*s'agissant de la Manche 5)* : Elle a avancé et à la 6e.
>
> P (*coupe la parole à E1*) : A la 6e elle n'avance plus, par contre le lièvre, il n'avait pas avancé depuis le début, mais là, hop, il avance directement d'accord ?

E1 ajoute en colonne G « Gagnant », puis inscrit en cellule G2 « lièvre » (figure 15).

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Manche 1 | Manche 2 | Manche 3 | Manche 4 | Manche 5 | Manche 6 | Gagnant |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 5 | 6 | lièvre |

**Figure 15.** Reconstitution d'extrait du fichier du groupe Gr3, état 4

Le groupe saisit ensuite à la main dans la colonne G les gagnants identifiés sans recherche d'automatisation et il s'arrête à la réalisation de six courses. (Un extrait de la circulation du travail dans ce groupe est présenté en figure 16.)

L'enseignante provoque alors un confinement, car cette saisie manuelle des gagnants empêche de faire un traitement automatisé pour un grand nombre de courses. Le groupe ne peut poursuivre une preuve de type Preuv.1, étant dans l'impossibilité d'utiliser la loi faible des grands nombres pour conclure. L'enseignante rappelle la notion de fréquence (travail situé dans [Dis-Ins]) après demande d'automatisation du gagnant de chaque course avec l'emploi de =NB.SI() (8e vignette, figure 16).

*Conclusion sur la circulation dans le groupe Gr3*

Face au blocage initial lié à l'expérience aléatoire assimilée à un lancer de dé, l'enseignante tente de lever l'ambiguïté entre une « manche » et une « partie » tout en s'appuyant sur le contenu du tableur (1ère ligne), convoquant le plan [Sem-Ins]. Elle réorganise la feuille de calcul du groupe en imposant le modèle de la loi binomiale et une lecture horizontale de courses (4e et 5e vignettes, figure 16). L'intervention de l'enseignante (sur la dimension instrumentale) consiste à réintroduire une phase d'exploration (avec des courses manuelles) lors de la simulation. Son intervention a pour effet de faire saisir manuellement le gagnant des six premières courses dans le tableur et induit de ce fait un confinement. Lucie demande une automatisation de l'affichage du résultat concernant le gagnant et rappelle la notion de fréquence (confondue avec l'effectif), se situant alors dans le plan [Ins-Dis] (8e vignette, figure 16). Dans ce groupe, la simulation reste inexploitée et la preuve expérimentale n'est pas aboutie.

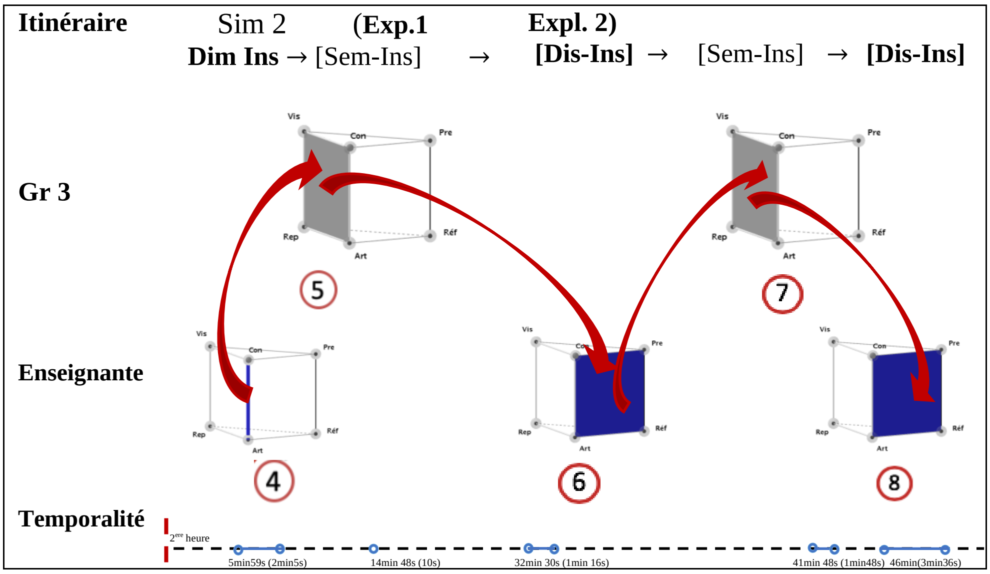



**Figure 16.** Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr3

### *4.2.4 Groupe Gr 4*

Dans ce groupe, une question initiale est posée à l'enseignante :

> E1 : Est-ce que la tortue commence sur la première case ou est-ce qu'elle commence en dehors ?
>
> P : En dehors.

La question du lieu du départ est soulevée par E1. L'enseignante va alors imposer une position unique du départ dans le parcours à tous les groupes d'élèves de la classe. L'élève E2 calcule des probabilités de gagner qu'il inscrit directement dans les cases du parcours de son énoncé. Les deux approches, fréquentielle et laplacienne sont explorées au sein du groupe par les élèves E1 et E2 sans être partagées (1ère et 2e vignettes, figure 17).

Après avoir abordé rapidement l'équiprobabilité sans apporter de réponse au groupe (esquissant un travail sur la dimension discursive), l'enseignante intervient de nouveau :

> P : (…) visiblement, E1, son idée c'est de faire la méthode fréquentiste. Ça vous convient de partir sur cette idée-là, la méthode fréquentiste ? Je vous apporte un ordinateur, d'accord ? On le soutient dans cette idée-là, ça peut être une bonne idée. E1, c'est toi le chef de groupe.

L'élève E2 conserve son idée de calculer des probabilités et termine sa procédure sans la détailler. Malgré deux approches distinctes, dont celle de E2 dans le plan [Sem-Dis] amorçant une phase de preuve par calcul (2e vignette, figure 17), l'enseignante favorise l'approche fréquentielle en désignant un leader à suivre. Lucie déclarera *a posteriori* ne pas avoir vu les calculs de probabilités de E2.

Le groupe compare les valeurs estimées par le fichier de simulation élaboré par E1 et E3 et les probabilités calculées par E2. Cette phase de Preuv.3 restera confinée dans le groupe sans que l'enseignante exploite ces travaux en bilan dans la classe.

*Conclusion sur la circulation du groupe Gr4*

Ce groupe présente des travaux initiaux dans deux plans distincts [Sem-Dis] et [Sem-Ins]. Les élèves restent sans réponse de la part de l'enseignante sur l'affectation de l'équiprobabilité. Lucie favorise l'approche fréquentiste, avec un travail dans le plan [Sem-Ins], ignorant les calculs des probabilités réalisés par E2. Les élèves rapprochent les valeurs estimées et calculées des probabilités, mais cette phase (Preuv.3) reste confinée dans le groupe.

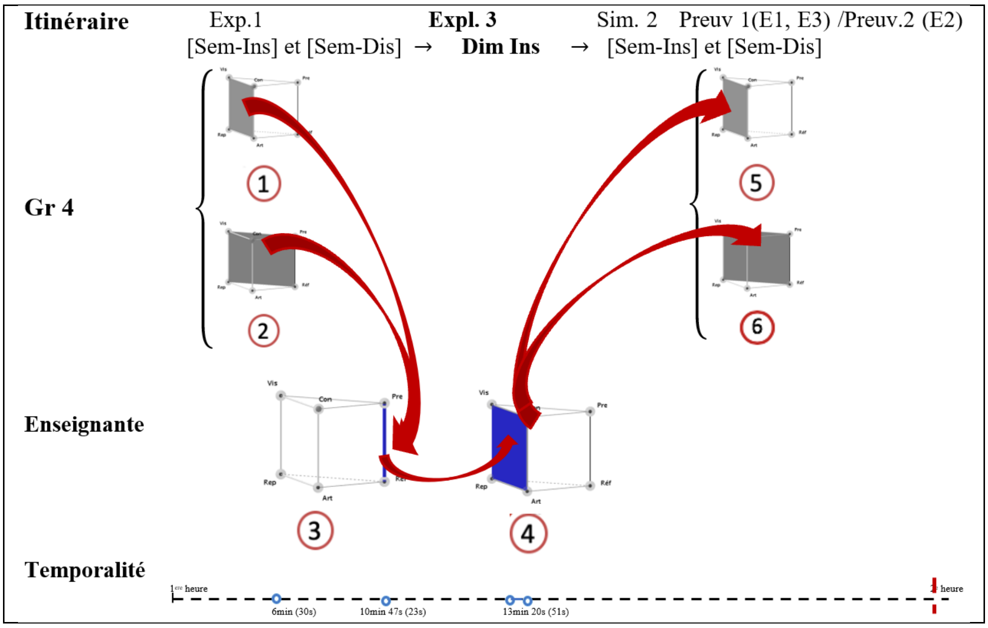



**Figure 17 :** Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr4

### *4.2.5 Groupe Gr1*

Ce groupe tente initialement de calculer les probabilités que le lièvre et la tortue gagnent en se situant dans le plan [Sem-Ins].

> E1 : J'ai fait l'événement que le lièvre tombe sur le 6 et j'ai trouvé 1 sur 6, je l'ai fait fois 6 et j'ai trouvé 6/36.

L'enseignante répond ainsi :

> P : Là, vous n'êtes pas en train de me faire des mathématiques, vous êtes en train de me faire des tours de magie.

Durant la pause méridienne, Lucie avouera à propos de ce groupe ne pas avoir identifié un biais de linéarité.

Lucie poursuit en interrogeant le groupe sur les deux approches (fréquentielle et laplacienne) déjà rencontrées antérieurement par les élèves et intervient sur la dimension discursive.

> P : On doit utiliser des théorèmes ou des méthodes de troisième, quelles sont-elles ?

> E1 : La méthode fréquentiste, elle consiste à faire un grand nombre de fois l'événement et la méthode théorique, je ne me rappelle plus.

> P à E2 : La méthode théorique, c'est quoi ?

E2 : C’est le nombre de cas que l’événement puisse se produire sur le nombre total de cas.

P : Il va falloir trouver le nombre de cas, c’est-à-dire le nombre total de parties que l’on va pouvoir jouer. Il y aura combien de parties au total ?

Lucie oriente alors le groupe vers l’approche laplacienne, tout en imposant progressivement qu’une course soit associée à six lancers de dé.

Quand elle déclare aux élèves :

P : Tout le monde est d’accord, pour que la tortue gagne, il faut forcément qu’il y ait six manches[12]. Pour chacune des manches, il y a combien de possibilités ?

E2 : 5 sur 6.

E3 : Non.

L’adverbe forcément employé par Lucie montre un coup de force (sans jeu de mots) implicite de l’enseignante, car il sous-entend le modèle binomial.

Les mots « manche », « partie » et « course » employés ne semblent pas clairement identifiés par les élèves et créent un blocage. L’enseignante poursuit :

P : Au total, d’accord ? Chaque partie se joue avec un dé et pour chaque partie j’ai six issues possibles d’accord ? Donc première manche, six issues ; 2e manche ?

E3 : Pareil

P : Six issues, et pour chacune des six issues de la première manche j’aurais six issues pour la deuxième manche pour la deuxième manche. Donc en tout, il y aura combien de parties possibles si on joue en deux manches ?

E2 : 12

P : Alors pas 6 plus 6, mais ?

E3 : 6 fois 6

P : Oui, car 6 fois 6 (donne) 36. Si je fais trois manches, pour chacune de ces 36 parties possibles.

E3 : C’est encore fois 6.

De proche en proche, les élèves trouvent 46 656 cas, puis Lucie interroge sur la signification de ce nombre :

P : C’est quoi ce 46 656 ?

E1 : Deux manches.

E2 : Non, c’est le total des cas.

---

[12] Comprendre pour « manche » un lancer de dé, selon l’enseignante.

E1 : Mais si on fait la probabilité que le lièvre gagne, c'est 1 sur 6.

Ici, l'enseignante n'a pas géré le blocage lié à la confusion entre l'événement « le lièvre gagne » et l'événement élémentaire « obtenir un six » chez E1.

P : Ah alors ça, c'est pour si jamais on n'avait qu'une manche, si ta partie elle durait une manche, effectivement, parmi les six parties, on n'aurait que six parties possibles, et parmi ces six parties, le lièvre peut en gagner une seule. Mais moi je n'ai pas six parties, j'ai 46 656 parties parce qu'une partie, ça se joue en six manches, d'accord ? Maintenant, il faut effectivement créer les 46 656 parties et identifier parmi celles-ci celles qui sont gagnées par le lièvre et celles par la tortue. Vous essayez de m'inventer tous les cas possibles de parties en utilisant le tableur.

Lucie demande la création des sextuples au tableur. Dire qu'une partie se joue en six manches lui permet d'imposer la loi binomiale. Elle crée alors un blocage :

E3 : On ne va pas aller jusque 46 000 .

E2 : Comment on peut faire ?

P : Alors vous êtes parti sur la méthode théorique, E3 tu ne veux pas le faire (…). Là le problème c'est qu'il y a eu trop d'hésitations, c'est dommage parce que vous êtes le seul groupe à vous être lancés dans cette méthode là et on va s'appuyer dessus. Mais au bout d'un moment, il y a eu un grain de sable, car il y a eu de l'hésitation et personne du groupe n'a pris le dessus pour dire « je m'y mets ». Elle était longue votre méthode c'est vrai, néanmoins elle marchait très bien.

En fin de 2e heure, ce groupe a réalisé 15 sextuples (sur les 46 656) avec le tableur.

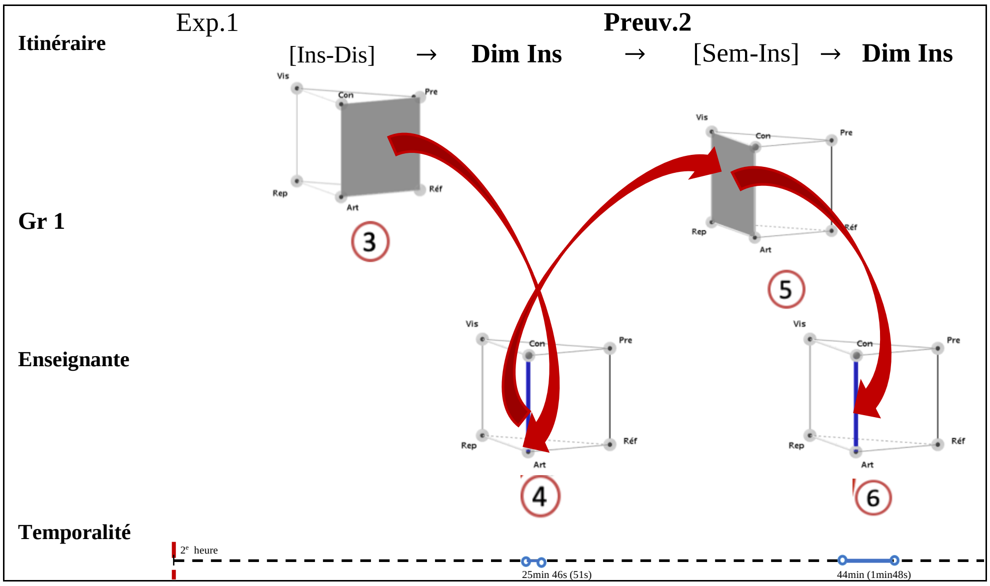



**Figure 18 :** Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr1

*Conclusion sur la circulation du groupe Gr1*

L'enseignante a créé un confinement lié au biais de linéarité initial (vignette, figure 18) qu'elle n'a pas reconnu. Après l'émergence d'un blocage chez E1 tentant de calculer des probabilités dans le plan [Sem-Dis], Lucie impose six lancers de dés pour chaque course et la création des 46 656 sextuples dans le fichier tableur. Cette tâche longue et fastidieuse fait émerger un confinement du travail des élèves dans le plan [Sem-Ins]. L'enseignante n'en est pas consciente. Elle, qui visait une preuve formelle pour l'exploiter en bilan de sa séance, accuse la non-cohésion du groupe d'élèves par rapport au non-achèvement du travail attendu.

### 4.3. Retour sur des données de l'ETM idoine potentiel de Lucie

Des éléments de l'ETM potentiel permettent de mieux caractériser le travail de l'enseignante sur la simulation et ses ajustements de modèles repérés dans l'ETM idoine effectif. La veille de sa séance de classe, l'enseignante a révélé ses intentions de mise en œuvre pour sa classe, ce qui éclaire sur ses agissements en classe relativement aux modèles mathématiques imposés ou détournés au cours de l'élaboration de la simulation. L'ETM idoine potentiel de Lucie ne contient pas de phase de mise au point sur les règles du jeu (Expl.2) ni d'explicitation des expériences aléatoires en jeu (Expl.3). Ce manque a induit des blocages de travail d'élèves quand ils confondaient les événements « obtenir un 6 » et « le lièvre gagne »[13].

Lucie, en préparant sa séance, a réalisé un fichier tableur avec trois feuilles et a recherché une certaine évolution. Y figurent des simulations de courses avec six lancers systématiques par course où l'enseignante présente des courses horizontalement en empruntant exclusivement la loi binomiale. Ce travail en amont est en partie commandée par ses connaissances du tableur (figure 19). Lucie écrit dans le courriel :

> Le premier je l'ai fait pour moi. Pour m'approprier l'activité, avec mes connaissances tableur. Puis, j'ai essayé progressivement de me mettre dans la tête de mes élèves, de n'utiliser que leurs connaissances en tableur. Je pense que la dernière version doit être proche de ce qu'ils vont essayer de faire, de ce qu'ils sont capables de faire avec la façon dont je les ai « formatés ».

**Figure 19.** Extrait courriel (veille de séance en classe), Lucie (Masselin, 2019)

Lucie ne mentionne pas de modèle probabiliste emprunté pour ses simulations.

[13] Ces deux événements coïncident uniquement pour un parcours sans case intermédiaire.

### 4.4. Itinéraires cognitifs de la tâche dans l'ETM idoine potentiel

Les données précédentes nous précisent les itinéraires cognitifs imaginés par l'enseignante Lucie dans son ETM idoine potentiel (figure 20).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Travail individuel* | | *Travail en groupe* | | | | |
| Expl. 1 (DéMan) | → | Sim. 2 (E, au tableur) | → | Sim 3.E | → | Preuv.1 |
| Dés en accès libre | | ModLib | | | | |

**Figure 20.** Itinéraire cognitif de tâche prévue par Lucie, (Masselin, 2019)

Si l'enseignante a semblé initialement favoriser diverses approches avec une tâche ouverte, elle n'a retenu que l'approche fréquentiste avec des simulations ajustées pour qu'elles concordent avec son propre modèle probabiliste (loi binomiale) prévu avant la séance. Les valeurs des probabilités obtenues avec l'approche laplacienne par un groupe n'ont pas été exploitées alors qu'une phase de confrontation des preuves aurait pu exister dans l'ETM idoine. Lucie a rendu homogène le modèle probabiliste (loi binomiale) lors de la simulation dans la plupart des groupes au fil de sa séance alors que le choix de certains groupes s'était initialement porté sur la loi géométrique tronquée.

## 5. Conclusion et perspectives

### 5.1. Retour sur nos questions de recherche

– Dans sa gestion effective de l'ETM idoine, comment l'enseignante Lucie gère-t-elle des moments critiques du déroulement de séance comme des blocages, confinements et rebonds ?

– Quelle est l'influence de l'enseignante sur l'évolution de l'ETM idoine effectif ?

#### *5.1.1 Les révélations du chronogramme sur les modèles probabilistes*

L'élaboration du chronogramme a mis en lumière des ajustements de modèles, et ce, de manière répétée par l'enseignante dans plusieurs groupes. Le chronogramme des deux heures de séance met en évidence un effet de contamination dans le changement de modèle probabiliste imposé par Lucie dans six groupes sur les sept étudiés au fil de sa séance .

Afin de considérer le travail dans sa globalité (au-delà de la considération d'un groupe d'élèves), nous avons repéré (encerclement rouge, figures 21 et 22) ces changements de modèles probabilistes aux différents instants dans la classe. Cet outil méthodologique a montré un effet de contamination visible sur ce zoom (figure 21). Si nous avons repéré une stratégie identique d'intervention de l'enseignante concernant le fichier tableur des groupes Gr3 et Gr8, le chronogramme indique que la structuration horizontale d'une course dans le tableur par Lucie a eu lieu par deux interventions quasi successives de l'enseignante : au bout de 34min23s dans le Gr8, puis au bout de 39min30s dans le Gr3.

Le chronogramme nous a conduits à définir le monitorage didactique (Masselin, 2019) comme étant une action de contrôle par l'enseignant en classe, qui consiste à surveiller, en continu ou à intervalles rapprochés, par mesure d'indices, des procédures élèves ou des observations de phénomènes divers.

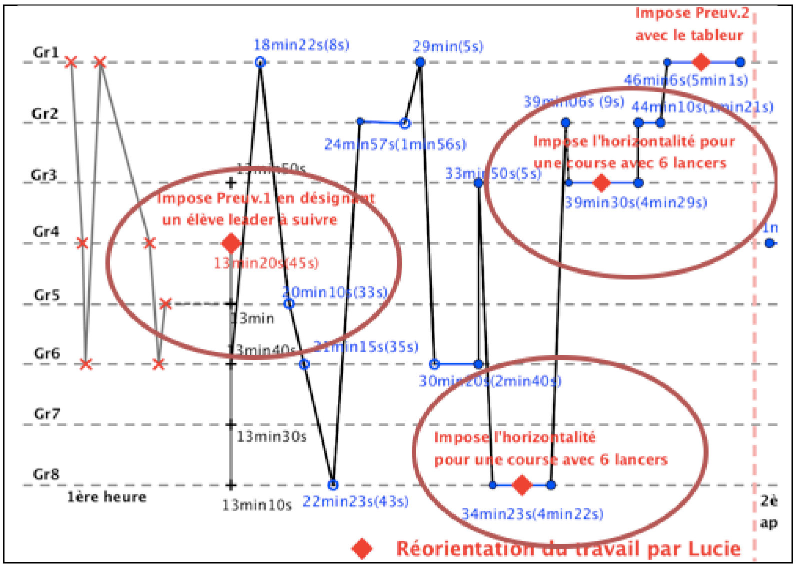



**Figure 21**. Zoom sur le chronogramme de la 1ère heure, Lucie.

En considérant le chronogramme dans son ensemble, nous avons ainsi mis en évidence un monitorage didactique indirect (Masselin, 2019) du modèle probabiliste implicite de l'enseignante qui modifie le travail de six groupes d'élèves sur huit (figure 22) dans l'ETM idoine.

Nous qualifions d'indirect le monitorage didactique du modèle en opposition à un monitorage didactique direct du modèle qui serait explicité dès le départ par l'enseignant (comme indiqué dans l'énoncé).

Si l'enseignante ne semble pas, *a priori*, imposer initialement un modèle probabiliste, c'est une réalité visible au fur et à mesure du temps comme en atteste le chronogramme. Ce contrôle du modèle par l'enseignante prend sa source dans la préparation de sa séance.

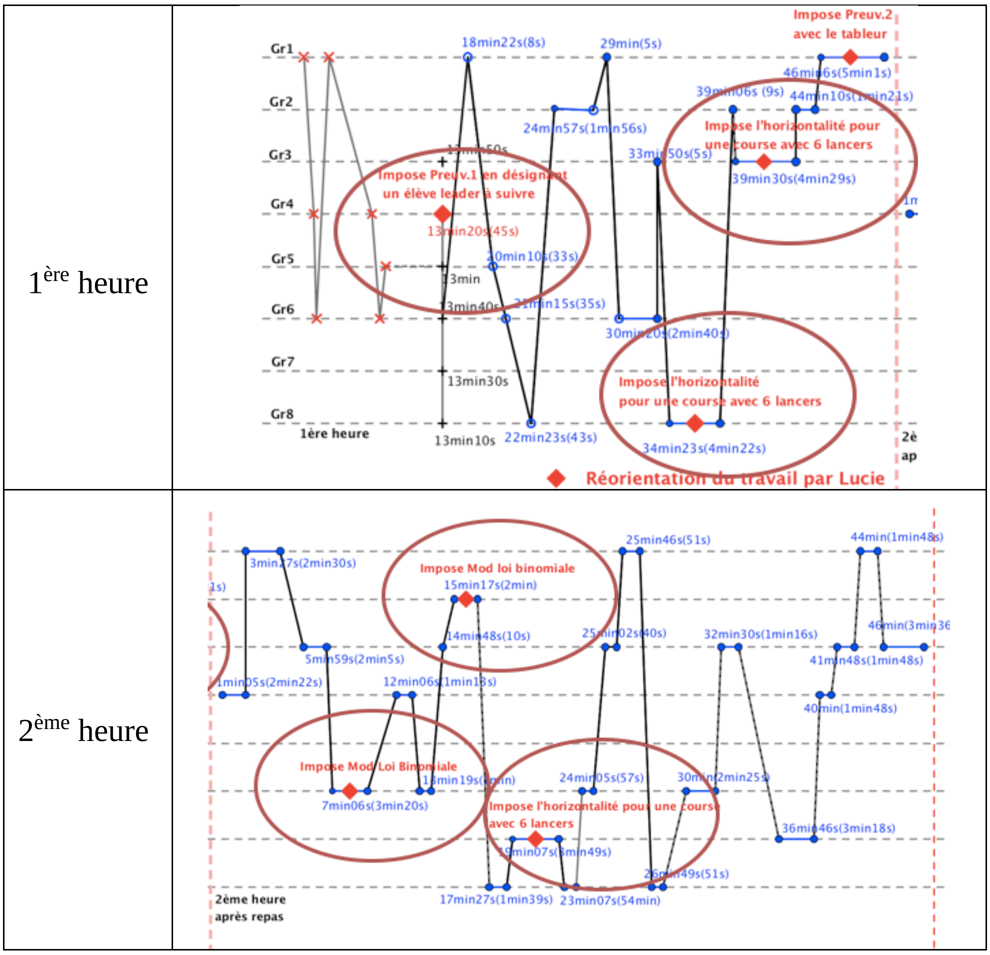



**Figure 22.** Chronogramme de la séance de Lucie (Masselin, 2019, p. 129 ; Masselin & Florez González, 2020, p. 93)

### *5.1.2 Résultats sur la question des modèles*

La gestion de l'ETM idoine effectif par l'enseignante montre qu'il est rendu homogène du point de vue du modèle, quitte à créer des blocages dans le travail des élèves. Notre étude de cas montre que les relations entre expérience aléatoire et modèle mathématique s'apparentent plus à une rupture qu'à un lien. Des blocages sont apparus, dans l'ETM idoine effectif dont le plus prégnant concerne une interprétation erronée des règles du jeu de la part des élèves, assimilant un lancé de dé à une course.

Si Parzysz (2011) distingue trois types d'expériences aléatoires (réelle, modélisée et simulée), celle simulée est prépondérante dans la classe de Lucie. Sa place est induite par la circulation privilégiée par l'enseignante qui incite les groupes à utiliser un tableur pour élaborer un fichier de simulation. Les groupes, majoritairement, se heurtent à son élaboration au moment de la réalisation d'un deuxième lancer de dé conditionné au premier lancer. Son implémentation est contrainte par l'artefact numérique et par l'enseignante qui tente d'imposer un choix de modèle particulier avec le tableur, sous couvert d'une demande de réorganisation spatiale de la feuille de calcul. Si certains groupes ont réalisé des expériences à la main (Expl.2), Lucie n'a pas exploité les résultats de ces courses dans sa classe. Si elle a fait faire des courses manuelles lors de l'élaboration de la simulation (Sim.2) à certains groupes, cela lui a permis de réorganiser spatialement les courses du tableur, et d'ajuster leur travail à sa propre simulation.

Les mots « manche » et « partie » de l'énoncé ont amené des blocages liés au sens courant de ces mots, accentuant une rupture entre expérience aléatoire et simulation. Si *a priori* la présentation de la tâche et la gestion de l'ETM idoine semblaient favoriser l'émergence de divers modèles, nos travaux ont précisé des blocages et des confinements dans la circulation de l'ETM idoine effectif.

### *5.1.3 Résultats concernant les artefacts*

Nous rendons compte de l'influence d'artefact(s) matériel(s) (tels que des dés ou le tableur) sur la circulation du travail. Lors de la phase d'exploration (Expl.), des élèves ont lancé des dés qui étaient en accès libre dans un pot situé sur le bureau de Lucie (comme E1 du Gr 2). Si des groupes ont effectué des manipulations, les fichiers tableurs produits ensuite dévoilent que ces expériences manuelles n'ont pas toujours permis de donner accès à l'identification des expériences aléatoires en jeu. Pendant sa phase d'élaboration, la simulation est un objet d'étude au sens de Douady (1984) pour le groupe d'élèves. Mise ensuite au profit d'une preuve expérimentale (Preuv.1), le fichier change de statut et devient un outil au service de la loi faible des grands nombres. Bien souvent, Lucie a été à l'initiative d'une relance de la simulation tableur, opérant elle-même une bascule de l'objet vers l'outil au profit de la phase Sim.3 conduisant vers une preuve expérimentale.

Lucie n'a envisagé pour sa classe qu'un seul artefact numérique pour la simulation (le tableur). Cela ne nous permet pas d'obtenir d'éléments de comparaison avec d'autres artefacts (comme le logiciel Scratch ou la calculatrice) et constitue une limite de notre étude de cas. Cependant, concernant le tableur, si le modèle probabiliste le plus congruent aux règles du jeu est majoritairement choisi par les groupes d'élèves, Lucie impose un changement de modèle, car elle a jugé en amont une plus grande facilité à élaborer la simulation avec la loi binomiale. Elle n'aidera aucun groupe à réaliser au tableur une simulation avec la loi géométrique tronquée, imposant son modèle, conforme à celui de son ETM idoine potentiel. Par diverses interventions, l'enseignante a exercé un contrôle et rendu homogène l'ETM idoine effectif concernant le modèle probabiliste lors de la simulation. L'enseignante a opéré des rétroactions identifiées (Masselin, 2018) dans le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007).

## 5.2. Perspectives

Notre étude de cas a donc permis une première caractérisation du travail de l'enseignant sur la gestion de la simulation dans l'ETM idoine. Si nous avons considéré une première enseignante (ce qui constitue une limite en soi), la poursuite de cette étude peut donner accès aux régularités ou variabilités interprofesseurs, ce qui a été réalisé dans la thèse de Masselin (2019) en considérant un échantillon plus grand d'enseignants. Elle intègre, de façon originale, le suivi de mises en œuvre successives de différentes versions du jeu du lièvre et de la tortue dans des classes et au fil d'une formation (*lesson study* adaptée, Masselin & Derouet (2019)), durant son déroulement, et chez des enseignants ayant suivi cette formation.

### *5.2.1 De nouveaux outils méthodologiques de recherche*

Nous avons développé des outils de recherche permettant d'envisager un panel plus large d'enseignants, voir un collectif d'enseignants. L'ETM idoine attendu, grâce à la description de ses différentes phases, est un socle pour caractériser le travail de plusieurs enseignants autour d'une tâche dans l'ETM. Cet ETM permet d'apprécier, comme le montrent nos travaux de thèse (Masselin, 2019), de premiers effets d'une formation d'enseignants avec une méthodologie originale de recherche (Masselin & Derouet, 2019) associée.

Le chronogramme, s'il a été opérationnalisé sur la question des modèles dans notre étude, offre de nouvelles perspectives de recherche concernant un ETM idoine incluant du travail de groupe.

L'artefact numérique utilisé peut induire des blocages relatifs aux modèles mathématiques liés à ses potentialités couplées aux pratiques de l'enseignant. Interroger l'emploi d'un autre logiciel comme Scratch ou Python est à explorer.

### *5.2.2 Des concepts didactiques pour la formation fondés sur la dynamique de circulation dans l'ETM*

Notre étude de cas a permis de repérer des moments critiques dans la circulation du travail que sont les blocages, confinements et rebonds. S'ils sont exposés en formation (via par exemple des extraits vidéo), ils peuvent permettre de développer des pratiques professionnelles à partir d'une tâche donnée. En effet, exposés à un collectif de formateurs, ces moments spécifiques d' ETM idoine effectif permettent de mieux cerner les enjeux de la tâche, le rôle de l'enseignant et celui des artefacts dans le développement du travail mathématique.

Enfin, la grille d'analyse *a priori* épistémologique d'une tâche dans l'ETM peut servir à identifier une multiplicité de choix qui s'offrent aux enseignants pour leur classe, et constitue un résultat de notre enquête pouvant être exploité pour la formation des enseignants en probabilités.

## Bibliographie

BLUM, W. & LEISS, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.-P. B. W. Haines & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.

DEROUET, C. (2019). Introduire la notion de fonction de densité de probabilité : dynamiques entre trois domaines mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **39(2)**, 213–266.

DEROUET, C. & MASSELIN, B. (2019), Travail mathématique en contexte de modélisation. Le cas d'une tâche de modélisation probabiliste « Le jeu du lièvre et de la tortue ». In L. Vivier, E. Montoya Delgadillo, P.R. Richard, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & D. Tanguay (Eds). *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático (ETM6, 13-18 de diciembre 2018)* (pp. 651-666). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

GAYDIER, F. (2011). *Simulation informatique d'expérience aléatoire et acquisition de notion de probabilité au lycée*, Thèse de doctorat, Université Paris 5.

KIET, B.A. (2015). *Apports de la simulation et de l'utilisation de logiciels pour l'enseignement/apprentissage des probabilités et des statistiques en première année d'Université au Vietnam dans un cursus non mathématique*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **16**, 9-24.

KUZNIAK, A., PARZYSZ, B. & VIVIER, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. *The Mathematics Enthusiast*, **10(1),** 407-440.

KUZNIAK, A. & RICHARD, P.R. (2014). Espaces de Travail Mathématique. Points de vue et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Especial 2* (Tome I), 29-40.

KUZNIAK, A., NECHACHE, A. & DROUHARD, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM – Mathematics Education*, **48(6),** 861-874.

KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM – Mathematics Education*, **48(6)**, 721-737.

LAVAL, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques*, Thèse de doctorat, Université Paris Sorbonne.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (MENESR) (2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). *Bulletin officiel*, **Spécial n°11** du 26 novembre 2015.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *Bulletin officiel*, **Spécial n°1** du 22 janvier 2019.

MASSELIN, B. (2018). Comment interpréter le cycle de modélisation avec l'Espace de Travail Mathématique ? Étude de la trajectoire d'un problème. In *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics),* **27(2)**, Proceedings CIEAEM 69 – Berlin, Germany, July 15-19, 2017, 261-265.

MASSELIN, B. (2019), *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilité,* Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

MASSELIN, B. & DEROUET, C. (2019). Sur la mise en évidence des effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilité en classe de troisième. In M. Abboud (Ed.), *Actes du colloque EMF 2018 "Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines"* (pp. 198-207). Paris : Université de Paris, Editions de l'IREM de Paris.

MASSELIN, B. & GONZALEZ-FLOREZ, M. (2020). Étude du travail idoine, le cas de la simulation en probabilité, In A. Kuzniak, M. Florez-González, A. Nechache & L. Vivier (Eds), *Regards croisés sur le travail mathématique, Cahier du LDAR n°21* (pp. 85-102), Paris : IREM Université de Paris.

PARZYSZ, B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, **74**, 91-103.

PARZYSZ, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, **16**, 127-147.

PARZYSZ, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **17(4)**, 65-82.

SENSEVY, G., MERCIER, A. & SCHUBAUER-LEONI, M-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, **20(3)**, 203-304.

SENSEVY, G. (2007) . Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves dans la classe* (pp. 13-49). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

VIVIER, L. (2020). Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM, In A. Kuzniak, M. Florez-González, A. Nechache & L. Vivier (Eds), *Regards croisés sur le travail mathématique, Cahier du LDAR n°21* (pp. 55-70), Paris : IREM Université de Paris.

**BLANDINE MASSELIN**

LDAR, IREM de Rouen, Académie de Normandie

blandine.masselin@wanadoo.fr

**Annexe 1 :** Grille d'analyse épistémologique du jeu du lièvre et de la tortue (Masselin, 2019, pp. 58-59)

1. **Analyse *a priori* des solutions envisageables**
   Les variables didactiques
   Les règles du jeu
   La question posée
2. **Analyse *a priori* concernant la modélisation**
   Le modèle pseudo-réel et ses hypothèses
   Les modèles probabilistes et les traitements dans ces modèles
3. **Analyse *a priori relative* aux registres sémiotiques**
   Un parcours sans case intermédiaire
   Un parcours à une case intermédiaire
   Un parcours à deux cases intermédiaires
   Un parcours à $n$ cases intermédiaires avec $n \geq 3$
4. **Analyse *a priori relative* aux artefacts**
   L'introduction d'un modèle numérique
   Étude avec le tableur
   Étude avec le logiciel Scratch

**Annexe 2** : Valeurs des probabilités suivant le nombre de cases du parcours (Masselin, 2019)

| Nombre *n* de cases intermédiaires | Valeur exacte de P(T)[14] | Valeur approchée de P(T) à $10^{-3}$ | Valeur exacte de P(L) | Valeur approchée de P(L) à $10^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{5}{6}$ | 0,833 | | 0,167 |
| 1 | $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$ | 0,694 | $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$ | 0,306 |
| 2 | $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$ | 0,579 | $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$ | 0,421 |
| 3 | $\frac{625}{1196}$ | 0,482 | $\frac{671}{1196}$ | 0,518 |
| 4 | $\frac{3125}{7776}$ | 0,402 | $\frac{4651}{7776}$ | 0,598 |
| 5 | $\frac{15625}{46656}$ | 0,335 | $\frac{31031}{46656}$ | 0,665 |
| *n* grand | $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ | | $\lim_{n\to+\infty}(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n) = 0$ | |

[14] P(T) (et P(L)) désignent respectivement les probabilités que la tortue (et le lièvre) gagne.