VIRGINIE HOULE, FABIENNE VENANT, RAQUEL ISABEL BARRERA-CURIN

ÉVOLUTION ET INTERINFLUENCE DES MODES D'AGIR, PARLER ET PENSER LES FRACTIONS DANS DEUX PROBLEMES MULTIPLICATIFS

Abstract. Based on studies focusing on the roles of language in the teaching and the learning of mathematics, three dimensions are distinguished - acting, talking and thinking - interrelated. In order to explore the interactions and progressive transformations of these dimensions during the teaching and the learning of fractions, a teaching sequence was experimented in a specialized class. The sequence is composed of a network of problem focusing on multiplicative relationships inherent in the concept of fraction. In this article, we present the *a priori* and *a posteriori* analyses of two of these problems. These analyses are carried out in a didactic framework enriched with a specific perspective on the modes of acting, speaking and thinking the multiplicative relationships in question.

Résumé. Des études s'intéressant aux rôles du langage dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques distinguent trois dimensions – agir, parler et penser – qui s'interinfluencent. Afin d'explorer les interactions et les transformations progressives de ces dimensions lors de l'enseignement-apprentissage de la fraction, une séquence d'enseignement composée d'un maillage de problèmes a été expérimentée dans une classe spécialisée. La séquence vise plus particulièrement un travail sur des relations multiplicatives inhérentes au concept de fraction. Nous présentons, dans cet article, les analyses *a priori* et *a posteriori* de deux problèmes de la séquence en nous appuyant sur un cadre didactique enrichi d'un regard spécifique sur les modes d'agir, parler et penser les relations multiplicatives en question.

Mots-clés. Agir, parler et penser ; fractions ; langage ; résolution de problèmes ; enseignement-apprentissage des mathématiques.

Introduction

L'école a notamment comme mission d'amener les élèves à rencontrer certains savoirs savants. L'enseignement vise donc, en quelque sorte, à favoriser le passage de concepts spontanés, qui sont rencontrés dans le quotidien des élèves, aux concepts savants (Jaubert & Rebière, 2012). Dans le cas des fractions, les enfants, avant même d'entrer à l'école, ont certaines connaissances des mots « moitié », « demie » et « quart » qu'ils entendent dans la vie quotidienne. Ces connaissances peuvent cependant être en décalage avec les concepts savants correspondants. Prenons le cas d'une mère qui partage son biscuit avec son enfant en lui mentionnant qu'elle va lui en donner « la moitié ». Le partage en deux étant bien souvent inégal, cela peut conduire l'enfant à demander s'il peut avoir « la plus grosse moitié ». Cet exemple

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 121 – 150.

montre que les modes d'agir, de parler et donc aussi de penser les objets mathématiques, se construisent d'abord dans le quotidien des enfants. L'enseignement permet de faire évoluer les modes d'agir, de parler et de penser les objets mathématiques de façon à ce qu'ils se rapprochent progressivement des concepts savants. Les interactions langagières entre les élèves et celles entre les élèves et l'enseignant jouent un rôle important dans la mise en place de la communauté discursive.

Le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage est l'objet d'étude de divers travaux articulant la linguistique et la didactique. Dans le cadre de notre recherche, le langage est considéré comme étant « une activité dialogique et située » (Bernié, 2002) et son rôle dépasse ainsi largement celui de média (Bronner et al., 2013). Il met en jeu la langue, c'est-à-dire les signes oraux et écrits partagés par une communauté (Hache, 2013), mais il englobe aussi tout ce qui permet de s'exprimer et de communiquer avec les autres. L'analyse des échanges verbaux ne suffit donc pas pour donner du sens aux objets de savoir. En conséquence, afin d'approfondir nos analyses sur le langage comme étant une activité complexe, nous nous intéressons à trois dimensions de l'activité langagière, soit agir, parler et penser, tel qu'exposé par Bernié (2002) et Jaubert et Rebière (2012). Ces trois dimensions sont traitées comme une entité dans la mesure où elles s'interinfluencent. On parle alors de « l'agir-parler-penser », qui permet d'articuler, à travers le langage, l'enseignement, l'apprentissage et les objets de savoirs.

Les trois dimensions du langage, agir-parler-penser, permettent notamment d'appréhender l'activité mathématique des élèves et de l'enseignant. Elles sont utiles pour procéder à une fine analyse des interactions didactiques, comme en témoignent des recherches récentes en didactique des mathématiques portant sur l'analyse des modes d'agir-parler-penser les objets de savoir dans le domaine de la géométrie (Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016 ; Barrier, Chesnais & Hache, 2014 ; Barrier, Hache & Mathé, 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014, 2015). Nous faisons l'hypothèse qu'une analyse de la relation entre enseignement, apprentissage et objets de savoir sous l'angle de l'agir-parler-penser est aussi pertinente pour d'autres domaines mathématiques que la géométrie. En conséquence, nous avons choisi d'explorer comment les modes d'agir-parler-penser interagissent et évoluent lors de l'enseignement-apprentissage des fractions, en nous intéressant plus particulièrement à la coordination progressive entre les connaissances sur les fractions et celles sur les structures multiplicatives (Houle & Giroux, 2018).

1. Concept de fraction

La fraction occupe une place importante dans le cursus scolaire québécois, en particulier dans la transition primaire/secondaire (Houle, 2016). Ce contenu mathématique est cependant reconnu difficile tant pour l'apprentissage que pour l'enseignement. Selon Rouche (1998), les fractions seraient même « un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité « réservée aux plus intelligents » » (p. 1). Cette difficulté s'explique notamment par le fait que plusieurs connaissances construites en travaillant sur les nombres naturels se révèlent fausses lorsque vient le temps de travailler avec les nombres rationnels, ce qui amène les élèves à se confronter à certains obstacles épistémologiques.

Contrairement aux nombres naturels, les nombres rationnels peuvent être représentés par différentes formes d'écriture. Les plus fréquentes sont sans doute l'écriture décimale (à virgule) et la fraction. La fraction est d'ailleurs généralement définie comme une des formes d'écriture du nombre rationnel. Elle consiste à exprimer un nombre rationnel sous la forme $\frac{a}{b}$, où a (appelé numérateur) et b (appelé dénominateur) sont des entiers relatifs et où b est différent de zéro. La fraction $\frac{a}{b}$ représente le quotient de a par b ($a \div b = \frac{a}{b}$). Cette forme d'écriture est cependant très différente de l'écriture décimale qui s'inscrit dans le prolongement de l'écriture des nombres entiers. En effet, l'écriture fractionnaire rompt davantage avec l'écriture des nombres entiers que l'écriture décimale, car elle ne repose pas exclusivement sur les groupements en base 10 et sur la valeur positionnelle (Houle, 2016).

L'écriture fractionnaire offre une entrée sur les nombres rationnels bien différente de l'écriture décimale. Elle nécessite de prendre en compte trois objets : le numérateur, le dénominateur et la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. L'écriture fractionnaire est particulière dans la mesure où le nombre qu'elle exprime correspond à la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. Il y a, par conséquent, une infinité de fractions qui expriment un même nombre. La relation d'équivalence entre les fractions est constitutive de la définition d'un nombre rationnel, qui consiste en un ensemble de couples ordonnés équivalents (a, a') de nombres entiers, avec $a' \neq 0$, dont l'équivalence est déterminée par la relation R suivante : $(a \div a')\ R\ (b \div b')$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$. Le couple ($a, a'$) peut être symbolisé par l'expression $\frac{a}{a'}$ et la relation entre deux éléments de la même classe d'équivalence par l'expression $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$.

Des chercheurs (Houle, 2016 ; Rosar, Van Nieuwenhoven & Jonnaert, 2001 ; Streefland, 1991) expliquent que les élèves, s'appuyant sur leurs connaissances sur les nombres naturels, interprètent la fraction comme deux nombres naturels, et ont alors de la difficulté à concevoir la fraction comme un seul nombre. Ainsi, le numérateur et le dénominateur sont traités de manière indépendante, comme une double cardinalité, sans que la relation multiplicative entre les deux termes ne soit établie. Les difficultés rencontrées dans l'apprentissage des fractions ne peuvent être traitées indépendamment de la manière dont ce contenu est enseigné. Dans les écoles primaires, la fraction est souvent enseignée et donc interprétée comme étant la partie d'un tout, et ce, jusqu'à la fin du primaire (Rioux, 2003 ; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Dans la fraction $\frac{a}{b}$, a correspond alors à un nombre désigné de parties d'un tout partagé en b parties égales. Cette manière d'aborder la fraction ne favorise pas la coordination entre les connaissances sur la fraction et celles sur les structures multiplicatives, ce qui est pourtant au cœur même du concept de fraction (Desjardins & Hétu, 1974 ; Houle & Giroux, 2018 ; Kieren, 1989). Pour identifier $\frac{a}{b}$ d'un tout, il est effectivement possible de partager le tout en b parties égales et de prélever a de ces parties, sans établir la relation multiplicative entre la partie (le numérateur) et le tout (le dénominateur). Les fractions sont alors interprétées comme l'expression de grandeurs absolues plutôt qu'en termes de rapport.

En contexte, une fraction peut effectivement être utilisée pour exprimer le rapport entre deux grandeurs (ex. : la largeur d'un rectangle correspond aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur) ou pour exprimer la mesure d'une grandeur (ex. : Léa a mangé $\frac{1}{6}$ d'une tarte). Une fraction est une relation qui peut exprimer une mesure lorsqu'elle est mise en rapport avec une unité donnée. Behr, Harel, Post et Lesh (1992) donnent à ce propos l'exemple d'une mère qui prépare une fête d'anniversaire et qui offre, à chacun des invités, quatre petits cadeaux qu'elle met dans une tasse. Elle demande à son assistant de donner à chaque invité une tasse. La tasse devient alors l'unité et les petits cadeaux perdent leur « identité » dans la mesure où un cadeau ne correspond alors plus à « 1 », mais à une sous-unité de l'unité « tasse », en l'occurrence à « $\frac{1}{4}$ » de tasse. Un invité qui, par mégarde, reçoit trois cadeaux dans sa tasse (au lieu de quatre) indique non pas qu'il lui manque un cadeau, mais que sa tasse n'est pas pleine. Ainsi, la tasse devient en quelque sorte l'unité utilisée pour « mesurer » le cadeau. Enfin, comme le mentionnent Behr et al. (1992), la construction de la complétude de la tasse est basée sur le type d'objets mentaux que l'on construit à partir des relations numériques que l'on voit entre les petits cadeaux et la tasse.

Des chercheurs (Desjardins et Hétu, 1974 ; Blouin, 1993 ; Brousseau & Brousseau, 1987) montrent que plusieurs élèves s'appuient à tort sur les structures additives pour interpréter la relation entre le numérateur et le dénominateur, ce qui s'explique sans doute en grande partie par le fait que les connaissances sur les structures additives sont mieux maîtrisées par ces élèves que celles sur les structures multiplicatives. En effet, les élèves apprennent à procéder à des comparaisons additives (qui impliquent les termes « de plus », « de moins ») avant d'apprendre à établir des comparaisons multiplicatives (qui impliquent des opérateurs scalaires c'est-à-dire les termes « fois plus », « fois moins »). Le développement des connaissances sur l'opérateur scalaire est cependant nécessaire pour établir la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur, ou encore, entre la fraction et l'unité à laquelle elle fait référence. Ainsi, $\frac{1}{b}$ d'une tarte correspond à ce qui entre exactement b fois dans l'unité « tarte », ce qui peut être modélisé par l'écriture suivante : $\frac{1}{b} \times b = 1$. Les études portant sur le développement de la fraction (Desjardins & Hétu, 1974 ; Kieren, 1989) montrent comment les connaissances sur la fraction et celles sur les structures multiplicatives se coordonnent progressivement au cours de l'apprentissage des nombres rationnels.

Par ailleurs, Vergnaud (1990) soulève l'importance du rôle du langage et du symbolisme dans la conceptualisation. Les langages oral et écrit utilisés pour représenter un concept mathématique contribuent inévitablement à la façon de penser ce concept. Il y a une forte relation entre l'évolution des idées et celle de leurs expressions, puisque l'évolution des idées conduit à de nouvelles expressions qui, en retour, ouvrent sur de nouvelles idées (Adjiage, 1999). Dans le cadre de cet article, nous analysons finement l'évolution et l'interinfluence des modes d'agir-parler-penser la fraction au cours de deux problèmes multiplicatifs, en prenant en compte les interactions entre les élèves et l'enseignante.

2. Agir-parler-penser les objets mathématiques

Jaubert et Rebière (2012) décomposent l'activité langagière en trois dimensions (agir-parler-penser) afin d'étudier les liens entre langage et construction des savoirs et le poids de la discipline dans les pratiques de construction des savoirs disciplinaires. L'agir-parler-penser prend sa source dans les recherches en sociolinguistique (Bernstein, 1971/75 ; Charlot, Beautier & Roche, 1992 ; Bautier, 1995) qui ont montré que la construction des savoirs est étroitement liée à des pratiques langagières déjà là. Elle repose sur une hypothèse forte concernant la nature des savoirs scolaires, considérés comme des savoirs savants pour l'enfant qui doit les apprendre, des savoirs stabilisés et déconnectés de leurs contextes d'élaboration, verbalisés dans des formes langagières travaillées (denses, elliptiques) sur lesquelles s'est accordée provisoirement la communauté savante, par opposition aux concepts quotidiens qui se construisent de façon inconsciente et ancrée dans le contexte dans lequel ils émergent. Les savoirs scolaires font ainsi l'objet d'une décontextualisation dont il faut rendre l'élève conscient, à travers, par exemple, un travail de verbalisation explicite portant sur les liens qu'ils entretiennent entre eux ainsi que sur les objets qu'ils désignent. Dès lors, chaque communauté, chaque sphère d'activité, développe des pratiques langagières qui lui sont propres et relativement stables. Les échanges au sein d'une communauté reposent sur la capacité de chaque interlocuteur à adopter une position énonciative pertinente, respectant « des cadres d'intelligibilité du monde, des formes de rationalité, des modes de relations aux autres, des contrats de communication spécifiques » (Jaubert & Rebière, 2012) qui constituent ce que l'on appelle des modes d'agir-parler-penser, eux-mêmes caractérisables et repérables à travers les discours produits.

La classe de mathématique se constitue en communauté discursive disciplinaire, au sein de laquelle l'élève doit se conformer à des modes d'agir-parler-penser généralement éloignés de ceux qui émergent naturellement dans le contexte familier. Pour apprendre et construire les concepts mathématiques scolaires, l'élève doit ainsi s'extraire du contexte familier pour s'inscrire dans celui proposé par l'enseignant. Le langage constitue alors le milieu de l'apprentissage, à la fois instrument de communication et outil (Vygotski, 1934/1997) de mise à distance, d'objectivation et de reconstruction. C'est dans et par le langage, à travers des processus de généralisation, de catégorisation et d'abstraction, que se joue la réorganisation des connaissances qui va permettre la transmutation progressive des concepts quotidiens vers des concepts savants. Ce processus s'accompagne d'une réorganisation des pratiques langagières, selon des formes sémiotiques conventionnelles et stabilisées qui témoignent de la capacité de l'élève à se détacher du contexte pour réinvestir des connaissances et à construire un monde conceptuel des objets scolaires, au sein duquel il s'autorise à exercer des activités de pensée et à faire des liens (Bautier & Goigoux, 2004). Ces formes de discours témoignent de l'appropriation des principes qui régissent l'activité au sein de la communauté discursive disciplinaire, et sont le signal de la mise en place de modes d'agir-parler-penser propre à la discipline, c'est-à-dire du processus d'apprentissage (Jaubert & Rebière, 2012).

Par exemple, au sein des travaux récents en didactique des mathématiques et plus particulièrement en géométrie, on considère qu'enseigner et apprendre la géométrie en contexte scolaire consiste à inscrire l'activité de l'élève dans un « ensemble social caractérisé par des modes d'agir-parler-penser » (Bernié, 2002, p. 81) « spécifiques d'un niveau donné, relativement à des objets de savoir donnés, dans un processus à la fois adaptationniste et social » (Bulf, Mathé & Mithalal, 2014, p. 32). Les résultats de travaux plus anciens en didactique de la géométrie offrent des éléments permettant de caractériser l'interinfluence entre l'agir, le parler et le penser en contexte scolaire et permettent ainsi d'approcher l'activité géométrique potentielle des élèves. Des recherches portant sur les modes d'agir, de parler et de penser différents objets géométriques (Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016 ; Barrier, Chesnais & Hache, 2014 ; Barrier, Hache & Mathé, 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014, 2015) rendent compte de la richesse et de la complexité des processus susceptibles de permettre aux élèves la rencontre avec des connaissances et savoirs géométriques, par confrontation à des situations et interactions langagières.

Dans la lignée de travaux précédents (Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016 ; Bernié, 2002 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014), nous cherchons à approcher la dynamique d'évolution des modes d'agir-parler-penser le rapport fraction-unité (Behr et al., 1992) fondamental à l'interprétation en acte du concept de fraction. Nous faisons l'hypothèse que la mise au jour de cette dynamique permet d'accéder à la co-construction des rapports unités/sous-unités au cours des interactions entre les élèves et l'enseignante lorsqu'ils sont confrontés à la résolution de différents énoncés multiplicatifs.

Trois questions émergent alors, qui guident notre recherche et nos analyses :

- Comment évolue l'agir-parler-penser la fraction au cours de la séquence ?
- Comme se transforme l'agir-parler-penser selon les caractéristiques des problèmes ?
- Comment s'interinfluencent les modes d'agir, de parler et de penser la fraction ?

3. Méthodologie et cadre d'analyse

L'objectif de notre recherche consiste ainsi à analyser l'évolution et l'interinfluence des trois dimensions de l'agir-parler-penser la fraction en tenant compte des caractéristiques didactiques des problèmes posés. Pour ce faire, nous avons observé les interactions entre les élèves et l'enseignante autour d'un maillage de problèmes d'introduction à la fraction en tant que structure multiplicative. Les problèmes portent plus particulièrement sur la mise en relation des expressions suivantes : $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Notre expérimentation a été réalisée au Québec dans une classe spécialisée composée d'élèves de 10 à 12 ans jugés en difficulté d'apprentissage (aucun d'entre eux ne présente de handicap particulier).

Notre recherche s'appuie sur un cadre d'analyse classique en didactique des mathématiques, soit l'ingénierie didactique d'Artigue (1990), qui consiste à comparer deux analyses, l'une menée *a priori* et l'autre *a posteriori*. Ces analyses sont ici orientées sur les modes d'agir-parler-penser et s'appuient sur une analyse logique préalable. Les analyses logiques et *a priori* nous permettent d'appréhender la complexité du concept de fraction et d'anticiper l'activité mathématique des élèves en termes d'agir-parler-penser, en prenant en compte les caractéristiques didactiques des tâches. L'analyse *a priori* s'attarde sur l'interinfluence des trois dimensions (l'agir, le parler et le penser) tout en mettant en évidence les mécanismes de leur évolution. Nous considérons en effet que la façon qu'ont les élèves de percevoir les fractions influence leur manière d'agir et de parler au moment de résoudre des tâches, et réciproquement. Pour mettre cette hypothèse à l'épreuve, nous avons choisi des problèmes portant sur le partage de l'unité et de la pluralité ainsi que sur le regroupement ou la reconstitution de quantités continues ou discrètes articulant des contextes intra et extramathématiques.

3.1 Analyse logique

L'analyse logique permet de formaliser des relations en termes de prédicats (au sens de la logique des prédicats) et met l'accent sur l'arité de ces prédicats, c'est-à-dire le nombre et la nature des éléments qui sont convoqués par les structures multiplicatives. Elle répond aux questions suivantes : quels sont les objets susceptibles d'être convoqués ? Quelles propriétés, quelles relations ? Pour quelles formulations ? (Barrier, Hache & Mathé, 2013). Par exemple, une fraction est une relation qui peut exprimer une quantité lorsqu'elle est mise en relation avec une unité donnée. Elle implique alors la prise en compte du rapport fraction-unité et passe par une mise en relation simultanée de différents ordres d'unités : des unités, des sous-unités voire des sous-sous-unités (Behr et al., 1992).

Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéressons plus particulièrement à deux relations multiplicatives, soit $a \div b$ et $a \times \frac{1}{b}$, qui sont importantes dans la construction de la fraction en tant que structure multiplicative (Houle & Giroux, 2018). D'un point de vue mathématique, on peut considérer que $\frac{a}{b} = a \div b = a \times \frac{1}{b}$. Cependant, d'un point de vue conceptuel, ces trois écritures modélisent des situations très différentes. En effet, la fraction $\frac{a}{b}$ représente généralement, dans la pratique scolaire, le partage d'une unité en *b* sous-unités dans laquelle on prélève *a* sous-unités. En revanche, comme la division est fortement associée au sens partage au primaire, l'écriture $a \div b$ représente *a* unités qu'on partage entre *b* unités. Soulignons que contrairement à la fraction $\frac{a}{b}$, lorsque la division ($a \div b$) est interprétée en termes de partage, *a* et *b* représentent des unités de différentes sortes, par exemple des tablettes de chocolat et des personnes. Quant à la multiplication, elle est habituellement enseignée au primaire comme une addition répétée. Par conséquent, l'écriture $a \times \frac{1}{b}$ est associée, du point de vue des élèves, à l'itération de $\frac{1}{b}$, *a* fois.

Les situations de partage, qui impliquent deux sortes de mesure (Vergnaud, 1981), apparaissent pertinentes pour travailler en articulation la fraction $\frac{a}{b}$ et les relations multiplicatives $a \times \frac{1}{b}$ et $a \div b$. Prenons par exemple le cas d'un partage de 3 unités tablettes de chocolat (Ut) entre 4 unités personnes (Up). L'interprétation de l'égalité $3 \div 4 = 3 \times \frac{1}{4}$ peut être modélisée par le partage de 3 Ut entre 4 Up, qui est équivalent à prendre 3 fois $\frac{1}{4}$ Ut. Nous pouvons effectivement diviser chacune des 3 Ut en 4 sous-unités (correspondant chacune à $\frac{1}{4}$ de l'Ut), de sorte que 3 (Ut) ÷ 4 (Up) devienne $4 \times \frac{1}{4}$ (Ut) + $4 \times \frac{1}{4}$ (Ut) + $4 \times \frac{1}{4}$ (Ut) ÷ 4 (Up) (figure 1).

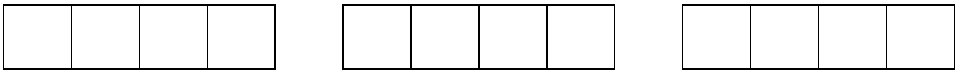

Figure 1. 3 unités tablettes de chocolat divisées chacune en 4 sous-unités

Il y a donc $3 \times \frac{1}{4}$ (Ut) pour chaque Up : $3 \times \frac{1}{4}$ (Ut)/1 (Up) (figure 2).

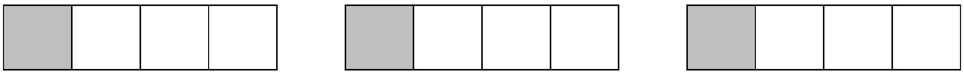

Figure 2. 3 sous-unités de $\frac{1}{4}$ issues chacune d'unité tablette de chocolat différente

Comme le montre la figure 2, l'opération $3 \times \frac{1}{4}$ suggère que les 3 sous-unités de $\frac{1}{4}$ de l'Ut appartiennent chacune à une Ut différente. La fraction $\frac{3}{4}$ suggère plutôt que chaque partie de $\frac{1}{4}$ appartient à une même Ut. Ainsi, il n'y a plus $3 \times \frac{1}{4}$ (Ut) / 1 (Up), mais plutôt $1 \times \frac{3}{4}$ (Ut) /1 (Up) (figure 3).

Figure 3. 3 sous-unités de $\frac{1}{4}$ issues d'une même unité tablette de chocolat

Finalement, les trois sous-unités (correspondant à $\frac{1}{4}$ de l'Ut) peuvent être interprétées comme une sous-unité composite (figure 4). La fraction $\frac{3}{4}$ est alors interprétée sans s'appuyer sur l'itération de $\frac{1}{4}$, 3 fois.

Figure 4. 1 sous-unité de $\frac{3}{4}$ issue d'une même unité tablette de chocolat

Cette analyse sert de point d'appui à l'analyse *a priori*, dont le but est de mettre en regard ces différentes conceptions de la fraction à travers les modes d'agir-parler-penser les fractions dans le cadre d'une séquence d'enseignement visant à favoriser la coordination entre les connaissances sur les structures multiplicatives et celles sur les fractions.

3.2 Analyses *a priori* et *a posteriori*

L'analyse *a priori* (cf. section 5) est organisée selon les possibilités des élèves d'articuler ou non la relation entre une unité et les sous-unités la constituant. Elle décrit les modes d'agir-parler-penser correspondants. Par exemple, l'absence d'articulation entre les unités de différents ordres (unité et sous-unités) se traduit par un plus grand appui sur le dessin et par la présence accrue de gestes dans la réalisation de la tâche. Cette analyse prend en compte les caractéristiques didactiques de la tâche, comme la présence d'une figure, la nature de la consigne de départ ou l'intention didactique, pour anticiper divers modes d'agir-parler-penser. Ainsi, l'intention didactique de construire la relation multiplicative entre l'unité et les sous-unités peut se traduire par un recours de plus en plus faible au dessin pour modéliser le déplacement des sous-unités dans la dimension agir. Cette analyse en termes d'agir-parler-penser fournit des balises pour structurer l'analyse *a posteriori*.

L'analyse *a posteriori* (cf. section 6) se veut épistémologiquement proche de celle menée dans le cadre strict de la TSD. Elle a pour but de décrire l'activité des élèves en résolution de problèmes, relativement à un objet de savoir, ici la relation multiplicative. Les modes d'agir–parler-penser, décrits dans l'analyse *a priori*, sont mis en jeu pour mettre au jour l'interinfluence des différentes dimensions de l'activité des élèves, sans lien de subordination entre ces dimensions. Nous nous intéressons plus particulièrement aux moteurs de leur évolution, notamment les interactions avec l'enseignante et avec les pairs. L'analyse repose sur les observables suivants :

- La nature du langage utilisé (lexique utilisé, recours à des métaphores, à des reformulations, au symbolisme…) et ses fonctions (articulation concept quotidien/concept savant, contextualisation, dévolution, institutionnalisation) ;
- Les gestes posés (recours au dessin, pointage, assemblage, écriture…) ;
- La nature des interactions (langagières, gestuelles, entre pairs, avec l'enseignant) et leurs rôles en termes d'évolution ou de coordination des agir-parler-penser ;
- Les caractéristiques didactiques du problème (présence de figures, de symboles, relation multiplicative en jeu) et leur influence sur les modes d'agir-parler-penser émergents.

4. Présentation de la séquence d'enseignement élaborée

Notre séquence présente un maillage de problèmes autour des relations multiplicatives $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Comme le mentionnent Giroux et Ste-Marie (2007), la reprise incessante d'un même type de tâches entraîne bien souvent « un rodage de techniques propres à la réussite de l'activité elle-même plutôt qu'un investissement du savoir en jeu » (p. 43). Autrement dit, lorsque les élèves reconnaissent ce qui est attendu par l'enseignant, ils peuvent fournir les réponses attendues sans qu'il y ait appropriation du savoir. Le maillage de problèmes proposé vise à amener les élèves à rencontrer une variété de problèmes les obligeant à adapter leurs stratégies en fonction des caractéristiques des problèmes posés (Vergnaud, 1981). Les problèmes sont variés, tant en ce qui concerne la structure des problèmes, leur habillage, le matériel disponible et le support visuel. Nous distinguons six groupes de problèmes. À l'intérieur de chacun des groupes, les variables numériques des problèmes évoluent de manière à favoriser un agir-parler-penser de plus en plus conforme à celui visé par l'enseignement. Le tableau 1 donne un aperçu des caractéristiques des problèmes posés dans chacun des groupes.

	Structures de problème	**Habillage du problème**	**Matériel disponible**	**Support visuel**
Groupe de problèmes 1	Division partage	Barres de chocolat	Cartons (pour représenter les barres de chocolat) Papier/crayon	Données compilées dans un tableau.
Groupe de problèmes 2	Division partage	Bouteilles d'eau (graduées)	Papier/crayon	Bouteilles d'eau graduées Opération mathématique ($a \div b$)
Groupe de problèmes 3	Multiplication Division regroupement	Verres d'eau	Papier/crayon	Énoncé de problème écrit (avec ou sans le dessin des verres)
Groupe de problèmes 4	Division partage	Bricolage	Cartons de différentes couleurs, ficelle	Tableau à compléter par les élèves
Groupe de problèmes 5	N/A	Contexte intramathématique	Cartons avec écriture mathématique	Écriture mathématique
Groupe de problèmes 6	Multiplication Division partage Division regroupement	Bouteilles d'eau à graduer	Bouteilles d'eau non graduées	Aucun

Tableau 1. Maillage de problèmes

La séquence prévoit un va-et-vient relativement rapide entre des phases de dévolution et d'institutionnalisation (Brousseau, 1998) de manière à ce que l'activité mathématique des élèves évolue vers des modes d'agir-parler-penser conformes aux objectifs d'apprentissage visés. La séquence vise ainsi à organiser la dévolution du problème aux élèves, c'est-à-dire à les amener à prendre en charge la résolution des problèmes à partir de leurs connaissances, mais aussi à participer à des phases d'institutionnalisation où est mis en évidence, dans ce qui a été dit et fait, ce qui relève du savoir mathématique. Il s'agit donc de partir des modes d'agir-parler-penser les fractions des élèves et de les faire progresser pour qu'ils se rapprochent des savoirs savants.

L'étude des différentes dimensions de l'activité mathématique (agir-parler-penser), de leur interinfluence et de leur évolution se fait en tenant compte des caractéristiques des problèmes, qui diffèrent considérablement les uns des autres. Dans le cadre de cet article, nous analysons deux problèmes tirés du groupe de problèmes 3, qui portent plus particulièrement sur la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

5. Analyse *a priori* des modes d'agir-parler-penser les fractions de deux problèmes

Dans la suite de ce travail, nous nous concentrons sur deux problèmes de notre séquence qui permettent un travail autour de la relation multiplicative suivante : $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ .Dans le problème 1, $a = b$, tandis que dans le problème 2, a est multiple de b. Voici plus précisément les relations multiplicatives que sous-tend chacun des problèmes.

Problème 1 : $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Problème 2 : $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$.

Les analyses *a priori* présentées ci-dessous reposent sur l'hypothèse que la façon dont l'élève conceptualise le rapport unité/sous-unités se manifeste dans différents modes d'agir-parler-penser la relation multiplicative. Bien qu'on puisse raisonnablement supposer que les modes d'agir, de parler et de penser ces relations évoluent simultanément, ils sont présentés séparément pour des raisons méthodologiques.

5.1. Analyse *a priori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du premier problème

L'énoncé du premier problème est le suivant : « Avec 3 verres remplis aux $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ? » Il est présenté à l'écrit aux élèves et il est accompagné du dessin en figure 5.

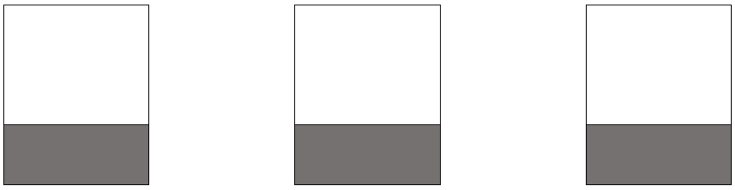

Figure 5. Dessin accompagnant le premier énoncé de problème

Le tableau 2 présente différents modes d'agir-parler-penser possibles pour la relation $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ qui permet de modéliser les relations entre les données de ce problème.

	Modes de penser	**Modes d'agir**	**Modes de parler**
Sans articulation entre des unités de différents ordres.	Assemblage approximatif des quantités (des parties d'unités différentes) pour **compléter** une unité.	Déplacer et assembler des quantités ($\frac{1}{3}$) de façon approximative en pointant les quantités ($\frac{1}{3}$) de 2 unités (2 verres) pour compléter une troisième unité.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça arriverait jusqu'ici. »
	Assemblage approximatif des quantités (des parties d'unités différentes) pour **constituer** une unité.	Déplacer et assembler des quantités ($\frac{1}{3}$) de façon approximative en pointant les quantités ($\frac{1}{3}$) des 3 unités (3 verres) de manière à constituer une nouvelle unité.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça arriverait jusqu'ici. »

Construction progressive de la relation entre l'unité et les sous-unités.	Ajout de $\frac{1}{3}$, 2 fois pour compléter l'unité : $\frac{1}{3} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{3}{3} = 1$	Déplacer et assembler des **sous-unités** ($\frac{1}{3}$) en pointant les sous-unités ($\frac{1}{3}$) de 2 unités (2 verres) pour compléter une troisième unité. Pas de gestes.	« À un tiers, il manque un tiers et (ou plus) un tiers » « À un tiers, j'ajoute un tiers et (ou plus) un tiers. »
	Itération des sous-unités $\frac{1}{3}$, 3 fois pour constituer l'unité : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$	Déplacer et assembler des sous-unités ($\frac{1}{3}$) en pointant les sous-unités ($\frac{1}{3}$) des 3 unités (3 verres) de manière à constituer une nouvelle unité. Pas de gestes.	« Un tiers plus un tiers plus un tiers. » « Un tiers, un tiers, un tiers. »
	Multiplication d'une sous-unité $\frac{1}{3}$ par 2 et complétion d'une unité : $\frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$	Pas de gestes.	« À un tiers, il manque deux fois un tiers. » « À un tiers, j'ajoute deux fois un tiers. »
	Multiplication d'une sous-unité $\frac{1}{3}$ par 3 pour constituer l'unité : $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$	Pas de gestes.	« Trois fois un tiers. » « Dans 1 il y a trois tiers. »

Tableau 2. Agir-parler-penser la relation multiplicative $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

L'analyse *a priori* est organisée selon les possibilités des élèves d'articuler ou non la relation entre une unité et les sous-unités la constituant. Lorsqu'il n'y a pas encore d'articulation entre les unités de différents ordres (unité et sous-unités), les modes d'agir-parler-penser les relations en jeu dans la tâche se produisent à partir de l'assemblage approximatif des quantités. Le déplacement et l'assemblage de la quantité contenue dans chaque verre peuvent se faire soit de manière à compléter une unité, c'est-à-dire que la quantité de deux verres est ajoutée à l'un des verres, soit de manière à constituer une nouvelle unité, c'est-à-dire qu'un nouveau verre est constitué à partir des quantités contenues dans les trois verres. Dans ces deux cas, les modes d'agir (déplacer et assembler) et de parler (avec des déictiques fréquents) rendent compte d'une forte prise en compte des dessins disponibles dans cette tâche.

La construction progressive de la relation entre l'unité et les sous-unités qui la composent permet de se détacher d'un agir-parler-penser en termes d'assemblage. Cette relation peut être établie à partir d'un raisonnement additif ou multiplicatif. Dans le cas d'un raisonnement additif, les modes d'agir-parler-penser consistent soit à compléter une unité en ajoutant un tiers et un tiers au tiers déjà contenu dans un verre, soit à constituer une nouvelle unité en assemblant un tiers plus un tiers plus un tiers. Dans le cas d'un raisonnement multiplicatif, il s'agit plutôt d'ajouter deux fois une quantité correspondant à un tiers d'un verre au tiers déjà contenu dans un verre, soit d'établir spontanément qu'on obtient trois fois un tiers (donc un verre entier) avec trois verres remplis au tiers de leur capacité.

Enfin, l'unité est complétée ou constituée par des relations mathématiques qui se manifestent dans les modes de parler les relations en jeu dans le problème (recours à des déictiques, énonciation de la ou des fractions en jeu, présence des expressions « plus » et « fois ») ainsi que dans les modes d'agir. Plus la relation entre l'unité et les sous-unités la constituant est contrôlée, moins le recours au dessin pour modéliser le déplacement des sous-unités est nécessaire.

5.2. Analyse *a priori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du deuxième problème

L'énoncé du deuxième problème est le suivant : « Avec 6 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ? » (Le support visuel de la question précédente reste disponible).

Le tableau 3 présente différents modes d'agir-parler-penser possibles pour la relation $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$, qui permet de modéliser ce problème.

	Modes de penser	**Modes d'agir**	**Modes de parler**
Sans articulation entre des unités de différents ordres.	Assemblage approximatif des quantités (des parties d'unités différentes) pour compléter/ constituer deux unités.	Dessiner 6 unités et colorier approximativement une partie de chacune (ou s'appuyer sur le dessin de la tâche 1 et ajouter 3 unités). Déplacer et assembler les quantités coloriées pour compléter/constituer deux unités.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça fait deux. »
Construction progressive de la relation entre l'unité et les sous-unités.	Assemblage des sous-unités (constitutives d'unités différentes) pour compléter/constituer deux unités.	Dessiner 6 unités et colorier approximativement $\frac{1}{3}$ de chacune (ou s'appuyer sur le dessin de la tâche 1 et ajouter 3 unités). Déplacer et assembler les sous-unités ($\frac{1}{3}$) pour compléter/constituer deux unités.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça fait deux. »
	Articulation entre les 3 sous-unités de $\frac{1}{3}$, 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$), et une unité composite de $\frac{3}{3}$, pour constituer deux unités. $3 \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{3}$	S'appuyer sur le dessin de la tâche 1 pour contrôler la coordination entre l'unité et les sous-unités. Itérer 3 sous-unités d'une même unité jusqu'à l'obtention de 6, soit par comptage rythmé en pointant les sous-unités ($\frac{1}{3}$), soit par addition répétée de 3 en regardant le dessin. Pas de gestes.	« 1, 2, 3... 4, 5, 6. Ça fait 2. » « Trois plus trois, ça fait six, donc c'est deux. »

	Prise en compte de l'unité composite de 3/3, pour constituer deux unités. Articulation entre 6 sous-unités de $\frac{1}{3}$ et deux unités ($\frac{6}{3}$). $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ $6 \div 3 =$ ___ $3 \times$ ___ $= 6$	Pas de gestes.	« Ça en prend 3 pour en remplir 1 et 6 divisé par 3 ça fait 2. » « Ça en prend 3 pour en remplir 1 et 2 fois 3 ça fait 6. » « Ça fait 6 tiers donc c'est 2. »

Tableau 3. Agir-parler-penser la relation multiplicative $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$

Ici encore, l'analyse *a priori* est organisée en tenant compte des possibilités des élèves d'articuler ou non la relation entre une unité et les sous-unités (unités de différents ordres) la constituant. Tout comme dans le problème précédent, un agir-parler-penser en termes d'assemblage est possible. Les élèves pourront, par exemple, dessiner 6 verres remplis approximativement au tiers de leur capacité, ou encore s'appuyer sur le dessin de l'énoncé précédent et ajouter 3 verres remplis au tiers de leur capacité. Le déplacement et l'assemblage peuvent ensuite être envisagés de manière à compléter des unités ou à constituer de nouvelles unités.

L'établissement de la relation entre 3 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité et un verre rempli au $\frac{3}{3}$ de sa capacité ($3 \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{3}$) évite d'avoir à s'appuyer sur le dessin de 6 verres. Cela permet de compter, sur un même verre, les trois sous-unités ($\frac{1}{3}$) rendant ainsi compte d'une certaine coordination entre l'unité et les sous-unités qui la composent. Cette façon d'entrer dans le problème peut se manifester par des modes de parler telles que « Un, deux, trois… quatre, cinq, six. Ça fait deux. », ou encore « Trois plus trois ça fait six, donc c'est deux ». Le nombre 6 représente alors des sous-unités ($\frac{1}{3}$) alors que le nombre 2 représente des unités.

Par ailleurs, la prise en compte explicite de la relation multiplicative entre 6 sous-unités de $\frac{1}{3}$ et deux unités évite d'avoir à agir sur le dessin pour contrôler les relations en jeu. Elle peut conduire à des modes de parler du type : « Ça en prend 3 pour en remplir 1, et 6 divisé par 3 ça fait 2 ». Ce mode d'agir-parler-penser rend compte d'une construction de la relation multiplicative entre l'unité et ses sous-unités, même si une référence explicite à l'unité n'est pas évoquée.

Notons enfin qu'une autre stratégie possible consiste à s'appuyer sur le problème 1 qui, rappelons-le, implique 3 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité. L'élève peut effectivement remarquer qu'avec 6 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, on double le nombre de verres. Il suffit donc de doubler le résultat du problème 1 pour trouver celui du problème 2. Cette stratégie permet d'éviter le traitement de la relation entre les unités et les sous-unités.

6. Analyse *a posteriori* des modes d'agir-parler-penser les fractions de deux problèmes

La séance en classe alterne des moments de travail en équipe et des retours en grand groupe. Nous présentons d'abord l'analyse *a posteriori* de la phase de recherche d'un sous-groupe de quatre élèves (Christophe, Vincent, Léo et Alexis[1]) confronté au premier problème ainsi que le retour auprès de la classe qui a suivi. Nous présentons ensuite l'analyse de la phase de recherche du même sous-groupe confronté au deuxième problème.

Nous cherchons ici à décrire l'activité mathématique des élèves en prenant en compte les caractéristiques spécifiques des problèmes en jeu. Le langage utilisé, les gestes posés et la nature des interactions nous permettent de mettre au jour les intentions didactiques de l'enseignante, la nature des interactions entre pairs ainsi que leur effet sur la dynamique d'évolution des modes d'agir-parler-penser des élèves, à travers lesquels nous appréhendons partiellement leur conceptualisation de la relation multiplicative et du rapport entre unités et sous-unités.

6.1. Analyse *a posteriori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du premier problème

Dans un premier temps, rappelons l'énoncé du problème :

Avec 3 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ? (Sous l'énoncé sont dessinés trois verres et $\frac{1}{3}$ de chacun est colorié)

6.1.2. Travail en équipe

Lors du travail en sous-groupe, l'énoncé du problème est lu par un élève du groupe, Christophe. Cependant, celui-ci s'arrête lorsqu'il arrive à $\frac{1}{3}$ et dit avec hésitation « un et trois quarts ». Notons que depuis la première séance, Christophe lit correctement la fraction $\frac{1}{2}$, mais lorsqu'il s'agit d'autres fractions, il utilise le terme « quarts ». On peut donc considérer que le mot « trois » est choisi en raison du dénominateur (3) et

---

[1] Des noms fictifs ont été attribués aux élèves afin d'assurer leur anonymat.

le mot « quart », pour exprimer qu'il s'agit d'une autre fraction que la demie. Un autre élève, Vincent, le reprend et dit « un tiers ». Les interactions entre élèves peuvent ainsi favoriser le passage d'une manière spontanée de parler la fraction vers une manière conforme à celle attendue. Nous observons effectivement à quelques reprises lors de la séquence, un effort chez les élèves pour lire les fractions correctement. Cet effort se manifeste par un moment d'arrêt où ils réfléchissent aux termes à utiliser lorsqu'ils doivent lire une fraction, ou encore par leur regard qui se dirige vers l'enseignante ou un autre élève pour obtenir de l'aide ou une rétroaction lorsqu'ils font une tentative pour lire une fraction.

Comme le montre l'extrait ci-dessous, l'enseignante reformule l'énoncé et Vincent répond rapidement « un ».

> Enseignante : On pourrait faire combien de verres pleins avec nos trois verres remplis au tiers de leur capacité ?
>
> Vincent : Un.
>
> Enseignante : Toi tu dis un, pourquoi tu penses que c'est un ?
>
> Vincent : Parce que dans un verre y'en a trois, pis là, un, deux, trois (en pointant le tiers colorié de chacun des verres).
>
> Enseignante : Parce que dans un verre, y a trois tiers.
>
> Vincent : Ouais !

Vincent semble reconnaître que l'itération de $\frac{1}{3}$, trois fois, permet de constituer une unité, ce qui peut reposer sur un raisonnement additif ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$) ou sur un raisonnement multiplicatif ($3 \times \frac{1}{3} = 1$). Les caractéristiques du problème l'amènent à s'appuyer sur le dessin pour justifier cette relation. Notons cependant que Vincent dit « il y en a trois » plutôt que « il y a trois tiers ». On peut faire différentes hypothèses sur les raisons qui expliquent ce choix. Ce pourrait être par économie de langage ou encore pour éviter le mot « tiers » qui est peu maîtrisé. Cette formulation peut aussi suggérer que Vincent considère la partie colorée comme étant une unité (1 partie) constituante d'une autre unité (le verre), sans toutefois lui associer une mesure. Comme nous l'avons vu lors de l'analyse *a priori*, il n'est effectivement pas nécessaire, étant donné la présence du dessin, de se référer aux fractions pour résoudre le problème. Il n'en demeure pas moins que lorsque l'enseignante reformule les propos de Vincent en précisant « Parce que dans un verre, il y a trois tiers », cette formulation est aussitôt acceptée par Vincent qui s'exclame avec assurance « Ouais ! ». Il est possible que cette relation ait déjà été construite par Vincent. Il est possible également que Vincent construise cette relation dans l'interaction avec l'enseignante. La partie coloriée de chaque verre ne correspond alors plus à une unité, mais à $\frac{1}{3}$ d'unité puisqu'elle est mesurée en prenant comme unité de référence, le verre.

L'enseignante questionne ensuite les trois autres élèves : « Qu'est-ce que vous en pensez les autres ? Si on prend ces trois verres-là, pis qu'on les met dans un verre, est-ce que ça va déborder, est-ce qu'il ne sera pas plein ou s'il va être plein ? » En ayant recours à une métaphore vers un contexte réel, l'enseignante simplifie le problème. Cette intervention vise à aider les élèves à se représenter le problème et à s'engager dans la tâche. De fait, Christophe et Léo (qui jusqu'à présent ne s'étaient pas prononcés) répondent que le verre sera plein. Cette métaphore permet également de revenir à des modes d'agir-parler-penser plus quotidien, qui permet d'éviter le traitement des fractions. L'enseignante prend alors appui sur le dessin et formule donc la question sans recourir aux fractions, ce qui favorise le déplacement et l'assemblage des quantités plutôt qu'un travail sur la relation $\frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{3} = 1$. Le passage à un langage plus courant se manifeste aussi par le recours à une métonymie, phénomène sémantique très courant consistant à remplacer un mot par un autre dont le sens lui est relié. Lorsque l'enseignante dit « Si on prend ces trois verres-là, pis qu'on les met dans un verre », il ne s'agit pas, en effet, de mettre trois verres dans un verre, mais plutôt de mettre le contenu des verres dans un verre. L'enseignante désigne le contenant en faisant référence au contenu. Cette métonymie, comme c'est souvent le cas dans le langage courant, ne semble pas ici créer de confusion dans l'échange, mais vient plutôt soutenir le processus de décontextualisation permettant à Christophe de justifier son choix : « Plein, ‹ à cause que › un et trois quarts (en pointant « $\frac{1}{3}$ » dans l'énoncé du problème) ça fait un, deux, trois (en pointant chaque partie « un tiers »). Pis admettons que j'enlève lui pis lui (il barre la partie d'un tiers du deuxième verre et celle du troisième verre), pis je les mets là et là (il sépare le premier verre en trois parties et pointe les deux parties non coloriées), ben là ça va faire un verre. » La présence du dessin et la question formulée par l'enseignante conduisent Christophe à déplacer et à assembler les quantités. Il cherche toutefois à utiliser une expression fractionnaire pour les désigner. Notons par ailleurs que, bien que la question formulée par l'enseignante suggère la constitution d'une nouvelle unité, Christophe choisit plutôt d'ajouter le $\frac{1}{3}$ du deuxième verre et le $\frac{1}{3}$ du troisième verre au premier verre pour le compléter. L'enseignante, reprenant les mots prononcés par Christophe et les actions qu'il a évoquées, inscrit $\frac{1}{3}$ à côté de chacune des parties du premier verre en mettant en évidence, à l'oral, la relation visée par l'enseignement : « Ça ici c'est un tiers (elle écrit $\frac{1}{3}$ à côté de la partie d'un tiers du premier verre) et un tiers c'est ce qui entre trois fois dans un (elle écrit $\frac{1}{3}$ à côté des deux autres parties d'un tiers du premier verre). »

L'analyse des interactions didactiques montre que l'enseignante prend en compte l'agir-parler-penser spontané des élèves de façon à les amener vers un agir-parler-penser plus évolué sur le plan mathématique. L'enseignante s'appuie d'abord sur le dessin, mais ses propos en fin d'échange sont décontextualisés : « un tiers c'est ce qui entre trois fois dans un ». De plus, non seulement le lexique attendu est institutionnalisé, mais l'écriture symbolique qui modélise les relations entre les données du problème est présentée : $1 = 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$. Ainsi, pour aider les élèves à donner du sens à cette écriture, l'enseignante s'appuie à l'oral sur le problème. Il s'agit ici d'une institutionnalisation locale, c'est-à-dire que l'institutionnalisation est attachée au contexte (Douady, 1984). Même si le problème, tel qu'il est présenté, ne nécessite pas le recours à cette écriture, celle-ci semble accessible pour les élèves dans la mesure où l'enseignante s'appuie sur les modes d'agir-parler-penser spontanés des élèves pour introduire des modes d'agir-parler-penser les fractions qui correspondent aux objectifs d'apprentissage.

Notons, par ailleurs, qu'un élève, Alexis, répond « neuf ». Cette réponse a, sur le coup, été ignorée tant par l'enseignante que par les autres élèves. Comme le montre l'extrait suivant, l'enseignante revient néanmoins sur cette réponse erronée.

> Enseignante : Toi tu disais neuf. Pourquoi tu disais neuf ? Moi je sais d'où il vient ton neuf.
>
> Léo : Parce qu'il a compté ça : un, deux, trois (en pointant les trois parties du premier verre), quatre, cinq, six (en pointant les trois parties du deuxième verre), sept, huit, neuf (en pointant les trois parties du troisième verre).
>
> Enseignante : Exactement, on pourrait dire ça comme ça, dans trois verres, j'ai neuf tiers.

La réponse d'Alexis (neuf), qui n'était pas prévue à l'analyse *a priori*, conduit à introduire la relation multiplicative $9 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$, puisque la réponse « neuf » consiste au nombre de tiers dans trois verres. Ainsi, l'agir-parler-penser de la relation $b \times \frac{1}{b} = 1$ glisse vers un agir-parler-penser de la relation : $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = x$ (où a est multiple de b). Cette relation est d'ailleurs celle visée dans le deuxième problème. En plus de mettre en évidence, à l'oral, cette relation, l'enseignante utilise des reformulations non verbales. En effet, l'enseignante « reformule » le geste de l'élève en matérialisant par des traits de crayons les trois tiers constituant chacun des verres pleins.

6.1.2. Retour en grand groupe

Au moment du retour en grand groupe, Christophe présente au tableau le premier problème. Après avoir lu l'énoncé, il le reformule dans ses mots et consulte ses camarades : « Ils veulent que je les mette ensemble pour que ça donne combien de verres ? ». L'expression « mettre ensemble » renvoie à l'idée d'assemblage qui est constitutive de son mode de penser la relation en jeu. Il dessine trois verres de taille similaire, mais sépare chacun d'eux en trois parties inégales. Il colorie ensuite une partie de chaque verre. Le fait de ne pas chercher à séparer les parties de façon égale pourrait être interprété comme une incompréhension de la nécessité d'un partage égal. Le travail réalisé par Christophe en sous-groupe nous donne plutôt à penser qu'il utilise ici le dessin comme un appui pour exprimer/soutenir son raisonnement, ce qui pourrait être le fruit d'une conceptualisation avancée de la fraction. Le raisonnement de l'élève semble être basé sur la relation sous-unités/unité, et ce, en faisant abstraction de leur valeur empirique. Dans cette perspective, il n'est alors pas nécessaire de dessiner avec justesse le verre séparé en trois parties égales. Comme le relève Steefland (1991), si les élèves dessinent d'abord de manière à représenter le plus fidèlement possible les problèmes (models of), peu à peu, le rôle du dessin change, étant plutôt utilisé comme outil de résolution (models for). Cela suggère qu'il anticipe que l'unité est constituée de trois sous-unités d'un tiers et donc, qu'en versant le contenu de deux verres remplis au tiers de leur capacité dans un autre verre aussi rempli au tiers de sa capacité, on obtiendra un verre plein. Ainsi, plus l'agir-parler-penser les fractions évolue, plus il est possible de se détacher du réel.

Le mode d'agir-parler-penser de Christophe se différencie de celui d'un autre élève dans la classe (Zachary), qui cherche non pas à compléter une unité, mais plutôt à constituer une nouvelle unité.

> Christophe : Est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut me dire qu'est-ce qu'il faut faire ? (en s'adressant à tous les élèves de la classe)
>
> Zachary : On fait une ligne dessus.
>
> Christophe : Sur lui ? (en pointant une partie d'un tiers coloriée sur un des verres)
>
> Zachary : Non, toute ! Pis ça va faire un.
>
> Christophe : Mais où je les mets ces deux-là ? (en pointant deux parties d'un tiers coloriées)
>
> Zachary : Ces deux-là ?
>
> Christophe : Ouais.
>
> Zachary : Non, les trois.
>
> Christophe : Ces deux-là, où je les mets ? J'ai pas quatre verres, j'ai juste trois verres.

L'écart entre les modes d'agir-parler-penser de chacun des élèves provoque un malentendu. L'enseignante met en évidence la différence entre les interprétations de chacun des élèves :

> Enseignante : Parce que lui (Zachary), ce qu'il fait, il prend les trois (elle dessine un verre sous les trois verres dessinés par Christophe) et il se dit, on va toutes les vider

> dans celui-là (en pointant le verre qu'elle a dessiné). (...) Parce que toi (Christophe), tu prenais lui et lui (en pointant le 2e et 3e verre) et tu le vidais dans celui-là (en faisant le geste avec ses mains), mais lui il se disait, on va toutes les vider ici.

Cette intervention permet rapidement aux élèves d'établir la relation entre leur mode d'agir-parler-penser. En effet, par la suite, Christophe divise en trois parties inégales le verre dessiné par l'enseignante et colorie les trois parties. Il adapte ainsi son mode d'agir-parler-penser en constituant une nouvelle unité.

De plus, comme le montre l'extrait suivant, Christophe développe peu à peu un mode d'agir-parler-penser les fractions semblables à celui visé par l'enseignement.

> Christophe : Combien de tiers pour ce verre-là ? (en pointant le verre dessiné sous les trois verres)
>
> Un élève de la classe : Trois tiers.
>
> Christophe : Trois (il écrit $\frac{1}{3}$ à côté de chaque partie représentant un tiers)
>
> Enseignante : Wow ! Très très bien. Trois tiers, est-ce que tu aurais pu l'écrire autrement qu'en tout il y a trois tiers ?
>
> (Christophe écrit $\frac{3}{3}$).

Christophe dégage ainsi de façon explicite qu'une unité est constituée de l'itération d'un tiers, trois fois, et établit la relation d'équivalence entre *1* et $\frac{3}{3}$. L'écriture de la fraction $\frac{1}{3}$ émerge spontanément au moment du retour et on constate également une évolution dans l'utilisation de l'expression « un tiers ». L'adaptation de l'élève à son environnement – la tâche ainsi que les interactions avec les autres élèves et l'enseignante – lui permet de s'approprier progressivement un mode d'agir-parler-penser les fractions qui correspond à celui attendu.

6.2. Analyse *a posteriori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du deuxième problème

Le deuxième problème est donné aux élèves sur la même feuille que le premier. L'énoncé est le suivant (sans représentation visuelle associée à l'énoncé) :

Avec 6 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ?

Le fait de ne pas avoir un dessin associé directement à l'énoncé permet aux élèves de décider plus librement leur mode d'agir. Il est effectivement possible de s'appuyer sur le dessin du problème précédent, de faire un nouveau dessin ou encore de recourir à une stratégie numérique.

Après la lecture de l'énoncé, l'enseignante met l'accent sur la différence entre les deux problèmes : « Tantôt on avait trois verres, mais si on en avait six verres remplis au tiers de leur capacité, ça ferait combien de verres pleins ? », ce qui pourrait encourager les élèves à s'appuyer sur le dessin associé au problème précédent. Cependant, elle retourne ensuite la feuille de manière à ce que les élèves puissent faire un nouveau dessin. Christophe, qui préfère s'appuyer sur le dessin du premier problème, retourne la feuille et observe les trois verres. Il répond ensuite « trois » au problème posé, mais change rapidement d'avis et dit « deux, deux, deux ! » (il insiste sur deux). Quant à Vincent, il pose la question suivante : « On a six verres d'un tiers et on essaie d'en faire des pleins, c'est ça ? ». L'enseignante confirme cette interprétation. Vincent se dit alors en accord avec la solution apportée par Christophe, soit 2, et ajoute en guise de justification : « Parce qu'il en faut trois pour remplir un et on a six alors trois plus trois ça fait six ». Tout comme au problème précédent, cet élève semble chercher à éviter l'expression « tiers ». Les modes d'agir-parler-penser de Christophe et Vincent sont reportés dans le tableau 4.

	Modes de penser	**Modes d'agir**	**Modes de parler**
Christophe	Articulation entre les 3 sous-unités de $\frac{1}{3}$, 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$), et une unité composite de $\frac{3}{3}$, pour constituer deux unités. $3 \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{3}$	S'appuyer sur le dessin de la tâche 1 pour contrôler la coordination entre l'unité et les sous-unités. Itérer 3 sous-unités d'une même unité jusqu'à l'obtention de 6.	« Trois… deux, deux, deux »
Vincent	Prise en compte de l'unité composite de $\frac{3}{3}$, pour constituer deux unités. Articulation entre 6 sous-unités de $\frac{1}{3}$ et deux unités ($\frac{6}{3}$). $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ $6 \div 3 =$ ___ $3 \times$ ___ $= 6$	Pas de gestes.	« Parce qu'il en faut trois pour remplir un et on a six alors trois plus trois ça fait six ».

Tableau 4. Modes d'agir-parler-penser de Christophe et Vincent au problème 2

L'enseignante demande à Christophe et Vincent d'expliquer leur solution à un élève de l'équipe qui ne semble pas comprendre. Les explications respectives permettent, par exemple, d'apprécier le rôle du dessin en tant que support au raisonnement. De fait, des formes non verbales de langage (des gestes sur le dessin en question) se manifestent et viennent échafauder la construction de la relation unité/sous-unité.

L'explication de Vincent se différencie de celle de Christophe. Bien que l'enseignante ait, une fois de plus, retourné la feuille pour permettre aux élèves de dessiner, les explications de Vincent ne s'appuient pas sur le dessin : « parce que Marc, penses-y, il en faut trois pour en remplir un et on en a six, c'est évident ». Christophe utilise quant à lui le dessin pour justifier sa solution. Il dessine six verres dans lesquels une partie qui correspond à environ un sixième du verre, mais qui vise à représenter un tiers, est coloriée. Il barre le contenu des deuxième et troisième verres pour remplir le premier verre, puis barre le contenu des cinquième et sixième verres pour remplir le quatrième et dit : « Tu prends lui, tu le mets là ». Ainsi, il déplace et assemble les parties représentant un tiers pour compléter les verres.

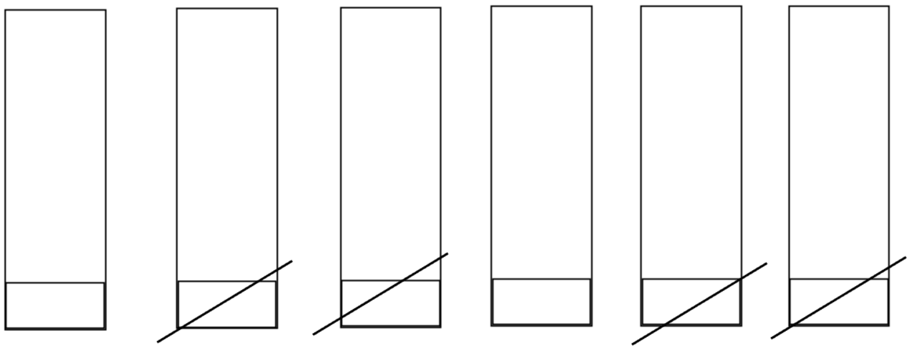

Figure 6. Illustration du dessin de Christophe pour justifier sa solution au problème 2

Tout comme dans le problème précédent, Christophe ne cherche pas à représenter avec précision un tiers de chacun des verres. Le dessin lui permet plutôt d'exprimer son raisonnement. Or, dans ce cas-ci, il explique sa solution pour aider un autre élève. Si cet élève s'appuie sur l'assemblage des quantités dessinées par Christophe pour compléter les verres, il pourra difficilement comprendre ses explications. En effet, en assemblant les quantités coloriées par Christophe dans chacun des trois verres, cela ne permet pas d'obtenir un verre plein. Le dessin peut ainsi avoir différents statuts. En l'occurrence, Christophe semble l'utiliser pour expliquer des relations théoriques déjà établies (l'articulation entre différents ordres d'unités, soit les sous-unités d'un tiers et une unité d'ordre supérieur, le verre). Le dessin peut ici contribuer à la consolidation de la notion de fraction pour celui qui le fait. Cependant, il pourrait également générer des incompréhensions entre les élèves si d'autres attribuent au dessin un statut différent.

Au cours de ce problème, l'évolution des modes d'agir-parler-penser de chacun des élèves se fait en parallèle, c'est-à-dire que la relation multiplicative en jeu évolue progressivement sans qu'il y ait interinfluence entre les modes d'agir-parler-penser de chacun des élèves. Il s'agit d'un agir-parler-penser différent, mais complémentaire. Christophe compte en pointant les sous-unités d'un tiers (en reprenant le dessin du premier problème) et Vincent évoque un calcul, « 3 plus 3 ça fait 6 donc c'est deux ». Conceptuellement, dans les deux cas, ils construisent la même relation :

– Etablissement de la relation $b \times \frac{1}{b} = 1$.
– Articulation entre des sous-unités $\frac{1}{b}$ et l'unité $\frac{b}{b}$ pour constituer des unités d'ordre supérieur $x \times \frac{b}{b}$.

Conclusion

L'analyse des interactions langagières en termes d'agir-parler-penser permet de réaliser un travail approfondi sur les plans théorique et expérimental autour du concept de fraction et de porter un regard fin sur le passage progressif des concepts spontanés aux concepts scientifiques. *A priori*, l'analyse logique des structures multiplicatives concernées dans les problèmes mathématiques proposés aux élèves permet un changement de regard sur la fraction qui se fonde sur le rapport fraction-unité mettant en relation de façon simultanée différents ordres d'unités. L'analyse logique, prenant appui sur les travaux de Behr et al. (1992), nous permet d'appréhender la fraction comme se constituant, en tant que relation multiplicative, à travers l'articulation d'unités et de sous-unités produisant des unités composites. L'analyse didactique des problèmes proposés aux élèves nous permet d'approcher, dans un sens causal et non prescriptif, les manières de rencontrer les relations multiplicatives inhérentes au concept fraction. L'analyse *a priori* que nous avons réalisée montre comment la gestion des unités composites nécessaire au traitement de la relation multiplicative passe par la capacité à traiter simultanément différents ordres d'unités. Par exemple, l'évolution de l'agir-parler-penser la relation fraction-unité traduit un changement de regard sur la fraction $\frac{6}{3}$, éventuellement reconnue comme deux unités composites, plutôt que comme 6 unités élémentaires, ce qui témoigne de la capacité à concevoir des fractions non unitaires comme des unités composites.

Les analyses *a posteriori* permettent d'étudier les échanges langagiers entre l'enseignante et les élèves autour de problèmes mathématiques présentant des caractéristiques différentes. L'évolution et l'interinfluence des modes d'agir-parler-penser les fractions se produit au cœur des interactions langagières entre les élèves et l'enseignante, mais aussi grâce aux interactions permanentes entre les élèves et le problème posé. Cela implique la prise en compte d'éléments constitutifs ou non de l'énoncé (énoncé écrit, dessin à réaliser ou déjà tracé, nombres écrits ou évoqués, schémas, modification des représentations visuelles données, etc.) à travers des manifestations plus ou moins visibles telles que l'agir sur les dessins. Au fur et à mesure que la relation entre l'unité et les sous-unités la constituant se construit, le rôle du dessin se modifie, c'est-à-dire qu'il agit éventuellement comme outil pour soutenir ou exprimer un raisonnement. Alors que les caractéristiques du premier problème (avec présence des verres dessinés) encouragent le déplacement et l'assemblage des quantités et donc aussi le recours à des déictiques au détriment d'expressions propres aux fractions, les caractéristiques du deuxième problème favorisent davantage la mise en place de stratégies numériques s'appuyant sur un raisonnement additif ou multiplicatif. La progression de ces deux problèmes et les interventions de l'enseignante visent à partir des modes d'agir-parler-penser spontanés des élèves pour les faire évoluer vers les savoirs mathématiques socialement reconnus. L'agir-parler-penser de l'enseignante encourage les élèves à se détacher du réel pour envisager les relations mathématiques en jeu dans les problèmes. Les pratiques langagières de l'enseignante participent effectivement au processus de décontextualisation, grâce à un travail permanent de reformulation, d'emploi systématique du vocabulaire et d'introduction du symbolisme, guidant ainsi les élèves vers des formes sémiotiques conventionnelles et stabilisées.

En somme, notre recherche suggère qu'une analyse de la relation entre l'enseignement, l'apprentissage et les objets de savoir sous l'angle de l'agir-parler-penser est pertinente non seulement pour des objets géométriques, mais aussi pour d'autres objets mathématiques tels que les fractions. Un tel travail permet effectivement de procéder à une analyse approfondie des interactions didactiques et d'interpréter finement les décalages et la synchronisation de l'activité mathématique entre différents élèves et entre les élèves et l'enseignant. La prise en compte des trois dimensions de l'activité mathématique (agir, parler et penser) est selon nous une avenue prometteuse pour enrichir les analyses *a priori* et l'analyse des interactions didactiques, et ce, bien au-delà du domaine de la géométrie.

Bibliographie

ADJIAGE, R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

ARTIGUE, M. (1990), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9(3)**, 281-308.

BARRERA-CURIN, R. I., BULF, C., & VENANT, F. (2016), Didactique, Sémantique et Métaphore : Analyses des langages en classe de géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 39-78.

BARRERA-CURIN, R. I., & CHESNAIS A. (2015), L'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique de l'élève : la question de la participation de l'enseignant à l'apprentissage de l'élève en contexte d'orthopédagogie. In Theis, Laurent (Eds.), *Colloque de l'Espace mathématique francophone (EMF) : Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 779-790), Alger : Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, Société Mathématique d'Algérie.

BARRIER, T., HACHE, C., & MATHÉ A.-C. (2013), Seeing – acting – speaking in geometry: a case study. In B. Ubuz, C. Haser, et M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 1458- 1467), Ankara : Middle East Technical University.

BARRIER, T., CHESNAIS, A., & HACHE, C. (2014), Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 175-193.

BAUTIER, E. (1995), *Pratiques langagières, pratiques sociales : de la socio-linguistique à la sociologie du langage*. Paris : L'Harmattan.

BAUTIER, E., & GOIGOUX, R. (2004), Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, **148**, 89-100.

BEHR, M., HAREL, G., POST, T., & LESH, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New-York: Macmillan Publishing.

BERNIE, J.-P. (2002), L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?, *Revue Française de Pédagogie*, **141**, 77-88.

BERNSTEIN, B. (1971/1975), *Langage et classes sociales, codes sociolinguistiques et contrôle social.* Paris : Minuit.

BLOUIN, P. (1993), *Enseignement de la notion de fraction à des élèves de 1ère secondaire en difficulté d'apprentissage*. Thèse de doctorat. Université de Montréal, Montréal.

BRONNER, A., BULF, C., CASTELA, C., GEORGET, J.-P, LARGUIE, M., PEDEMONTE, B., PRESSIAT, A., & RODITI, E. (Coord) (2013), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987), *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.

BULF, C., MATHE, A.-C., & MITHALAL, J. (2014), Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 29-48.

BULF, C., MATHE, A.-C., & MITHALAL, J. (2015), Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **35(1)**, 7-36.

CHARALAMBOUS, C.Y., & PITTA-PANTAZI, D. (2007), Drawing on a theoretical model to study students understandings of fractions, *Educational Studies in Mathematics*, **64(3)**, 293-316.

CHARLOT, B., BEAUTIER, E., & ROCHE, J.-Y. (1992), *École et savoirs dans les banlieux… et ailleurs*. Paris : Armand Colin.

DESJARDINS, M., & HETU, J.-C. (1974), *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

GIROUX, J., & STE-MARIE, A. (2007), Maillage de situations didactiques dans des classes d'adaptation scolaire. In J. Giroux et D. Gauthier (Eds.), *L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* (pp. 35-63), Montréal : Éditions Bande didactique.

HACHE, C. (2013), Langage mathématique à la transition primaire/collège. *Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*, ARPEME, 452-463.

HOULE, V. (2016), *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction*. Thèse de doctorat. Université du Québec, Montréal.

HOULE, V., & GIROUX J. (2018), Interprétations de la fraction et enseignement/apprentissage des fractions équivalentes au primaire, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*, **18(1)**, 1-13.

JAUBERT, M., & REBIERE M. (2012), Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative, dans forumlecture. ch, Plate-forme internet sur la littéracie.
http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

KIEREN, T.E. (1989), Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert et M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, Virginia: Editions Lawrence Erlbaum.

RIOUX, M. (2003), *Les pratiques sociales didactisées relatives aux fractions dans les manuels québécois utilisés pour l'enseignement des mathématiques en sixième année*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec, Rimouski.

ROSAR, D., VAN NIEUWENHOVEN, C., & JONNAERT, P. (2001), Les fractions : comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves ? *Instantanés mathématiques*, **37(2)**, 4-16.

ROUCHE, N. (1998), *Pourquoi ont-ils inventé les fractions* ? Paris : Ellipses.

STREEFLAND, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

VERGNAUD, G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Peter Lang : Berne.

VERGNAUD, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques*, **10(2-3)**, 133-170.

VYGOTSKI, L. (1934/1997), *Pensée et langage (3ème édition*). Paris : La Dispute.

WITTGENSTEIN L. (1953), *Philosophische Untersuchungen [Philosophical Investigations]*, translated by G.E.M. Anscombe. New York, Macmillan.

VIRGINIE HOULE

Université du Québec à Montréal

houle.virginie@uqam.ca

FABIENNE VENANT

Université du Québec à Montréal

venant.fabienne@uqam.ca

RAQUEL ISABEL BARRERA-CURIN

Université du Québec à Montréal

barrera.raquel@uqam.ca