DANIELLY KASPARY, HAMID CHAACHOUA, ANNIE BESSOT

QU'APPORTE LA NOTION DE PORTÉE D'UNE TECHNIQUE À L'ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE PRAXÉOLOGIQUE ?

Abstract. What does the notion of technique reach bring to the study of praxeological dynamics? We look at educational institutions as dynamic systems where praxeologies exist only as a result of a praxeological dynamic. In this article, we study some aspects of praxeological dynamics using, in particular, the notion of technique reach (theoretical, pragmatic and institutional) and competition between techniques. Two case studies illustrate praxeological dynamics concerning the study of the resolution of second-degree equations in the French educational system. One of the contributions of this article is to provide tools for curriculum analysis and textbooks.

Résumé. Nous regardons les institutions d'enseignement comme des systèmes dynamiques où les praxéologies n'existent que comme résultantes d'une dynamique praxéologique. Dans cet article, nous étudions quelques aspects de la dynamique praxéologique en utilisant en particulier les notions de portée des techniques (théorique, pragmatique et institutionnelle) et de concurrence entre techniques. Deux études de cas illustrent différentes dynamiques praxéologiques concernant l'étude de la résolution des équations du second degré dans le système d'enseignement français. Une des contributions de cet article est de fournir des outils d'analyse du curriculum et des manuels.

Mots-clés. Dynamique praxéologique, portée des techniques, concurrence des techniques, curriculum.

La diffusion et la non-diffusion des objets du savoir apparaissent, de façon explicite, comme objet premier dans quelques définitions données à la didactique des mathématiques (Brousseau, 1994, 1998 ; Chevallard, 2011). Ce champ de recherche se caractérise tout d'abord par un postulat bien connu par sa communauté : « le « mystère » est dans les mathématiques, et non pas dans les sujets qui ont à apprendre et enseigner les mathématiques » (Bosch et Chevallard, 1999, p. 79). C'est là que se situe la première rupture avec les approches classiques qui s'intéressent à l'activité d'étude.

Cette rupture a conduit à porter l'attention sur les objets à enseigner, à être appris et à être étudiés dans les sociétés. La question de leurs modélisations en a découlé.

> Notons que ce principe méthodologique, qui met au premier plan la question de la modélisation de l'activité mathématique, a représenté une véritable innovation dans

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 243 – 269.
© 2020, IREM de STRASBOURG.

> la recherche en didactique des mathématiques. L'approche classique, en effet, étudiait les problèmes de transmission et d'acquisition de notions mathématiques supposées données, c'est-à-dire transparentes, non thématisées par le chercheur. En outre, même les travaux qui, d'une manière ou d'une autre, problématisaient les notions mathématiques à étudier, ne soumettaient pas les modèles adoptés à la mise à l'épreuve caractéristique du travail scientifique. Ou bien la question du savoir mathématique était tenue pour non problématique, ou bien la réponse apportée était prise comme inquestionnable. Tout se passait comme si la problématicité se situait essentiellement du côté des sujets apprenants ou enseignants, dans leurs capacités cognitives, leurs conceptions et préconceptions. Le mathématique et le cognitif étaient clairement distingués, selon le même tracé qui distinguerait un extérieur et un intérieur du sujet : le premier étant alors supposé aller de soi, c'est le second que l'on devait seul tenter d'expliquer. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 80)

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), dans ce contexte, propose de modéliser toute activité humaine, et en particulier l'activité mathématique, par un système de quatre éléments interdépendants : les types de tâches T, les techniques τ, les technologies θ et les théories Θ. Une organisation praxéologique ponctuelle [T, τ, θ,Θ], ainsi baptisée par Chevallard (2002), regroupe le type de tâches pouvant être accomplies par une technique, justifiée par une technologie, elle-même légitimée par une théorie. Ce quadruplet marque une étape importante dans le développement de ce cadre théorique.

De ce point de vue, la discipline « mathématiques » peut être considérée comme une amalgamation de diverses praxéologies autour de différentes technologies et théories (Chevallard, 2002). Cependant, l'activité mathématique ne se fait pas par la simple rencontre de ces praxéologies stables. Elle est bien plus complexe et résulte des déséquilibres constants de cet arrangement au sein d'une institution.

> On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une dynamique praxéologique […]. (Chevallard, 1999, p. 230)

Dans cet article notre ambition est justement d'avancer sur la prise en compte de la dynamique praxéologique, qui a déjà été objet de discussion dans d'autres travaux, tels que celui d'Artaud (1998) et celui de Bosch et Gascón (2002). Cette dynamique fait nécessairement intervenir des types de tâches mathématiques provisoires qui disparaitront lors de la chronogenèse de l'étude d'un sujet, ou des praxéologies qui s'adaptent/évoluent au fil du temps impactées par l'intégration de nouvelles praxéologies.

Notre objectif ici est de présenter des outils issus de la TAD permettant d'analyser un curriculum offert par une institution d'un point de vue dynamique. Comprendre la dynamique d'un curriculum permet de comprendre les difficultés et certaines erreurs dans les activités des élèves aussi bien que dans les pratiques des enseignants soumis à ce curriculum.

Pour mener cette étude, nous nous plaçons dans le cadre de la TAD et plus particulièrement nous utilisons certaines notions introduites dans T4TEL[1] (Chaachoua, 2018). Les premières notions, liées à la description d'une technique propre à T4TEL (section 1), introduiront un premier aspect de la dynamique praxéologique. Puis, les portées d'une technique permettront d'aborder d'autres aspects de cette dynamique (section 2 et 3).

Nous nous sommes restreints dans cet article à l'étude de curriculums attachés au type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ (Résoudre algébriquement dans **R** une équation de degré 2)[2] et aux sous-types de tâches associés. Nous illustrons la dynamique praxéologique de ce curriculum à partir des programmes et manuels français à des époques différentes (sections 4 et 5). Soulignons que le domaine de l'algèbre n'est pas notre objet d'étude mais sert de terrain pour illustrer des dynamiques praxéologiques.

1. Description d'une technique dans T4TEL

Dans T4TEL une technique est décrite par un *ensemble de types de tâches*, chaque type de tâches étant appelé *ingrédient* de la technique. Soulignons d'abord que toute technique peut avoir plusieurs descriptions possibles, avec des niveaux de granularités différents, à l'aide de types de tâches. Ces types de tâches peuvent avoir des statuts différents : on peut se référer à ce sujet à Chaachoua (2018).

Cette description ouvre une première piste pour discuter de la dynamique praxéologique d'une institution. À titre d'illustration, imaginons une institution fictive[3] I_{im} où existe le type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ définie par : « Résoudre une équation de degré 2 ». Dans cette institution une technique pour accomplir ce type de tâches consiste à se ramener au type de tâches $T_{\text{carré}}$ suivant : « Résoudre une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1 et k un réel quelconque ». On note cette technique $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ qui peut être décrite, par exemple, de la manière suivante (tableau 1) :

[1] *T4* renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et *TEL* pour *Technology Enhanced Learning*.

[2] Dans tout l'article nous nous plaçons pour $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ dans **R** sans toujours le préciser et nous considérons que la résolution est algébrique. Ainsi, pour ne pas alourdir le texte (Résoudre une équation) signifie (Résoudre algébriquement dans **R** une équation).

[3] Qui pourrait correspondre à une institution de fin du cycle 4 (grade 9) en France.

– Se ramener à l'équation équivalente $P(x) = 0$, $P(x)$ étant un polynôme de degré 2 ; – $T_{Transformer}$ « Factoriser $P(x)$ en $(P_1(x))^2 - k$, où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1[4] » ; – Réécrire en une équation équivalente : $(P_1(x))^2 = k$ où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1 et k étant un réel quelconque ; – $T_{carré}$ « Résoudre algébriquement une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1 et k étant un réel quelconque ».

Tableau 1. Une description possible de $\tau_{racine\_carrée}$

Dans I_{im} les types de tâches $T_{Transformer}$[5] et $T_{carré}$ existent comme objet d'étude en soi hors de cette technique. Cependant, pour que ces types de tâches puissent devenir un ingrédient opératoire d'une technique, leurs propres praxéologies doivent avoir une certaine stabilité tendant à la routinisation de ces types de tâches. Dans le cas contraire, la mise en œuvre de $\tau_{racine\_carrée}$ risque de mener à l'échec par la non-maîtrise d'un ingrédient de la technique.

La modélisation des techniques comme un ensemble de types de tâches et la prise en compte du changement de statut possible de leurs ingrédients dévoilent déjà un premier mouvement entre les praxéologies ponctuelles. Cette description révèle une dialectique objet et outil des types de tâches[6].

Ce premier mouvement nous incite à considérer une autre notion cruciale pour l'étude de la dynamique institutionnelle, celle de *temps institutionnel*. Normalement un type de tâches n'assume pas un double statut au même moment institutionnel et le changement de statut, ainsi objectivé, demande une durée plus ou moins longue.

Pour aller plus loin, c'est-à-dire pour rendre visible d'autres aspects de la dynamique, intéressons-nous maintenant à la notion de portée d'une technique.

2. Portées d'une technique

[4] Dans la suite de l'article nous utiliserons la notation $P_i(x)$ pour désigner un polynôme de degré i.

[5] $T_{transformer}$ est un type de tâches qui consiste à transformer un polynôme $P(x)$ de degré 2, en $(P_1(x))^2 - k$ par une factorisation partielle.

[6] A ne pas confondre avec la dialectique outil/objet de Douady (1986). En effet, Douady considère les statuts outil/objet pour les concepts alors que nous l'adaptons au niveau des types de tâches, tout en restant dans le même esprit.

> Tout d'abord, une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie P(τ) des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique : elle tend à échouer sur T\P(τ), de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T ». (Chevallard, 1999, p. 225)

Dans cette définition, il est dit que hors de sa portée une technique tend à échouer. Nous interprétons ce « tend à échouer » comme suit :

1) une technique peut ne pas s'appliquer hors de sa portée ;
2) une technique peut s'appliquer hors de sa portée, mais avec un risque élevé d'échec.

Ces deux possibilités d'interprétation nous ont conduit dans T4TEL à définir deux portées d'une technique : les portées théorique et pragmatique. Nous avons complété par une autre portée, la portée institutionnelle, pour rendre compte des limitations propres à une institution.

Définitions. Portées théorique, pragmatique et institutionnelle

– La portée théorique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble en dehors de toute considération des conditions de son exécution, c'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet. Elle sera notée $P_{Th}(\tau)$.

– La portée pragmatique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et à un coût raisonnable. La technique tend à réussir sur cette portée et tend à échouer en dehors. Elle sera notée P(τ).

– La portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâches T est l'ensemble des tâches où cette technique est attendue par une institution. Cette portée est une conséquence des conditions et des contraintes de la vie de τ dans une institution. Elle sera notée $P_I(\tau)$.

La notion de portée pragmatique correspond à la définition de Chevallard (1999). Et c'est bien cette portée qui est pertinente pour la vie des praxéologies et qui est au cœur des questions didactiques.

Pour nous, le cognitif est pris en compte par une autre portée que nous appelons *portée personnelle*, dépendante à la fois des portées pragmatique et institutionnelle. Ce n'est pas l'objet premier de cet article.

Exemple. Dans l'exemple précédent, on suppose que dans I_{im} il n’existe que $\tau_{racine\_carrée}$ pour accomplir les tâches de $T_{équation\_degré\_2}$. Explicitons les portées de $\tau_{racine\_carrée}$.

– Théoriquement, nous pouvons accomplir toutes les tâches de $T_{équation\_degré\_2}$ avec $\tau_{racine\_carrée}$. On a : $P_{Th}(\tau_{racine\_carrée}) = T_{équation\_degré\_2}$.

– Pragmatiquement, comme souligné par Chevallard (1999), la technique tend à échouer (au moins) pour des nombres de « grande » taille. Mais, elle peut échouer aussi par un rapport défectueux à la factorisation.

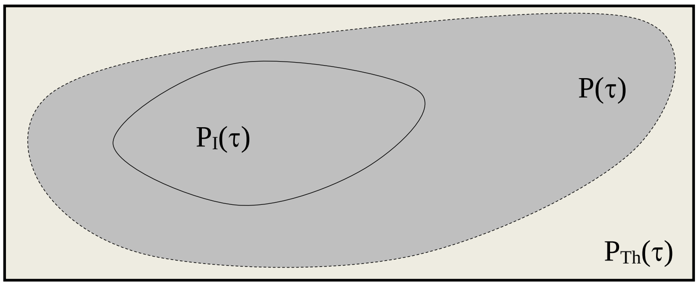
> La chose est évidente, mais très souvent oubliée, en mathématiques. Ainsi toute technique de calcul sur **N** échoue-t-elle à partir d’une certaine taille de nombres. Le fait qu’on ne sache pas en général factoriser un entier donné est notamment à la base de certaines techniques de cryptographie. (Chevallard, 1999, p. 225)

La portée pragmatique de $\tau_{racine\_carrée}$ est donc contenue dans sa portée théorique.

– Du point de vue institutionnel, soit I_{im} attend que la technique soit appliquée sur toute la portée pragmatique, soit pour diverses raisons, I_{im} limite son usage sur une partie de la portée pragmatique. Généralement, la portée institutionnelle est contenue dans la portée pragmatique.

Les relations entre les différentes portées pour $\tau_{racine\_carrée}$, stables durant un temps institutionnel, sont schématisées par la figure 1[7].

La portée théorique ne peut être remise en cause que par un savoir de référence considéré par le chercheur, que nous supposons momentanément fixé, donc statique. Notons que cette portée ne dépend ni de l’institution étudiée, ni de l’existence d’autres techniques alternatives. Par contre, les deux autres portées, pragmatique et institutionnelle, sont soumises potentiellement à des dynamiques diverses, comme nous allons le développer ci-dessous.



$T_{équation\_degré\_2}$

[7] Ne pas tenir compte des dimensions de la représentation des ensembles.

Figure 1. Portées théorique, pragmatique et institutionnelle de $\tau_{racine\_carrée}$. Le rectangle représente l'ensemble des tâches d'un type de tâches donné (ici, $T_{équation\_degré\_2}$). Le pointillé délimitant la portée pragmatique est là pour indiquer la difficulté d'en préciser la frontière, comme nous le verrons plus loin.

Dans le cas où il n'y a qu'une seule technique pour un type de tâches, la portée pragmatique reste aussi invariante. Cependant, la portée institutionnelle d'une technique peut évoluer car elle est subordonnée aux conditions et contraintes de l'institution. C'est le cas, par exemple, quand les sujets de I_{im} commencent par l'étude de la résolution des équations du second degré à coefficients entiers, puis continuent par celle des équations du second degré à coefficients rationnels. On retrouve ici le fait que la dimension temporelle affecte la portée institutionnelle.

Dans le cas où d'autres techniques alternatives existent, que se passe-t-il pour les portées pragmatique et institutionnelle ?

Regardons dans notre institution fictive l'effet de l'introduction de la technique suivante pour $T_{équation\_degré\_2}$: $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ (tableau 2).

– Se ramener à l'équation équivalente P(x) = 0, P(x) étant un polynôme de degré 2 ;
– $T_{factoriser\_s}$ « Factoriser par x l'expression P(x) » ;
– Résoudre une équation de la forme $x(ax + b) = 0$.

Tableau 2. Description de la technique $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$

Soulignons que le type de tâches $T_{factoriser\_s}$ n'a de sens que pour certaines expressions P(x). C'est un sous-type de tâches de $T_{factoriser}$ « Factoriser un polynôme ».

Commençons par une analyse des portées de $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$. Théoriquement nous ne pouvons accomplir avec cette technique qu'une partie de $T_{équation\_degré\_2}$. Par exemple, on ne peut pas résoudre avec cette technique l'équation « $2x^2 + 4x = -4$ ». Comme dans l'analyse de la première technique, nous avons (figure 2) :

$$P_I(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subseteq P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subset P_{Th}(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subset T_{équation\_degré\_2}$$

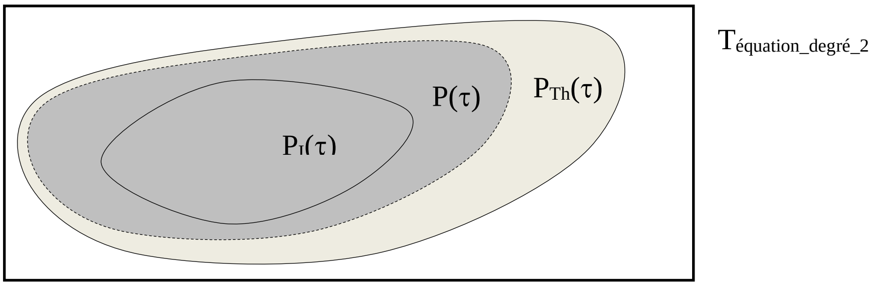


Figure 2. Portées théorique, pragmatique et institutionnelle de $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$

Examinons maintenant le moment où ces deux techniques coexistent dans l'institution I_{im}.

Supposons que dans cette institution les portées institutionnelles de ces deux techniques correspondent à leurs portées pragmatiques, et intéressons-nous uniquement à celles-ci. Il est clair que $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subset P(\tau_{racine\_carrée})$. Par exemple, la tâche t_1 « résoudre $x^2 + 4x = 0$ »[8] appartient aux deux portées, ce qui n'est pas le cas de la tâche t_2 « résoudre $x^2 + 5x + 4 = 0$ ». En effet, on a : $t_2 \in P(\tau_{racine\_carrée})$ et $t_2 \notin P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$ (voir figure 3).

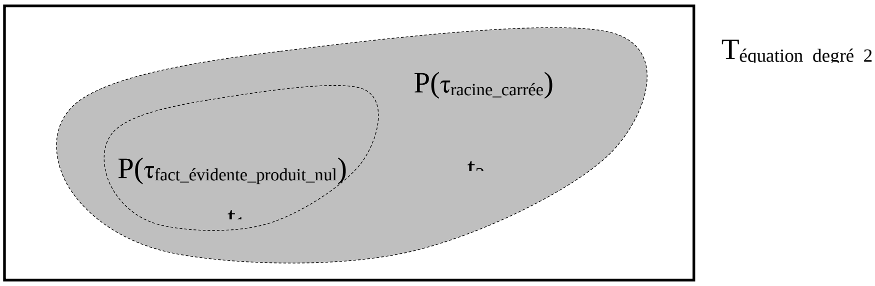


Figure 3. Portées pragmatiques $P(\tau_{racine\_carrée})$ et $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$

Remarquons que la caractérisation de la portée pragmatique n'est pas simple : sa frontière est fluctuante car dépendante de plusieurs facteurs dont l'existence ou non d'autres techniques.

Pour comprendre ce qui peut se produire dans la partie commune des deux portées $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$ nous allons introduire la notion de concurrence entre deux techniques.

[8] Il serait plus correct d'écrire la tâche « résoudre algébriquement l'équation $x^2 + 4x = 0$ ». Pour ne pas alourdir le texte nous utiliserons par la suite le raccourci « résoudre $x^2 + 4x = 0$ ».

3. Concurrence entre techniques

Définition. Concurrence de deux techniques τ_i et τ_j

> Si $P(\tau_i) \cap P(\tau_j)$ est non vide, les deux techniques τ_i et τ_j sont dites en concurrence sur le type de tâches $P(\tau_i) \cap P(\tau_j)$ appelé domaine de concurrence des deux techniques τ_i et τ_j.

Soulignons que cette concurrence n'a de sens que si les deux techniques coexistent dans une institution donnée. Cependant, on peut étudier les effets de cette concurrence d'un point de vue épistémologique indépendamment des conditions institutionnelles qui permettent ou non à ces deux techniques d'exister.

> Enfin, en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles — qui peuvent exister effectivement, mais alors en d'autres institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I — faire ainsi, c'est naturel... —, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution. (Chevallard, 1999, p. 225)

Accepter ce postulat, de la tendance des institutions à faire vivre une unique technique pour accomplir un même type de tâches T, ne signifie pas que dans une institution ne s'étudie qu'une seule technique. La question que nous posons est la suivante : par quelle dynamique praxéologique une institution met-elle en place une préférence pour une technique ? Ou encore, que peut-il se passer sur le domaine de concurrence de deux techniques ? Ce que nous pouvons déjà avancer est ceci : quand deux techniques existent et partagent un domaine de concurrence, une relation peut s'établir entre ces deux techniques, *être plus efficace.*

Revenons à notre institution fictive I_{im} et comparons la mise en œuvre de ces deux techniques sur une tâche appartenant à leur domaine de concurrence.

t_1 « résoudre $x^2 + 4x = 0$ »	
$\tau_{racine\_carrée}$[9]	$\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$
$x^2 + 4x = 0$ $x^2 + 2.2x + 2^2 - 2^2 = 0$ $(x + 2)^2 - 4 = 0$ $(x + 2)^2 = 4$ $x + 2 = 2$ *ou* $x + 2 = -2$ $x = 0$ *ou* $x = -4$	$x^2 + 4x = 0$ $x\,(x + 4) = 0$ $x = 0$ *ou* $x + 4 = 0$ $x = 0$ *ou* $x = -4$

Tableau 3. Mise en œuvre de $\tau_{racine\_carrée}$ et $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ sur une tâche de leur domaine de concurrence

Le tableau 3 montre une première différence dans la mise en œuvre des deux techniques : $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ nécessite moins d'actions que $\tau_{racine\_carrée}$ pour accomplir t_1 mais ce n'est pas l'essentiel car il nous faut regarder du côté de la technologie. En effet, $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ se justifie principalement par deux éléments technologiques, une factorisation simple et la propriété du produit nul ; alors que $\tau_{racine\_carrée}$ doit utiliser une transformation complexe s'appuyant sur l'équivalence des équations, puis sur la reconnaissance d'une identité remarquable et enfin sur une racine carrée. Du point pragmatique, nous dirons que $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ est plus efficace que $\tau_{racine\_carrée}$ sur leur domaine de concurrence. Cette efficacité est encore plus perceptible pour la tâche « $x^2 + 7x = 0$ », par exemple. En fait, pour les équations du type « $x^2 + kx = 0$ » la technique $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ ne requiert aucune transformation de « k », contrairement à la technique $\tau_{racine\_carrée}$.

Dans cet exemple, la relation « être plus efficace » a été examiné par rapport au coût de l'exécution de la technique (nombre d'étapes). Mais, d'autres critères peuvent être considérés par le chercheur dans la caractérisation de l'efficacité, que nous n'examinerons pas dans cet article.

Dans le cas où plusieurs techniques sont en concurrence sur un domaine, si l'une des techniques est plus efficace que les autres, elle sera dite *optimale* sur ce domaine.

En résumé, la concurrence entre techniques au sein d'une même institution introduit un autre aspect de la dynamique praxéologique. Cette concurrence peut entrainer la réduction de la portée pragmatique de l'une des techniques si celle-ci se révèle

---

[9] Le passage de la première ligne à la deuxième ligne repose sur un geste de réécriture de « $x^2 + bx$ » vers « $x^2 + 2.\frac{b}{2}x + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$.

comme non optimale sur le domaine de concurrence. Par exemple dans I_{im}, cette réduction aboutit à la séparation d'une partie de la portée $P(\tau_{racine\_carrée})$ en faveur de la portée $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$ sur laquelle $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ est optimale. C'est une dynamique possible illustrée par la figure 4. Nous identifierons d'autres types de dynamique dans les études de cas des sections 3 et 4.

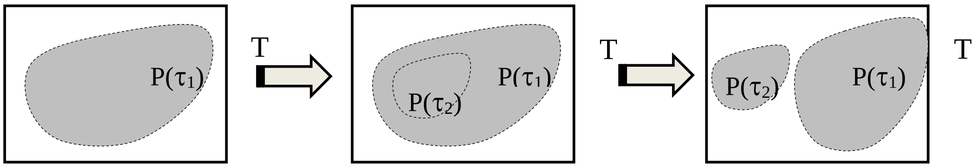


Figure 4. Une dynamique possible des portées comme conséquence de la concurrence de deux techniques

Nous faisons l'hypothèse que ces notions de concurrence, d'efficacité et d'optimalité, découlant de la notion de portée, permettent de décrire et de comprendre les dynamiques praxéologiques dans un curriculum donné. Pour l'illustrer nous allons présenter deux études de cas. La première étude compare deux dynamiques praxéologiques dans l'enseignement secondaire français au début de l'introduction de $T_{équation\_degré\_2}$ (Résoudre algébriquement une équation de degré 2) mais à deux périodes différentes (2003 et 2008). La deuxième concerne l'évolution praxéologique du même objet $T_{équation\_degré\_2}$ sur l'ensemble de sa vie officielle dans l'enseignement secondaire français actuel (2016 – 2019).

4. Etude de cas 1 : Comparaison de deux dynamiques praxéologiques

Dans un premier temps, nous distinguons deux techniques :

– La première technique $\tau_{produit\_nul}$ consiste à factoriser pour se ramener au type de tâches $T_{produit\_nul}$ « Résoudre une équation de la forme $P_1(x)Q_1(x) = 0$ » puis à instancier la propriété du produit nul. Remarquons que si la factorisation concerne le type de tâches « Résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ », $\tau_{produit\_nul}$ se restreint à $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$.

– La deuxième technique $\tau_{racine\_carré}$ consiste à factoriser pour se ramener au type de tâches $T_{carré\_constant}$ « Résoudre une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ » puis à instancier la propriété de racine carrée.

Il est bien entendu que ces techniques peuvent faire appel à d'autres types de tâches comme « Regrouper les termes dans un membre ». Soulignons que pour les deux premiers cas les techniques de factorisation peuvent nécessiter des gestes spécifiques aux équations étudiées.

La coexistence dans l'institution considérée de ces deux techniques modifie leur efficacité relative comme nous allons le montrer brièvement sur des exemples.

Considérons la tâche t « Résoudre $x^2 - 7 = 0$ » qui appartient aux portées théoriques des deux techniques[10] (tableau 4).

$\tau_{\text{produit\_nul}}$	$\tau_{\text{racine\_carrée}}$
$x^2 - 7 = 0$ $x^2 - \sqrt{7}^2 = 0$ $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$ $(x - \sqrt{7}) = 0 \; ou \; (x + \sqrt{7}) = 0$ $x = \sqrt{7} \; ou \; x = -\sqrt{7}$	$x^2 - 7 = 0$ $x^2 = 7$ $x = \sqrt{7} \; ou \; x = -\sqrt{7}$

Tableau 4. Mise en œuvre de deux techniques sur une tâche appartenant à leur domaine de concurrence

Cette mise en œuvre des techniques montre que la technique optimale pour cette tâche est $\tau_{\text{racine\_carrée}}$. On peut généraliser aux tâches du type (Résoudre une équation de la forme $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$). Cependant, par exemple pour la tâche « Résoudre $(2x - 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$ » la technique optimale est $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Dans la prochaine section, nous allons étudier cette concurrence dans des conditions institutionnelles qui permettent à ces techniques d'exister.

4.1 La première rencontre avec les équations du second degré attendues dans les programmes 1998, 2005 et 2008.

En France, dans les programmes des années 2000 la notion d'équation du second degré est présente pour la première fois dans le curriculum – toutefois sans le libellé « second degré » – dans le domaine « Nombres et calcul ». Ci-après des extraits des programmes de 2008 pour la classe de troisième sachant qu'ils sont très proches des programmes de 1998 et 2005 (figure 5 et figure 6).

[10] Ce qui n'est pas le cas, par exemple, pour la tâche « Résoudre $x^2 + 7 = 0$ » qui est hors de la portée théorique de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

2.2. Calculs élémentaires sur les radicaux Racine carrée d'un nombre positif.	- Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a et utiliser les égalités : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$. - *Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a est un nombre positif.*	Dans le cadre du socle commun, la seule capacité exigible, relative à la racine carrée, concerne le calcul à la calculatrice de la valeur exacte ou approchée de la racine carrée d'un nombre positif.

Figure 5. Extrait des programmes, 3ème, 2008

2.4. Équations et inéquations du premier degré *Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues.*	*- Mettre en équation un problème.* *- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.* *- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*	La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs, …).
Problèmes se ramenant au premier degré : équations produits.	*- Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) =0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x.*	*L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.*

Figure 6. Extrait des programmes, 3ème, 2008

Dans le secteur « Calculs élémentaires sur les radicaux » on trouve un passage sur la détermination de nombres connaissant leurs carrés (figure 5) mais sans mentionner la notion d'équation.

Dans le thème « Équations et inéquations du premier degré » (figure 6), on fait référence aux équations produits, et donc à la technique $\tau_{produit\_nul}$. Mais, qu'en est-il pour les équations qui relèvent du type de tâches $T_{carré\_constant}$ « Résoudre une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ » ? Et plus précisément, quelle est la place de la technique $\tau_{racine\_carrée}$?

Ce flou repéré dans l'explicitation des programmes peut donner lieu à des interprétations différentes. C'est ce que nous proposons d'illustrer à partir de deux manuels de la classe de troisième soumis à la même recommandation des programmes concernant les équations et la racine carrée mais à deux moments différents, 2003 et 2008. Ce sont :

– le manuel Hatier, classe de 3ème, 2003 noté M_{2003} ;

– le manuel Phare, classe de 3ème, 2008 noté M_{2008}.

4.2 Etude du manuel M_{2003}

Ce manuel organise une première rencontre avec les équations du second degré avec des tâches du type $T_{carré\_simple}$ « Résoudre une équation de la forme $ax^2 + c = k$ » ; la technique attendue est $\tau_{racine\_carrée}$ comme le montre l'extrait suivant de M_{2003} (figure 7).

1 Racine carrée

a. Définition

Pour tout nombre positif a, la racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est égal à a.

Exemple. La racine carrée de 64 est 8 parce que $8^2 = 64$ et $8 \geqslant 0$.
La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé **radical**.

b. Conséquences

- Pour tout nombre positif a : $\sqrt{a^2} = a$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Exemples. $\sqrt{5^2} = 5$ et $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

- Pour tout nombre positif a : $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{\left(a^n\right)^2} = a^n$.

Exemple. $\sqrt{2^6} = 2^3$.

2 Résolution de l'équation $x^2 = a$

- Si $a < 0$, il n'existe aucun nombre x tel que $x^2 = a$. L'équation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, le seul nombre tel que $x^2 = 0$ est 0, la solution est 0.
- Si $a > 0$, il existe deux nombres tels que $x^2 = a$, l'équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples
Les deux nombres tels que $x^2 = 81$ sont 9 et -9.
Les deux nombres tels que $x^2 = 13$ sont $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$.

Figure 7. Extrait de M_{2003} (page 30)

Quand on consulte la liste des exercices relevant de ce chapitre, on observe que le travail de la technique $\tau_{racine\_carrée}$ porte sur un ensemble institutionnel plus restreint que sa portée pragmatique. Seule le type de tâches « Résoudre $x^2 = k$, où k est un réel » est considéré à ce moment de l'étude.

La première rencontre avec les tâches du type « Résoudre $(px + q)^2 = k$ » a lieu lors du deuxième temps d'étude des équations du second degré. Lors de ce deuxième temps, la nouvelle technique $\tau_{produit\_nul}$ mise en place permet d'accomplir d'autres tâches non prises en compte auparavant, comme celles du type « Résoudre $(ax + b)(cx + d) = 0$ », mais aussi « Résoudre $(px + q)^2 = k$ »[11].

Dans la liste des exercices intitulés « Équations de la forme $A \times B = 0$ » nous retrouvons six tâches de résolution d'équations du type « $ax^2 = k$ ». Une concurrence des techniques ($\tau_{racine\_carrée}$ et $\tau_{produit\_nul}$) est alors établie sur un domaine déjà travaillé et où $\tau_{racine\_carrée}$ est optimale : ce domaine de concurrence est $P_I(\tau_{racine\_carrée})$, ce que nous avons représenté dans la figure 8.

[11] Par exemple, nous trouvons les tâches « $(x + 8)^2 = 81$ » et « $(3x - 2)^2 - 16 = 0$ » dans la liste d'activités intitulée « Équations de la forme A × B = 0 » (M_{2003}, page 46).

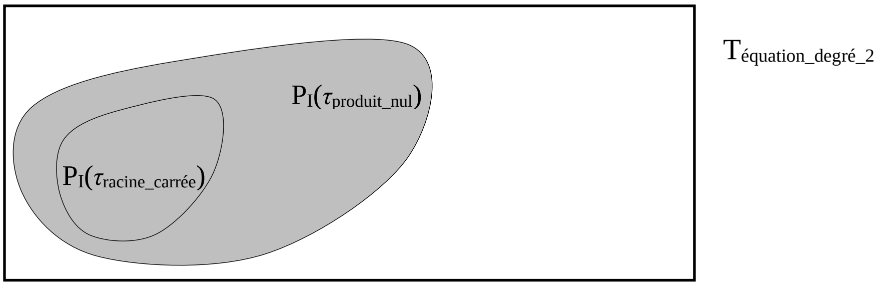


Figure 8. Relation entre les deux portées institutionnelles $P_I(\tau_{racine\_carrée})$ et $P_I(\tau_{produit\_nul})$

Or, le domaine commun des portées pragmatiques de ces deux techniques est bien plus large que la portée $P_I(\tau_{racine\_carrée})$. L'institution caractérisée par M_{2003} évite l'élargissement du domaine de concurrence, alors que des tâches strictement dans $P_I(\tau_{produit\_nul})$ ont pour technique optimale $\tau_{racine\_carrée}$, comme le montre le tableau 5 ci-après.

$\tau_{factoriser\_produit\_nul}$	$\tau_{racine\_carrée}$
$(px + q)^2 = k$ $(px + q)^2 - k = 0$ $(px + q)^2 - (\sqrt{k})^2 = 0$ $((px + q) - (\sqrt{k}))((px + q) + (\sqrt{k})) = 0$ $(px + q) - (\sqrt{k}) = 0$ *ou* $(px + q) + (\sqrt{k}) = 0$ $(px + q) = \sqrt{k}$ *ou* $(px + q) = -\sqrt{k}$ …	$(px + q)^2 = k$ $(px + q) = \sqrt{k}$ *ou* $(px + q) = -\sqrt{k}$ …

Tableau 5. Coût de $\tau_{produit\_nul}$ et $\tau_{racine\_carrée}$ sur le type de tâches « Résoudre $(px + q)^2 = k$ » où k est positif et p est non nul

La raison institutionnelle de cette valorisation du produit nul semble se trouver dans le futur de cette dynamique praxéologique autour de la résolution des équations du second degré, c'est-à-dire dans la mise en place d'un environnement technologique propice à la technique du discriminant en classe de première. Remarquons de plus que cette technique, qui repose sur la factorisation, se généralise à des équations de degré supérieur à 2.

4.3. Etude du manuel M_{2008}

Dans le manuel M_{2008} existe une autre dynamique au début du parcours d'étude des équations du second degré.

Contrairement au manuel précèdent et dans l'esprit des programmes, le chapitre « Racine carré » n'aborde pas la notion d'équation. La première rencontre avec des équations du second degré a lieu dans le chapitre « équations et équations produit nul ». Les tâches à accomplir sont du type « Résoudre une équation de la forme $x^2 = k$ » et « Résoudre une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ ». Dans ces deux cas la technique attendue est celle du produit nul. L'extrait ci-après (figure 9) atteste de la force de cette attente. Cet extrait se place après deux paragraphes intitulés respectivement « Je découvre des propriétés des produits » et « Je résous une équation produit nul » :

6 Je résous des équations du type $x^2 = a$

1) Expliquer pourquoi l'équation $x^2 = -3$ n'admet pas de solution.

2) On veut résoudre l'équation $x^2 = 3$.

a Recopier et compléter :

$$x^2 = 3$$
$$x^2 - \ldots = 0$$
$$x^2 - (\ldots)^2 = 0$$
$$(x + \ldots)(x - \ldots) = 0.$$

b Terminer la résolution de cette équation.

Figure 9. Extrait de M_{2008} (page 89)

Rappelons que pour les tâches du type « Résoudre l'équation de la forme $x^2 = k$ » la technique optimale est l'instanciation de la propriété de la racine carrée. La mise en œuvre de la technique du produit nul sur la portée pragmatique de $\tau_{racine\_carrée}$ témoigne clairement de la suprématie attendue de $\tau_{produit\_nul}$ dans M_{2008} : le théorème « produit nul » génère la technique $\tau_{racine\_carrée}$, pour la résolution d'équation de la forme $x^2 = a$ comme le montrent les extraits suivants (figure 10 et figure 11).

2 Équation produit nul

a Définition

a, b, c et d désignent des nombres relatifs.
Une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une **équation produit nul d'inconnue x**.

■ **EXEMPLE :** $(3x + 4)(2x - 5) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x.

■ **Remarque :** $(3x + 4)(2x - 5) = 6x^2 - 7x - 20$. Le plus grand exposant de l'inconnue x est 2.
Cette équation est une équation de degré 2.

b Propriété

Si un produit est nul, alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.	a et b désignent des nombres relatifs. Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

■ **Remarques :**
- Les nombres a et b peuvent être tous les deux égaux à zéro.
- Si dans un produit un facteur est nul, alors ce produit est nul.

Figure 10. Extrait de M_{2008} (page 91)

c Résolution d'une équation produit nul

EXEMPLE : On considère l'équation $(x-1)(x+2)=0$.

Résolution	Objectifs
$(x-1)(x+2)=0$. Or, si un produit est nul, alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul. $(x-1)=0$ ou $(x+2)=0$	Se ramener à deux équations de degré 1.
$x-1+1=0+1$ ou $x+2-2=0-2$ $x=1$ ou $x=-2$.	Pour chaque équation de degré 1, obtenir les valeurs possibles de x.
Vérification : • pour $x=1$: $(x-1)(x+2)=(1-1)(1+2)=0\times(1+2)=\mathbf{0}$. • pour $x=-2$: $(x-1)(x+2)=(-2-1)(-2+2)=(-2-1)\times 0=\mathbf{0}$.	Vérifier que ces valeurs sont solutions de l'équation initiale.
L'équation $(x-1)(x+2)=0$ admet deux solutions 1 et -2.	Conclure.

d Résolution d'une équation du type $x^2=a$, où a est un nombre relatif

a désigne un nombre relatif.
Lorsque $a<0$, l'équation $x^2=a$ n'admet pas de solution.
Lorsque $a=0$, l'équation $x^2=a$ admet une solution unique 0.
Lorsque $a>0$, l'équation $x^2=a$ admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Figure 11. Extrait de M_{2008} (page 91)

Le paragraphe « d » énonce une règle qui permet de s'affranchir du coût de la mise en œuvre de la technique du produit nul : face aux équations de la forme $x^2=a$, il est attendu la technique d'instanciation de cette règle qui ressemble fort à la règle de la racine carrée identifiée dans M_{2003}. Mais la dynamique y ayant abouti est bien plus tortueuse et de fait cette règle se trouve isolée de la notion de racine carrée !

4.4. Synthèse

L'analyse de ces deux manuels de la classe de troisième montre deux dynamiques praxéologiques s'appuyant sur deux évolutions temporelles différentes de la configuration des portées institutionnelles des deux techniques $\tau_{racine\_carrée}$ et $\tau_{produit\_nul}$: nous schématisons ces évolutions temporelles dans la figure 12 ci-après.

Ces deux dynamiques séparent trois épisodes (∂t_1), (∂t_2) et (∂t_3) dans le processus d'étude de la résolution de certains types d'équations du second degré en troisième. Elles semblent aboutir à un état commun (∂t_3) où les deux techniques $\tau_{racine\_carrée}$ et $\tau_{produit\_nul}$ ont des portées institutionnelles disjointes sur lesquelles elles sont optimales.

Cependant, dans M_{2003}, $\tau_{racine\_carrée}$ est produite dans l'environnement technologique de la racine carrée lors d'un premier temps institutionnel (∂t_1), alors que dans M_{2008} elle est produite lors d'un deuxième temps institutionnel (∂t_2) comme conséquence du théorème « produit nul ».

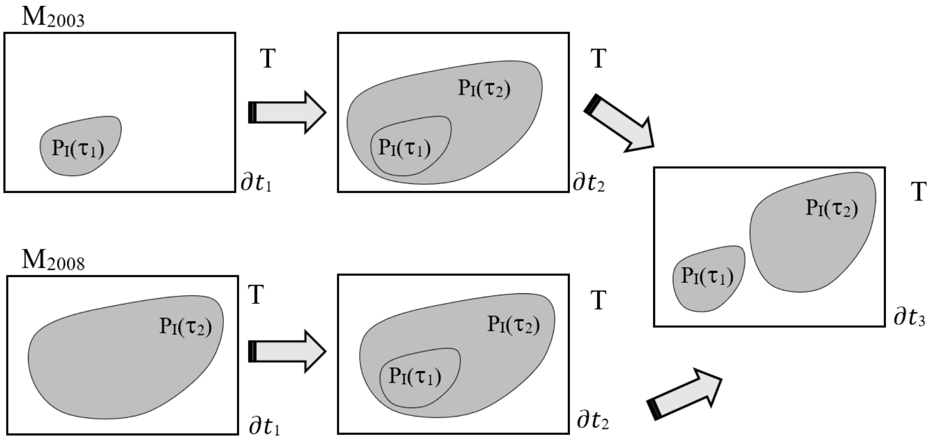


Figure 12. Deux évolutions temporelles des portées institutionnelles dans M_{2003} et M_{2008} : deux dynamiques praxéologiques. Dans ce schéma τ_1 représente $\tau_{racine\_carrée}$ et τ_2 représente $\tau_{produit\_nul}$

On peut avancer qu'à la fin des deux processus (∂t_3) la technologie de $\tau_{racine\_carrée}$ dans les deux institutions se ramènera à une même règle d'action avec un oubli institutionnel des origines de cette technique.

5. Etude de cas 2 : Évolution de la dynamique praxéologique dans la période 2016 – 2019

La vie de l'objet $T_{équation\_degré\_2}$ dans le système français actuel débute en fin de collège en classe de troisième (13-14 ans) et se termine en classe de première (16-17 ans). Pour cette période scolaire, nous avons choisi une même collection de manuels, conformes aux programmes (2016 – 2019), la collection Transmath, bien diffusée dans l'enseignement français :

– Manuel Transmath, classe de 3ème, 2016, noté M3 ;

– Manuel Transmath, classe de 2de, 2019, noté M2 ;

– Manuel Transmath, classe de 1ère, 2019, noté M1.

5.1. Le début de l'évolution praxéologique : analyse de M3

Le cours commence par l'étude des équations du premier degré pour se poursuivre par celle des problèmes se ramenant au premier degré, habitat des équations du second degré sans que ces dernières soient nommées ainsi. A l'occasion d'un exercice résolu, la technique $\tau_{produit\_nul}$ est introduite pour résoudre une équation de la forme[12] $(ax+b)^2 - [k^2] = 0$. Elle est transformée en l'équation dite « équation produit nul ».

Ce processus sera attendu pour tous les exercices proposés par la suite : si nécessaire l'expression proposée doit d'abord être factorisée à l'aide d'un élément du complexe technologique « identités remarquables », objet central en fin de collège ; elle se ramène alors à la résolution d'une équation produit nul.

Dans M3, la forme des équations proposées évite l'émergence de la technique $\tau_{\text{racine\_carrée}}$: les équations de la forme $[a^2]x^2 = [k^2]$ ou de la forme $\mathrm{P}(x)^2 = [k^2]$ ne sont jamais proposées. Il n'y a donc à ce niveau scolaire aucune mise en concurrence de techniques de résolution.

5.2. L'étape intermédiaire de l'évolution praxéologique : analyse de M2

En classe de seconde, la première équation proposée en exercice résolu est de la forme $(ax + b)^2 = [k^2]$, forme absente en troisième. Le premier geste de la technique proposée est de ramener cette équation à la forme travaillée en classe de troisième, soit : $(ax + b)^2 - [k^2] = 0$ qui permet ainsi un premier élargissement de la portée institutionnelle de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ (figure 13).

Cet élargissement se poursuit par la résolution d'équations de formes nouvelles comme $k(ax + b)(cx + d) = l(ax + b)(ex + f)$. On trouvera en annexe un tableau montrant la variété des formes présentes dans les 29 exercices proposés par ce manuel.

L'environnement technologique reste le même que celui de la classe de troisième, mais la complexification du type de tâches (factoriser une expression) élargit considérablement la portée institutionnelle de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$, par rapport à ce qu'elle était en classe de troisième. Ainsi la praxéologie de factorisation abordée en troisième et reprise dans le manuel M2 juste avant le paragraphe sur la résolution des équations s'en trouve renforcée, de même que le complexe technologique « identités remarquables » (comme préconisé dans le programme) et l'élément technologique produit nul.

[12] Dans cet article, toutes les variables à l'intérieur de « […] » sont des entiers positifs non nul. Cette notation indique également le résultat de l'expression. Par exemple « $(ax + b)^2 = [k^2]$ » permet d'exprimer les équations avec un second membre étant un carré parfait.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $(5x+3)^2 = 4$ **(E₁)**

b. $3(2x+7)(2x-4) = 4(x+4)(2x+7)$ **(E₂)**

Solution

a. Résolvons (E_1)

■ $(5x+3)^2 = 4$ équivaut à $(5x+3)^2 - 4 = 0$.
L'équation est équivalente à $(5x+3)^2 - 2^2 = 0$.

■ On factorise :
$[(5x+3)+2][(5x+3)-2] = 0$
$[5x+3+2][5x+3-2] = 0$
$[5x+5][5x+1] = 0$

■ Ainsi $5x+5=0$ ou $5x+1=0$
$5x+5-5=0-5$ ou $5x+1-1=0-1$
$5x=-5$ ou $5x=-1$
$x=-\frac{5}{5}$ ou $x=-\frac{1}{5}$
$x=-1$ ou $x=-\frac{1}{5}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :
$S=\left\{-1;-\frac{1}{5}\right\}$.

Méthode

→ **Étape n° 1**
On se ramène à une équation équivalente du type $A(x) = 0$.

→ **Étape n° 2**
On factorise $A(x)$.
On reconnaît l'identité remarquable ❸
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
avec $a = 5x+3$ et $b = 2$.

→ **Étape n° 3**
Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.

Figure 13. Exercices résolus (M2, page 71)

La dynamique praxéologique, à ce niveau, ne résulte donc pas de la mise en concurrence de deux techniques mais de l'élargissement de la portée de la seule technique institutionnelle $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Remarquons que ni dans M3 ni dans M2 on ne parle d'équation du second degré : en classe de troisième on introduit l'équation produit nul et en classe de seconde on distingue équations du premier degré et « équations autre que du premier degré » (figure 14).

✓ **Pour résoudre une équation (autre que du premier degré) on utilise le théorème :**
$A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

Figure 14. « Une équation autre que du premier degré » (M2, page 74).

Une autre remarque porte sur la résolution elle-même : une équation a (presque) toujours une ou deux solutions réelles ! Seulement deux exercices en seconde proposent des équations sans solution, mais jamais en troisième.

5.3. L' étape finale de l'évolution praxéologique : analyse de M1

En accord avec le programme, le manuel de la classe de première consacre un paragraphe entier au sujet « Résolution des équations du second degré ». La notion de *forme factorisée* introduite par la suite permet de reconnaître l'équation produit nul comme une forme de l'équation du second degré. Pour cela, comme le montre la figure 15, le manuel donne une réécriture d'une forme appelée *trinôme* (indiquée par la lettre A dans la figure 15), par la *forme canonique* (indiquée par la lettre B dans la figure 15).

Considérons le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, alors :

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{A} = \underbrace{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{B}$$

Figure 15. Forme canonique (M1, page 67)

Pour le type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$, le manuel M1 commence par introduire un environnement technologique permettant de produire deux nouvelles techniques de factorisation. A leur tour, ces deux nouvelles techniques de factorisation fournissent un environnement technologique pour deux nouvelles techniques pour accomplir $T_{\text{équation\_degré\_2}}$. Encore une fois le travail sur $T_{\text{factoriser}}$ précède le travail sur $T_{\text{équation\_degré\_2}}$.

Ces deux nouvelles techniques sont $\tau_{\text{racine\_évidente}}$ et $\tau_{\text{discriminant}}$ décrites ci-après :

- La technique $\tau_{\text{racine\_évidente}}$ consiste à développer et réduire une expression algébrique pour se ramener au type de tâches $T_{\text{trinôme}}$ « Résoudre une équation trinôme[13] », à chercher une éventuelle racine évidente, et à déterminer la deuxième comme solution d'une équation du premier degré (équation du premier degré produite par le théorème sur la relation entre les coefficients et les racines du trinôme).
- La technique $\tau_{\text{discriminant}}$ consiste à développer et réduire une expression algébrique pour se ramener au type de tâches $T_{\text{trinôme}}$ « Résoudre une équation trinôme » puis à utiliser les formules donnant les racines à l'aide du discriminant.

Il y a donc trois techniques de résolution algébrique d'une équation du second degré si on ajoute à ces deux nouvelles techniques celle mise en place dans M3 et M2, à savoir $\tau_{\text{produit\_nul}}$. Sont-elles mises en concurrence ? Une remarque du manuel nous alerte (figure 16).

✔ Essayer de résoudre une équation du second degré sans utiliser la méthode générale de résolution :
• reconnaître une identité remarquable,
• une racine évidente,
• etc.

[13] Une équation trinôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Figure 16. Mise en garde sur la concurrence des techniques. (M1, page 73)

Dans cet extrait, l'usage du terme méthode générale, qui renvoie à la technique $\tau_{discriminant}$, signifie pour nous que les auteurs de M1 considèrent que cette technique a une portée pragmatique plus large que celles de $\tau_{produit\_nul}$ ou $\tau_{racine\_évidente}$ mais qu'elle n'est pas optimale sur les portées pragmatiques de ces deux techniques.

L'organisation des exercices s'inscrit dans cette logique comme l'atteste le regroupement des exercices en trois phases que nous donnons ci-après dans l'ordre chronologique.

– La première phase comporte 12 exercices mettant en concurrence, de façon implicite, les deux nouvelles techniques : en effet la technique optimale pour 3 exercices est $\tau_{racine\_évidente}$ et pour 9 exercices $\tau_{discriminant}$.

– La deuxième phase comporte 14 exercices. La consigne « résoudre l'équation, sans utiliser les formules générales de résolution » (M1, page 77) interdit explicitement $\tau_{discriminant}$ et implicitement $\tau_{racine\_évidente}$. La technique optimale est pour tous les exercices $\tau_{produit\_nul}$. La variation des différentes formes des expressions à factoriser est une reprise de celle déjà observée dans M2. Dans cette phase, il n'y a donc pas de mise en concurrence.

– La troisième phase comporte seulement 4 exercices, la consigne demandant explicitement une résolution par $\tau_{produit\_nul}$ et $\tau_{discriminant}$.

Pour les exercices 81 à 84 résoudre chaque équation de deux façons :
• en factorisant le premier membre ;
• en développant et en utilisant les formules de résolution.

81 $4x^2-(x-2)^2=0.$

82 $(x+3)-x(x+3)=0.$

83 $50-2(2-3x)^2=0.$

84 $x^2-x-3(x-1)=0.$

Figure 17. Mise en concurrence de $\tau_{produit\_nul}$ et $\tau_{discriminant}$ (M1, page 77)

La double résolution exigée dans la troisième phase montre l'optimalité de $\tau_{produit\_nul}$ pour l'ensemble des tâches proposées. De fait, cette mise en concurrence organisée par M1 vise à limiter la portée institutionnelle de $\tau_{discriminant}$ en réduisant sa portée pragmatique au profit de $\tau_{produit\_nul}$.

Notons que ces trois phases contribuent au quatrième moment didactique, celui du travail des techniques au sens de Chevallard (1999, p. 253) :

> Le *quatrième moment* est celui du *travail de la technique*, qui doit à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là), et accroître la maîtrise que l'on en a : ce moment de mise à l'épreuve de la technique suppose en particulier un ou des corpus de tâches adéquats qualitativement aussi bien que quantitativement.

5.4. Synthèse

Tout au long du curriculum, trois techniques ont émergé plus ou moins tardivement : d'abord $\tau_{produit\_nul}$ (M3, M2) puis $\tau_{racine\_évidente}$ et $\tau_{discriminant}$ (M1). Soulignons que contrairement à l'étude de cas de la section 4, à aucun moment n'apparaît $\tau_{racine\_carrée}$. Donc, durant une longue période, il n'y a pas de concurrence pour $\tau_{produit\_nul}$.

L'élargissement de la portée de la technique de $\tau_{produit\_nul}$ se fait par l'enrichissement des praxéologies de factorisation tout au long du curriculum offert par les trois manuels M3, M2 et M1. Cet élargissement progressif atteste d'une continuité dans la dynamique praxéologique concernant la technique $\tau_{produit\_nul}$. Elle a aussi comme fonction en M1 de produire $\tau_{discriminant}$ et contribue donc à son environnement technologique.

Mais, il y a aussi une accélération considérable de la dynamique praxéologique, si l'on prend en compte le temps institutionnel, dans le passage de la période 1 (niveaux troisième-seconde) à la période 2 (niveau première) dans ce curriculum. Cette accélération se traduit par :

- La mise en concurrence avec d'autres techniques en période 2 contre l'absence de toute concurrence en période 1.
- La complexification de l'environnement technologique aussi bien pour la factorisation que pour la résolution des équations du second degré en période 2 contre la complexification uniquement de la factorisation de la période 1.
- Le changement de relation entre les deux types de tâches $T_{factoriser}$ et $T_{équation\_degré\_2}$ qui relève de la dialectique outil/objet présentée dans le paragraphe 1. Lors de la période 1 le type de tâches $T_{factoriser}$ est un ingrédient de la technique $\tau_{produit\_nul}$, alors que lors de la période 2 $T_{équation\_degré\_2}$ devient un ingrédient possible de $T_{factoriser}$.

Conclusion

L'*évolution* praxéologique se nourrit de *dynamiques* praxéologiques variées. Ces dynamiques sont propres à toute activité d'étude. L'étude des évolutions praxéologiques suppose la prise en compte d'un temps institutionnel plus ou moins long. Ce temps révèle des praxéologies plus ou moins pérennes pour des raisons souvent liées aux organisations didactiques de l'étude et qui, de ce fait, ne sont pas nécessairement apparentes dans les programmes.

Nous avons montré, dans la chronogenèse des portées institutionnelles, que les organisations praxéologiques s'adaptent à l'émergence de nouvelles techniques. Il s'agit d'un phénomène écologique d'amélioration de la praxis et de transformation de l'environnement praxéologique. À cet égard, les nouvelles techniques peuvent ou non émerger pour contourner ou combler une carence institutionnelle, soit liée au haut coût de la mise en œuvre des techniques existantes, soit par l'incapacité d'accomplir un ensemble de tâches. Si oui, cette émergence peut apporter des raisons d'être à de nouvelles praxéologies. La concurrence des techniques, la maturation de l'environnement technologique et les choix institutionnels conditionnent l'avenir de ces praxéologies dont certaines vont disparaître et d'autres connaître une stabilité provisoire. L'analyse en termes de dynamique praxéologique donne donc des outils pour questionner ces phénomènes écologiques mais aussi pour étudier les moments didactiques et en particulier celui du travail de la technique.

Pour le chercheur, dans un premier moment, la caractérisation des portées des techniques institutionnelles est un instrument pour décrire les parcours d'étude choisis au sein des institutions. Face à cette description, la confrontation des portées institutionnelles aux portées pragmatiques est un outil pour interroger et comprendre les choix institutionnels – ce que nous avons essayé de montrer dans les études de cas.

Dans la première étude de cas, nous avons comparé deux curriculums d'un même niveau scolaire à deux époques différentes (M_{2003} et M_{2008}). Si nous avions modélisé seulement les praxéologies stables finales, nous aurions eu l'impression qu'il s'agissait d'une organisation praxéologique identique dans les deux manuels, sans prendre en compte les organisations didactiques qui ont conduit à cette configuration. Or, notre analyse, en termes de portées, montre que cette organisation praxéologique est l'aboutissement de deux dynamiques praxéologiques différentes par l'évolution des techniques et de l'environnement technologique. En faisant l'hypothèse qu'une dynamique praxéologique impacte les praxéologies personnelles des élèves (Croset & Chaachoua, 2016), les dynamiques mises en place institutionnellement pourraient être aussi un moyen de les comprendre et de les expliquer.

Dans la deuxième étude de cas, nous avons analysé une évolution praxéologique sur un temps institutionnel long : celui de la vie officielle du type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ depuis la classe de troisième jusqu'à la classe de première du système français actuel (2016 – 2019). Nous avons montré que deux dynamiques praxéologiques peuvent se nourrir l'une de l'autre. L'étude dans un temps institutionnel long permet aussi de repérer des périodes contrastées avec des ralentissements et des accélérations de la dynamique et d'en chercher les raisons.

S'il est vrai que les portées des techniques nous aident à déchiffrer le réel d'une institution d'enseignement, elles peuvent également nous aider à concevoir des parcours d'étude non considérés par les modèles dominants en vigueur.

Bibliographie

ARTAUD, M. (1998). Les nombres relatifs. Étude d'un compte-rendu d'observation d'une classe de cinquième. In R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'Eté* (pp. 183-198). IREM de Clermont-Ferrand. doi: http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/analyse_des_pratiques_univ_d_ete_la_rochelle.pdf.

BOSCH, M., & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(1)**, 77-124.

BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories & empiries. In J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris, *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 23-40). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1994) Problèmes et résultats de didactique des mathématiques. Notes pour une présentation au groupe d'étude ICMI Study 94 : Washington. doi: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/11/WASH8c.pdf.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In J. Pilet et C. Vendeira (Eds.), *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2018* (pp. 8-25). Paris : IREM de Paris.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, **19 (2)**, 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2011). Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. Séminaire de l'ACADIS (ADEF, Marseille). DOI : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude – Ecologie & Regulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56)). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CROSET, M.-C., & CHAACHOUA, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **36(2)**, 161-196.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7 (2)**, 5-31.

Référence des Manuels

Manuel Triangle, classe de 3ème, Edition Hatier, 2003.

Manuel Phare, classe de 3ème, Edition Hachette, 2008.

Manuel Transmath, classe de 3ème, Edition Nathan, 2016

Manuel Transmath, classe de 2de, Edition Nathan, 2019

Manuel Transmath, classe de 1ère, Edition Nathan, 2019

Programmes, 3ème : Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

DANIELLY KASPARY

Univ. Grenoble Alpes, LIG et Univ. Fédérale du Mato Grosso do Sul, Capes

Kaspary.d@gmail.com

HAMID CHAACHOUA

Univ. Grenoble Alpes, LIG

Hamid.Chaachoua@imag.fr

ANNIE BESSOT

Univ. Grenoble Alpes, LIG

annie.bessot@gmail.com

Annexe

Recueil des types de tâches dans trois manuels, période 2016 -2019 (collection Transmath)			
	Technique	Ordre chronologique des types tâches présentés dans le cours	Ordre chronologique d'apparition des types tâches présents dans les exercices. Le nombre d'occurrence est représenté entre parenthèses
3ème	$\tau_{produit\_nul}$	$(ax + b)^2 - [k^2] = 0$ $x^2 + [2c]x + [c^2] = 0$ $ax^2 + bx = 0$	$(ax + b)(cx + d) = 0$ (8) $k(ax+b)(cx+d) = 0$ (1) $ax^2 + bx = 0$ (2) $[a^2]x^2 - [k^2] = 0$ (2) $x^2 + [2c]x + [c^2] = 0$ (1) $(ax + b)^2 - [k^2] = 0$ (1)
2de	$\tau_{produit\_nul}$	$[a^2]x^2 - [k^2] = 0$ $k(ax + b)(cx + d) = k'(ax + b)(ex + f)$	$(ax + b)(cx + d) = 0$ (6) $[a^2]x^2 - [k^2] = 0$ (2) $(ax + b)^2 = [k^2]$ (3) $x^2 + [k^2] = 0$ (1) $x^2 = k$ (1) $[a^2]x^2 \pm [2ac]x + [c^2] = [k^2]$ (1) $(ax + b)(cx + d) + (ax + b)(ex + f) = 0$ (1) $(ax + b)(cx + d) - k(ax + b)(ex + f) = 0$ (2) $[k^2]\ (ax + b)^2 = [l^2]\ (cx + d)^2$ (3) $(ax + b)2 = -[k^2]$ (1) $k(ax + b)(cx + d) = k'(ax + b)(ex + f)$ (2) $k([na]x+[nb])(cx+d) = l([ma]x+[mb])(ex+f)$ (2) $(ax + b)(cx + d) = [c^2]x - [d^2]$ (1) $[a^2]x^2\pm[2ac]x+[c^2] = [b^2]x^2\pm[2bf]x+[f^2]$ (1) $[a^2]x^2-[c^2]+k([a^2]x^2\pm[2ac]x+[c^2]) = ax-c$ (1) $([na]x + [nb])^2 = ax + b$ (1) $k(ax + b)^2 = l(cx + d)^2$ (1)
1ère	$\tau_{produit\_nul}$ $\tau_{racine\_évidente}$ $\tau_{discriminant}$	$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$ (avec les variantes sur la position des termes) (12) Les différentes formes de la classe de 2de (18)

Légende pour la formalisation des types de tâches :

- […] : entre crochet figure la valeur du résultat de l'opération.
- Sauf x, les autres lettres représentent des nombres entiers.