SOPHIE ROUSSE

LE DISCRET ET LE CONTINU DANS L'ENSEIGNEMENT DES SUITES ET DES FONCTIONS EN FIN DE COLLEGE ET AU LYCEE

Abstract. "The discrete" and "the continuous" in teaching sequences and functions in French secondary school. Notions pertaining to the Calculus field in France, up to the end of Seconde (10^{th} grade), are mainly functions and their graphical representations. Curricula, followed by textbooks, integrate these notions into "the continuous". This appears to be self-evident since "the discrete" is not explicitly addressed. Sequences, which are *a priori* part of "the discrete", are first studied in Première.
However, "the discrete" and "the continuous" have mathematical aspects and constitute two worlds (in a sense that we will define) between which it is difficult to delineate a boundary. Students' activities on tasks which mobilize continuous functions may be carried out in the discrete world as much as in the continuous one. Furthermore, sequences and functions in secondary school count numerous interactions and correct or incorrect analogies. Textbooks make choices in the graphical and algebraical registers which differ from one book series to another, which testifies to the existence of objective difficulties. Lastly, in secondary school and MEEF master, students' work shows a number of confusions between sequences and functions. This leads us to reflect on a possible introduction of sequences prior to functions.

Keywords. Discrete, continuous, sequence, function, mathematics activities

Résumé. En France, jusqu'en fin de Seconde, le domaine de l'analyse est « peuplé » de notions (fonction, représentation graphique), que les programmes officiels, suivis par les manuels, inscrivent dans le continu. Ce continu semble d'autant plus aller de soi que le discret, malgré tout présent, n'est pas abordé explicitement. Les suites, qui s'inscrivent *a priori* dans le discret, sont abordées en Première. Or le discret et le continu présentent des aspects mathématiques et constituent deux « mondes » (en un sens qui sera précisé) entre lesquels il s'avère complexe de délimiter une frontière ; si les fonctions continues sur un intervalle s'inscrivent dans le continu d'un point de vue mathématique, les tâches qui les mobilisent peuvent inscrire les activités des élèves aussi bien dans monde du discret que celui du continu ; de plus, dans les savoirs à enseigner au lycée, les interactions et analogies (exactes ou erronées) entre suites et fonctions sont nombreuses. Dans les registres graphique et algébrique, les manuels effectuent des choix qui diffèrent d'une collection à l'autre, ce qui témoigne de l'existence de difficultés objectives. En dernier lieu, les travaux d'élèves et d'étudiants en master MEEF montrent de multiples confusions entre suites et fonctions. Ceci nous mène à une réflexion sur une éventuelle introduction des suites avant les fonctions.

Mots-clés. Discret, continu, suite, fonction, activités mathématiques

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 26, p. 45 - 84.

Introduction

En Troisième et en Seconde générale en France, le domaine de l'analyse est aujourd'hui « peuplé » de notions (fonction, représentation graphique…), que les programmes officiels (précisés plus loin), suivis par les manuels, inscrivent dans le continu : les fonctions sont majoritairement définies sur un intervalle de **R** et continues sur cet intervalle, même si ce n'est pas explicite. Cela semble d'autant plus aller de soi que les fonctions apparaissent comme des outils de modélisation de phénomènes continus. Pour les élèves, il se pourrait que ce ne soit pas si clair.

Les suites, qui s'inscrivent *a priori* dans le discret, sont introduites en Première. Les manuels les définissent comme des fonctions définies sur **N**. Elles sont source avérée de difficultés pour les élèves et les étudiants ; le discret et le continu pourraient y jouer un rôle. D'où les questions : comment et en quoi les activités mathématiques des élèves mettent-elles en jeu le discret et le continu dans l'enseignement des suites et des fonctions au secondaire ? Quelles en sont les conséquences possibles sur les apprentissages ? Nous nous appuierons sur une nécessaire étude du relief des notions de suite et de fonction sous l'éclairage du discret et du continu, ce qui nous amène à formuler ces deux questions préliminaires : qu'est-ce que le discret et le continu épistémologiquement et mathématiquement ? Comment les caractériser du point de vue des activités mathématiques des élèves ? Ce sera l'objet de la partie 2 dans laquelle nous définissons deux « mondes » dans lesquels situer ces activités mathématiques. Puis nous aborderons nos questions :

- Du côté du savoir à enseigner (les programmes en partie 3, les manuels en partie 4) et du savoir enseigné (vu à travers les manuels) : les activités sur les suites et les fonctions s'insèrent-elles effectivement dans deux mondes distincts ? Comment l'ordre d'introduction dans les programmes actuels (fonctions continues sur un intervalle suivi de suites) est-il susceptible d'influer sur les apprentissages des élèves ?
- Du côté des élèves et étudiants en master MEEF en partie 5 : comment les confusions entre suites et fonctions se manifestent-elles ? En effet, ce sont les traces d'activités mathématiques effectives des élèves et des étudiants qui nous servent d'indicateur des éventuelles difficultés et confusions, et *in fine* des apprentissages des élèves et des étudiants.

En conclusion nous développerons ce en quoi une introduction des suites avant les fonctions continues sur un intervalle nous semble une voie prometteuse à explorer.

Malgré la disparition des séries L, ES et S au lycée, remplacées par les spécialités en 2019, les propos de cet article se prolongent dans l'actualité. S'agissant des suites et des fonctions, les programmes de la spécialité mathématiques en Première et en Terminale sont dans les grandes lignes similaires à ceux de la série S.

1. Contexte, éléments théoriques et méthodologiques de l'étude présentée

Les recherches en didactique de l'analyse dans le secondaire abordent les problématiques du discret et du continu, de façon indirecte, par le biais de l'étude de thèmes qui figurent au programme officiel : les nombres réels, les limites (de suites, de fonctions), la continuité, les dérivées et les intégrales. En effet, comme le note Durand-Guerrier (2012), le continu (de même que le discret) est présent dès l'enseignement primaire et jusqu'à l'université, bien que de façon essentiellement implicite. Quelques travaux rencontrent tout de même le sujet de cet article, de façon incidente, principalement concernant les confusions (en germe ou avérées) des élèves et étudiants.

Deux d'entre eux situent leur recherche dans le supérieur, sur le thème des limites de suites et de fonctions : Vandebrouck (2011) décrit le résultat d'une étude de la CI2U sur des étudiants de Licence 1 de mathématiques. Il note que la suite de terme général $u_n = \sin(2\pi n)$ n'aurait pas de limite d'après un sixième des étudiants : la fonction $x \rightarrow \sin(2\pi x)$ n'ayant pas de limite en $+\infty$, la suite n'en aurait pas non plus.

Fernandez-Plaza et al. (2016) confirment ce résultat, à un niveau d'enseignement comparable en Grande-Bretagne : ils proposent différentes limites de suites et de fonctions à des étudiants et leur demandent de les regrouper selon des critères de leur choix. Les auteurs écrivent que de nombreux étudiants se réfèrent indifféremment à des limites de suites ou des limites à l'infini de fonctions selon des critères de forme algébrique. En particulier, $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n)}$ et $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \sin(2\pi x)}$ sont regroupées par plusieurs étudiants.

Ces deux recherches montrent que pour bon nombre d'étudiants, la forme algébrique semble suffire à définir l'objet mathématique, entrainant une confusion entre suites et fonctions.

Dans Coppé et al. (2006), les auteurs situent leur recherche en classe de Seconde et questionnent ce qu'ils nomment « les trois ostensifs que sont le tableau de valeurs, le tableau de variation et la courbe » d'une fonction (implicitement définie sur un intervalle réel). Ils notent que les élèves ont tendance à penser qu'un tableau de valeurs comportant les valeurs entières d'une variable suffit à définir la fonction, de même que des points d'une courbe suffisamment rapprochés suffisent pour la tracer.

Nous appuyons nos analyses sur notre travail de thèse (Rousse, 2018) qui est centré sur le discret et le continu (au niveau du secondaire)[1].

La démarche théorique suivie s'inscrit dans les recherches qui admettent que ce sont les activités mathématiques des élèves qui permettent de développer leurs apprentissages (Vandebrouck, 2008). Ces activités sont des segments de leur activité, au sens plus large de ce qu'ils font, pensent, écrivent, disent, mais aussi n'écrivent pas, ne disent pas… Nous nous intéressons uniquement aux activités mathématiques des élèves ; c'est pourquoi, dans la suite de cet article, « activités » désignera « activités mathématiques ». Celles-ci sont générées par les tâches qui sont proposées aux élèves, ainsi que par les déroulements en classe, organisés dans un contexte précis. Inaccessibles, elles sont appréciées en comparant les activités mathématiques attendues et ce qui est observable à travers les productions (qui fournissent des traces d'activités « effectives »[2]). Ainsi, nous approchons le sujet de l'enseignement des suites et des fonctions par le double questionnement : qu'est-ce qui caractérise les activités qui s'inscrivent dans le discret et celles qui s'inscrivent dans le continu, comment ces activités vivent-elles dans les mathématiques à enseigner, enseignées, chez les élèves et les étudiants ?

Nous appuyons nos réponses sur une étude du « relief » (Robert et al., 2012, p. 78) du discret et du continu ainsi que celui de l'enseignement des suites et des fonctions. Une analyse épistémologique et mathématique préalable est croisée avec une étude des mathématiques à enseigner (les programmes officiels, les manuels qui les mettent en œuvre) et les aspects cognitifs (les difficultés des élèves).

Nous mobilisons les jeux de registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) en tant qu'outils d'analyse ; en effet, ses travaux montrent que c'est dans un travail articulé entre différents registres (ici : graphique, algébrique, numérique) que la conceptualisation d'une notion peut s'effectuer. Nous nous appuyons de surcroît sur Vandebrouck (2011) qui a discerné trois domaines de travail sur le thème des fonctions : un domaine F1 d'entrée dans la pensée fonctionnelle qui coordonne plusieurs registres, de la Troisième au début de la Première ; un domaine F2 très lié à l'algèbre, à partir de la Première, qui masque en partie la richesse donnée par F1 et s'appuie sur l'intuition graphique sans véritablement s'interroger sur le rapport entre graphique et fonction. Quant au domaine F3 dont le fondement est la complétude de **R**, il est présent à l'Université.

[1] Nous y étudions l'enseignement de l'analyse et des probabilités, thèmes porteurs de nombreuses interactions entre le discret et le continu. Le thème des probabilités ne sera pas abordé dans cet article.

[2] L'analyse de vidéos de cours permet d'apprécier les activités « possibles » des élèves, nous n'investirons cependant pas ce type d'analyse dans cet article.

Nous convoquons le filtre des trois perspectives dans le thème des fonctions (Vandebrouck, 2011 ; Montoya Delgadillo et al., 2018) : les activités des élèves qui mettent en jeu les propriétés d'une fonction sur un intervalle embarquent une perspective globale ; celles qui mettent en jeu les propriétés sur des voisinages « aussi petits soient-ils » embarquent une perspective locale ; enfin, les autres propriétés qui mettent en jeu la valeur de la fonction en un point embarquent une perspective ponctuelle. En particulier, quand elles mettent en jeu une propriété ponctuelle universelle (i.e. énoncée par un quantificateur universel, par exemple le sens de variation d'une fonction déterminé par le signe de sa dérivée), elles n'embarquent qu'une perspective ponctuelle (et pas la perspective globale). Il en est de même lorsque des expressions algébriques de fonctions sont mobilisées. D'après ces auteurs, seules les activités effectuées dans le registre graphique peuvent embarquer les trois perspectives et faciliter les changements de perspectives.

L'étude du relief et le filtre des perspectives permettent de constituer une référence qui guide le chercheur dans son analyse des activités attendues des élèves qui interagissent avec toutes les ressources autour d'eux, y compris les discours des manuels et des enseignants. Elle nous sert aussi à analyser les traces d'activités effectives des élèves et étudiants et finalement à émettre des propositions curriculaires. En effet, la conceptualisation visée, en tant que processus aboutissant à une certaine disponibilité des connaissances sur un ensemble de tâches, dépend non seulement des tâches proposées et des déroulements, mais aussi de l'ordre choisi pour aborder les notions et de l'organisation des connaissances à construire qui peut en résulter. C'est la variabilité de cette organisation que nous allons explorer puis partiellement investir en fin d'article.

Du point de vue méthodologique, nous avons mené plusieurs enquêtes, à partir d'ouvrages d'historiens et épistémologues des mathématiques, d'analyses de programmes et de manuels. Les manuels nous renseignent à la fois sur les mathématiques à enseigner (les manuels mettent en œuvre les programmes officiels) et les mathématiques enseignées (en tant que ressources pour l'enseignant). Nous complétons notre étude par diverses observations d'élèves et de futurs enseignants (étudiants en master MEEF).

Nous restreignons nos analyses au secondaire dans lequel les notions de fonction et de suite sont introduites, c'est-à-dire à partir de la Troisième. Contrairement aux mots « discret » et « continu », le mot « dense » est absent des programmes officiels de ces niveaux d'enseignement. C'est pourquoi nous avons choisi, à ce stade de notre recherche, de guider nos analyses par les distinctions entre le discret et le continu, bien qu'un grain plus fin d'analyse, prenant par exemple en compte le dense entre le discret et le continu, pourrait être employé. Le dense joue malgré tout un rôle dans l'étude qui suit.

Par « suite » nous désignerons une suite numérique définie sur **N** et par « fonction » une fonction réelle d'une variable réelle.

Nous désignerons par « représentation graphique » d'une fonction (resp. d'une suite) l'ensemble des points de coordonnées (x ; $f(x)$), x appartenant à l'ensemble de définition de f (resp. (n ; u_n), $n \in \mathbf{N}$) dans un repère du plan. Le mot « courbe » sera, selon l'usage au lycée, réservé aux représentations graphiques de fonctions continues sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de **R** ; une courbe « lisse » désignera la courbe d'une fonction de classe C^1.

La notion de suite est abordée en classes de Première et de Terminale (dans le cas des suites de nombres réels). Les programmes des séries ES (Economique et Sociale) et L (Littéraire) concernant les suites sont essentiellement des versions allégées de ceux de série S (Scientifique)[3], c'est pourquoi nous nous bornons à l'analyse des programmes officiels et de manuels de la série S. De plus, les « *contenus* » et « *capacités* » qui sont les plus porteurs de possibles interactions entre les suites et les fonctions sont essentiellement présents au niveau de la Première et le texte a peu évolué entre 2000 et 2010 ; c'est pourquoi nos analyses portent sur le programme et les manuels de Première S de 2010.

2. Discret et continu : deux mondes dans lesquels se situent les activités

Que sont le discret et le continu ? La question concerne bien entendu les mathématiques. La poser aussi des points de vue épistémologique et historique permet de mieux identifier ce qui a présidé à leur développement, mais aussi ce qui a freiné celui-ci, dans le but de pouvoir les identifier dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées aujourd'hui, ainsi que dans les productions des élèves et étudiants, de mieux en comprendre les jeux et les enjeux d'enseignement. Dans cette visée, nous avons consulté des ouvrages d'historiens et épistémologues des mathématiques (Cousquer, 1994 ; Dhombres, 1978 ; Longo, 1999).

Le mot « discret » vient du latin *discretus* qui signifie séparé, isolé. L'être humain, dans l'action de comptage d'éléments d'une collection finie, dispose d'une expérience du discret ; celle du mouvement par sauts en est une autre.

Étymologiquement, le mot « continu » vient du latin *continuus* qui désigne ce qui est d'un seul tenant. L'individu dispose de multiples expériences du continu, citons-en quelques-unes :

---

[3] Mis à part le prolongement des suites géométriques par les fonctions exponentielles en série ES, que nous n'aborderons pas ici, mais que nous avons analysé dans Rousse (2018).

- Celle du temps. Par exemple, le temps de la physique représenté sur un axe orienté présuppose un temps continu. Cependant, sa mesure par un instrument le discrétise. Ainsi s'expliquent les dénominations de « temps discret » et de « temps continu », déjà présentes dans le programme officiel de Terminale S de 2001, toujours là en 2019 dans celui de spécialité de Première, et qui témoignent de cette dualité ;
- Celle du mouvement sans saut d'un objet ;
- Celle du tracé d'une ligne au crayon, sans le lever. C'est d'ailleurs l'idée retenue pour la « définition » d'une fonction continue au lycée dans les manuels correspondants aux programmes officiels de Terminale générale de 2011 qui proposent une « *approche intuitive de la continuité* ». (Ministère de l'Education Nationale, 2011).

Nous avons mentionné *supra* que le temps peut se situer dans le discret ou dans le continu. C'est ainsi que, dès l'antiquité, deux conceptions s'opposaient dans les paradoxes de Zénon sur la nature des grandeurs temps et espace. Selon Dhombres (1978) et Cousquer (1994), les conceptions discrète et continue des grandeurs s'opposaient de deux façons possibles :

- La conception atomiste, selon laquelle le temps, l'espace seraient constitués d'éléments insécables s'oppose à la conception continuiste selon laquelle ils sont divisibles à l'infini ;
- Une opposition d'ordre quantitatif : selon la conception discrète, ces grandeurs seraient constituées d'un nombre fini d'éléments insécables alors que selon la conception continue, elles le seraient d'un nombre infini d'éléments insécables.

Ainsi, deux aspects permettraient de distinguer discret et continu :

- L'aspect 1, que nous nommons « avec ou sans sauts ». Aujourd'hui, cet aspect est formalisé dans les ensembles ordonnés par la notion d'ensemble dense en lui-même[4], correspondant à la conception continuiste des grandeurs divisibles à l'infini présente dès l'antiquité. Dans les espaces topologiques, cet aspect est formalisé par les notions de point isolé et de point limite.
- L'aspect 2, quantitatif. Cet aspect inclut l'opposition fini-infini présente dès l'antiquité, ainsi que l'opposition infini dénombrable-infini indénombrable.

Aujourd'hui, d'un point de vue mathématique, la notion de discret est clairement définie : un espace topologique est discret lorsque ses points sont isolés. Ceci dépend

[4] Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit dense en lui-même si, pour tout couple $(x ; y)$ d'éléments de E tels que $x < y$ il existe un élément z de E tel que $x < z < y$.

de la topologie choisie. Un ensemble discret est donc un ensemble « avec sauts » (aspect 1). Des prototypes du discret sont les ensembles finis, les ensembles des entiers naturels et relatifs, les ensembles $\mathbf{D}_n$ des décimaux à n décimales (qui sont infinis dénombrables, aspect 2). Une des propriétés des ensembles **N**, **Z** et $\mathbf{D}_n$ est l'existence pour tout élément d'un unique successeur[5].

Par ailleurs, il apparait que le continu n'est à ce jour formalisé que pour les corps totalement ordonnés ; dans ce cas les ensembles continus sont isomorphes à l'ensemble des nombres réels[6]. Celui-ci est dense en lui-même (aspect 1) et il est infini indénombrable, son cardinal porte même le nom de « continu » (aspect 2).

Ainsi, les ensembles de nombres entiers naturels et de nombres réels sont prototypiques respectivement du discret et du continu. Les intervalles de **R**, même s'ils ne peuvent pas être mathématiquement qualifiés d'ensembles continus selon la définition retenue[7], présentent aussi les aspects 1 et 2 du continu : ils sont denses en eux-mêmes, leurs points sont tous des points limite et ils ont le même cardinal que **R**. Ils relèvent bien de l'expérience du continu pour les élèves et étudiants, ne serait-ce que par leur tracé sans lever le crayon sur la droite des réels.

Le continu présente d'autres aspects mathématiques, dans Rousse (2018) nous en distinguons quatre ; nous ne présentons ici que les aspects 1 et 2 qui servent le propos de cet article. Quant aux décimaux et aux rationnels, ils ne présentent pas de saut (ils sont denses en eux-mêmes et n'ont pas de point isolé pour la topologie naturelle). Par conséquent, ils ne sont pas discrets pour la topologie usuelle ; et bien qu'ils présentent l'aspect 1 du continu et qu'ils soient infinis (aspect 2), ils ne sont pas continus[8].

Les activités mathématiques possibles des élèves peuvent, selon les aspects mathématiques et les perspectives qu'elles mettent en fonctionnement, selon les expériences qu'elles véhiculent, s'inscrire dans le discret ou dans le continu. Prenons pour exemple une notion mathématique à la présence récurrente dans la scolarité des élèves : la droite. Elle est prototypique du continu : pour ce qui est des

---

[5] La notion de successeur est à la base de l'axiomatisation de **N** par Peano (1889).

[6] Nous ne retiendrons que cette définition mathématique d'ensemble continu ; des auteurs utilisent localement une définition (par exemple Choquet (2000) définit les ensembles continus dans son cours de topologie par les ensembles compacts connexes, définition que nous n'adoptons pas car elle exclut **R**).

[7] En effet, les intervalles strictement inclus dans **R** ne sont pas des corps ; cependant nous avons montré dans Rousse (2018) qu'ils sont largement mobilisés dans les tâches et les déroulements au lycée dans le but d'orienter les activités des élèves vers le monde du continu.

[8] Ainsi, la densité ne caractérise pas le continu.

mathématiques (il est même question de « la droite des réels »), comme de l'expérience (l'individu la trace sans lever le crayon). La droite est alors perçue globalement et nous faisons l'hypothèse que la perspective globale peut situer les activités des élèves dans le continu. Cependant, la droite peut être aussi perçue comme un ensemble de points et nous faisons ici l'hypothèse que la perspective ponctuelle peut plutôt situer les activités dans le discret. Ainsi, les perspectives ponctuelle et globale et les expériences du discret et du continu cohabitent lorsque le travail des élèves relève :

– Du cadre géométrique : par exemple lorsqu'une transformation opère sur des points d'une droite vs lorsque l'on considère l'image de la droite par cette transformation ;

– Du cadre numérique, avec le registre graphique. En effet, la droite munie d'un repère, communément nommée « droite numérique », joue le rôle de frise des nombres entiers positifs au primaire. Puis elle sert de support intuitif du continu des nombres réels au secondaire – bien qu'étant essentiellement mobilisée pour représenter des entiers, quelques décimaux et rationnels ;

– Du cadre fonctionnel ; par exemple dans la définition d'une fonction affine f : *à chaque x* (de **R**) on associe $f(x)$, vs lorsque *x décrit* **R**, on associe $f(x)$ à x[9].

Cependant, au collège et au lycée, le discret et le continu ne se constituent pas en tant que cadres : à ce niveau d'enseignement il n'y a pas de définition possible, peu de propriétés sont explicitables, discret et continu ne font l'objet d'aucune tâche spécifique. Les activités ne se font pas *sur* le discret ou *sur* le continu, mais *dans* le discret ou *dans* le continu.

Nous avons choisi d'utiliser le mot « monde » pour situer les activités relativement au discret et au continu. Le tableau 1 récapitule nos exemples d'expériences individuelles, d'ensembles de nombres et de notions mathématiques, les aspects mathématiques et les perspectives susceptibles de situer les activités des élèves dans l'un ou l'autre monde.

Au secondaire, compte tenu de la nature de leurs ensembles de définition (les suites sont définies sur **N**, les fonctions sont le plus souvent définies sur un intervalle de **R**), on peut considérer dans une première approche que la mobilisation des suites et des fonctions situe les activités des élèves respectivement dans le monde du discret et dans celui du continu. Par ailleurs, ne dit-on pas que les suites fournissent des modèles discrets et les fonctions des modèles continus ? Pourtant ce n'est pas si simple puisque les suites numériques sont aussi des fonctions ; elles sont définies sur

---

[9] Définitions rencontrées au cours de nos analyses de manuel.

l'ensemble discret des entiers naturels, mais prennent leurs valeurs dans l'ensemble continu des réels ; l'ensemble des termes d'une suite n'est d'ailleurs pas nécessairement discret – il ne l'est pas dès lors que la suite a une limite sans être stationnaire à partir d'un certain rang, cas le plus répandu au lycée. Nous verrons que ce n'est pas si simple non plus dans le thème des fonctions définies sur un intervalle de **R** : les activités possibles n'y relèvent pas seulement du monde du continu.

Tableau 1. Exemples relevant des mondes du discret et du continu au lycée

Convocation de…	**Monde du discret**	**Monde du continu**
Expériences individuelles	Grandeurs discrètes (dont temps) Comptage Points isolés Mouvement « par sauts »	Grandeurs continues (dont temps, espace) Tracé sans lever le crayon Mouvement continu
Aspect mathématique 1 – ensemble ordonné	Successeur	Ensemble dense en lui-même
Aspect mathématique 1 – espace topologique	Points isolés	Points limite
Aspect mathématique 2 – quantitatif	Fini Infini dénombrable	Infini Infini indénombrable
Perspectives	Ponctuelle	Globale
Ensembles de nombres	Ensemble fini, **N**, $\mathbf{D}_n$	**R** et ses intervalles
Notion de droite au secondaire	Droite : ensemble de points	Droite considérée dans sa globalité

Nous avons constaté le rôle que peut jouer le registre graphique dans l'articulation des deux mondes. En particulier, un nombre fini de points étant connu, les relier situe *a priori* l'activité associée dans le monde du continu, ne pas les relier la situe dans le monde du discret. D'où l'attention portée dans nos analyses à la façon dont les tâches incluant des représentations graphiques sont travaillées : un « petit » nombre de points d'une représentation graphique (de suite, de fonction) étant connu, les relie-t-on ou non, si oui comment ? De la façon dont ces tâches sont travaillées découle ce qui différencie pour les élèves du secondaire un ensemble de points à abscisses entières positives d'un ensemble de points dont les abscisses décrivent un intervalle de **R**. Cela peut jouer sur ce qui peut distinguer pour eux les suites numériques des fonctions définies sur un intervalle de **R**.

En résumé, dans le but de déterminer dans quelle mesure les activités des élèves sur les suites et les fonctions sont susceptibles de s'inscrire dans le monde du discret ou celui du continu, nous repérons au fil de nos analyses essentiellement :

- Les ensembles de nombres mobilisés, ici nombres entiers vs intervalles de **R** ;
- L'aspect 1 : avec ou sans sauts ;
- L'aspect 2, quantitatif, ici : fini vs infini, ou infini dénombrable de **N** vs infini indénombrable des intervalles de **R** ;
- Les perspectives ponctuelle et globale convoquées ;
- Les grandeurs en jeu dans les modélisations par les fonctions et les suites ;
- Le vocabulaire et les notations associés au discret et au continu ;
- Les traitements dans le registre graphique, ici : points isolés vs courbe.

3. Dans quels mondes les programmes officiels sur les suites et les fonctions situent-t-ils les activités des élèves au collège et au lycée ?

Nous présentons dans cette partie les résultats d'une analyse de programmes officiels de 1999 à 2018. La sous-partie 3.1 a pour objet l'introduction des fonctions en classes de Troisième et de Seconde. La sous-partie 3.2 présente l'introduction des suites en classe de Première, alors que les fonctions définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de **R** restent explicitement présentes à ce niveau d'enseignement. C'est pourquoi nous y abordons suites et fonctions sous l'angle de leurs éventuelles analogies.

3.1. Les fonctions en Troisième et en Seconde

En 1999 (Ministère de l'Education Nationale, 1998), seules la fonction linéaire et la fonction affine sont introduites en classe de Troisième, en tant que « *processus de correspondance* », définition porteuse de la perspective ponctuelle et situant plutôt les activités des élèves dans le discret selon notre hypothèse émise en section 2.

Dans les deux programmes officiels de Troisième suivants (Ministère de l'Education Nationale, 2008 et 2015), la notion de fonction est introduite dans une relative généralité, dégagée du cas particulier des fonctions affines.

En 2008, la fonction y apparait toujours comme un « *processus de correspondance* ». Les fonctions doivent cependant être « *déterminées par une courbe, un tableau de données ou une formule* » (Ministère de l'Education Nationale, 2008). Or, dans le cas où ces fonctions sont définies sur un intervalle de **R** (ce qui est le plus souvent le cas en Troisième et au lycée), il est erroné de pouvoir les déterminer par un tableau de données dès lors qu'elles ne sont pas des fonctions de référence connues des élèves (par conséquent connues à un ou des paramètres près). Dans le registre graphique, l'éventuel prolongement correspondant revient à dire que la donnée d'un nombre fini de points d'une courbe de fonction continue sur un intervalle permet de définir cette courbe de façon univoque. Les activités possibles des élèves associées à ce registre se situent donc *a priori* dans le monde du continu puisque les courbes se tracent « sans lever le crayon ». Cependant, il n'est pas certain que les quelques valeurs prises par la variable dans les tableaux de valeurs soient effectivement perçues par les élèves comme des cas particuliers de nombres de l'intervalle de définition ; leurs activités peuvent rester dans le monde du discret.

En Troisième en 2015, les fonctions apparaissent comme un outil de modélisation de phénomènes continus (elles sont donc implicitement continues sur un intervalle), en plus d'un « *processus de correspondance* » (Ministère de l'Education Nationale, 2015). Les activités possibles des élèves peuvent donc relever du continu en référence au phénomènes modélisés, mais peuvent aussi rester dans le monde du discret de par le point de vue de correspondance entre un nombre et son image. La question de relier ou non les points ne se pose plus, reste éventuellement celle de la façon dont ils sont reliés.

Le programme officiel de Seconde de 2001 préconise de donner « *quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini* » (Ministère de l'Education Nationale, 2001). Celui de 2009 (Ministère de l'Education Nationale, 2009) ajoute le cas des fonctions définies sur **N**. Cependant, dans l'aménagement de programme de mai 2017, l'étude des fonctions définies sur un ensemble discret est abandonnée. Implicitement, seule l'étude de fonctions définies sur des intervalles de **R** (voire une réunion finie d'intervalles de **R**) subsiste ; de plus, la notion de fonction ne figure plus qu'en tant qu'outil de modélisation permettant de résoudre des problèmes issus de phénomènes continus, ancrant potentiellement les activités des élèves dans le continu.

Conjointement, en 2009, la notion d'ensemble de définition d'une fonction disparait et le tableau de valeurs apparait comme pouvant caractériser une fonction (implicitement définie sur un intervalle) – dans les mêmes termes que pour la classe de Troisième. La question se pose à nouveau : dans quel monde les activités des élèves sur les fonctions s'inscrivent-elles effectivement en seconde ?

3.2. Les suites en Première et les analogies avec les fonctions

Localement, dans cette sous-partie et selon l'usage prédominant au lycée, « fonction » fait référence à une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle de **R**, par opposition à « suite ».

Nous y désignons par « notions analogues » des notions qui présentent des similarités, que ce soit dans le vocabulaire ou les notations, la forme algébrique, ou le procédé sous-jacent. Les définitions, théorèmes et propriétés peuvent être identiques aux notations près.

Compte tenu du sujet de cet article, nous présentons les définitions, notations, propriétés et techniques liées à l'introduction des fonctions (en Troisième et en Seconde), suivie de celle des suites qui figure aux programmes officiels de la classe de Première (Ministère de l'Education Nationale, 2000 et 2010) ; nous ne développons pas les notions de limite et de continuité, de suite et fonction convexes, de suite géométrique et de fonction exponentielle, et n'abordons pas le raisonnement par récurrence.

3.2.1 Notions de suite et de fonction : définitions

Par définition, une fonction définie sur un intervalle est une correspondance qui associe à tout nombre de cet intervalle un unique réel, son image. De ce fait, au lycée, hors de tout contexte (intra ou extra mathématique), en dehors de cas particuliers, une fonction définie sur un intervalle I peut être définie de deux manières : soit par l'expression algébrique, pour tout $x \in I$, de $f(x)$, soit par son graphe[10] (par l'intermédiaire, dans le registre graphique, de sa représentation graphique dans un repère, nous y reviendrons). Comme nous avons déjà dit, l'utilisation de la première définition met en jeu la perspective ponctuelle et peut ancrer les activités dans le discret tandis que la définition par la représentation graphique permet d'ancrer les activités dans le continu.

La notion de suite numérique peut être définie quant à elle de deux façons qui véhiculent des points de vue différents :

– Une suite numérique est une liste infinie dénombrable, ordonnée, de nombres réels (le premier terme, le deuxième terme, etc.) ;

– Une suite numérique est une fonction réelle définie sur **N**.

La première définition repose sur l'existence, pour chaque entier naturel, de son unique successeur. En cela, elle s'inscrit dans le discret et n'a pas d'analogue pour définir la notion de fonction définie sur un intervalle de **R**.

La deuxième définition véhicule le double point de vue de processus de correspondance et de dépendance d'une variable en fonction d'une autre, l'ensemble de définition étant discret dans le cas des suites et d'aspect continu dans le cas des fonctions définies sur un intervalle.

[10] Le graphe d'une fonction f définie sur un ensemble D est défini par $\{(x\,;f(x)),\ x \in D\}$. Cette notion ne figure pas au programme officiel du lycée.

Les termes d'une suite peuvent eux aussi être définis de deux façons : par une relation de récurrence (en plus d'un ou plusieurs termes) ou en fonction de n (nous désignons par « définition explicite » ce type de définition d'une suite).

Le premier type de génération des termes d'une suite s'inscrit bien entendu dans le discret en ce qu'il repose sur la notion de successeur. Dans les cas les plus simples, la relation de récurrence exprime un terme en fonction de son prédécesseur et la forme algébrique de cette relation permet d'écrire qu'il existe une fonction réelle d'une variable réelle g telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Nous nommerons g : « fonction qui génère la suite ».

Dans l'autre type de génération, les termes d'une suite sont définis *en fonction* de n. Lorsque f est une fonction réelle définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, nous la nommerons « fonction qui définit ». Notons qu'elle n'est pas unique, mais son expression algébrique permet d'identifier l'une d'elles. Dans certains cas, il n'existe pas de « fonction qui définit »[11].

Ainsi dans le thème des suites, les termes peuvent être définis *en fonction* de n ; des fonctions qui définissent et des fonctions qui génèrent coexistent ; de plus les suites sont des fonctions définies sur **N**, qui ne se distinguent des fonctions qui définissent une suite que par leur ensemble de définition. Ceci peut amener des confusions entre suites et fonctions et contribuer à situer les activités sur le thème des suites dans les deux mondes s'ils ne sont pas clairement identifiés par les élèves.

Les définitions relatives aux suites et aux fonctions et leurs éventuelles analogies sont résumées dans le tableau 2[12].

---

[11] C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$.

[12] Légende pour les tableaux :

- an. : notions, définitions, notations, propriétés, théorèmes ou techniques analogues
- id. : définitions, propriétés, théorèmes équivalents ; notations identiques
- impl. : implications – la réciproque est fausse si pas de signe d'équivalence
- *rien* : notions, définitions, notations, propriétés, théorèmes sans analogue ou avec analogue erroné

Tableau 2. Suites et fonctions : définitions

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notion de suite (définition) : liste infinie de réels indexée par les entiers naturels		Pas de définition analogue
Notion de suite (définition) : à tout $n \geq n_0$ est associé un réel	id.	Notion de fonction (définition) : à tout x d'un intervalle de **R** est associé un réel
Notion de suite (définition) : dépendance d'une variable réelle en fonction d'une variable numérique discrète	id.	Notion de fonction (définition) : dépendance d'une variable réelle en fonction d'une variable numérique continue
Définition des termes par récurrence		Pas de définition analogue
Définition des termes en fonction de n	id.	Définition de $f(x)$ en fonction de x

3.2.2 Notations

La notation usuelle du terme général d'une suite u est u_n ; il est cependant possible d'utiliser la notation fonctionnelle $u(n)$, qui est d'ailleurs celle des calculatrices graphiques des élèves du lycée (voir tableau 3). Les programmes officiels de lycée en vigueur jusqu'en 2018 ne spécifient pas les notations à adopter.

Tableau 3. Suites et fonctions : notations

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notation : $u(n)$	an.	Notation : $f(x)$
Notation : u_n		Pas de notation usuelle analogue

3.2.3 Représentations graphiques

Les suites étant des fonctions définies sur **N**, la notion de graphe est identique pour les suites et les fonctions. Cependant, les représentations graphiques des suites (resp. des fonctions définies sur un intervalle, qui y sont généralement continues) sont porteuses des expériences et aspects du discret (resp. du continu) : une suite peut être représentée dans un repère en dimension 2 par l'ensemble des points isolés de coordonnées (n ; u_n) tandis qu'une représentation de fonction continue se fait sans lever le crayon. Les représentations graphiques d'une suite et d'une fonction continue qui définit, si elle existe, cette suite, sont liées en ce que les points isolés représentant la suite se situent sur la représentation graphique de cette fonction qui la définit. Ceci peut amener une absence de distinction entre la suite et la fonction en question et, à nouveau, situer les activités conjointement dans les deux mondes.

Récapitulons dans le tableau 4 :

Tableau 4. Suites et fonctions : graphe et représentation graphique

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notion de graphe d'une suite (définition)	id.	Notion de graphe d'une fonction (définition)
Représentation graphique en dimension 2 : points isolés		Représentation graphique en dimension 2 : points généralement « reliés »

3.2.4 Suite des accroissements ; dérivée

Les notions de suite et de fonction comportent davantage que des analogies puisque les suites sont des fonctions définies sur **N**. Ce n'est pas le cas des notions de suite des accroissements et de fonction dérivée en un point.

Cependant, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{1} = \frac{u_{n+1}-u_n}{n+1-n}}$ est un taux d'accroissement entre deux valeurs consécutives d'une suite. De façon imagée, les termes de la suite des accroissements et les nombres dérivés sont, compte tenu de la nature de la variable qui appartient à un ensemble discret dans un cas et d'aspect continu dans l'autre, « des taux d'accroissement on ne peut plus proches[13] ». (Tableau 5).

Tableau 5. Suites et fonctions : accroissement et dérivée

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notion de suite des accroissements $u_{n+1} - u_n$	an.	Notion de fonction dérivée

3.2.5 Sens de variation

Les deux notions analogues de suite des accroissements et de fonction dérivée en un point permettent, par une recherche de signe, de déterminer un sens de variation.

Les programmes officiels ne spécifient pas quelle définition du sens de variation d'une suite est attendue. Or deux énoncés équivalents caractérisent la stricte croissance d'une suite :

[13] Cela a par exemple pour conséquence, en économie, sous certaines conditions, d'approcher le coût marginal pour une production discrète par la dérivée de la fonction qui modélise le coût.

– ($\forall\, n \in \mathbf{N}$, $u_n < u_{n+1}$), énoncé habituel au lycée comme dans le supérieur. Il est de type ponctuel universel et fait intervenir tout terme et son successeur ; en cela il s'inscrit clairement dans le monde du discret ;

– ($\forall\, n \in \mathbf{N}$, ($\forall\, p \in \mathbf{N}$, si $n < p$ alors $u_n < u_p$) est l'énoncé de la stricte croissance d'une fonction, doublement quantifié, restreint à **N**. Il s'inscrit également dans le discret.

La démonstration de l'équivalence des deux énoncés est à la portée d'un élève de Terminale, mais pas d'un élève de Première du fait qu'elle comporte un raisonnement par récurrence. Choisir le premier énoncé en tant que définition en classe de Première n'exclut pas de « donner une intuition » aux élèves de ce que le premier énoncé implique le second et de montrer avec eux que le second implique le premier. Cela présente l'intérêt :

– De légitimer l'utilisation du vocabulaire commun aux suites et aux fonctions quant à leur sens de variation (« sens de variation », « croissant », « décroissant », « monotone » sont utilisés pour les unes comme pour les autres) ;

– De justifier la propriété mobilisée dans la résolution de certaines tâches au lycée : si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n0}$.

Un analogue de la définition classique de la stricte croissance d'une suite pourrait être, pour une fonction définie sur un intervalle I de **R** : $\forall\, x \in I$, $f(x + 1) > f(x)$. Cet énoncé ne constitue pas une définition de la stricte croissance de la fonction f sur I ; nous verrons comment des élèves de Première S et des étudiants en Master MEEF s'en emparent dans la partie 5.

Au lycée (général), la recherche du sens de variation d'une suite mobilise le plus souvent une des techniques suivantes :

– La recherche du signe de la différence de deux termes consécutifs ;

– La comparaison du quotient de deux termes consécutifs à 1 dans le cas d'une suite à termes strictement positifs ;

– La propriété : si une fonction f est monotone sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite de terme général $f(n)$ a le même sens de variation que f.

Les deux premières techniques insèrent les activités possibles dans le monde du discret en ce qu'elles reposent sur l'existence de termes consécutifs. La troisième mobilise un va-et-vient entre les mondes du discret et du continu (figure 1).

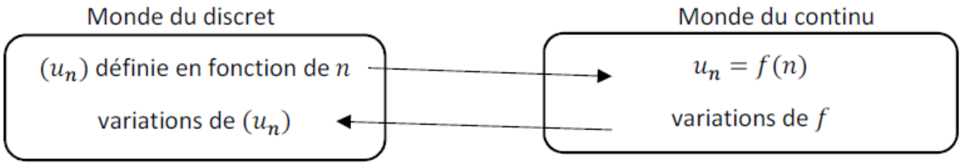


Figure 1. Mobilisation d'une fonction dans la recherche du sens de variation d'une suite

Le changement de notation usuel, de *u* à *f*, souligne que l'un désigne un objet « suite » et l'autre un objet « fonction » (sous-entendu comme étant définie sur un intervalle). Ce qui permet de mobiliser des propriétés de monotonie de fonctions de référence, de certaines fonctions composées (voir *infra*) ou les outils de calcul différentiel.

Les élèves peuvent ne voir dans ce changement de notation qu'une habitude puisqu'ils effectuent des calculs de dérivées de fonctions le plus souvent nommées *f*, et se demander pourquoi ne pas tout simplement calculer $f'(n)$. Cette incursion dans le monde du continu à partir de celui du discret peut échapper aux élèves qui n'y verraient alors qu'un jeu de symboles.

En Première S, les élèves peuvent dans certains cas trouver le sens de variation d'une fonction composée en mobilisant les propriétés qui figurent dans le thème des fonctions (figure 2).

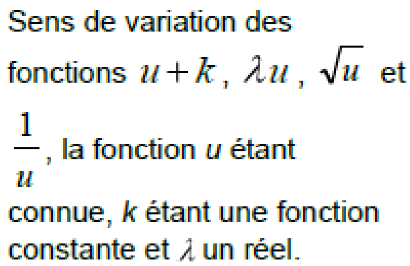

Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$, la fonction *u* étant connue, *k* étant une fonction constante et λ un réel.

Figure 2. Extrait du programme officiel de Première S (Ministère de l'Education Nationale, 2010, p.2)

La notation *u* choisie pour énoncer ces propriétés peut prêter à confusion puisque *u* est aussi le nom de la suite de terme général u_n dans les mêmes programmes officiels. Cela concourt sans doute à « brouiller les repères ».

Récapitulons (tableau 6) :

Tableau 6. Suites et fonctions : sens de variation

Suites		**Fonctions définies sur un intervalle**
Monotonie (définition - cas stricte croissance) : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} > u_n$		Définition analogue fausse
Monotonie (définition équivalente - cas stricte croissance) : $\forall\, (n, p) \in \mathbf{N}^2,\ n > p \Rightarrow u_n > u_p$	id.	Monotonie (définition – cas stricte croissance) : $\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
Monotonie (technique) : recherche du signe des accroissements $u_{n+1} - u_n$	an.	Monotonie (technique) : recherche du signe de la dérivée
La suite de terme général $f(n)$ est croissante	impl.	La fonction f est croissante (implique…)
Propriété : monotonie de λu, $u + k$, $\sqrt{u}$, $1/u$ connaissant la monotonie de u	id.	Propriété : monotonie de λf, $f + k$, $\sqrt{f}$, $1/f$ connaissant celle de f

3.3. Conclusion de la partie 3

Dans les deux dernières décennies, la fonction et sa représentation graphique sont envisagées par les programmes officiels de Troisième et de Seconde comme des outils d'étude de phénomènes, discrets ou continus dans un premier temps, puis uniquement continus. La fonction a d'emblée des aspects continus :

– Elle est généralement définie sur un intervalle de **R** ;

– Elle est à valeurs dans **R** ;

– Elle est un outil de modélisation de phénomènes continus ;

– Elle est donc continue.

Parallèlement, les tâches au sein desquelles les mondes du discret et du continu peuvent interagir se raréfient, en particulier celles qui questionnent explicitement la façon dont des points isolés sont reliés pour obtenir un tracé de courbe. Ainsi, le thème des fonctions est plongé dans ce qui apparait comme un « tout continu » implicite qui semble aller de soi. Mais les fonctions sont définies comme un processus de correspondance et un travail sur les notions d'image et d'antécédent est attendu, dans les registres algébrique et graphique, ce qui peut situer certaines activités sur le thème des fonctions dans le monde du discret.

En classe de Première, les tâches faisant intervenir la notion de successeur sont susceptibles d'inscrire les activités sur les suites dans le monde du discret.

Cependant, la notion de suite peut être abordée de deux points de vue (l'un d'entre eux est qu'une suite est une fonction définie sur **N**) ; hors contexte, les suites peuvent être générées de deux façons (toutes deux en interaction avec les fonctions) ; deux notations du terme général d'une suite sont correctes (dont l'une est fonctionnelle). Par ailleurs, les analogies entre suites et fonctions définies sur un intervalle sont nombreuses (parfois erronées) et le vocabulaire est en partie commun. Une des techniques de recherche du sens de variation d'une suite situe les activités dans un va-et-vient entre les deux mondes. Leur non-distinction peut renforcer la confusion entre suites et fonctions et contribuer aux difficultés des élèves sur ces deux notions.

Dans ce qui suit, nous analysons comment les manuels de la période correspondante s'emparent de ces programmes officiels et dans quel(s) monde(s) ils inscrivent les activités mathématiques proposées sur les thèmes des suites et des fonctions.

4. Suites et fonctions lors de leurs introductions au collège et au lycée, dans quel(s) monde(s) ? Les manuels

4.1. Manuels de Troisième et de Seconde

4.1.1 En troisième

Nous synthétisons ici l'analyse de cinq manuels de Troisième de (Rousse, 2018).

Au cours des 20 dernières années, les tâches concernant la question « relier ou non les points ; si oui, comment ? » se raréfient. À ce propos, les choix des manuels de 2008 sont explicites et diffèrent de l'un à l'autre : l'un d'eux préconise de relier les points par des courbes lisses, l'autre de ne pas les relier. Les choix des manuels de 2016 (dans lesquels les points sont reliés) sont, eux, implicites. Par ailleurs, les représentations graphiques qui sont données dans les expositions de connaissances et les énoncés d'exercices sont toutes des courbes lisses. Rares jusqu'en 2008, les tâches de tracés de courbes à la main sont quasi absentes en 2016 (à part les représentations graphiques de fonctions affines).

Malgré l'évolution des programmes, les fonctions restent outils de modélisation de phénomènes discrets (du type « offre tarifaire ») comme de phénomènes continus. Depuis le programme de 2008, le domaine d'adéquation d'un modèle continu d'un phénomène discret n'est pas abordé et les résultats de modèles qui « ne tombent pas juste » et qui demandent un travail d'interprétation en contexte ont disparu des manuels. Les valeurs de la variable (et celles de leurs images) sont par conséquent essentiellement des entiers strictement positifs ; c'est aussi le cas dans les exercices sans modélisation.

Ainsi, les tâches pouvant provoquer des activités se situant dans les deux mondes en interaction et permettant d'en expliciter des spécificités disparaissent. Comment dès lors les élèves pourraient-ils les identifier ?

4.1.2 En Seconde

Nous avons analysé les chapitres concernant les généralités sur les fonctions de quatre manuels de Seconde édités entre 2000 et 2010 (Rousse, 2018).

Ils définissent tous la fonction par un processus de correspondance. Le vocabulaire concernant la variable (nommée x) diffère cependant : dans les manuels de 2000 et de 2005, il est écrit de surcroit que x « *décrit* » l'ensemble de définition, ce qui véhicule une perspective globale associée au monde du continu. Mais les manuels de 2010 écrivent que la fonction « *associe à chaque* » x son image, l'emploi du mot "chaque" véhiculant une perspective ponctuelle associée au monde du discret.

Les fonctions à variables discrètes sont présentes dans chaque manuel ; la place qui leur est faite, leur représentation graphique, les questions abordées à leur propos diffèrent cependant largement d'un manuel à l'autre. En particulier, les représentations graphiques sont abordées différemment selon les manuels :

- Les manuels de la collection « Math'x » explicitent le fait que la représentation graphique d'une variable discrète est un ensemble de points isolés ; les activités possibles des élèves se situent clairement dans le monde du discret ;
- Les autres manuels, l'un de 2000 et l'autre de 2010, ne montrent des représentations graphiques de variables discrètes que dans des contextes d'évolution d'un phénomène au cours du temps. Les points sont reliés par des segments : la représentation graphique est alors un modèle continu d'un phénomène discret. En l'absence de discours clair de la part de l'enseignant, les activités possibles des élèves autour de ces représentations graphiques peuvent se situer dans l'un ou l'autre monde (ou les deux à la fois ?).

Par opposition aux manuels de collège, ceux de Seconde abordent dans quelques exercices ciblés le fait que la donnée des $f(n)$, où n prend un « petit » nombre de valeurs entières, n'est pas équivalente à celle des $f(x)$, où x appartient à un intervalle de $\mathbf{R}$.

Comme en Troisième, les fonctions présentées dans les expositions de connaissances et les exercices sont majoritairement continues sur un intervalle ; cependant, même quand la variable est continue, les nombres mobilisés dans les tâches numériques et dans les lectures graphiques sont pour la plupart entiers. Les activités des élèves peuvent donc se situer à la fois dans les mondes du continu et du discret.

4.2. Manuels de Première

Nous avons analysé trois manuels de Première S qui mettent en œuvre le programme paru en 2010 (Rousse, 2018).

Les manuels font des choix différents sur de nombreux points, en voici trois qui servent notre propos.

Les manuels « Math'x » et « Sésamath » proposent quelques tâches variées sur la représentation graphique d'une suite par l'ensemble de points de coordonnées (n ; u_n). La toute première met en scène une situation discrète et deux représentations graphiques dont l'une est « continue » et l'autre « discrète », parmi lesquelles il est demandé de choisir. Ces mêmes manuels comportent quelques tâches de construction de ce type de représentation graphique ; ils l'utilisent afin d'illustrer les notions de sens de variation et de limite et d'émettre des conjectures. Pour sa part, le manuel « Transmath » ne le mobilise que pour illustrer les notions de sens de variation et de limite.

Les trois manuels diffèrent aussi dans l'explicitation de la propriété d'une suite croissante : « pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n0}$ » qui ne figure explicitement que dans l'un d'eux ; ce même manuel la mobilise 12 fois dans les tâches (elle l'est 21 fois dans un autre et 2 fois dans un troisième). Le fait que l'on ne s'interroge pas sur cette propriété, alors que sa forme algébrique est analogue à celle de la définition de la croissance d'une fonction, peut contribuer à brouiller les pistes entre les mondes du discret et du continu.

Malgré sa place dans le programme officiel, la modélisation de phénomènes discrets et continus par les suites ne fait l'objet d'un discours explicite que dans un des manuels.

Les manuels font des aussi des choix identiques : dans les définitions (une suite est une fonction définie sur **N**) et les notations ; les tâches sur les suites sont essentiellement cantonnées au registre algébrique. Ils situent les activités attendues des élèves dans l'un ou l'autre monde en mobilisant les supports décrits dans la partie 2 : les ensembles de définition (essentiellement **N** par opposition à **R** et ses intervalles) ; les suites par opposition aux fonctions par l'intermédiaire du vocabulaire (mots : suite/fonction) et des notations associées (u/f et n/x ; notation indicée pour les suites) ; les notions de successeur et de prédécesseur qui n'ont pas d'équivalent dans le continu (par exemple la relation de récurrence « *permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant* ») ; épisodiquement une représentation graphique faite de points isolés par opposition à une courbe lisse.

4.3. Conclusion de la partie 4

En Troisième et en Seconde, conformément aux programmes officiels, les chapitres dédiés aux fonctions placent, à de rares exceptions près, les activités possibles des élèves dans le monde du continu ; les tâches qui permettent d'expliciter les deux mondes se sont raréfiées pour devenir quasi inexistantes. En particulier, les tracés à la main de courbes (qui véhiculent l'expérience du continu) disparaissent au profit de courbes lisses déjà tracées.

Cependant, au travail sur les notions d'image et d'antécédent qui situe l'activité dans le monde du discret, s'ajoute la prédominance de l'utilisation de nombres entiers strictement positifs. Les entiers, qui sont les valeurs les plus simples du continu de **R**, pourraient progressivement devenir emblématiques de ce continu.

Dans ces conditions, on peut se demander si les activités effectives des élèves de Troisième et de Seconde concernant les fonctions ne s'inscrivent pas, dans le même temps, dans les mondes (non distingués explicitement) du continu et celui du discret.

En Première, ce sont en grande partie les notations (f et x vs u et n) qui semblent attester de la notion mobilisée. Or la génération des termes d'une suite par leur définition en fonction de la variable n est analogue à la définition d'une fonction par son expression algébrique ; les rares exemples de fonctions définies sur **N** proposés en Seconde et de représentations graphiques par points isolés par opposition à points reliés en Première suffisent-ils à établir les liens et la distinction entre les deux notions ? Ces représentations graphiques, déjà tracées dans les manuels, ne permettent pas l'expérience individuelle du tracé à la main de quelques points (monde du discret) par opposition au tracé de points reliés (monde du continu).

Les suites sont, en effet, essentiellement travaillées dans le registre algébrique. C'est en particulier vrai pour les tâches dans lesquelles suites et fonctions interagissent. Or ce registre ne porte que la perspective ponctuelle ; par conséquent les activités, qu'elles mobilisent des suites ou des fonctions, s'inscrivent en grande partie dans le monde du discret.

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons nous demander :

– ce qui distingue, pour un élève de lycée, une suite u telle que pour tout n, $u_n = f(n)$, et « la » fonction f qui la définit ;

– si les activités d'un élève associées aux fonctions définies (voire continues) sur un intervalle de **R** se situent effectivement dans le monde du continu.

Nous apportons quelques éléments de réponse dans la partie suivante.

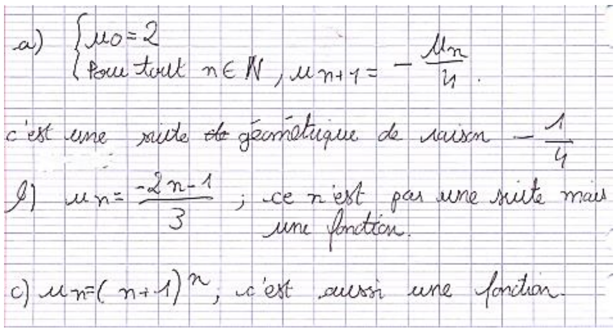
5. Analyses de productions d'élèves de première et d'étudiants de Master MEEF

Dans cette partie, nous exposons d'abord deux exemples de productions d'élèves de Première S, l'une dans le registre algébrique et l'autre dans le registre graphique. Ces exemples illustrent des confusions possibles entre les notions de suite et de fonction telles que nous en avons décrit dans les parties 3 et 4.

Une tâche proposée à des élèves de Première S et des étudiants en première année de master MEEF[14] parcours mathématiques est l'objet de la deuxième sous partie : après une analyse *a priori* de la tâche et des activités attendues des élèves et étudiants, nous présentons leurs réponses. Nos analyses sont guidées par les éléments mis en lumière dans les parties 2, 3 et 4.

5.1. Élèves de Première : observations préliminaires

Le registre algébrique est porteur de confusion entre suites et fonctions : que l'ensemble de définition soit discret ou continu, la forme algébrique définirait l'objet. Nous en avons donné en introduction quelques exemples, issus de Vandebrouck (2011) et Fernandez-Plaza et al. (2016). D'autres exemples figurent dans Rousse (2018), voici l'un d'eux (figure 3).


a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{4} \end{cases}$

c'est une suite ~~de~~ géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$

b) $u_n = \dfrac{-2n-1}{3}$; ce n'est pas une suite mais une fonction.

c) $u_n = (n+1)^n$, c'est aussi une fonction.

Figure 3. Exemple de production d'un élève de Première S

Il s'agit d'un extrait de copie d'élève de Première S. Il répond à la question : « dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une suite géométrique, d'une suite arithmétique, ni l'un ni l'autre ». Lorsque la suite est définie de façon explicite, l'élève estime qu'il s'agit d'une fonction, pas d'une suite (et donc, ne répond pas à la question). La forme algébrique, *en fonction* de *n,* aiguille l'élève vers le thème des fonctions qui, pour

[14] MEEF est l'acronyme de « Métiers de l'enseignement, de l'Éducation et de la Formation ». En France, le Master MEEF parcours mathématiques prépare au métier d'enseignant de mathématiques du second degré.

lui, est disjoint de celui des suites ; par contre, la présence d'une relation de récurrence inscrit clairement son activité dans le monde du discret et l'aiguille vers le thème des suites.

Bien que (peut-être aussi *puisque*) peu de tâches mobilisent le registre graphique dans le thème des suites, c'est un registre lui aussi porteur de non-distinction entre suite et fonction. En voici un exemple provenant d'un entretien avec un élève de Première S après un devoir surveillé dans lequel sa copie montrait une confusion entre une suite (h_n) et « la » fonction f qui la définit. Dans l'extrait du récit de cet entretien qui suit, il est question de déterminer le sens de variation de la suite (h_n) en utilisant le sens de variation de f :

> *L'élève s'étonne de ce que l'écriture* $h(n) = f(x)$ *ne soit pas correcte. Il ne voit pas le problème « puisque le but est d'utiliser la dérivée ». Nous lui faisons remarquer que la suite est définie sur* **N** *et lui posons la question de l'existence d'une dérivée pour une fonction définie sur* **N**. *L'élève ne voit toujours pas de problème puisqu'« on imagine la courbe lorsqu'on place les points à coordonnées entières, la courbe a des tangentes donc il y a une dérivée ».*

L'élève ne voit aucun inconvénient à dériver une fonction définie sur **N**. Le registre graphique sert de support à son raisonnement : il lie l'existence d'une dérivée à celle d'une tangente à la courbe. Celle-ci est « la » courbe lisse que depuis la classe de Troisième les élèves tracent (ou plus exactement dont ils voient le tracé dans leur manuel et les énoncés d'évaluations, sur leur calculatrice ou un logiciel traceur) à partir de quelques points reliés (dont, rappelons-le, les abscisses sont le plus souvent entières et positives). L'activité de cet élève se place dans le monde du continu qui apparait comme prolongement univoque et « qui va de soi » du monde du discret.

Les élèves expriment volontiers en classe que les suites sont difficiles pour eux, car elles sont, disent-ils, trop abstraites : ce thème étant fortement lié à l'algèbre, ils ne peuvent pas s'appuyer sur le registre graphique. Il en est autrement dans le thème des fonctions ; l'articulation entre les registres graphique et algébrique y est un des aspects du domaine de travail F1 (Vandebrouck, 2011) ; le registre graphique y est largement investi en Troisième et en Seconde, dans des tâches de recherche d'images et d'antécédents, de solution d'équations et d'inéquations, de sens de variation, sur une courbe lisse déjà tracée. Cependant, l'absence de questionnement sur la façon dont les points sont reliés ne permet pas de distinguer les mondes du discret et du continu. Par conséquent, comme nous venons de le voir, le registre graphique est potentiellement porteur de sens incorrect. Cette absence a aussi pour conséquence de ne pas exploiter le potentiel heuristique de la représentation graphique, dont nous voyons un exemple ci-après.

5.2. Résolution d'une tâche similaire en Première S et en Master MEEF

5.2.1. Description de la tâche, analyse a priori

La tâche donnée aux élèves de Première est : « Si on sait qu'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ vérifie : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$, que peut-on dire sur le sens de variation de f ? ». Elle est complexe (Vandebrouck, 2008), c'est pourquoi nous l'avons donnée à résoudre par groupes de deux ou trois élèves, pendant 50 minutes.

Les élèves disposaient de leur calculatrice graphique, en plus de leur papier et de leur crayon. Nous avons mis en place ce dispositif deux années consécutives dans une classe d'une trentaine d'élèves de Première S, en fin d'année scolaire.

Nous avons par ailleurs soumis un questionnaire individuel à des étudiants en Master MEEF première année de deux promotions successives (au total 70 étudiants), dont la dernière question comporte deux sous-questions :

6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur R qui vérifie « *pour tout x réel f(x+1) = f(x)* » ?
Même question avec « *pour tout x réel f(x+1) > f(x)* ».

Procédons à une analyse *a priori* de la tâche.

La forme algébrique $f(x+1) > f(x)$ est, bien entendu, proche de la forme $u_{n+1} = u_n$. Les étudiants risquent donc de répondre de façon erronée que la fonction f est constante. Cette réponse permet de situer leur activité dans le monde du discret.

Cependant, la fonction est définie sur $\mathbf{R}$ et les notations f et x sont congruentes avec les habitudes de travail dans le monde du continu. Les étudiants peuvent répondre qu'il se peut que la fonction soit constante, ou pas, ou plus simplement que la fonction n'est pas nécessairement constante.

De plus, la forme algébrique $f(x+T) = f(x)$, est celle qui exprime la périodicité de période T. Les étudiants peuvent répondre que la fonction est périodique de période 1. Ces réponses situent plutôt l'activité dans le monde du continu.

Nous avons choisi de soumettre cette sous-question aux étudiants uniquement : en Première, les suites constantes sont peu mobilisées et la notion de fonction périodique ne figure pas au programme officiel.

Dans la deuxième sous-question, si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$, f peut être strictement croissante, mais ne l'est pas nécessairement.

La tâche peut être résolue en exhibant un contre-exemple :

- Dans le registre graphique ;
- Dans le registre algébrique.

Prenons pour exemple la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x\,|\sin(2\pi x) + 2|$ et dont une portion de la représentation graphique figure ci-contre. Elle vérifie : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 1) = (x+1)|\sin(2\pi(x+1)) + 2| = f(x) + |\sin(2\pi x) + 2|$, on a donc $f(x + 1) > f(x)$. f n'est cependant pas croissante : $f(0,5) = 1$ alors que $f(0,75) = 0,75$. Cette fonction est représentée graphiquement en figure 4.

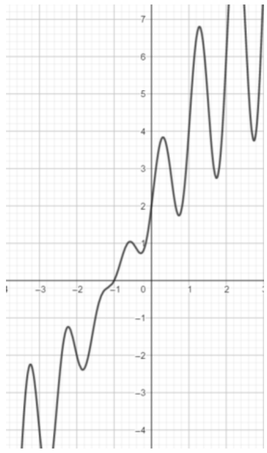


Figure 4. Représentation graphique d'une fonction faisant office de contre-exemple

La reconnaissance de la forme algébrique issue de la définition de la croissance d'une suite peut bien entendu induire des élèves et étudiants en erreur. Ils répondent alors que la fonction est strictement croissante[15]. Cette réponse fausse permet de situer leur activité dans le monde du discret.

Ils peuvent tester des fonctions dans le registre algébrique. En l'absence de fonctions trigonométriques dans le cursus des élèves de Première, un contre-exemple dans ce registre est cependant exclu. Un tel contre-exemple est par ailleurs peu disponible pour un étudiant de Master MEEF.

Certains devraient penser à tester des fonctions dans le registre graphique et arriver à imaginer dans ce registre qu'entre deux entiers, ou du moins deux réels distants de 1, la fonction peut prendre des valeurs qu'ils peuvent faire varier, et ainsi tester différentes possibilités.

La tâche requiert donc des prises d'initiatives, d'autant plus que la question est ouverte. Enfin, la réponse correcte n'est pas simple à formuler puisque f peut être croissante, ou pas.

[15] Ou plus simplement que la fonction est croissante, surtout parmi les élèves de Première qui sont peu exposés aux fonctions qui ne sont pas strictement monotones par intervalle.

La construction d'un contre-exemple graphique qui tient compte de l'ensemble **R** sur lequel la quantification porte est délicate. Il est possible que les élèves et peut-être même les étudiants pensent seulement à des x entiers, compte tenu de l'usage prépondérant des entiers au collège et au lycée. En pensant x seulement entier, il est assez simple d'imaginer une représentation graphique de fonction dont la restriction à **Z** est strictement croissante, mais qui ne l'est pas sur **R**, sans toutefois vérifier la condition « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 1) > f(x)$ »[16]. La réponse est alors qu'on ne peut rien dire, ou que f n'est pas nécessairement croissante, qui sont des réponses correctes attendues.

Le détail des réponses permet d'évaluer dans quel monde les élèves et étudiants situent leurs activités, via quel registre, de voir si une fonction définie sur **R** est perçue en tant que telle ou comme une suite. Pour l'élève, ou l'étudiant, le nombre réel x décrit-il effectivement un ensemble continu ou bien l'ensemble des entiers, voire des entiers positifs ? S'il décrit un ensemble continu, f est-elle **«** la **»** fonction représentée par les points à abscisses entières reliés de façon lisse ?

Les détails des résultats figurent en annexe 1 ; en voici une courte analyse.

5.2.2. Résultats en Première

Dans tous les groupes, les élèves pensent dans un premier temps que f est croissante. Puis les trois quarts se posent des questions et testent des expressions algébriques, des représentations graphiques, ou les deux. Finalement, au total, environ un tiers répond que la fonction est croissante, un autre tiers que l'« on ne peut pas savoir », 7 % que la suite est croissante, un quart ne conclut pas.

Le quart des groupes qui répond sans graphique ni expression algébrique invoque la définition formelle de la croissance d'une fonction. L'un d'eux conclut convenablement (voir figure 5). Les élèves y écrivent : « *si* $f(x + 1) > f(x)$, *alors* $f(x + 0{,}5)$ *peut être inférieur à* $f(x)$ *et on ne peut rien dire du sens de variation de* f ». Ils conçoivent qu'entre deux nombres (réels ou entiers ?) distants de 1 il en existe au moins un, leur moyenne. Cette propriété constitue pour le moins un précurseur de la densité de l'ensemble des réels (aspect 1 du continu).

Les autres groupes qui s'appuient sur la définition formelle de la croissance concluent que « *la fonction est croissante* » (trois quarts de ces groupes), ou que « *la suite est croissante* » (un quart de ces groupes) : ils reconnaissent la forme algébrique de la définition correcte dans le thème des suites qui les éloigne de la prise en compte du continu des réels.

---

[16] Nous en donnons un exemple plus loin.

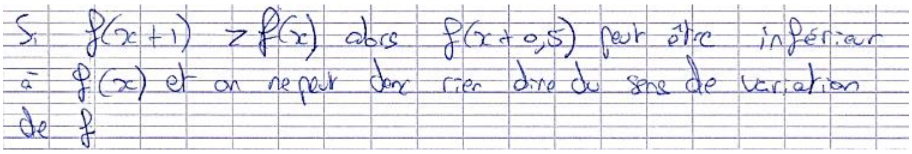


Figure 5. Production d'un groupe d'élèves de Première S dans laquelle la définition de la croissance d'une fonction sert d'argument

7 % des groupes répondent « *la suite est croissante* » ; 7 % des groupes produisent un graphique de points isolés et concluent « *la fonction est croissante* ». Donc pour 14 % des groupes, l'énoncé semble bien être compris en termes de suites. Une fonction serait une suite, les activités se situent dans le monde du discret

Le cumul du taux de réponses correctes et de celui de recherches de fonction qui constitue un contre-exemple sans aboutir est globalement de 58 % sur les deux années. Les activités des élèves de ces groupes se situent dans le monde du continu, les élèves perçoivent bien les fonctions définies sur **R** comme des objets différents des suites. Le taux de contre-exemple graphique correct sur un intervalle de longueur supérieure à 2 est d'environ 1/6. Notons que dessiner un contre-exemple n'est pas facile, d'où une certaine tolérance dans notre appréciation. Pour ces élèves, une fonction définie sur **R** n'est pas une suite. Les activités se situent au moins en partie dans le monde du continu

Les contre-exemples qui ne sont pas corrects ne prennent en compte la condition $f(x + 1) > f(x)$ que sur un ensemble d'abscisses appartenant à $\{x_0 + n, n \in \mathbf{N}\}$; x_0 est explicitement entier (un réflexe dû aux activités des élèves dans le monde du discret depuis la Troisième ?), sauf dans un groupe d'élèves (voir figure 6).

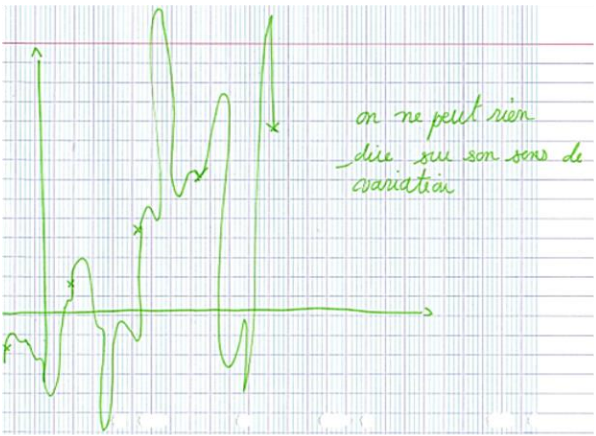


Figure 6. Production d'un groupe dans laquelle le contre-exemple n'est pas correct

5.2.3. Résultats en Master MEEF

Résultats de la sous-question : Que peut-on dire d'une fonction f définie sur **R** *qui vérifie « pour tout réel x,* $f(x + 1) = f(x)$ *» ?*

Le taux d'étudiants qui répondent que la fonction est périodique de période 1 est d'environ 50 %.

Cependant environ un étudiant sur cinq en fin d'année de formation répond qu'une telle fonction est constante (non pas qu'elle pourrait l'être) ; une partie d'entre eux répond que *f* est stationnaire, mobilisant ainsi un élément de vocabulaire spécifique aux suites. Leurs activités se situent clairement dans le monde du discret.

Résultats de la sous-question : Que peut-on dire d'une fonction f définie sur **R** *qui vérifie « pour tout réel x,* $f(x + 1) > f(x)$ *» ?*

Au total, sur les deux promotions, 10 % des étudiants donnent une réponse correcte à la seconde sous-question, avec ou sans contre-exemple. Ces étudiants ont tous répondu correctement aussi à la première sous-question.

Le taux d'étudiants qui ne répondent pas à cette question est le même (10 %) que pour la première sous-question. Ce sont presque exclusivement les mêmes étudiants.

Le taux le plus important est de loin celui des étudiants qui répondent que la fonction est strictement croissante. Il est de 36 % sur les deux promotions.

Chez certains étudiants, la résolution de la tâche est faite explicitement dans le monde du discret ; rien ne semble distinguer une suite d'une fonction définie sur **R**. En voici deux exemples.

Dans ce premier exemple (figure 7), l'étudiant fait appel à la notion de successeur et mobilise la technique de la recherche du signe de la suite des accroissements.

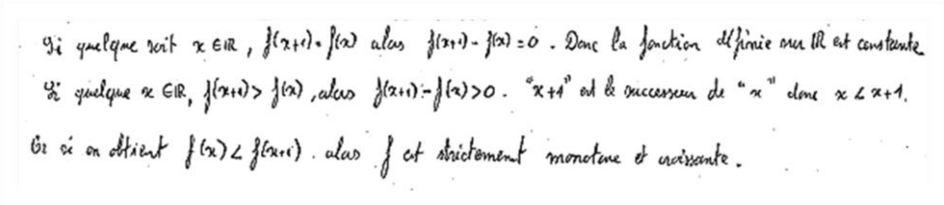


Figure 7. Production d'étudiant faisant appel à la notion de successeur

L'exemple qui suit (figure 8) fait lui aussi référence au discret de **N** : l'étudiant donne à *x* les valeurs 0 puis 1 ; il suggère que l'énumération qu'il a commencée peut se poursuivre par un : « *Et ainsi de suite* ».

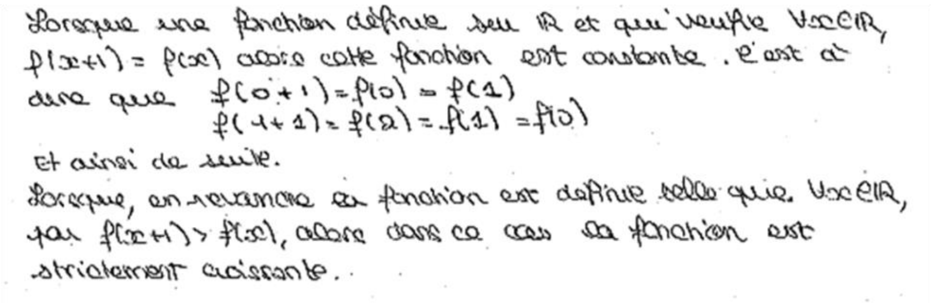

Lorsque une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$ alors cette fonction est constante. C'est à dire que $f(0+1) = f(0) = f(1)$
$f(1+1) = f(2) = f(1) = f(0)$
Et ainsi de suite.
Lorsque, en revanche la fonction est définie telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, par $f(x+1) > f(x)$, alors dans ce cas la fonction est strictement croissante.

Figure 8. Production d'étudiant faisant appel à l'énumération

L'argument peut aussi être graphique, en voici un exemple en figure 9. Deux points d'abscisses x et $x + 1$ sont reliés par un segment. L'étudiant ne semble par imaginer l'infinité des valeurs que peut prendre x ni d'autre façon de relier ces points. Il est difficile de savoir si pour lui, f est une suite ou une fonction définie sur **R**. On peut même se demander s'il distingue les suites des fonctions (une fonction périodique de période 1 serait constante). Tout du moins peut-on affirmer que bien qu'il relie des points à la main sans lever le crayon (ce qui relève du monde du continu), il se cantonne aux possibilités qu'offre le discret de **N** (ses activités pourraient se cantonner au monde du discret).

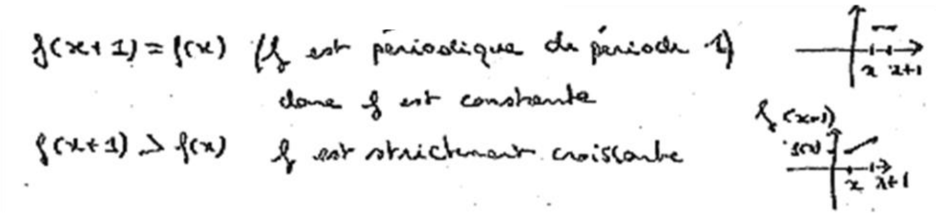


Figure 9. Production d'étudiant faisant appel à un argument graphique

5.3. Conclusion de la partie 5

La présence d'une relation de récurrence dans une tâche inscrit les activités des élèves dans le monde du discret. Leur assimilation d'une suite à une fonction définie sur [0 ; +∞[peut se manifester dans le registre graphique, « la » courbe lisse de « la » fonction qui définit la suite jouant le rôle d'intermédiaire. Leur confusion peut aussi tenir à la forme algébrique d'une suite définie de façon explicite qui ne se distingue de celle d'une fonction définie sur [0 ; +∞[que par l'usage de la lettre n pour désigner la variable.

Nous venons d'observer la confusion inverse : une fonction définie sur **R** serait une suite pour 14 % des groupes d'élèves ayant effectué la tâche : « Si on sait qu'une fonction f définie sur **R** vérifie : pour tout $x \in$ **R**, $f(x + 1) > f(x)$, que peut-on dire sur le sens de variation de f ? ». Cependant, leur réflexion en groupes permet à 58 % d'entre eux d'élaborer une réponse à l'aide de fonctions continues.

Quant aux étudiants en Master MEEF première année, ils sont environ un quart à considérer qu'une telle fonction est strictement croissante après avoir affirmé qu'une fonction f définie sur **R** qui vérifie : « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 1) = f(x)$ » est constante.

Bien que l'influence de la forme algébrique de l'énoncé sur les activités des élèves et étudiants ne puisse pas être sous-estimée, ces résultats nous amènent à nous interroger sur les impacts de l'introduction des fonctions en Troisième et en Seconde sur l'apprentissage des suites. Alors que les définitions, le vocabulaire, les propriétés, les types de tâches et les techniques sont en partie analogues entre les suites et les fonctions définies sur un intervalle de **R**, la mobilisation de notions, de notations, de propriétés et de techniques en partie différentes peut paraitre comme un jeu démuni de sens pour les élèves et les étudiants, voire un effet de contrat didactique entre l'enseignant et l'élève. Tout au moins, l'existence des mondes du discret et du continu, leurs spécificités respectives, la pertinence de situer les activités dans l'un ou l'autre monde, peut leur échapper.

Par ailleurs, nous pouvons inférer des résultats que nous venons de présenter que, pour une tâche du type de celle de la sous-partie 5.2, qui peut provoquer des activités dans les mondes du discret et du continu en interaction, le registre graphique est porteur d'heuristique et donc de sens. Ceci nous amène à considérer un domaine de travail, nommons-le S1, pour l'étude des suites qui, au lieu d'être essentiellement basé sur le registre algébrique, articulerait davantage les registres graphique, numérique et algébrique.

Conclusion : bilan et perspectives

L'approche du discret et du continu que nous avons effectuée montre leur apparente simplicité lorsqu'il est fait référence à l'expérience individuelle ; cette simplicité constraste avec la difficulté à définir le continu mathématiquement et la complexité des interactions entre les mondes du discret et du continu.

Du point de vue de la théorie mathématique, la notion de discret est aujourd'hui formalisée, ainsi que celle de continu dans le cas des corps totalement ordonnés ; elles ne le sont bien entendu pas encore au secondaire. Pouyanne (2004, cité dans Robert et al., 2012, p. 83) qualifie ce type de notion de « non encore formalisée ». Selon notre étude, la notion de continu en dehors des corps isomorphes à **R** pourrait être qualifiée de « non encore formalisable ». D'après Pouyanne, « *la conscience des mécanismes de formalisation, de l'existence de notions cachées et de leur détection influe sur l'organisation et la cohérence des notions sur le long terme et permet de prendre en compte la dualité entre intuition et rigueur qui lie l'objet « vraiment* *pensé » (conceptualisé ?) à son statut logique* ». Les analyses présentées dans cet article, et particulièrement celles des résultats des étudiants en Master MEEF, viennent appuyer ses propos. Dans le but de favoriser de meilleurs apprentissages à court et à long terme, nous souhaiterions développer une réflexion concernant les notions non encore formalisées/formalisables au niveau du secondaire. Il s'agirait d'identifier ces notions et de détecter si elles génèrent des problématiques d'enseignement communes. Ce travail pourrait amener des propositions à tester, de tâches, de déroulements, de choix d'ordre pour les scenarios.

Revenons aux suites et aux fonctions. Parmi les principaux éléments qui peuvent situer les activités mathématiques dans le monde du discret ou celui du continu (voir partie 2), c'est essentiellement le tracé des courbes qui vient attester en Troisième et en Seconde l'inscription du thème des fonctions dans le monde du continu. Or la partie 5 montre que pour un nombre non négligeable d'élèves et de futurs enseignants, le tracé d'une courbe de fonction continue n'implique pas que la variable appartienne à un ensemble continu. L'enseignement des suites et des fonctions présente donc bel et bien un problème.

Nos analyses nous poussent à faire l'hypothèse, à tester, que ceci est lié à ce que, dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées, en analyse, tout se passe trop souvent « comme si » le continu allait de soi ; « comme si » un objet défini sur des entiers revenait à un objet analogue sur le continu d'un intervalle de **R**. « Le » prolongement du discret au continu s'opérant de façon ostensible dans le registre graphique.

Nos résultats concernant les étudiants en Master MEEF montrent que chez un tiers d'entre eux, la confusion semble installée. Ils montrent par ailleurs, avec les résultats concernant les élèves sur la même tâche, les potentialités aujourd'hui peu exploitées de la représentation graphique en tant qu'outil heuristique au sein d'activités mathématiques articulant les domaines de travail F1 et S1 (dans lesquels les fonctions, resp. les suites, sont abordées en tant qu'objet et outil, en coordonnant différents registres, permettant ainsi la coexistence des différentes perspectives).

Ces constats nous mènent à envisager l'inversion de l'ordre dans lequel les suites et les fonctions sont introduites. En effet, les enfants développent leurs connaissances sur les nombres entiers strictement positifs bien avant celles sur d'autres nombres ; ils développent leur raisonnement probabiliste sur des espaces finis (à petit cardinal) avant d'aborder les calculs de probabilités sur des espaces continus. Historiquement, les entiers strictement positifs ont préexisté aux autres nombres pendant des siècles ; d'après Dhombres (1978), lorsque Leibniz a inventé le calcul différentiel et intégral, il raisonna dans un premier temps en termes de différences entre deux valeurs entières de la variable ; le continu a questionné les mathématiciens dès l'antiquité et n'a reçu de définition (partielle) que 2000 ans plus tard.

Tout porte à penser que la simplicité du continu tel qu'il est présenté dans les classes de Troisième et de Seconde est illusoire, alors que le discret fini et celui de l'infini dénombrable du « et ainsi de suite » semblent naturels au regard du développement de l'enfant ainsi que de l'histoire de l'humanité. Dès lors, pourquoi ne pas enseigner aux élèves les suites avant les fonctions ? C'est déjà le cas dans certains curricula à l'étranger qui investissent le thème des suites dès le collège, voire auparavant[17].

Au collège aujourd'hui, le programme officiel préconise l'élaboration d'algorithmes. Ceux-ci permettent de générer des termes de suites de façon explicite aussi bien que récurrente. De nombreux phénomènes discrets ont l'avantage d'être simples à appréhender par les élèves ; en témoigne le nombre d'exercices portant sur des phénomènes discrets dans les manuels de Troisième (bien que les programmes correspondants stipulent que les fonctions sont des modèles de phénomènes continus).

Il est possible de travailler dès le collège les deux points de vue de liste ordonnée et de processus de correspondance des suites (en les associant aux notations indicée et fonctionnelle), d'aborder la représentation graphique d'une suite en dimension 2 par des points isolés. Ceci n'exclut pas la mobilisation de modélisations continues dans le registre graphique (courbes de fonctions affines par morceaux ou courbes de fonctions de classe C^1), telles que les élèves les rencontrent en sciences physiques, de la vie et de la terre ou économiques, en les accompagnant d'un discours clair concernant la nature, discrète ou continue, des variables.

En parallèle, le thème des statistiques offre lui aussi la possibilité de tenir un discours clair sur la nature des variables en jeu, de mobiliser les registres numérique et graphique dans des tâches qui permettent de distinguer les activités des élèves qui se situent dans le monde du discret de celles qui se situent dans celui du continu (de façon adaptée à ce niveau d'enseignement).

Le sens de variation d'une suite peut être défini en Seconde, de façon habituelle (simplement quantifiée), en lien avec la représentation graphique d'une suite en dimension 2. Un domaine de travail S1 sur les suites peut être développé : peu lié à l'algèbre, articulant différents registres : graphique, algébrique, numérique.

La fonction définie sur un intervalle peut être abordée ensuite avec son double point de vue de processus de correspondance et de dépendance d'une variable en fonction d'une autre. La notion de fonction incluant celle de suite, les fonctions définies sur

---

[17] Par exemple en Ontario, en Grande Bretagne.

un intervalle de **R** pourraient être clairement distinguées des suites par l'absence d'un successeur dans l'ensemble **R** (absence aisément démontrée par l'absurde à l'aide de l'aspect 1 du continu des réels). Elle fournirait de nouveaux modèles aux élèves, continus (si la fonction est continue), qui offrent de nouveaux outils de résolution de problèmes. La nécessité de la double quantification dans la définition du sens de variation d'une fonction, mise en regard avec celle du sens de variation d'une suite, peut être aisément appuyée par des contre-exemples graphiques. Il s'agit d'un travail dans F1 en articulation avec S1 qui permet de faire vivre et interagir les mondes du discret et du continu de façon explicite. La panoplie d'outils du continu peut s'enrichir en Première et en Terminale avec les techniques provenant du calcul différentiel[18] et intégral, dont les élèves peuvent éprouver l'efficacité en rapport avec les outils analogues du discret (voir tableaux d'analogies, partie 3).

Parallèlement, dans le thème des probabilités, les élèves peuvent voir aussi leur panoplie d'outils de calcul se développer : au collège sur des univers finis, au lycée sur des univers finis puis infinis discrets ; comme c'est le cas depuis 2001, quelques exemples de variables aléatoires continues peuvent figurer au programme de Terminale, en lien avec le calcul intégral. Dans ce thème, la modélisation est un incontournable (Henry, 2003, 2009), en conséquence le discours concernant la réalité et ses modélisations (discrètes ou continues) l'est aussi.

Ainsi que le préconisent les programmes officiels des deux dernières décennies, les suites et les fonctions resteraient outils de modélisation de phénomènes discrets et continus ; dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées, dans le domaine de l'analyse et en parallèle avec ceux des statistiques et des probabilités, un discours clair pourrait être tenu sur la nature, discrète ou continue, des grandeurs en jeu dans les phénomènes modélisés, ainsi que le monde, discret ou continu, au sein desquels les activités sont effectuées.

Le délicat rapport des mathématiques au réel, qui est parfois malmené jusque dans les énoncés d'exercices de Baccalauréat[19], pourrait dans le même temps être clarifié. Cela permettrait de contribuer à donner davantage de sens, auprès des élèves de lycée, non seulement aux notions mathématiques qu'ils rencontrent, mais aussi à leur activité en classe de mathématiques et à ce qu'ils perçoivent du rôle des mathématiques dans leur vie et dans notre société.

[18] Citons à ce propos Weigand (2014) qui analyse une approche discrète de la dérivée.

[19] Voir Rousse (2018).

Bibliographie

CHOQUET, G. (2000). *Cours de topologie*. Dunod.

COPPE, S., DORIER, J.L. et YAVUZ, I. (2006). Éléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x*, **71**, 29-60.

COUSQUER, E. (1994). *Histoire du concept de nombre*. IREM de Lille.

DHOMBRES, J. (1978). *Nombres, mesure et continu*. Cedic / Fernand Nathan.

DURAND-GUERRIER, V. (2012). Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques. Dans M. Ouelbani (Dir.), *Des mathématiques à la philosophie. Regards Croisés : Didactique, Histoire et Philosophie* (pp.163-183). Université de Tunis, Faculté des Sciences Humaines et Sociales.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37-65.

FERNANDEZ-PLAZA, J. A. et Simpson, A. (2016). Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. *Educational Studies in Mathematics*, **93(3)**, 315-332.

GRENIER, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, **88**, 27-47.

HENRY, M. (2003). Des lois de probabilités continues en Terminale S, pourquoi et pour quoi faire ? *Repères IREM*, **51**, 5-25.

HENRY, M. (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. *Repères IREM*, **74**, 67-89.

LONGO, G. (1999). The math continuum: from intuition to logic. Dans J. Petitot, F. J. Varela, B. Pacoud et J.M. Roy (Dir.), *Naturalizing Phenomenology*. Stanford University Press.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (1998). *Bulletin Officiel*, 15 octobre 1998, **10**.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2000). *Bulletin Officiel hors série*, 31 aout 2000, **7**.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2001). *Bulletin Officiel*, 30 aout 2001, **2**.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2008). *Bulletin Officiel*, 28 aout 2008, **6**.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2009). *Bulletin Officiel*, 23 juillet 2009, **30**.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2010). *Bulletin Officiel spécial*, 30 septembre 2010, **9**.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2011). *Bulletin Officiel spécial*, 13 octobre 2011, **8**.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2015). *Bulletin Officiel*, 26 novembre 2015, **11**.

MONTOYA DELGADILLO, E., PÁEZ MURILLO, R., VANDEBROUCK, F. et VIVIER, L. (2018). The three localization perspectives in the learning of analysis, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, **4(1)**, 134-160.

PEANO, G (1889). *Arithmetices principia: nova methodo exposita*. Bocca.

ROBERT, A., PENNINCKX, J. et LATTUATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

ROUSSE, S. (2018). *Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. http://theses.md.univ-paris-diderot.fr/ROUSSE_Sophie_2_complete_20181130.pdf

VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, **16**, 149-185.

VANDEBROUCK, F. (Dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès.

WEIGAND, H. G. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM*, **46(4)**, 603-619.

Manuels

ALVEZ, Y., CAREME, A., CHAREYRE, B., CLEIREC, N., LE YAOUANQ, M. H. et SAINT-RAYMOND, C. (2005). *Math'x Seconde.* Didier.

ALVEZ, Y., BEAUVOIT, E., GUILLEMET, D., LAVIGNE, D., LE YAOUANQ, M. H., ROXVAL, E., SALIBA, G. et TADEUSZ, L. (2011). *Math'x 1re S.* Didier.

ANTIBI, A., CROC, C., LALLEMAND, M. F., NOGAREDE, S. et ROUMILHAC, J. P. (2010). *Math 2de*. Nathan.

ARTIGALAS, A. L., BEASSE, C., BRAUN, F., DEVYS, A., DOS SANTOS, R., FAVERO, S., GRISONI, M. D., LEVI, M. C., MARDUEL, S., PHILIPPE, C., REYNIER, C., ROUZE, P. et TREVISAN, H. (2016). *Maths 3e (collection Dimensions).* Hatier.

BARRA, R., BARROS, J. M., BENIZEAU, P. et MORIN, J. (2011). *Transmath 1re S.* Nathan.

BRAULT, R., DARO, I., FERRERO, C., PERBOS, D. et TELMON, C. (2008). *Mathématiques 3e (collection Phare)*. Hachette.

CARLOD, V., COURBON, D., FNDAKOWSKI, M., MALAVAL, J., MAZE, M., PLANTIVEAU, A. et PUIGREDO, F. (2008). *Transmath 3e*. Nathan.

CARLOD, V., CHRETIEN, B., DESROUSSEAUX, P. A., JACQUEMOUD, D., JORIOZ, A., KELLER, A., LECOLE, J. M., MAHE, A., MAZE, M. PLANTIVEAU, A. PUIGREDO, F., VERDIER, F. (2016). *Transmath 3e*. Nathan.

CHESNE, J. F., GASTIN, H., GUIGNARD, M. GUILLEMET, D. et LE YAOUANQ, M. H. (2010). *Math'x 2de*. Didier.

COSTE, R., GUERLOU, C., LOTZ, E., MISSET, L. et TURNER, J. (2000). *Maths Seconde (collection Déclic)*. Hachette.

MALAVAL, J. MAZE, M., PLANCHAT, C., PUIGREDO, F., SAINFORT, A. et SERES, P. (2003). *Math 3e (collection Transmath)*. Nathan.

ASSOCIATION SESAMATH. *Maths 1re S. Consulté à l'adresse* https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1s_2015&ticket=none

SOPHIE ROUSSE

LDAR Université de Paris

roussesophie@orange.fr

Annexe 1. Résultats des tâches données aux élèves de Première S et aux étudiants de Master MEEF

Résultats de la tâche donnée à des élèves de Première S

« Si on sait qu'une fonction f définie sur **R** vérifie : « pour tout $x \in$ **R**, $f(x + 1) > f(x)$ », que peut-on dire sur le sens de variation de f ? »

Les élèves testent :	**Juin 2015**	**Juin 2016**	**Cumul**
Avec graphe sans expression	86 %	33 %	59 %
Avec graphe et expression	0 %	27 %	14 %
Avec expression sans graphe	0 %	7 %	3 %
Sans graphe ni expression	21 %	31 %	28 %
Avec graphe de points isolés	7 %	7 %	7 %

Les élèves répondent :	**Juin 2015**	**Juin 2016**	**Cumul**
La suite est croissante	7 %	7 %	7 %
La fonction est croissante	29 %	40 %	34 %
Pas de conclusion (bien que recherche de contre-ex)	14 %	33 %	24 %
« On ne peut pas savoir » ou « f pas toujours croissante »	50 %	20 %	34 %

Résultats des tâches données aux étudiants de Master MEEF 1

Sous question : Que peut-on dire d'une fonction f définie sur **R** qui vérifie « pour tout réel $x \in$ **R**, $f(x + 1) > f(x)$ » ?

	Mars 2016	**Septembre 2016**	**Cumul**
f est 1-périodique	50 %	46 %	47 %
f est $\frac{1}{n}$ périodique	0 %	2 %	1 %
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x+n) = f(x)$	4 %	0 %	1 %
f est constante	17 %	35 %	29 %
f est constante ou discontinue	0 %	2 %	1 %
Il manque la continuité	4 %	0 %	1 %
f n'est pas injective	4 %	7 %	6 %
Rep graph : droite	4 %	0 %	1 %
Pas de réponse	17 %	7 %	10 %

Sous question : Que peut-on dire d'une fonction f définie sur **R** qui vérifie « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 1) > f(x)$ » ?

	Mars 2016	**Septembre 2016**	**Cumul**
f n'est pas forcément croissante avec exemple	4 %	4 %	4 %
f n'est pas forcément croissante sans exemple	0 %	7 %	4 %
f est « globalement croissante »	0 %	4 %	3 %
f est pseudo périodique	0 %	2 %	1 %
Discussion non concluse	4 %	2 %	3 %
Il manque la continuité	8 %	0 %	3 %
f n'est pas constante	0 %	2 %	1 %
f est strictement croissante	29 %	39 %	36 %
f ne converge pas	0 %	2 %	1 %
f tend vers $+\infty$	0 %	2 %	1 %
Pas de réponse	17 %	7 %	10 %

Résultats croisés des deux sous questions :

	Mars 2016	**Septembre 2016**	**Cumul**
Deux réponses correctes	4 %	13 %	10 %
$f(x+1) = f(x)$: f est constante <u>et</u> $f(x+1) > f(x)$: f est croissante	13 %	30 %	24 %
Pas de réponse aux deux	17 %	4 %	9 %