SEBASTIEN JOLIVET, ELANN LESNES-CUISINIEZ, BRIGITTE GRUGEON-ALLYS

CONCEPTION D'UNE PLATEFORME D'APPRENTISSAGE EN LIGNE EN ALGEBRE ET EN GEOMETRIE : PRISE EN COMPTE ET APPORTS DE MODELES DIDACTIQUES

Abstract. Design of an e-learning platform in algebra and geometry : consideration and contribution of didactic models. This article presents the design of a theoretical and methodological framework for the didactic design of a learning environment: a learning platform in mathematics for cycle 4 students (aged 12 to 15). We cross several approaches to build didactic models and their computer representation: a model of the knowledge involved in the platform, a model of the learner's reasoning, and a model of learning paths adapted to the student's learning needs. We illustrate this approach on two themes from two mathematical domains, the solving of first-degree equations in algebra and the construction of triangles in geometry.

Keywords. Combining frameworks, didactic models, learning paths, geometry, Technology Enhanced Learning

Résumé. Cet article présente la définition d'un cadre théorique et méthodologique pour la conception didactique d'un environnement informatique pour l'apprentissage humain (EIAH) : une plateforme d'apprentissage en mathématiques à destination d'élèves de cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans). Nous croisons plusieurs approches théoriques pour construire des modèles didactiques et leur représentation informatique : un modèle du savoir en jeu dans la plateforme, un modèle du raisonnement de l'apprenant et un modèle des parcours d'apprentissage adaptés aux besoins d'apprentissage de l'élève. Nous illustrons cette conception sur deux thèmes issus de deux domaines mathématiques, la résolution d'équations du premier degré en algèbre et la construction de triangles en géométrie.

Mots-clés. Croisement d'approches théoriques, modèles didactiques, parcours d'apprentissage, géométrie, EIAH

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 26, p. 117 - 156.

1. Introduction

MindMath[1] est un projet qui réunit des équipes de chercheurs en informatique (équipe MOCAH du LIP6[2]) et en didactique des mathématiques (LDAR[3]) ainsi que des entreprises (Tralalère, Cabrilog, Domoscio, Breakfirst[4]). L'objectif général du projet est de produire une plateforme numérique d'entraînement, permettant à des élèves de cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) de travailler l'algèbre et la géométrie. À cette fin, elle doit proposer aux apprenants des exercices et des rétroactions pertinents par rapport à leur activité. Au regard des objectifs de la plateforme et du travail de recherche que nous menons dans le projet, nous nous situons dans le domaine de recherche des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH)[5]. Dans la suite de l'article, nous utiliserons indifféremment les termes « la plateforme » ou « l'EIAH ». De plus, nous appelons *parcours* un enchaînement cohérent d'exercices, selon des objectifs d'apprentissage visés à un niveau scolaire donné, des connaissances des élèves et des apports de la didactique.

Il existe déjà de nombreux environnements numériques, d'apprentissage ou d'entraînement, pour les mathématiques. Certains sont directement issus de la recherche en didactique, d'autres ont pour origine des éditeurs de ressources ou des enseignants. Si on se centre sur les environnements fondés didactiquement et qui concernent les domaines mathématiques et niveaux scolaires mis en jeu dans

[1] https://www.mindmath.education

[2] https://www.lip6.fr/recherche/team.php?acronyme=MOCAH

[3] https://www.ldar.website/

[4] Tralalère, Cabrilog et Breakfirst sont spécialisées dans la production de ressources et/ou plateforme éducatives. Domoscio est spécialiste de l'*adaptive learning*.

[5] On peut se référer par exemple à la définition proposée par Tchounikine et Tricot (2011) : « Le point de jonction entre l'informatique et les questions relatives à l'apprentissage humain et à l'enseignement se situe au niveau des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). *En tant que système informatique*, un EIAH est un programme destiné à être utilisé par les apprenants impliqués dans une situation d'enseignement et à accompagner ou susciter leur apprentissage. *En tant que champ scientifique*, l'EIAH peut être défini comme l'ensemble des travaux visant à comprendre les processus de construction des EIAH et les phénomènes d'apprentissage liés à ces environnements informatiques. » (p. 168)

MindMath, on peut citer l'environnement *Aplusix*[6] (Nicaud et al., 2006) en algèbre. Il permet d'évaluer automatiquement certains aspects de l'activité des élèves sur la résolution des équations. Dans ce même environnement, Chaachoua et al. (2005) s'intéressent à la détermination automatique des conceptions des élèves relatives aux équations. De son côté, le logiciel de diagnostic *Pépite* permet, de manière automatique, l'analyse des réponses et le calcul du profil des élèves aux différents niveaux scolaires de cycle 4 en algèbre élémentaire (Grugeon-Allys et al., 2012 ; Grugeon-Allys et al., 2018). Les résultats fournis par *Pépite* permettent la constitution de groupes d'élèves ayant des difficultés similaires et l'attribution de parcours d'apprentissage associés (Pilet, 2012, 2015). Dans le domaine de la géométrie, certains environnements visent des objectifs didactiques particuliers. Par exemple, QED-Tutrix est de type ITS (*Intelligent Tutoring System*) et vise à aider les apprenants dans le travail de preuve en prenant en compte leur état cognitif[7] (Font et al., 2018). Pour les systèmes tutoriels autour de la démonstration en géométrie on peut trouver une étude comparative dans Tessier-Baillargeon et al. (2017).

Dans le projet MindMath nous proposons une approche didactique permettant à la fois la couverture des différents domaines mathématiques du cycle 4[8] en France (avec mise en œuvre sur l'algèbre et la géométrie), la prise en compte de l'apprenant et la génération de parcours adaptatifs d'apprentissage. Pour mener à bien ce projet, nous distinguons trois grandes phases. Premièrement, définir et expliciter les différents éléments théoriques et pratiques permettant la prise en compte du didactique dans la conception des exercices, des rétroactions et des parcours, de manière articulée avec la dimension informatique du projet. Deuxièmement, les produire et les articuler dans la plateforme. Troisièmement, analyser les usages de la plateforme et ses effets, lors d'expérimentations, en classe et hors la classe, à grande échelle. Au moment de l'écriture de ce texte, la deuxième phase, celle de la mise en œuvre effective, est réalisée sur une partie des domaines algébrique et géométrique, sous-domaines sur lesquels débutent de premières expérimentations.

Nous centrons cet article sur un fondement épistémologique et didactique de l'EIAH, dans la première phase du projet. Nous présentons donc les conditions permettant d'assurer la prise en compte de divers travaux et apports de la didactique dans les différentes dimensions du projet : la conception des exercices, la génération de parcours et de rétroactions adaptés au profil didactique et à l'activité de l'élève. Les

---

[6] http://aplusix.imag.fr/

[7] Dans ce système l'apprenant considéré est un apprenant moyen fondé sur le modèle MIA (Richard et al., 2011).

[8] Classes de 5^{e}, 4^{e} et 3^{e} du collège français, élèves de 11 à 14 ans.

informaticiens et les partenaires industriels apportent leurs expertises en matière d'apprentissage adaptatif, d'algorithmes d'apprentissage par renforcement, de conception de ressources et de tableau de bord. Lors de la première phase du projet, nous abordons les deux grands enjeux suivants :

– identification et caractérisation des besoins d'apprentissage[9] des élèves en mathématiques au cycle 4, en algèbre et en géométrie ;

– définition d'exercices et de parcours permettant de travailler ces besoins d'apprentissage.

Nous n'intégrons pas dans le modèle de l'apprenant, et son accompagnement, la prise en compte de sa motivation, de son engagement, des troubles spécifiques de l'apprentissage, etc.

Vouloir répondre aux deux enjeux identifiés ci-dessus nous amène à étudier des cadres et modèles didactiques à prendre en compte pour représenter un domaine de savoir mathématique ainsi que l'activité de l'élève sur celui-ci, et pour exploiter ces éléments informatiquement. Notre travail contient donc une triple dimension (institutionnelle, épistémologique et cognitive) et doit, de plus, s'implémenter dans un EIAH. Nous visons la définition d'un cadre de conception didactique d'un EIAH (Grugeon-Allys et al., 2021).

Avant de poursuivre, pour lever d'éventuelles ambiguïtés, précisons les aspects de l'activité mathématique que l'EIAH vise à prendre en charge[10]. Les ressources construites pour peupler la plateforme sont de type *exercice*, il n'y a pas d'éléments de type *cours*. Ainsi, en se référant aux six moments de l'étude tels que définis par Chevallard (2002), les moments de la *première rencontre*, de l'*exploration du bloc praxique* et de l'*institutionnalisation* sont dévolus au professeur. Les apports de cette plateforme se situent essentiellement dans le moment du *travail de l'organisation mathématique et du travail de la technique*. Les choix réalisés sur un plan didactique, pour construire les parcours et les rétroactions, permettent cependant d'envisager des apports de la plateforme pour permettre aux élèves de poursuivre *la construction du bloc technologico-théorique*.

[9] Ce terme peut être pris dans une acceptation générique ici, il sera défini d'un point de vue didactique dans la section 2.3.

[10] Comme pour tout artefact, nous ne pouvons préjuger des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) qui auront lieu en classe et ce n'est pas l'objet de cet article.

2. Problématique et approches théoriques

Afin de mieux identifier les différents enjeux et la diversité des questions abordées, nous commençons par la présentation d'un exemple.

2.1. Présentation d'un exemple

Considérons l'exercice, Ex1, « Résoudre l'équation $4x + 3 = 7$» et la production d'un élève de 4^e^ (cycle 4, 14 ans) : « $4x + 3 = 7$; $7x = 7$; $x = -1$ ».

Les questions soulevées par cet exercice et cette production sont multiples : l'exercice proposé est-il conforme au curriculum auquel l'élève est assujetti ? Quels sont les savoirs en jeu ? Quelles sont, *a priori*, les productions envisageables pour cet énoncé ? Quelles explications peut-on associer aux productions erronées ? Quels sont, *a priori*, les exercices que l'on peut proposer après celui-ci pour cet élève ? Comment prendre en compte à la fois l'activité de l'élève lors de la résolution de l'exercice, mais aussi son activité habituelle, c'est-à-dire sur des exercices qui portent sur la résolution des équations du 1^er^ degré, pour choisir l'exercice suivant parmi les possibles identifiés *a priori* ?

Répondre à ces questions nécessite non seulement d'envisager des approches institutionnelle, épistémologique et cognitive, mais aussi de les croiser entre elles. Pour les exercices, nous identifions les savoirs en jeu et les moyens de le résoudre, puis déterminons sa conformité à un curriculum donné. Concernant la prise en compte de l'apprenant, nous caractérisons les connaissances nécessaires pour mettre en œuvre cette résolution, les erreurs récurrentes et la complexité[11] de l'exercice.

L'exercice proposé ci-dessus relève de la *résolution d'une équation du premier degré* et peut être proposé à des élèves de cycle 4[12]. Pour montrer les limites de cette première classification, considérons les exercices Ex2 « Résoudre l'équation $5x - 3 = 2x + 1$ » et Ex3 « Résoudre l'équation $3x^2 - 2x + 5 = 3(x^2 - 6x + 7)$ ». Ils relèvent, eux aussi, de la *résolution d'une équation du premier degré*. Cependant ces trois exercices présentent des différences significatives d'un point de vue didactique. En effet, l'exercice 1 peut être résolu numériquement ou arithmétiquement, alors que les exercices 2 et 3 nécessitent une résolution algébrique en raison de la nature rationnelle non décimale de la solution. De plus, pour les exercices 2 et 3, les

---

[11] Nous considérons ici la complexité comme une caractéristique intrinsèque de la tâche au sens de (Robert, 2008).

[12] Les programmes français de cycle 4 de 2020 indiquent que les collégiens doivent savoir « résoudre algébriquement des équations du premier degré ou s'y ramenant […] » (MENJS, 2020, p. 132).

coefficients sont dans **Z** et non pas dans **N**, il est nécessaire de mobiliser la réduction d'une expression algébrique pour pouvoir résoudre l'équation. Enfin, l'exercice 3 contient, avant réduction, des termes de degré 2.

Concernant la production de l'élève pour résoudre l'exercice 1, elle peut être analysée en termes de difficultés relativement aux objets *expression algébrique* et *équation*. L'élève utilise tout d'abord une « règle de concaténation », relative à la manipulation des expressions algébriques, du type « *dans un résultat, l'expression finale est évaluée*, *il n'y a plus de signe opératoire* » (technique arithmétique utilisée en dehors de son domaine de validité) qui l'amène à transformer $4x + 3$ en l'expression $7x$. Dans un deuxième temps, il mobilise une autre « règle », relative à la résolution des équations cette fois, en dehors de son domaine de validité (« *quand on change de côté on change de signe* »). Dans l'exemple, il « change 7 de côté » et ajoute un signe « − ».

Cet examen de l'exercice et de la production montre la nécessité d'un double mouvement par rapport au thème *résolution des équations du 1^er^ degré*. D'une part, il faut affiner la description du thème en sous-catégories pour pouvoir positionner les différents exercices de ce thème les uns par rapport aux autres. D'autre part, dans un mouvement contraire, il faut resituer la résolution des équations du 1^er^ degré plus largement au sein de l'algèbre (en particulier en lien avec la transformation des expressions algébriques et plus fondamentalement la génération de ces expressions, le rôle de la lettre, etc.) pour pouvoir analyser et caractériser les erreurs possibles. Pour compléter cette analyse, il est aussi nécessaire de situer l'activité de l'élève au regard de celle visée en algèbre à son niveau scolaire et en lien avec l'enseignement reçu. C'est la combinaison de ces éléments d'analyse qui va permettre de structurer et positionner les différents exercices les uns par rapport aux autres et ainsi de concevoir des parcours adaptés aux enjeux visés.

Il ressort de cet exemple que la conception des exercices et la création des parcours nécessitent des éléments communs : une modélisation structurée du savoir, une définition de la complexité d'une tâche et une caractérisation de l'activité *a priori* de l'apprenant. Dans les sections suivantes, nous faisons une rapide synthèse relative aux questions de la modélisation du savoir, de la régulation des apprentissages et de l'activité de l'apprenant, et enfin des modèles de l'apprenant. Cela nous permet alors de reformuler nos hypothèses et questions de recherche.

2.2. Modélisation du savoir

Diverses théories didactiques proposent une modélisation du savoir. Ainsi Ruiz-Munzón et al. (2013), qui travaillent dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1999), citent la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997), la théorie APOS (Dubinsky & McDonald, 2001), l'approche ontosémiotique (Godino et al., 2007) ou encore la théorie de l'abstraction en contexte (Dreyfus et al., 2001). Comme signalé par Jolivet (2018) : hormis la TAD, ces théories sont moins adaptées pour la prise en compte de la dimension institutionnelle ou n'ont pas été exploitées dans le cadre de développements informatiques. Concernant la modélisation du savoir, nous nous centrons donc sur des travaux menés dans le cadre de la TAD dans laquelle « le savoir mathématique [est considéré], en tant que forme particulière de connaissance [qui] est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 85). Nous intégrons d'autres cadres théoriques en lien avec la dimension cognitive dans la section suivante.

Au sein de la TAD, le moyen de modéliser le savoir et l'activité associée est l'utilisation de praxéologies. En effet, comme signalé par Chevallard : « toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot *praxéologie* » (Chevallard, 1999, p. 223). Ainsi, une praxéologie[13] est un quadruplet. D'une part, il y a le type de tâches et la ou les techniques utilisées pour résoudre les tâches d'un type donné, c'est-à-dire la *praxis*, et d'autre part, la technologie, le discours développé pour justifier les techniques (propriétés, règles, arguments logiques) et la théorie qui justifie la technologie, le *logos*. Ces praxéologies ponctuelles s'agrègent autour d'une technologie pour former une praxéologie locale (OML[14]), puis autour d'une théorie pour former une praxéologie régionale (OMR), et enfin autour de plusieurs théories pour former une praxéologie globale (OMG) qui définit un domaine d'étude (Chevallard, 1999). Les praxéologies se transposent dans les institutions (praxéologies à enseigner par les enseignants, praxéologies enseignées par les enseignants, praxéologies apprises par les élèves).

---

[13] Ou *organisation mathématique*, notée OM dans la suite de l'article, dans le cas d'une praxéologie mathématique.

[14] Nous considérons des praxéologies mathématiques, nous reprenons donc ici, et dans la suite de l'article, la notation usuelle OML (resp. OMR, OMG) pour organisation mathématique locale (resp. régionale, globale).

Pour décrire un domaine mathématique, Bosch et Gascón (2005) proposent d'introduire un modèle praxéologique de référence (MPR) afin de décrire les aspects épistémologiques caractéristiques des objets de savoir d'un domaine mathématique et les praxéologies associées permettant la construction d'un rapport idoine au savoir visé relativement aux institutions qui sont considérées pour construire ce MPR. Une fois défini, c'est un outil d'analyse pour étudier les décalages entre praxéologies à enseigner et praxéologies enseignées (Grugeon, 1997). Wozniak (2012) propose pour ces dernières une classification selon le rôle du discours technologique : *praxéologie muette* avec une composante *logos* absente, *praxéologie faible* avec une composante *logos* implicite ou limitée à l'usage d'ostensifs associés aux techniques, *praxéologie forte* mettant en jeu dialectiquement composantes *praxis* et *logos*. Le MPR est aussi un élément méthodologique essentiel pour dégager des aspects épistémologiques implicites ou ignorés des programmes et formuler des hypothèses de leur impact sur les besoins d'apprentissages à travailler (Castela, 2008 ; Grugeon-Allys et al., 2012 ; Pilet, 2015).

Afin de rendre opérationnelle, sur un plan informatique[15], cette modélisation du savoir au moyen d'un MPR, Chaachoua (2018) a développé le cadre T4TEL[16]. Les éléments de ce cadre, exploités dans notre travail, sont présentés dans la section 3.1.

Nous avons maintenant identifié dans la littérature les éléments nous permettant de rendre compatible une modélisation du savoir avec une perspective informatique. Le deuxième besoin qui a été mis en évidence par la présentation de l'exemple de la section 2.1, est qu'il est nécessaire de pouvoir décrire l'activité de l'apprenant et organiser ses apprentissages. Nous examinons dans la section suivante divers outils théoriques permettant d'aborder ces questions.

2.3. Besoins et régulation des apprentissages de l'apprenant

Dans la section 2.1, nous avons mis en évidence des différences entre les exercices 1, 2 et 3, en particulier le fait qu'ils ne nécessitent pas la mobilisation des mêmes technologies. Pour la structuration des parcours se pose donc la question de savoir quels sont les exercices pertinents à proposer à l'apprenant. Pour l'aborder, nous définissons les *besoins d'apprentissage* d'un apprenant.

---

[15] Ce qui est un impératif du projet MindMath du point de vue de la didactique.

[16] T4 fait référence aux quatre T du quadruplet praxéologique {Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie} et TEL à Technology Enhaced Learning, terminologie anglophone pour EIAH.

Dans une institution donnée, à un temps donné, un élève peut être confronté à un décalage, plus ou moins marqué, entre son rapport personnel au savoir, construit en formation dans les diverses institutions qu'il a rencontrées, et le rapport au savoir attendu dans cette institution (Chevallard, 2003). Nous définissons les *besoins d'apprentissage* d'un élève comme ce qui est nécessaire de travailler pour faire évoluer son rapport personnel actuel vers un rapport personnel idoine au regard des attendus de l'institution. Cette notion a été présentée par Grugeon-Allys et al. (2012) puis par Pilet (2015), en référence à un MPR du domaine algébrique et au regard des praxéologies à enseigner et de celles enseignées. Les besoins d'apprentissage correspondent donc à ce qui est à travailler par l'élève pour :

- favoriser la négociation de ruptures d'ordre épistémologique (Vergnaud, 1990) ;
- poursuivre la construction d'éléments technologico-théoriques pour résoudre des tâches du domaine nécessitant pour leur résolution la convocation de différents types de tâches (Castela, 2008).

Ces ruptures se retrouvent dans les domaines mathématiques travaillés dans la plateforme. Ainsi, Vergnaud et al. (1988) caractérisent la double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. De leur côté, Mathé et al. (2020, p. 18) indiquent une « (…) rupture au début du secondaire entre une géométrie des tracés matériels (…) et une géométrie théorique des énoncés et démonstrations ». Les moments où se manifestent ces ruptures, souvent au passage d'une institution à l'autre[17], peuvent être induits par la transposition didactique en jeu dans les curricula. Ces derniers peuvent prendre en compte et accompagner ou non, les décalages entre institutions, notamment par la définition des praxéologies à enseigner. L'appui sur un MPR du domaine mathématique permet de caractériser ces décalages. Ceci a été illustré par Grugeon (1997) pour la transition voie professionnelle – voie technologique du lycée. Mais, au-delà des effets liés aux curricula, les praxéologies apprises dépendent fortement des praxéologies enseignées. Ainsi celles-ci peuvent être complètes ou non, permettre ou non de développer des raisons d'être des savoirs et leurs composantes *logos*. Au final, les praxéologies apprises dépendent aussi des discours technologiques développés par les enseignants pour justifier les techniques. Cette approche a déjà été exploitée dans l'étude de l'apprentissage de l'algèbre élémentaire au cycle 4 (Grugeon-Allys, 2010 ; Pilet, 2015).

Du point de vue du sujet cognitif, les élèves engagent des processus de conceptualisation de notions au cours et à la suite de la résolution de situations et de tâches des domaines mathématiques relatifs aux savoirs travaillés en classe. De plus,

[17] Par exemple dans le système scolaire français les deux ruptures évoquées précédemment ont principalement lieu lors du passage du cycle 3 au cycle 4.

l'apprentissage dépend aussi de l'activité développée par chaque élève lors de la réalisation des tâches proposées et de sa perception des buts. Nous faisons référence ici à la distinction entre tâche et activité, tâche prescrite et tâche effective ainsi qu'à la double régulation de l'activité (Robert & Rogalski, 2005 ; Vandebrouck, 2013). En particulier selon les énoncés des tâches, leur résolution nécessitera des mises en fonctionnement des connaissances anciennes et nouvelles des élèves, sous forme d'application directe ou non, et parfois des adaptations à la charge des élèves (Castela, 2008 ; Robert, 1998, 2010), ce qui définit leur complexité. Les adaptations que les élèves auront à faire relèvent de plusieurs aspects : reconnaissance de modalités d'application des propriétés et de leurs domaines de validité, introduction d'intermédiaires, changement de points de vue et mises en relation. L'activité dépend aussi des déroulements en classe, ainsi que de l'autonomie et de la responsabilité laissées à la charge de l'élève.

Nous faisons l'hypothèse que la mise en perspective de ces trois points de vue – du côté du savoir, du côté de l'institution et du côté de l'élève – permet de définir des besoins d'apprentissage d'un apprenant aidant à la régulation des apprentissages.

Ce travail peut s'inscrire dans plusieurs moments de l'étude[18] :

– faire prendre conscience et négocier des ruptures d'ordre épistémologique non abordées au cours des moments de la *première rencontre* et de l'*exploration du bloc praxique* en abordant les limites de portée de certaines techniques. Développer l'exploration du bloc praxique et la construction du bloc technologico-théorique (concepts d'expression littérale, d'équation, etc.). Ceci est abordé très partiellement dans la plateforme ;

– remettre en question les techniques et technologies erronées mises en jeu par des élèves ;

– renforcer les praxéologies déjà travaillées lors des premiers temps du travail de l'organisation mathématique et de la technique, en les articulant avec d'autres praxéologies (résoudre des équations à coefficients dans **Q** après avoir travaillé les équations à coefficients dans **Z** par exemple).

Cette approche permet d'éclairer les technologies développées par les élèves, anciennes, idoines ou erronées, et de déterminer des praxéologies à travailler pour montrer l'inadaptation de technologies anciennes et pour expliciter des discours technologiques afin de montrer les limites de portée de techniques (Kaspary et al.,

[18] Comme spécifié dans la section 1, tous ces moments ne sont pas ciblés par la plateforme.

2020). Un moyen de prendre en compte l'apprenant et son rapport au savoir à travailler est développé dans la section suivante avec le *mode technologico-théorique* de l'apprenant dans un domaine donné.

2.4 Modes technologico-théoriques et modèle didactique de l'apprenant

Grugeon (1997) définit un modèle de l'apprenant, repris dans Grugeon-Allys et al. (2012), qui donne un modèle intelligible du rapport personnel de l'élève à un savoir donné dans une institution donnée, nommé profil de l'élève. Celui-ci décrit en termes de cohérences sur le domaine de savoir étudié, les principaux traits des activités effectives de l'élève, activités parfois erronées. Les éléments abordés dans la suite de cette section sont toujours relatifs à un domaine de savoir donné. Pour chaque tâche d'une praxéologie locale, une description de l'activité de l'élève au niveau microscopique d'une tâche prenant en compte la composante *praxis* c'est-à-dire les techniques, rend difficile une synthèse significative et opératoire des activités effectives de l'élève sur le domaine de savoir travaillé. Le modèle de l'apprenant repose sur un niveau macroscopique de description de l'activité de l'élève sur les tâches du domaine, en prenant en compte la composante *logos* de l'activité, c'est-à-dire, technologie et théorie. Cette démarche permet ainsi une opérationnalité du modèle de l'apprenant pour concevoir des parcours d'apprentissage adaptés aux besoins d'apprentissage.

Ce modèle a été formalisé dans le cadre de la TAD (Grugeon-Allys, 2016). L'étude du développement des apprentissages s'appuie sur l'analyse des praxéologies apprises de l'élève, praxéologies convoquées au cours de la résolution de tâches. Il s'agit de situer les praxéologies apprises relatives à un savoir mathématique au regard des praxéologies à enseigner et de celles enseignées. Dans ce dessein, nous utilisons un MPR du domaine[19] à partir d'une hiérarchisation des éléments de la composante *logos* au regard des technologies et théories attendues dans une institution donnée. Cette hiérarchie vise à inférer des conditions didactiques pour caractériser des parcours en relation avec les besoins d'apprentissages d'élèves.

Pour une praxéologie locale donnée, un *mode technologico-théorique* correspond à la composante *logos* mise en jeu de façon dominante dans la variété des techniques / technologies personnelles, correctes ou erronées, employées par l'élève au cours de

[19] Nous nous distinguons ici de l'approche de Croset et Chaachoua (2016) avec les praxéologies personnelles. En effet dans le cas des praxéologies personnelles, l'élève est considéré comme une institution avec des types de tâches erronés. Nous ne prenons en compte que les praxéologies institutionnelles, mais pour lesquels des techniques et technologies erronées ont été développées. Nous faisons donc référence aux praxéologies apprises.

la résolution de différentes tâches de cette praxéologie. Ces modes sont définis *a priori* à partir d'une étude épistémologique du côté du savoir et du côté des élèves, en lien avec les institutions en jeu : mode technologico-théorique relevant d'un *logos* « ancien » (par exemple arithmétique en ce qui concerne l'algèbre), mode technologico-théorique relevant d'un *logos* muet ou incomplet ne permettant pas de contrôler des techniques personnelles erronées, mode technologico-théorique attendu dans l'institution. Dans l'exemple de la section 2.1, on peut faire l'hypothèse que l'élève relève du mode ancien *arithmétique*. Les modes technologico-théoriques sont spécifiés pour chacune des praxéologies constitutives du domaine mathématique. Dans le cas de l'algèbre élémentaire, les modes technologico-théoriques sont spécifiés selon les praxéologies : calculer, modéliser, représenter, justifier (Grugeon-Allys, 2016). Pour la géométrie ces modes technologico-théoriques sont définis dans la partie 4 de cet article pour la praxéologie *construire*.

Le *modèle didactique de l'apprenant* est ainsi structuré par un *n*-uplet[20] de modes technologico-théoriques développés par l'apprenant pour les praxéologies constitutives d'un domaine mathématique. Dans le cas d'un mode technologico-théorique relevant d'un *logos* incomplet, une typologie d'erreurs y est associée. C'est ce modèle, complété par la prise en compte des réussites aux exercices, qui est exploité pour décrire le profil d'un élève.

2.5. Nos hypothèses et questions de recherche

Dans les sections précédentes, nous avons présenté le cadre didactique retenu pour une modélisation du savoir, des besoins d'apprentissage et du modèle de l'apprenant. Nous faisons l'hypothèse que la prise en compte de différentes approches, épistémologique, institutionnelle et cognitive, par une conjugaison de théories didactiques, permet de définir les conditions didactiques pour concevoir des parcours adaptés aux besoins d'apprentissage d'élèves sur une plateforme d'entraînement aux mathématiques.

Plus précisément nous allons répondre aux questions suivantes :

- En quoi la définition praxéologique d'une tâche, affinée par des variables didactiques de portée et de complexité, permet-elle la définition d'une famille de tâches, pour une praxéologie locale donnée, et *in fine* la génération d'exercices qui se laissent implémenter dans un EIAH ?

[20] La valeur de *n* dépend du domaine mathématique étudié.

– En quoi une telle définition permet-elle de concevoir des parcours, en lien avec les besoins d'apprentissage de l'apprenant, transposables dans un EIAH ?

3. Développements proposés dans le cadre du projet

Pour répondre aux questions présentées ci-dessus, nous présentons successivement le modèle didactique de la famille de tâches, le modèle didactique de parcours et enfin une représentation informatique qui permet leur exploitation. Nous illustrons nos approches en continuant à développer l'exemple introduit dans la section 2.1, la section 4 étant consacrée à la présentation d'un exemple détaillé en géométrie.

3.1. Modèle didactique de la famille de tâches

Dans le projet, nous devons générer des tâches, aussi bien en algèbre qu'en géométrie, pour créer des exercices[21]. Afin de pouvoir répondre aux différents objectifs de la plateforme, nous caractérisons une tâche générée par :

– les savoirs en jeu dans la tâche ;

– sa conformité à un curriculum donné ;

– la ou les techniques permettant de réaliser cette tâche et les technologies mobilisées dont celle visée ;

– sa complexité.

Ces différents éléments permettent de positionner les tâches les unes par rapport aux autres dans la perspective de la construction des parcours et d'identifier les technologies erronées plausibles par rapport à la tâche.

Pour ce faire, nous nous appuyons sur la modélisation du savoir (section 2.2) et la modélisation de l'apprenant (section 2.4). Nous utilisons un modèle praxéologique de référence relatif au savoir en jeu et les modes technologico-théoriques mis en jeu par un apprenant en cours d'apprentissage de ce savoir. Chaque domaine, algèbre et géométrie, est considéré comme une praxéologie mathématique globale (OMG) et est structuré en praxéologies régionales (OMR) et locales (OML). Nous présentons une telle structuration de la géométrie dans la section 4.1.

[21] Il est important de noter qu'il a été choisi dans le projet, notamment en raison de contraintes informatiques, de proposer des exercices constitués d'une seule tâche. Les problématiques liées à l'articulation de plusieurs questions dans un même exercice ne se posent donc pas dans le cadre de notre travail.

In fine, une tâche est produite à partir d'un générateur, qui est dans une OML, elle-même incluse dans une OMR. Ces différents niveaux d'inclusion permettent de caractériser l'articulation entre les savoirs à un niveau élevé de granularité. Par exemple dans le domaine de l'algèbre, l'OMR des expressions algébriques contient les OML *calculer*, *représenter*, *modéliser* et *justifier*. L'OML *modéliser* mobilise des éléments de l'OML *représenter* ; tandis que l'OML *justifier* mobilise les trois autres. Ainsi, il est possible d'avoir un premier positionnement des praxéologies les unes par rapport aux autres et de penser des parcours de l'élève en prenant en compte les interactions entre ces différents niveaux de structuration du savoir. Nous illustrons cette structuration, pour l'algèbre, sur la Figure 1.

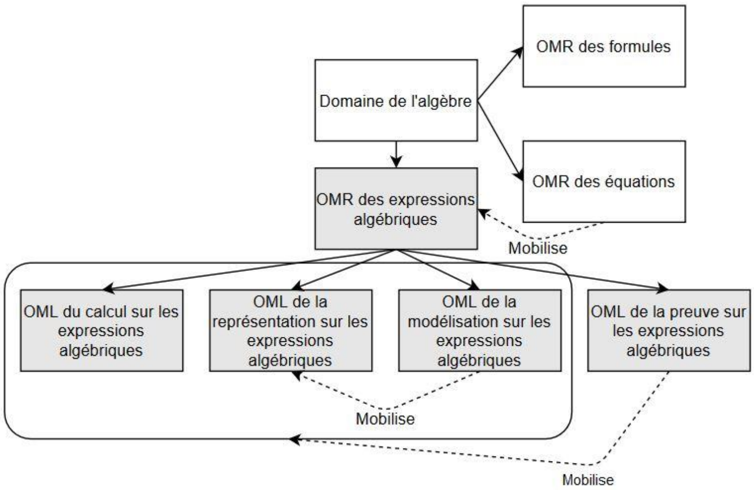

Figure 1. Illustration de la structuration de l'algèbre et des relations entre les niveaux

Comme nous l'avons montré dans la section 2.1 avec les trois exercices qui relèvent tous de l'OML de la résolution des équations ; au niveau de l'OML nous ne disposons pas encore d'une précision suffisante pour générer et surtout discriminer des tâches d'une praxéologie donnée au regard des objectifs de caractérisation que nous avons fixés ci-dessus. L'OML est donc, à son tour, constituée de praxéologies ponctuelles. Par exemple, l'OML *calculer* des expressions algébriques est constituée de trois praxéologies ponctuelles : *développer, factoriser* et *réduire* une expression algébrique. Pour modéliser ces praxéologies ponctuelles, dans le modèle T4TEL, Chaachoua et al. (2019) définissent des générateurs de types de tâches. Un processus de construction des trois générateurs *développer*, *factoriser* et *réduire* une expression algébrique est détaillé dans (Jolivet, 2018).

Nous précisons l'usage des générateurs de types de tâches proposés dans T4TEL en distinguant deux ensembles de variables : d'une part les variables de types de tâches (Chaachoua et al., 2019) et d'autre part les variables de tâches (Grugeon-Allys et al., 2018 ; Lesnes-Cuisiniez & Grugeon-Allys, 2019). Le choix des valeurs des variables de type de tâches permet de définir différents types de tâches, rendant compte de l'agrégation de différentes technologies dans l'OML. Les variables de tâches et le choix de leurs valeurs ont une double fonction : d'une part, caractériser la portée de certaines techniques (cette fonction est partiellement prise en charge, comme prévu par Chaachoua et al. (2019), par certaines valeurs des variables de types de tâches) et d'autre part caractériser la complexité des tâches. Ainsi, ce que nous appelons un générateur de familles de tâches est défini par un verbe d'action, un complément fixe, un ensemble de variables de types de tâches – et leurs valeurs – et un ensemble de variables de tâches – et leurs valeurs. L'instanciation des variables de types de tâches permet de définir des types de tâches. À partir de ceux-ci, l'instanciation des variables de tâches permet de définir des *familles de tâches*. Une famille de tâches est un ensemble de tâches que le choix des valeurs des variables nous amène à considérer comme semblables à l'aléatoire de génération près. Il s'agit du niveau de granularité le plus fin que nous définissons dans la modélisation du savoir construite.

Nous illustrons maintenant ces éléments à l'aide de l'exemple abordé dans la section 2.1. La tâche « Résoudre l'équation $4x + 3 = 7$ », concerne le domaine de l'algèbre, au sein de l'OMR des équations et dans l'OML *calculer* sur les équations. Dans cette OML nous considérons le générateur qui est défini par le verbe d'action « Résoudre », le complément fixe « une équation du premier degré » et les variables suivantes :

- variable de type de tâches 1 (VT1) : structure de l'équation ;
- variable de type de tâches 2 (VT2) : nombre de solutions de l'équation ;
- variable de tâches 1 (Vt_P1) : nature des solutions ;
- variable de tâches 2 (Vt_C1) : nature des coefficients ;
- variable de tâches 3 (Vt_C2) : complexité de la réécriture.

Les différentes valeurs de VT1 sont détaillées dans la Figure 2. Elles permettent de distinguer, par exemple, les équations de la forme $ax + b = c$ de celles de la forme $ax + b = cx + d$. Ce qui est pertinent à la fois sur le plan institutionnel et sur le plan des techniques associées. La variable Vt_P1 est fondamentale pour rendre compte de la portée des techniques de nature arithmétique, qu'on veut voir évoluer au profit des techniques algébriques. Or, le choix d'une racine rationnelle non décimale (dans $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{D}$) est un moyen de rendre les techniques arithmétiques inopérantes, d'où l'intérêt de définir la variable Vt_P1 à laquelle on associe en particulier deux valeurs : **Q \ D** et **D**. Les deux variables Vt_C1 et Vt_C2 permettent de caractériser la complexité de l'équation à résoudre. La variable Vt_C2, complexité de la réécriture, indique s'il y a nécessité de convoquer les OMP *développer* et *réduire* une expression algébrique, qui appartiennent à une autre OMR, préalablement à la résolution algébrique de l'équation $ax + b = cx + d$ avec $a - c \neq 0$.

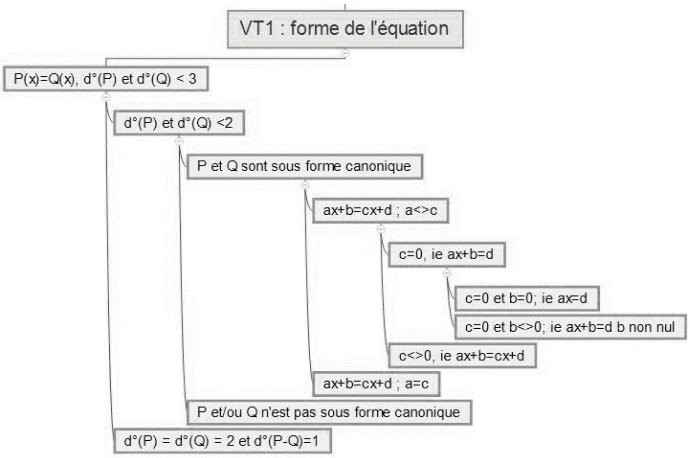

Figure 2. Structuration des valeurs de la variable de types de tâches 1 du générateur "Résoudre une équation du 1er degré"

À partir de ce générateur, nous pouvons définir la famille de tâches Ft_1 : {forme de l'équation : $ax + b = c$; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions : **N** ; nature des coefficients : **N** ; complexité de la réécriture : aucune réécriture nécessaire} à partir de laquelle il va être possible de générer l'exercice « Résoudre l'équation $4x + 3 = 7$ » en fixant de manière aléatoire les coefficients a, b et c de VT1 tout en respectant les contraintes définies par les valeurs des autres variables[22]. On peut noter que les exercices, Ex 2 « Résoudre l'équation $5x - 3 = 2x + 1$ » et Ex 3 « Résoudre l'équation $3x^2 - 2x + 5 = 3(x^2 - 6x + 7)$ » n'appartiennent pas à Ft_1 mais, respectivement à Ft_2 = {forme de l'équation : $P(x) = Q(x)$ avec d°(P), d°(Q) < 2, soit $ax + b = cx + d$ avec a et $c \neq 0$; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions : **Q \ D** ; nature des coefficients : **Z** ; complexité de la réécriture : aucune réécriture nécessaire} et Ft_3 = {forme de l'équation $P(x) = Q(x)$ avec d°(P) = d°(Q) = 2 et

[22] Le travail de génération et de vérification des contraintes est réalisé par le partenaire CabriLog.

d°($P - Q$) = 1 ; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions : **D** ; nature des coefficients : **Z** ; complexité de la réécriture : développement et réduction}.

Dans le projet, nous exploitons ce générateur de diverses manières. Tout d'abord, les types de tâches sont obtenus par instanciation des valeurs des variables de types de tâches. Ce premier niveau permet de définir une structuration de l'ensemble des équations du premier degré, pertinente au regard des programmes de cycle 4 et d'un point de vue didactique. Puis, à un deuxième niveau, des familles de tâches (Ft) sont définies au sein d'un type de tâches en fixant une valeur pour chacune des variables de tâches. Il s'agit du plus petit élément pouvant être produit par un générateur. C'est donc à partir d'une famille de tâches que vont être produites les tâches qui seront communiquées à l'élève. Les choix réalisés dans la définition des familles de tâches, c'est-à-dire le choix des combinaisons de valeurs de VT et Vt, visent deux fonctions :

– produire des familles de tâches qui permettent de motiver et travailler le passage d'une technique à une autre en jouant sur leurs portées et la technologie en jeu ;

– produire des familles de tâches qui mobilisent la même technique, mais sont plus ou moins complexes en terme d'activité cognitive sollicitée à travers la convocation de types de tâches relevant d'une autre OMR.

Dans un deuxième temps, la structuration des valeurs des variables de types de tâches et de tâches permet d'obtenir une structuration des familles de tâches. Elle est illustrée par la Figure 3. Les branches avec « … » ne sont pas développées, mais se poursuivent à l'image de la branche « centrale » qui est plus détaillée. C'est la combinaison de cette structuration des familles de tâches et des fonctions précédemment définies des différentes variables, qui va permettre de concevoir un premier niveau de parcours.

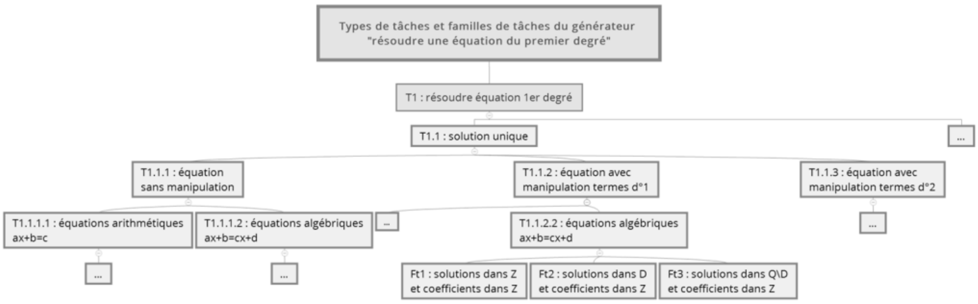

Figure 3. Illustration partielle de la structuration des types de tâches et familles de tâches pour la résolution des équations du 1er degré.

Attribuer un niveau de conformité institutionnelle aux différentes valeurs de variables de types de tâches et variables de tâches permet d'indiquer l'adéquation entre une famille de tâches et un niveau institutionnel. Cette approche est détaillée dans (Jolivet et al., 2022).

Le modèle didactique de la famille de tâches que nous avons défini permet ainsi de définir l'ensemble des possibles (c'est-à-dire l'ensemble des familles de tâches produites à l'aide d'un générateur). Nous allons maintenant présenter l'organisation de ces éléments pour produire des parcours.

3.2. Modèle didactique de parcours

Nous avons vu dans les sections 2.3 et 2.4 que les besoins d'apprentissage de l'élève dépendent de son profil et sont corrélés aux modes technologico-théoriques le caractérisant selon les praxéologies constitutives du domaine dans lequel le travail a lieu. Nous avons aussi rappelé la nécessité de proposer des tâches en conformité avec les attentes institutionnelles. Il s'agit maintenant de préciser les fondements permettant d'organiser les différents exercices en parcours, qui répondent à ces besoins d'apprentissage. Pour définir des parcours, nous nous appuyons sur les variables de type de tâches, les variables de portée et de complexité pour définir une chronologie entre tâches. Par exemple, pour la structuration présentée dans la figure 3, nous identifions tout d'abord la famille de tâches Ft2 comme étant le *cœur de cible* des apprentissages visés en classe de 4^{e} et de 3^{e}. En amont de ce *cœur de cible,* on va pouvoir faire travailler les élèves dans le type de tâches T1.1.1 avec une transition organisée du type de tâches T1.1.1.1 vers le T1.1.1.2 pour les amener d'une résolution arithmétique vers une résolution algébrique. Le passage au type de tâches T1.1.2 au sein duquel la résolution des tâches met en jeu des manipulations d'expressions algébriques du type réduction et/ou développement va permettre de poursuivre la construction du bloc technologico-théorique visé dans l'institution en mobilisant une OML externe à celle de la résolution des équations du 1er degré. Enfin l'identification des familles de tâches Ft1, Ft2 et Ft3 permet de faire varier la complexité des tâches, complexité qui va encore pouvoir être augmentée en allant explorer les familles du type de tâches T1.1.3.

En complément de cette structuration du savoir, on prend aussi en compte le mode technologico-théorique de l'apprenant, relatif au domaine travaillé, pour l'amener à travailler au plus près de ses besoins d'apprentissage. C'est ce mode qui permet de déterminer à quelle distance il faut remonter en amont de la famille de tâches cibles, et s'il est nécessaire de remobiliser des familles de tâches qui ont pour enjeu de faire prendre conscience à l'apprenant de l'insuffisance de techniques fondées sur des technologies anciennes. C'est aussi la prise en compte du mode technologico-théorique qui permet de répartir les exercices autour de la cible, qui est l'objectif commun à tous les élèves, selon leur complexité.

On peut ainsi représenter de manière simplifiée le modèle de parcours issu du Tableau 1. Les pourcentages[23] indiquent le volume approximatif de travail qu'il est prévu de consacrer à la famille de tâches de la colonne. Nous ne discutons pas dans cet article des mécanismes déterminant le passage d'une famille de tâches à une autre, il est cependant possible que les deux dernières colonnes ne soient pas ou peu explorées. Il est par contre nécessaire que la colonne cible le soit, si besoin à la suite des actions de l'enseignant pour retravailler les éléments nécessaires dans les colonnes précédentes. Un exemple détaillé d'un tel parcours en géométrie est présenté dans la section 4.4.

Tableau 1. Modèle simplifié de parcours en fonction du mode technologico-théorique.

Mode technologico-théorique	Familles de tâches pouvant être résolues avec une technologie ancienne	Familles de tâches pivots pour négocier la rupture	Familles de tâches cibles : mobilisation de la technologie visée	Familles de tâches cibles en restant dans l'OMR travaillée	Familles de tâches cibles avec convocation de praxéologies d'autres OMR
Ancien non idoine	10%	20%	50%	20%	
Incomplet		15%	50%	20%	15%
Idoine			40%	40%	20%

3.3. Représentation informatique du savoir et de l'activité mathématique

Un enjeu central du projet est de pouvoir exploiter informatiquement les différents aspects définis précédemment. Il s'agit donc de représenter, de manière structurée, les praxéologies et d'autres éléments liés au modèle de l'apprenant. Pour cela nous avons construit une ontologie, c'est-à-dire : « dans le contexte de l'informatique et des sciences de l'information, une ontologie définit un ensemble de représentations élémentaires avec lesquelles modéliser un domaine de la connaissance ou du

[23] Ces pourcentages sont fixés suite à des expérimentations menées en classe notamment autour de la recherche sur *Pépite*. Ils pourront être réinterrogés au regard des résultats de l'expérimentation de la plateforme MindMath.

discours. Les représentations élémentaires sont généralement des classes (ou ensembles), des attributs (ou propriétés) et des relations (ou liens entre les instances des classes). » (Gruber, 2009).

Nous avons donc une approche similaire à celle développée dans le projet Cartographie des savoirs, au sein duquel une représentation informatique du savoir pour les disciplines mathématiques et français du cycle 2 a été produite (Mandin & Guin, 2014) permettant de construire « différents services (production de profils des élèves, production de tests de diagnostic, etc.) » (Chaachoua, 2018, p. 21). L'utilisation de ce type de représentations a aussi été développée par Jolivet (2018) avec l'exploitation d'une telle ontologie basée sur l'utilisation de générateurs de types de tâches. Une autre exploitation, toujours basée sur la même approche et mettant en jeu la portée des techniques est présentée dans (Vu & Tchounikine, 2020).

Dans le cadre du projet MindMath, l'ontologie construite sert de pivot pour la communication et l'échange d'informations entre les différents partenaires du projet. Elle permet de structurer et d'expliciter les différents concepts didactiques mis en jeu. Nous commençons tout d'abord par déclarer les niveaux praxéologiques globaux, régionaux et locaux qui permettent de modéliser et de structurer le domaine de savoir et mettons en exergue les relations qui les lient. Par exemple, nous explicitons le fait que l'*OMR des expressions algébriques* est mobilisée dans l'*OMR des équations*. De même, au sein de l'*OMR des expressions algébriques*, l'*OML prouver* va mobiliser les *OML modéliser, représenter et calculer*. L'explicitation de ces relations est nécessaire pour la construction des parcours. Nous déclarons aussi les différentes théories (au niveau des OMG) et les différentes technologies (au niveau des OMR) qui rentrent en jeu dans la description des praxéologies.

Une fois ce premier niveau transversal explicité, nous définissons les éléments permettant de construire les générateurs qui décrivent les OML. Pour un générateur donné, nous définissons les variables de types de tâches et variables de tâches ainsi que les valeurs associées. Ces valeurs sont déclarées de manière structurée par le moyen d'ensembles inclus ou disjoints (voir Figure 2). Cette modélisation permet de définir des types de tâches (vecteurs de valeurs fixées de variables de types de tâches) et des familles de tâches (vecteurs de valeurs fixées de variables de types de tâches et de variables de tâches), mais aussi de calculer, en raisonnant sur l'ontologie, la structuration de ces éléments, à l'image de la Figure 3 présentée précédemment. À ces types de tâches et familles de tâches sont associées les techniques qui permettent de les réaliser. Pour une technique nous déclarons deux relations importantes : une technique est justifiée par une technologie et, le cas échéant, une technique met en jeu un ingrédient qui est un type de tâches issu d'un autre générateur. Ces relations sont exploitées pour la conception de parcours, par exemple en permettant de regrouper des exercices issus de familles de tâches différentes, mais qui mobilisent une même technologie.

D'autre part, l'ontologie contient aussi les modes technologico-théoriques et les technologies erronées (identifiées *a priori* au moyen du travail d'analyse didactique) qui y sont associées. Nous exploitons ces technologies erronées à un double niveau. Tout d'abord, de manière locale, quand l'élève réalise une tâche, pour produire des rétroactions aux apprenants qui intègrent les savoirs visés, mais qui prennent aussi en compte une hypothèse sur ce qu'a été leur activité lors de la résolution de la tâche pour les amener à faire évoluer leur rapport au savoir. Puis, d'une manière plus globale, pour la construction des parcours, en identifiant les modes technologico-théoriques qui permettent de définir des catégories d'erreurs liées, non pas seulement au savoir travaillé, mais aussi à des savoirs antérieurs non maitrisés par l'apprenant.

Enfin, ces éléments sont liés aux institutions dans lesquelles ils sont conformes. Ceci est le moyen de déterminer non seulement l'adéquation d'une tâche à un niveau scolaire donné, mais aussi de connaitre la viabilité et l'idonéité d'une technologie pour un niveau donné et ainsi d'adapter les rétroactions à l'apprenant en fonction de son mode technologico-théorique en cours. Les rapports entre techniques, technologies et institutions sont le fondement du calcul des parcours.

3.4 Synthèse

Dans cette troisième section nous avons donc présenté l'ensemble des modèles didactiques définis et exploités dans le cadre du projet MindMath permettant la représentation du savoir, la mise en relation de l'activité de l'élève avec le savoir et la représentation informatique de ces modèles. Ils permettent à la fois l'identification de familles de tâches, la génération de tâches, ainsi que la conception et la génération de parcours d'apprentissage. Nous avons choisi comme domaine d'illustration celui de l'algèbre qui a, par ailleurs, été déjà exploité dans divers travaux. La quatrième section de cet article propose la mise en fonctionnement de ces différents éléments dans le domaine de la géométrie, et plus précisément dans le cas des triangles.

4. Illustration sur l'organisation mathématique régionale des triangles

Contrairement à l'algèbre, il n'y a pas de travaux antérieurs concernant la construction d'un MPR en géométrie. Des EIAH existent déjà, mais sont basés sur d'autres types de modélisation. On peut, par exemple, citer geogebraTUTOR et son évolution QED-Tutrix, qui s'appuient sur la construction d'un Espace de Travail Géométrique de référence (Tessier-Baillargeon et al., 2014 ; Font et al., 2018). Nous commençons donc cette section par une présentation de quelques éléments relatifs à la construction d'un tel MPR dans la partie 4.1.

Notons, avant cela, que les objets géométriques et les outils de construction peuvent prendre des formes sensiblement différentes dans l'environnement informatique et dans l'environnement papier-crayon. Dans cet article, nous nous intéressons à la phase de définition des différents éléments théoriques et pratiques permettant la prise en compte du didactique dans la construction de l'EIAH MindMath. Nous n'analysons pas les phénomènes de genèses instrumentales (Rabardel, 1995) et les effets de la transposition informatique (Balacheff, 1994). Nous utilisons donc les mots *outil* ou *instrument* dans un sens générique et sans distinguer celui tangible de l'environnement papier-crayon de celui virtuel de l'environnement de géométrie dynamique exploité dans la plateforme MindMath.

4.1. Modèle praxéologique de référence relatif à la construction de triangles au cycle 4

4.1.1 Construction de figures planes et raisonnement déductif

En nous plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous considérons que la discipline des mathématiques est composée de praxéologies globales dont la géométrie. Celle-ci est elle-même composée de deux praxéologies régionales : une relative aux figures géométriques planes et une relative aux solides géométriques. La praxéologie régionale relative aux figures géométriques planes est structurée en cinq praxéologies locales (cf. Figure 4) : construction de figures géométriques, preuve mettant en jeu des figures géométriques, représentation des figures géométriques, calcul de grandeurs de figures géométriques et modélisation par des figures géométriques.

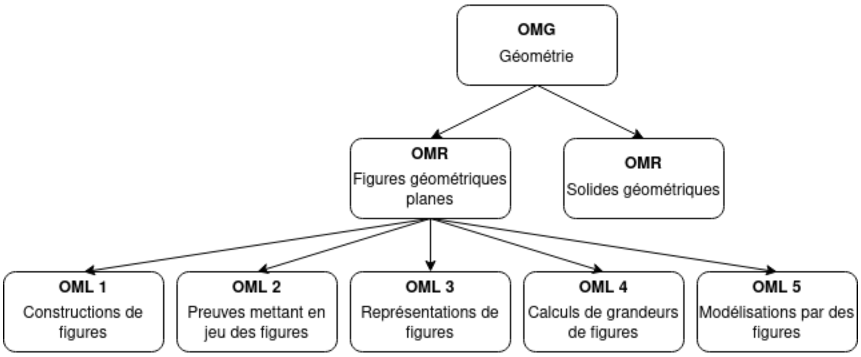

Figure 4. Description en OMR et OML de la géométrie plane

Du cycle 3 au cycle 4, les élèves passent de la géométrie des tracés matériels avec des instruments à la géométrie théorique des démonstrations (Mathé et al., 2020). Ils passent donc de l'étude des figures matérielles à celle des situations géométriques définies par un texte, où les figures géométriques représentent alors toutes les figures matérielles possibles définies par le texte. Mais cette évolution constitue une rupture qui tient en particulier au mode de validation des énoncés. Au cours du cycle 3, la simple perception, puis la perception guidée par les instruments de tracé ou de mesure portant sur les objets matériels ou graphiques suffisent. En revanche, à la fin du cycle 3, et surtout au cycle 4, l'élève doit établir un discours logique à partir des énoncés décrivant des propriétés d'objets théoriques ou de relations entre ces objets.

Dans la suite des travaux de Perrin-Glorian et Godin (2018) qui font l'hypothèse que la géométrie des tracés permet de travailler cette transition, nous nous intéressons ici à la genèse du raisonnement déductif de la géométrie théorique en considérant les problèmes de construction comme un levier pour l'entrée dans un tel raisonnement. Il est possible de considérer les problèmes de construction soit en s'intéressant à la manipulation des instruments, soit en s'intéressant au raisonnement nécessaire à la réalisation de la construction puis à sa validation. Dans cet article, nous nous plaçons dans le second cas. Nous avons donc défini un MPR afin de modéliser l'activité géométrique relative à la construction de figures en géométrie plane dans le champ d'action des cycles 3 et 4. Nous cherchons à décrire *a priori* les praxéologies institutionnelles et les praxéologies apprises par les élèves à la transition cycle 3 – cycle 4 en caractérisant leurs composantes praxiques (types de tâches, techniques) et *logos* (technologies, théories)[24].

Dans un premier temps, notre MPR de la géométrie plane à l'école et au collège est fondé sur des études épistémologiques, didactiques et institutionnelles. Nous étudions des aspects historiques de la construction de la géométrie euclidienne (Vitrac, 1990) et leur transposition didactique à partir de l'analyse de manuels et des programmes scolaires. Cette étude nous permet de caractériser les praxéologies institutionnelles visées en lien avec les paradigmes géométriques et le statut de la validation pour la justification des solutions (Houdement et Kuzniak, 2006).

Dans un deuxième temps, nous étendons le modèle praxéologique de référence en prenant en compte des impacts potentiels, sur l'apprentissage des élèves, d'une négociation insuffisante de la rupture d'ordre épistémologique en géométrie auxquels sont confrontés les élèves dans la transition entre les institutions cycle 3 et cycle 4, voire de décalages potentiels entre rapports institutionnels. Nous faisons l'hypothèse que cette rupture concerne des aspects épistémologiques liés à la fois à l'appréhension des figures et au raisonnement. Les aspects en lien avec

[24] La construction du modèle praxéologique de référence est un objet de la thèse de Lesnes-Cuisiniez (2021).

l'appréhension des figures mettent en jeu la distinction entre dessin et figure (Laborde et Capponi, 1994), la distinction entre propriétés spatiales et propriétés géométriques (Berthelot et Salin, 1992) ainsi que les appréhensions iconiques et non iconiques des figures (Duval, 1994, 2005). Les aspects liés au raisonnement mettent en jeu les types de preuves (Balacheff, 1987 ; Tanguay, 2002) dont la distinction entre argumentation et raisonnement déductif (Duval, 1992), ainsi que l'élaboration d'heuristiques (Duval, 1988). La validation nous intéresse plus particulièrement, en distinguant notamment l'usage des instruments de l'usage des propriétés pour valider (Houdement et Kuzniak, 2006).

4.1.2 Construction de triangles

Nous développons maintenant le cas de la construction des triangles, « Construire un triangle à partir des angles et des côtés » étant un générateur de la praxéologie locale relative à la construction de figures.

Les triangles font partie des objets de base de la géométrie euclidienne, enseignée à l'école primaire puis au collège. Dès le cycle 2, dans les programmes de 2020, certains triangles particuliers sont définis par des propriétés concernant leurs angles et/ou les longueurs de leurs côtés. À partir du type de tâches « construire un triangle », nous faisons donc un premier découpage selon la nature du triangle à construire. Nous obtenons ainsi une partition de l'ensemble des triangles qui correspondent aux types de tâches suivants : construire un triangle scalène non rectangle, construire un triangle isocèle non rectangle et non équilatéral, construire un triangle équilatéral, construire un triangle rectangle non isocèle et construire un triangle isocèle rectangle.

De plus, la construction d'un triangle d'une de ces familles, et sa validité, s'appuient sur la mobilisation de technologies déterminées par les éléments donnés dans l'énoncé. Ces technologies sont, soit communes à tous les triangles (inégalité triangulaire, somme des mesures des angles, etc.), soit spécifiques à certaines familles (théorème de Pythagore, égalité des angles de la base d'un triangle isocèle, etc.). Elles permettent d'obtenir des informations qui complètent celles de l'énoncé pour rendre possible la construction du triangle avec les instruments disponibles. Selon la construction à réaliser et l'énoncé (données numériques, outils à disposition, etc.), l'élève devra donc mobiliser une ou des propriétés pour résoudre la tâche qui lui est proposée. Ainsi, pour l'exemple proposé Figure 5, l'absence d'un instrument de report de longueur rend nécessaire la mobilisation de deux technologies pour la réalisation de la tâche comme le montre la technique de réalisation de cette tâche présentée dans le Tableau 2.

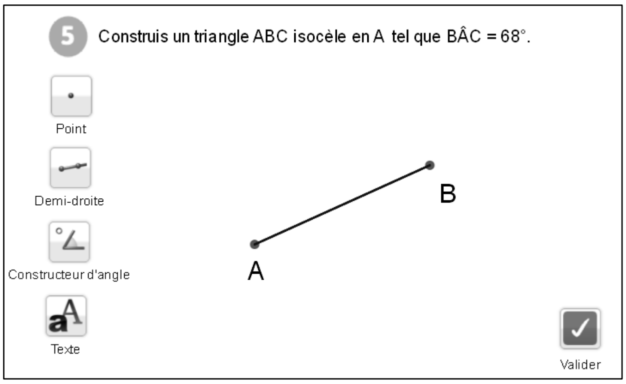

Figure 5. Tâche de construction avec limitation des instruments disponibles

Tableau 2. Technique attendue possible de résolution de l'exemple de la figure 5

Type de pas	Étape de résolution		
	Donnée(s)	Propriété	Conclusion
Raisonner	ABC est un triangle isocèle	Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
Raisonner	ABC est un triangle.	La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.	$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180°$
Calculer	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ $\widehat{BAC} = 68°$	Règles du calcul algébrique	$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180° - 68°$ $2 \times \widehat{ABC} = 112°$ $\widehat{ABC} = 56°$
Construire	Construire la demi-droite issue de A qui fait un angle de 68° avec [AB].		
Construire	Construire la demi-droite issue de B qui fait un angle de 56° avec [AB].		
Construire	Placer le point C à l'intersection des deux demi-droites.		

4.2 Modes technologico-théoriques de l'élève relatifs à la construction de triangles

Les modes technologico-théoriques relatifs à la construction de figures en géométrie plane sont définis à partir du MPR de la géométrie plane que nous avons construit. Nous en caractérisons trois :

– un mode correspondant à une construction validée par la perception ou le recours à la mesure ;

– un mode correspondant à une construction appuyée sur un raisonnement déductif, mais avec mobilisation de technologies erronées : utilisation de propriétés fausses ou dont les conditions d'application ne sont pas remplies, erreurs dans la chronologie des pas de construction ou dans l'enchaînement des pas ;

– un mode correspondant à une construction appuyée sur un raisonnement déductif correct.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves relèvent généralement du premier de ces trois modes à l'issue du cycle 3, l'enjeu est de les amener au troisième durant le cycle 4.

Comme il est présenté dans la section 4.1.1, l'activité géométrique de l'élève relève de différentes OML, qui peuvent par ailleurs entrer en interaction. Par exemple pour construire un triangle (OML relative à la construction), il peut être nécessaire de calculer la mesure d'un de ses angles ou d'un de ses côtés (OML relative au calcul de grandeurs). Caractériser le mode technologico-théorique d'un élève en géométrie plane nécessite donc d'étudier son activité sur les différentes OML.

4.3 Modèle didactique des tâches de construction de triangles

L'OML relative à la construction des figures planes, et en particulier des triangles, est composée de différents générateurs selon le principe de structuration présenté dans les sections 3.1 et 3.3 : générateur « construire un triangle à partir des côtés et des angles », générateur « construire un triangle à partir des droites remarquables », etc.

Dans cette section nous décrivons le générateur « Construire un triangle à partir des côtés et des angles ». Pour cela nous décrivons les variables de types de tâches, les variables de tâches, leurs valeurs respectives et les familles de tâches que nous implémentons dans la plateforme MindMath. Dans la section 4.4, nous présentons l'exploitation de ce générateur pour la définition de parcours d'apprentissage.

La première variable de type de tâches (VT1) de ce générateur correspond à la « nature du triangle à construire » qui peut prendre les valeurs : triangle scalène non rectangle ; triangle isocèle non rectangle et non équilatéral ; triangle équilatéral ; triangle rectangle non isocèle ; triangle isocèle rectangle.

La deuxième variable de type de tâches (VT2) concerne les données de l'énoncé : trois grandeurs *côtés* ; deux grandeurs *côtés* et une grandeur *angle* ; une grandeur *côté* et deux grandeurs *angles*. Ce choix a été réalisé relativement à la technologie des cas d'égalité. Ces informations peuvent être données directement (en grandeur ou en mesure) ou implicitement par les propriétés du triangle à construire, ce qui laisse à l'élève la charge de les mobiliser. Ainsi dans l'exemple de la Figure 5, c'est à l'élève de mobiliser le fait que dans un triangle isocèle les angles de la base sont égaux.

La mobilisation des propriétés des triangles dépend également d'autres facteurs qui sont décrits par les autres variables. On distingue celles qui permettent de spécifier la portée de la technique visée et les limites de technologies anciennes (Vt_P) et celles qui permettent de jouer sur le niveau d'application des connaissances et les adaptations nécessaires (Vt_C) et donc la complexité de la tâche :

– Vt_P1 : éléments déjà tracés de la figure à construire ;
– Vt_P2 : outils disponibles pour la construction[25] ;
– Vt_P3 : registre de représentation et désignation du triangle dans l'énoncé ;
– Vt_C1 : présence d'objets géométriques, externes à la figure à construire, nécessaires à sa construction.

Nous ne développons ici que le rôle de la variable Vt_P2 qui concerne les outils à disposition dans l'environnement et qui a un impact important sur la mobilisation des techniques et des technologies visées. En effet, la disponibilité et l'usage des outils permettent de disqualifier certaines techniques et rendent nécessaire le fait de mobiliser d'autres technologies relatives aux triangles. C'est donc un moyen important d'organiser des parcours d'apprentissage.

Nous avons illustré cet effet sur le cas de la Figure 5 à la fin de la section 4.1.2. En effet, pour le type de tâches « construire un triangle isocèle à partir de données qui sont l'angle au sommet et un côté issu de ce sommet », si l'élève dispose du report de longueurs, il peut mobiliser la technologie *un triangle isocèle a deux côtés de même longueur* et reporter la longueur du premier côté sur la demi-droite issue de

[25] Cette variable prend notamment les valeurs suivantes : uniquement outils de report de mesure ; uniquement constructeur d'angles ; report de mesure et constructeur d'angles ; etc.

l'angle au sommet. En l'absence de l'outil report de longueur, avec uniquement le constructeur d'angles, il va devoir mobiliser d'autres technologies (*la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°* et *les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux*) pour calculer puis construire un des angles à la base sur le côté donné. Cet exemple illustre le rôle de cette variable dans la négociation de l'entrée dans le raisonnement déductif à la transition cycle 3 – cycle 4.

À ces variables de types de tâches et de tâches, s'ajoutent des descripteurs qui permettent de caractériser la tâche. Les plus importants pour la création des parcours d'apprentissage sont :

– le niveau institutionnel associé à la famille de tâches ;
– le nombre minimum de propriétés à mobiliser pour résoudre les tâches d'une famille de tâches.

En effet, le nombre de propriétés à mobiliser dépend du triangle à construire (VT1), mais aussi de sa désignation dans l'énoncé, du registre de représentation de ce dernier (schéma codé, énoncé textuel, etc.) (Vt_P3), des données en entrée (VT2), des instruments à disposition (Vt_P2) et des éléments déjà construits (Vt_P1 et Vt_C1). La valeur de ce descripteur est donc déduite des valeurs des différentes variables en prenant aussi en compte les programmes scolaires en vigueur.

4.4 Un exemple de parcours du générateur construire un triangle

Comme il est présenté dans la partie 3.2, des parcours d'apprentissage sont définis *a priori* à partir d'une étude didactique et épistémologique, au regard des objectifs définis par les programmes scolaires. Ils sont fondés sur le MPR de la géométrie plane que nous avons défini. La structuration du MPR et les informations disponibles dans l'ontologie permettent la création de parcours d'apprentissage organisés autour de différents objectifs : étudier un type de triangle en particulier (parcours de plusieurs familles de tâches à l'intérieur d'un type de tâches « construire un triangle de type donné »), ou étudier une technologie particulière comme la propriété de la somme des mesures des angles dans un triangle (parcours transversal à plusieurs types de triangles). Nous définissons également des parcours différents selon les modes technologico-théoriques que nous avons décrits dans la section 4.2.

Les algorithmes utilisés par d'autres acteurs du projet MindMath pour proposer des parcours aux élèves sur la plateforme enrichissent ensuite ceux que nous avons définis *a priori*. Ils prennent alors en compte le mode technologico-théorique actuel de l'élève, sa réussite aux tâches déjà rencontrées, sa réaction aux rétroactions proposées et les parcours des autres élèves sur la plateforme.

Dans cette partie, nous présentons un exemple de parcours centré sur les propriétés des angles des triangles isocèles. Il peut être réalisé en classe de 5e pour donner une raison d'être au raisonnement déductif et pour développer les éléments technologico-théoriques relatifs au triangle isocèle.

À partir du générateur « Construire un triangle à partir des côtés et des angles », dont les variables ont été présentées dans la section 4.3, nous avons défini 40 familles de tâches que nous jugeons pertinentes au cycle 4. Nous nous intéressons ici au type de tâches « construire un triangle isocèle » et nous présentons dans le Tableau 3 la liste des familles de tâches qui mettent en jeu une activité sur les angles (la tâche de la Figure 5 appartient à la famille de tâches Ft5). Concernant les variables, la figure à construire (VT1) est un triangle isocèle, mais sa désignation dans l'énoncé peut être diverse (Vt_P3). L'élément fourni de la figure (Vt_P1) est toujours le côté désigné dans l'énoncé et il n'y a pas d'éléments externes à la figure à construire (Vt_C1).

Tableau 3. Familles de tâches définies à partir du générateur « Construire un triangle avec les angles et les côtés » mettant en jeu une activité sur les angles dans un triangle isocèle

Ft	VT2 Données de l'énoncé	Vt_P2 Outils à disposition	Vt_P3 Registre de représentation	Nombre minimum de propriétés à mobiliser
Ft1	La base et un angle à la base	Constructeur d'angles	Schéma codé avec deux angles égaux	0
Ft2	La base et un angle à la base	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	1 (propriété des angles égaux du triangle isocèle)
Ft3	La base et un angle à la base	Constructeur d'angles + report de longueurs	Mots « triangle isocèle »	1 (propriété des angles égaux du triangle isocèle)
Ft4	Un côté qui n'est pas une base et un angle à la base	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d'un triangle)
Ft5	Un côté qui n'est pas une base et l'angle au sommet	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d'un triangle)

Ft6	La base et l’angle au sommet	Constructeur d’angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d’un triangle)
Ft7	La base et l’angle au sommet	Constructeur d’angles + report de longueurs	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d’un triangle)
Ft8	La base, l’angle au sommet et un angle à la base tels que l’inégalité triangulaire n’est pas respectée	Constructeur d’angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d’un triangle)

Ft1 : les tâches ne demandent la mobilisation d’aucune propriété (dans le cadre de ce générateur, le fait d’interpréter le codage n’est pas considéré comme la mobilisation d’une propriété, même si c’est une convocation d’un type de tâches de l’OML « représenter »). En particulier, l’élève peut ignorer la définition et les propriétés associées au terme *triangle isocèle*. Les énoncés des tâches de la famille de tâches Ft1 sont donnés à partir d’un schéma codant les angles égaux du triangle, la construction est alors immédiate.

Ft2 : l’énoncé est discursif, la construction n’est plus immédiate puisqu’il faut mobiliser la propriété caractéristique du triangle isocèle concernant l’égalité des mesures des angles à la base pour réaliser la construction.

Ft3 : la seule différence avec Ft2 est la mise à disposition d’un outil supplémentaire, même s’il n’est pas utile. Notre motivation est ici de limiter la mise en place d’un effet de contrat du type « si un outil est disponible, c’est qu’il est utile ».

Ft4 : c’est une famille de rupture avec les précédentes. Les seules données de l’énoncé combinées aux instruments à disposition ne suffisent plus pour construire le triangle demandé. Il est à la charge de l’élève d’élaborer une heuristique pour déterminer un programme de construction en mobilisant des propriétés. Cela va l’amener à mobiliser la propriété de la somme des mesures des angles dans un triangle pour calculer une ou des données manquantes. Les familles de tâches Ft5 et

Ft6 imposent le même type de raisonnement avec des données différentes. Pour Ft7, on ajoute un outil à disposition pour la même raison qu'indiqué dans Ft3.

Ft8 : on introduit ici une nouvelle rupture avec une construction demandée qui n'est pas possible. La justification de cette impossibilité passe par un raisonnement déductif mobilisant les propriétés du triangle isocèle et de la somme des mesures des angles dans un triangle.

Une fois ces familles de tâches définies, dans le cadre d'un parcours d'apprentissage en classe de 5e, nous choisissons de présenter les tâches mises en jeu en augmentant le nombre minimum de propriétés à mobiliser. Nous nous appuyons sur des aspects du MPR relevés dans la partie 4.1, qui doivent amener les élèves à développer des praxéologies attendues au cycle 4 quant à la construction de triangles. L'évolution des familles de tâches est illustrée pour le début du parcours dans la Figure 6. D'une manière générale, l'augmentation du nombre de propriétés à mobiliser est liée aux outils à disposition, aux données de l'énoncé et au registre de représentation en entrée.

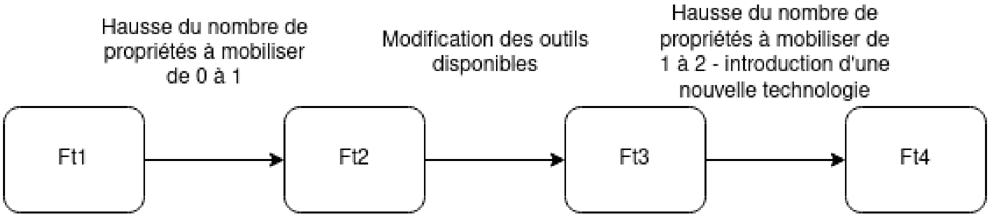

Figure 6. Premières étapes d'un parcours du générateur « construire un triangle à partir des angles et des côtés »

Comme nous l'avons précisé, ce parcours est défini *a priori*. Selon les besoins de l'élève (actualisés par les algorithmes régissant les parcours sur la plateforme), l'ordre des exercices peut varier, des exercices peuvent s'ajouter ou être supprimés. Par exemple, pour un élève de cycle 4 qui continue de s'appuyer sur la perception pour construire, l'adaptation du parcours prescrit à son activité effective se matérialise par la proposition d'un travail sur la définition et les propriétés caractéristiques que l'on peut utiliser directement pour construire (comme la famille de tâches Ft2 dans l'exemple donné, mais aussi d'autres familles de tâches d'autres parcours). Par la suite, la plateforme l'amènera vers d'autres tâches qu'il devra résoudre en développant un raisonnement plus complexe. L'objectif étant de l'accompagner dans la prise de conscience de l'insuffisance d'une démarche perceptive et de la nécessité de mobiliser des propriétés géométriques au cours d'un raisonnement préalable à la construction.

5. Conclusion et perspectives

Ladage (2021) propose d'exploiter la TAD comme cadre d'analyse d'environnements numériques d'apprentissage. Pour notre part, nous avons proposé des fondements didactiques pour la conception d'un EIAH d'entraînement aux mathématiques, prenant en compte les besoins d'apprentissage des élèves qui sont actualisés au cours du travail. Pour concevoir un tel EIAH, il est nécessaire de prendre en compte la ou les institutions d'usage, les savoirs en jeu et l'apprenant en tant que sujet cognitif et institutionnel. Afin de considérer ces différents points de vue, nous avons montré la nécessité et l'intérêt de croiser trois approches théoriques en didactique. Nous décrivons le savoir en jeu par le moyen d'un MPR, qui est structuré à partir d'une évolution des générateurs de types de tâches définis dans T4TEL à l'aide des variables de tâches, et nous a amenés à définir la notion de *famille de tâches*. Nous prenons aussi en compte, *via* des études préalables : du côté de l'institution, des variations potentielles entre les praxéologies à enseigner et celles enseignées, et le MPR retenu ; du côté de l'apprenant, les modes technologico-théoriques et les catégories d'erreurs associées. Nous avons alors défini des parcours d'apprentissage. Pour cela, d'une part nous avons exploité la structuration du savoir précédemment évoquée et, d'autre part, pour prendre en compte l'apprenant, nous avons explicité la notion de *besoins d'apprentissage* d'un apprenant en exploitant et en précisant de nouveau de nombreux travaux antérieurs, et nous avons intégré les *modes technologico-théoriques*.

Ce cadre de conception didactique d'un EIAH nous permet dans un premier temps de générer des tâches, structurées en familles de tâches, pour produire de manière effective des exercices dans l'EIAH. Dans un deuxième temps, nous construisons des parcours qui prennent en compte le savoir, les enjeux épistémologiques liés à l'activité mathématique visée (rupture d'ordre épistémologique ou construction de nouveaux éléments du bloc technologico-théorique) dans une institution donnée et le rapport au savoir de l'apprenant, construit antérieurement. C'est donc la prise en compte des modèles du savoir et de l'apprenant, au regard d'une institution donnée, définis à partir du croisement entre des approches épistémologique, institutionnelle et cognitive et la possibilité de les représenter informatiquement, qui permet d'assurer la construction d'un EIAH fondé didactiquement. Dans le cadre du projet MindMath nous avons mis en œuvre ces fondements dans le domaine de l'algèbre et dans celui de la géométrie.

Ces différents construits vont maintenant être mis à l'épreuve lors des phases deux et trois du projet, pour valider les hypothèses voire les faire évoluer ou les enrichir dans le cadre d'un processus itératif appuyé sur des expérimentations *in situ* et leur analyse. En effet, un des enjeux de la recherche à venir concerne l'étude de l'évolution de l'activité mathématique de l'élève dans un domaine donné, avec des enseignants intégrant MindMath dans leur enseignement. Au-delà des phénomènes de genèses instrumentales (Rabardel, 1995) liés aux usages d'un environnement numérique qui devront être étudiés, nous devrons aussi prendre en compte des effets liés aux praxéologies didactiques développées puis mises en œuvre par l'enseignant en intégrant la plateforme Mindmath, à partir de praxéologies enseignées spécifiées *a priori* pour un domaine mathématique. La troisième phase du projet d'analyse des usages de la plateforme et de l'évolution de l'activité des élèves devra intégrer ces effets potentiels dans le cadre de l'analyse de données recueillies.

Nous faisons l'hypothèse que les différents apports de cet article peuvent être réutilisés comme cadre de conception d'autres EIAH afin d'assurer la prise en compte de fondements didactiques lors du processus.

Ce projet permet aussi divers apports spécifiques au champ de la didactique. Ainsi, dans le cadre de sa thèse, Lesnes-Cuisiniez (2021) a poursuivi le travail théorique afin de construire un modèle praxéologique de référence relatif à la géométrie plane pour aborder une problématique concernant la définition de conditions didactiques pour amener les élèves à entrer dans, et construire, le raisonnement déductif en géométrie, enjeu central pour négocier le passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique dans la transition entre cycle 3 et cycle 4.

Plusieurs aspects du projet MindMath n'ont pas été abordés dans cet article, mais nous en évoquons deux pour conclure, car ils ouvrent des perspectives intéressantes concernant des défis majeurs pour la communauté didactique et pour celle des EIAH.

Ainsi, l'ontologie produite pour réifier les modèles didactiques du savoir, de l'apprenant, des familles de tâches et des parcours devient un objet frontière entre la didactique et l'informatique en EIAH. L'ontologie est par exemple exploitée pour produire des rétroactions épistémiques qui sont proposées à l'apprenant lors de la résolution des exercices. Leur modélisation, leur production et leur choix dans une situation donnée exploitent les fondements didactiques présentés dans cette contribution. Cette dimension du projet est présentée dans (Jolivet et al., 2021).

D'autre part, pour la décision des rétroactions à proposer à l'apprenant, et pour la définition dynamique des parcours (*adaptive learning*), des algorithmes d'intelligence artificielle sont définis en prenant en compte, d'une part des méthodes spécifiques (algorithme de renforcement, méthodes statistiques type Item Response Theory) en lien avec l'ontologie réifiant les modèles didactiques, puis mis en œuvre. Un défi à relever, de manière collaborative, par les communautés didactiques et celles de l'intelligence artificielle (IA), est d'analyser, réinterroger et exploiter les résultats des expérimentations mettant en œuvre des algorithmes d'IA, pour améliorer les algorithmes utilisés et faire évoluer les modèles didactiques.

Bibliographie

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, **18**, 147-176. Springer.

BALACHEFF, N. (1994). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, et N. Balacheff (Dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 364-370). La Pensée sauvage. https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190646/document

BERTHELOT, R. et SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/document

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en didactique des mathématiques*, **19(1)**, 77-124.

BOSCH, M. et GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (Dir.). *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 107-122). La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. [Conférence]. Attribution du titre de Docteur Honoris Causa, Université de Montréal. http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, **28(2)**, 135-182.

CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. Dans J. Pilet et C. Vendeira (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 8-25). IREM de Paris - Université Paris Diderot. hal-02421410. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document

CHAACHOUA, H., BESSOT, A., ROMO, A. et CASTELA, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F. Javier Garcia et J. Monaghan (Dir.), *Working with the anthropological theory of the didactic : A comprehensive casebook* (p. 41-60). Routledge.

CHAACHOUA, H., NICAUD, J.-F. et BITTAR, M. (2005). Détermination automatique des théorèmes-en-actes des élèves en algèbre. Le cas des équations et inéquations de degré 1. Dans P. Tchounikine, M. Joab, et L. Trouche (Dir.), *Actes de la conférence EIAH 2005* (p. 33-45). Institut National de Recherche Pédagogique - Université Montpellier II.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)**, 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury et M. Caillot (Dir.), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Editions Fabert.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. 1.Structures et Fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, et R. Floris (Dir.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). La Pensée Sauvage.

CROSET, M.-C., & CHAACHOUA, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **36(2)**, 161-194.

DREYFUS, T., HERSHKOWITZ, R. et SCHWARZ, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. Dans M. Van den Heuvel-Panhuizen (Dir.), *Proceedings of te 25th Annual Conference for the PME CONFERENCE* (Vol. 2, p. 377-384). ERIC.

DUBINSKY, E., ET MCDONALD, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. Dans D. Holton (Dir.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (p. 275-282). Springer, Dordrecht.

DUVAL, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et sciences cognitives*, **1**, 57-74.

DUVAL, R. (1992). Argumenter, démonter, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, **31**, 37-61.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, **17**, 121-138.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, **10**, 5-53.

FONT, L., RICHARD, P. R. et GAGNON, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the Generation of Proofs. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, **267**, 38-58. https://doi.org/10.4204/EPTCS.267.3

GODINO, J. D., BATANERO, C. et FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, **39(1-2)**, 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GRUBER, T. (2009). Ontology. Dans L. Liu et M. T. Özsu (Dir.), *Encyclopedia of database systems*. Springer. http://tomgruber.org/writing/ontology-definition-2007.htm

GRUGEON, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des Mathématiques*, **17(2)**, 167-209.

GRUGEON-ALLYS, B. (2010). Evolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice. Dans R. Goigoux, L. Ria, et M.-C. Toczek-Capelle (Dir.), *Les parcours de formation des enseignants débutants* (p. 205-223). Presses Universitaires Blaise Pascal.

GRUGEON-ALLYS, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : Une approche didactique multidimensionnelle. *e-JIREF*, **2(2)**, 63-88.

GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F. et PILET, J. (2021). Using didactic models to design adaptive pathways to meet students' learning needs in an on-line learning environment. Dans *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence—How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning?* (p. 157-188). Springer.

GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., PILET, J. et PREVIT, D. (2018). Online automated assessment and student learning : The PEPITE project in elementary algebra. Dans L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Éds.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (p. 245-266). Springer.

GRUGEON-ALLYS, B., PILET, J., CHENEVOTOT-QUENTIN, F. et DELOZANNE, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives*, 137-162.

HOUDEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175-193. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00858709/document

JOLIVET, S. (2018). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02079412/document

JOLIVET, S., CHAACHOUA, H. et DESMOULINS, C. (2022). Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **42(1)**.

JOLIVET, S., YESSAD, A., MURATET, M., LUENGO, V., REITER, B., GRUGEON-ALLYS, B. et LESNES-CUISINIEZ, E. (2021). Feedbacks épistémiques dans une plateforme d'entrainement aux mathématiques : Modèle et décision, apports croisés de l'informatique et de la didactique. Dans M. Lefevre, C. Michel, T. Geoffre, M. Rodi, L. Alvarez, et A. Karoui (Dir.), *Actes de la 10e Conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain* (p. 82-93).

KASPARY, D., CHAACHOUA, H. et BESSOT, A. (2020). Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique ? *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, **25**, 243-269.

LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **14(1.2)**, 165-210.

LADAGE, C. (2021). La TAD et la recherche sur les environnements numériques pour l'apprentissage des mathématiques. *Caminhos da educação matemática em revista (online)/IFS*, **11(1)**, 313-351.

LESNES-CUISINIEZ, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [Thèse de doctorat, Université de Paris].

LESNES-CUISINIEZ, E. et GRUGEON-ALLYS, B. (2019). Modèle d'Exercices et Parcours d'Apprentissage Prenant en Compte le Raisonnement de l'Élève en Mathématiques au Collège. Dans J. Broisin, É. Sanchez, A. Yessad et F. Chenevotot (Dir.), *Actes de la 9e Conférence sur les Environnements Informatiques pour les Apprentissages Humains*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02863439

MANDIN, S. et GUIN, N. (2014). Basing Learner Modelling on an Ontology of Knowledge and Skills. Dans Institute of Electrical and Electronics Engineers (Ed.), *2014 IEEE 14th International Conference on Advanced Learning Technologies* (p. 321-323). CPS.

MATHE, A.-C., BARRIER, T. et PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités.* Academia - L'Harmattan.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS (MENJS) (2020). *Programmes d'enseignement – Cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycle des approfondissements (cycle 4)*. Arrêté du 17-7-2020 (B.O. du 28-7-2020).

NICAUD, J.-F., CHAACHOUA, H., & BITTAR, M. (2006). Automatic calculation of students' conceptions in elementary algebra from Aplusix log files. Dans M. Ikeda, K. D. Ashley, & T.-W. Chan (Éds.), 8th International Conference on Intelligent Tutoring Systems (p. 433-442). Springer.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. et GODIN, M. (2018). [Pré-publication] Géométrie plane : Pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837v2/

PILET, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : Modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7)]. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039

PILET, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **35(3)**, 271-312.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

RICHARD, P. R., FORTUNY, J. M., GAGNON, M., LEDUC, N., PUERTAS, E. et TESSIER-BAILLARGEON, M. (2011). Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry. *ZDM*, **43(3)**, 425-439.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner. *Recherches en didactique des mathématiques,* **18(2)**, 139-190.

ROBERT, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Dir.), *La classe de mathématiques : Activité des élèves et pratiques des enseignants* (p. 45-52). Octares.

ROBERT, A. (2010). Formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré. *Repères-IREM*, **80**, 87-103.

ROBERT, A. et ROGALSKI, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational studies in mathematics*, **59(1-3)**, 269-298.

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model : The case of school algebra. Dans B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Éds.), Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (p. 2870-2879). http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Bosch.pdf

TANGUAY, D. (2002). Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **2(3)**, 371-396.

TCHOUNIKINE, P. et TRICOT, A. (2011). Environnements informatiques et apprentissages humains. Dans C. Garbay et D. Kayser (Dir.), *Informatique et sciences cognitives : Influences ou confluence ?* (p. 167-200). OPHRYS / MSH. http://andre.tricot.pagesperso-orange.fr/TchounikineTricot_Chap2010.pdf

TESSIER-BAILLARGEON, M., LEDUC, N., RICHARD, P. R. et GAGNON, M. (2017). Etude comparative de systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **22**, 91-117.

TESSIER-BAILLARGEON, M., RICHARD, P. R., LEDUC, N., & GAGNON, M. (2014). Conception et analyse de geogebraTUTOR, un système tutoriel intelligent : Genèse d'un espace de travail géométrique idoine. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(4), 303-326.

VANDEBROUCK, F. (2013). *Mathematics classrooms : Students' activities and Teachers' practices*. Springer.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, **10(23)**, 133-170.

VERGNAUD, G., CORTES, A., & FAVRE-ARTIGUE, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In G. Brousseau, M. Hulin, & G. Vergnaud (Éds.), Actes du colloque de Sèvres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques (p. 259-279). La Pensée Sauvage, Grenoble.

VITRAC, B. (1990). Euclide d'Alexandrie, les Éléments. Presses Universitaires de France.

VU, T. M. H. et TCHOUNIKINE, P. (2020). Supporting teacher scripting with an ontological model of task-technique content knowledge. *Computers et Education*, **163**, article 104098.

WOZNIAK, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : Une question d'équipement praxéologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **32(1)**, 7-55.

SEBASTIEN JOLIVET

Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

Sebastien.jolivet@unige.ch

ELANN LESNES-CUISINIEZ

Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

Elann.lesnes@gmail.com

BRIGITTE GRUGEON-ALLYS

Université Paris Est Créteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010 Créteil, France

Brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr