CELINE CONSTANTIN

LA SUBSTITUTION, POINTS DE VUE ECOLOGIQUE ET SEMIOLINGUISTIQUE

Abstract. Substitution, ecological and semiolinguistic points of view. The work presented here focuses on the semiolinguistic dimension of elementary algebra knowledge and on a particular object of knowledge: substitution. Analyses of textbooks and teaching practices have led us to postulate that this knowledge is part of what Margolinas and Laparra call transparent knowledge for the teacher. From an ecological questioning, we seek to determine the conditions, constraints, but also the potentialities to consider such an object of knowledge for the teaching of elementary algebra. To do this, we rely on a double epistemological and didactic analysis before addressing the results of an experiment conducted in a middle school class.

Keywords. Substitution, ecology, elementary algebra, teaching, semilinguistic dimension.

Résumé. Le travail présenté ici s'intéresse à la dimension sémiolinguistique des savoirs de l'algèbre élémentaire et à un objet de savoir particulier : la substitution. Des analyses de manuels et de pratiques enseignantes nous ont amenée à postuler que ce savoir faisait partie de ce que Margolinas et Laparra nomment des savoirs transparents pour le professeur. A partir d'un questionnement écologique, nous cherchons à déterminer des conditions, des contraintes, mais aussi des potentialités à envisager un tel objet de savoir pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Nous nous appuyons pour cela sur une double analyse épistémologique et didactique avant d'aborder les résultats d'une expérimentation conduite dans une classe de collège.

Mots-clés. Substitution, écologie, algèbre élémentaire, enseignement, dimension sémiolinguistique.

Notre recherche s'inscrit dans une problématique plus large s'intéressant aux difficultés d'élèves liées aux apprentissages sémiolinguistiques (Drouhard, 1992 ; Drouhard & Panizza, 2012) dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Elle s'appuie sur l'étude de la construction et de l'évolution des usages de la propriété de distributivité tout au long de la scolarité obligatoire (Constantin, 2018). Par exemple, dans l'écriture usuelle associée à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition « $k(a + b) = ka + kb$ », k, a, et b peuvent être remplacés par différents types de nombres au fur et à mesure des

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 26, p. 157 - 194.

niveaux de classe, mais aussi par des expressions qui ne sont pas réduites à une lettre ou à un nombre lorsqu'il s'agit de développer « $4x(x + 5)$ ». Or, de telles substitutions peuvent émerger de manière implicite très précocement dans l'enseignement (Constantin, 2014) tout en reposant sur des savoirs de nature sémiolinguistique (Drouhard, 2012) peu identifiés. Ces savoirs sont relatifs aux représentations sémiotiques, à la syntaxe et la grammaire des expressions, à leurs modes de production et à leur manipulation. Ils ne sont pas indépendants des savoirs dans ce que Drouhard nomme la dimension notionnelle, c'est-à-dire des savoirs strictement mathématiques au sens où le sont les propriétés de corps commutatif ordonné de l'ensemble des nombres réels par exemple. Cependant ils ne s'y réduisent pas, comme nous le verrons dans la première partie de ce texte. Nous faisons l'hypothèse qu'il existe des savoirs de nature sémiolinguistique transparents pour les professeurs (au sens de Margolinas et Laparra, 2011) à même de provoquer des phénomènes didactiques liés à la nature demeurant implicite des connaissances à l'œuvre pour les élèves et les enseignants. Par savoirs transparents, nous entendons des savoirs qui échappent pour partie à la perception didactique des professeurs : les connaissances qui pourraient être utiles ou qui sont rencontrées par les élèves en situation sont d'autant moins reconnues par les professeurs que les savoirs autour de la substitution n'ont pas d'existence institutionnelle véritable. Ceci ne signifie pas que les professeurs n'identifient pas les difficultés de leurs élèves face aux manipulations des écritures, mais, parce que les professeurs ne peuvent enseigner certains savoirs utiles dans la dimension sémiolinguistique, nous postulons que la transparence de ces savoirs contribue à ce que certains élèves se comportent comme des calculateurs aveugles (Sackur et al., 1997).

Réinterrogeant cette transparence au regard des savoirs à enseigner et enseignés, nous nous centrons dans un premier temps sur les extensions de techniques de calcul algébrique adossées à la substitution. Nous nous situons de ce point de vue dans une problématique écologique dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997, 2007) en prenant comme point de départ l'étude du mode d'existence d'un objet particulier au sein d'une institution scolaire donnée, celle du collège (élèves de 11-15 ans). Les questions qui s'y rapportent : « qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi qu'est-ce qui n'existe pas et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? » (Artaud, 1997) ont ceci de particulier qu'elles concernent un objet de savoir que nous supposons transparent, ce que nous illustrerons à partir de résultats d'analyses de manuels et de pratiques ordinaires d'enseignants (Constantin, 2014). Les phénomènes didactiques observés relèvent d'évitements de certaines tâches ou de choix non questionnés qui pèsent sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Dès lors, la question qui nous occupe est celle des conditions sous lesquelles la substitution pourrait vivre véritablement dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Dans quelle mesure pourrait-elle enrichir les savoirs à enseigner et enseignés ? Une autre particularité tient à la nature sémiolinguistique des savoirs liés à la substitution, ce qui nécessite une double analyse épistémologique et épistémographique (Drouhard, 2012) afin de caractériser un certain nombre d'éléments liés à des savoirs de référence. Ceci nous permet d'identifier différents lieux où la substitution peut vivre, et un certain nombre d'objets avec lesquelles elle interagit du point de vue des savoirs de référence, ce qui correspond à son habitat. Nous complétons cette étude par les résultats d'une expérimentation locale dans une classe de 4^{e} ordinaire en France (élèves de 13-14 ans) destinée à aborder la question des conditions didactiques sous lesquelles la substitution pourrait exister explicitement.

1. La substitution : un objet de savoir transparent

Dans cette partie, nous modélisons l'activité mathématique dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique par le quadruplet formant une praxéologie. Celui-ci se compose tout d'abord d'un certain type de tâches qui peut être accompli au moyen d'une ou de plusieurs techniques, ce qui forme les deux premières composantes de la praxéologie. Les deux derniers éléments de la praxéologie, technologie et théorie, renvoient au discours raisonné permettant à deux niveaux différents, de décrire, d'éclairer ou de justifier la ou les techniques considérées. Nous faisons l'hypothèse que les savoirs dans la dimension sémiolinguistique autour de la substitution font ainsi partie des ingrédients technologiques soutenant de nombreuses transformations d'écriture symbolique en algèbre sans pour autant faire l'objet d'un enseignement. La mise en œuvre de praxéologie se réalise par la co-activation d'objets ostensifs, c'est-à-dire qui présentent une certaine matérialité (graphique, sonore par exemple) et de non-ostensifs, soit les concepts ou idées qui ne peuvent être manipulés qu'au moyen d'ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999). Ces ostensifs ont une double valence sémiotique (parce qu'ils fonctionnent comme des signes) et instrumentale (parce qu'ils permettent que se réalise l'activité mathématique). Dans quelle mesure cette double valence peut-elle être assumée par les ostensifs liés à la substitution dans l'enseignement ?

Les analyses des praxéologies en jeu dans les manuels de collège montrent que des substitutions apparaissent très tôt dans l'enseignement du calcul algébrique (Constantin, 2018). C'est par exemple le cas lorsqu'il s'agit de développer une expression comme « $4x(x + 5)$ » en référence à l'ostensif « $k(a + b) = ka + kb$ » associé à la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Ce type d'expressions est fréquemment rencontré dès le début de l'enseignement dans l'institution collège en France. La technique présentée dans les manuels consiste à multiplier $4x$ par x puis par 5 avant d'écrire la somme des produits. Or, du point de vue de la structure de l'expression, plusieurs choix sont possibles. On peut considérer, comme le fait l'expert, qu'il s'agit là d'un produit de deux facteurs, mais on pourrait tout aussi bien identifier un produit de trois facteurs. Du point de vue des mathématiques, il n'y a pas de raison de faire un choix plutôt que l'autre. Autrement dit, du point de vue technologique, les savoirs dans la dimension notionnelle ne suffisent pas à rendre compte des raisons qui amènent à cette lecture de l'expression, tandis que dans les manuels, ils n'apparaissent pas interrogés. Plus encore, une sous-expression comme « $4x$ » est tantôt considérée comme « un tout », constituant une substituante pour k pour un tel développement, tantôt comme un produit lorsqu'il s'agit de réduire « $4x + 3x$ » par exemple. Autrement dit, la lecture de l'expression n'est pas la même selon le genre de tâches, ce qui peut rendre d'autant plus difficile l'analyse des expressions à transformer et les choix à opérer pour la mise en œuvre des techniques pour les élèves. L'existence de choix qui conditionnent les substitutions qui se réalisent implicitement n'est pas réduit à ce genre d'expressions. Lorsque l'un des facteurs d'une expression à développer est une somme de trois termes comme « $3(a - 6b + 9)$ », ou lorsqu'il s'agit de développer un produit de trois facteurs comme « $(x + 2)(3x + 2)(x + 4)$ », ou encore lorsque la formule de la double distributivité est démontrée à partir du développement de « $(a + b)(c + d)$ », de nombreuses adaptations apparaissent. Prenons le cas de l'expression « $3(a - 6b + 9)$ » issue du manuel Sesamath de 4^e^ (p. 104). Plusieurs voies sont possibles. On peut par exemple remplacer a par $a - 6b$ et b par 9, ou bien, si on associe a dans cette expression à la même lettre dans l'identité « $k\,(a + b) = ka + kb$ », b doit être remplacé par $- 6b + 9$, ce qui suppose de faire le lien entre soustraire et ajouter l'opposé, dans une nouvelle interprétation de la structure de la somme algébrique. Si l'on dispose de l'identité « $k(a - b) = ka - kb$ » correspondant à la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction, de nouveaux choix sont encore possibles. Mais l'existence de choix ou la question de ce qui peut les piloter n'est jamais abordée dans les manuels (Constantin, 2014). Lorsque des discours accompagnent le travail de la technique, une tension apparaît entre une volonté de donner une place à l'écriture des propriétés comme référence pour le calcul algébrique et les ostensifs proposés. Par exemple, pour corriger le développement de « $(2 - x)\times 3$ » dans le manuel Transmath de 4^e^ (p. 247), il est indiqué qu'« on développe à l'aide de la propriété « $k(a + b) = ka + kb$ » avec l'étape suivante : $C = 2\times 3 - x\times 3$. La distance sémiotique n'est pas négligeable. Les étapes nécessaires pour faire le lien entre cet ostensif et la technique sont nombreuses et s'appuient sur plusieurs propriétés (commutativité de la multiplication, lien entre somme et différence), ce qui confère sans doute finalement une faible valence instrumentale à l'écriture symbolique de la propriété. L'absence de questionnement technologique (Sierra et al., 2013) autour des substitutions qui se réalisent implicitement renforce sans doute aussi le caractère muet ou faible des techniques (au sens de Assude et al., 2007) observé dans d'autres recherches (Assude et al., 2012).

Plusieurs phénomènes didactiques peuvent dès lors apparaître dans les classes.

En cherchant à s'appuyer sur les écritures symboliques usuelles de la distributivité, sans disposer tout à fait de la notion de substitution, les enseignants peuvent être conduits à éviter de proposer à leurs élèves des rencontres avec des expressions trop éloignées du ou des formalismes disponibles (comme des sommes à trois termes) pour favoriser une certaine proximité ostensive, en écrivant l'identité sous l'expression à transformer par exemple (Constantin, 2014). Sans substitutions plus générales (avec des sommes comme substituantes par exemple), ce lien ne peut être fait que pour certains types d'expressions.

D'autres enseignants diversifient les écritures symboliques en proposant des identités avec des sommes de plus de deux termes comme « $k(a + b + c) = ka + kb + kc$ » ou « $A\times B + A\times C - A\times D = A\times(B + C - D)$ » pour prendre en charge les adaptations de techniques de calcul à des formes d'expressions qui évoluent. Mais le rôle technologique de ces nouvelles formes d'identités achoppe. Par exemple, dans l'une des classes observées, le discours pour factoriser une somme à la suite de l'identité précédente comportant des majuscules se centre sur la reconnaissance du facteur commun. La somme proposée par l'enseignante au tableau ne comporte que deux termes, mais le remplacement de D par zéro n'est pas évoqué, de même que les substitutions de B ou de C.

Ceci nous amène à faire l'hypothèse que la substitution est un objet de savoir transparent dans l'enseignement, c'est-à-dire que si des substitutions existent dans les faits, elles apparaissent comme allant de soi. Les savoirs qui s'y rapportent ne sont pas totalement ignorés par les manuels ou les enseignants, mais la substitution n'est pas vraiment pensée comme un objet de savoir de sorte qu'il n'est pas possible de questionner ses emplois tandis qu'ils véhiculent des extensions des usages des écritures non négligeables.

Les enseignants que nous avons interrogés (Constantin, 2014) évoquent des substitutions sans pour autant employer ce terme. Ils parlent de « transposition » ou de « mettre à une position » par exemple, ce qui n'est pas étonnant. D'une part les programmes semblent réserver l'usage du terme au remplacement d'une lettre par un nombre, sans tenir de discours spécifique sur la notion, et d'autre part, du point de vue des mathématiques constituées, la définition de la substitution comme bijection entre deux ensembles finis paraît éloignée des techniques de calcul algébrique et des discours que l'on peut envisager pour renforcer le lien entre technique et technologie dans les praxéologies afférentes. Ceci contribue sans doute à ce que les enseignants n'envisagent pas les usages des écritures symboliques à partir de substitutions.

Dès lors, la question se pose des potentialités à penser un enseignement prenant plus véritablement en compte les savoirs qui s'y rapportent. Autrement dit, dans quelle mesure la substitution pourrait-elle exister dans les praxéologies de l'algèbre élémentaire ? Les éléments que nous venons de développer amènent à penser qu'il existe une niche écologique pour la substitution, mais peut-elle permettre de compléter des organisations mathématiques (au sens de Bosch et al., 2004) ? Lesquelles, et à quelles conditions ? Quel statut peuvent prendre les savoirs afférents, voire la notion elle-même ? Un tel questionnement écologique suppose de conduire une étude à la fois épistémologique et épistémographique (Drouhard, 2012). L'analyse épistémographique permet d'envisager une typologie des savoirs autour des écritures (d'un point de vue synchronique). Le fait que des savoirs dans la dimension notionnelle ne suffisent pas à éclairer les substitutions rend nécessaire la recherche d'éléments liés à des savoirs de référence sémiolinguistiques - nous reviendrons sur ce point en conclusion. C'est une telle étude que nous présentons dans la deuxième partie de cet article en considérant les substitutions dans le modèle des écritures de l'algèbre élémentaire (Drouhard, 1992). Dans une troisième partie, nous analysons les praxéologies dans lesquelles la substitution pourrait exister, ce qui nous permet de caractériser des niches possibles. Nous complétons notre étude par une expérimentation dans une classe de collège. Celle-ci permet d'identifier un certain nombre de potentialités mais aussi de conditions et de contraintes pour penser la substitution comme objet de savoir à enseigner.

2. Fondements épistémographiques et épistémologiques

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer un certain nombre de caractéristiques des savoirs associés à la substitution dans une double perspective. Il s'agit d'une part d'appréhender leur complexité en prenant en compte la manière dont les savoirs dans la dimension sémiolinguistique s'articulent avec des savoirs dans la dimension notionnelle. Nous explorons en particulier les aspects sémantiques des expressions en jeu à l'occasion de substitutions. Il s'agit d'autre part d'identifier « ce qui pourrait exister » et à quelles conditions dans une perspective écologique. Nous prolongeons notre étude épistémographique par une étude épistémologique et didactique. Les analyses que nous menons s'appuient sur les travaux de Serfati (2005) tout en les réinterprétant dans le modèle des écritures symboliques algébriques ou ESA (Drouhard, 1992), ce qui nous permet de définir la substitution dans la perspective d'un questionnement didactique associé à la transparence de ce savoir dans l'enseignement. Dans un deuxième temps, nous cherchons à exhiber un certain nombre de praxéologies qui pourraient être complétées avec la substitution dans l'enseignement secondaire.

2.1. La substitution dans le modèle des Ecritures Symboliques de l'Algèbre élémentaire

Les travaux de Drouhard (1992) ont montré que l'ensemble des formules de l'algèbre élémentaire forme un langage noté L_{Alg}, c'est-à-dire que ces formules répondent à un certain nombre de règles d'écriture et de réécriture constituant leur grammaire. Sans entrer dans le détail de cette construction présentée dans Drouhard et Panizza (2012), nous retenons d'une part la partition des formules de L_{Alg} en expressions E_{Alg} et propositions P_{Alg} (contenant les signes « = » ou « < » etc.) et d'autre part que L_{Alg} contient l'ensemble des formules arithmétiques (associées aux chaînes de caractères formées essentiellement par les signes des opérateurs et les chiffres). Nous distinguons également nature et fonction syntaxique d'une expression dans une formule. La nature correspond aux catégories Somme ou Produit par exemple, tandis que la fonction syntaxique désigne la relation qu'entretient une sous-expression avec une expression (ou proposition), par exemple terme de la Somme. Nous abordons ainsi la substitution en discutant les aspects syntaxiques et sémantiques des écritures.

2.1.1. Substitutions, substituantes et occurrences

Dans le modèle des ESA, les substitutions peuvent être en première instance définies comme des applications d'un langage L dans L, qui à une formule (expression ou proposition) associent une formule, étant donnés un certain nombre d'opérateurs ou de sous-expressions de la formule initiale, leurs occurrences (ou i$^{\text{ème}}$ occurrence) et les opérateurs ou expressions associés, la formule image s'obtenant par des remplacements. Reprenant les termes de substituées et substituantes utilisés par Serfati (2005), nous désignons par substituantes les opérateurs ou expressions venant se substituer aux opérateurs ou sous-expressions de la formule initiale[1], qui en sont les substituées. La nécessité d'évoquer les occurrences tient à ce que le remplacement ne s'effectue pas nécessairement à

[1] Afin de simplifier le propos, nous n'abordons pas ici deux distinctions qui seraient pourtant nécessaires pour caractériser les substitutions. Serfati (2005) distingue en effet signe et lieu du signe ainsi qu'assemblage et forme, une forme désignant « tout assemblage dûment complété, c'est-à-dire complété par tous les signes possibles de délimitation, y compris les signes les plus extérieurs » (p. 93). Ceci permet de préciser que la substitution se caractérise par un lieu potentiellement occupé par un signe et non un signe en lui-même, et qu'elle s'opère sur et avec des formes pour éviter toute ambiguïté.

toutes les occurrences, ce qui permet par exemple de développer « $(a + b)(a + b)$ » en remplaçant la première sous-expression $(a + b)$ par k pour se ramener à l'identité « $k(a + b) = ka + kb$ ».

Afin de nous approcher des transformations que l'expert effectue, nous devons ajouter un certain nombre de conditions à cette première définition. Examinons le cas de l'expression « $3x + 1$ ». La susbstitution de x par $x + 1$ pourrait conduire à écrire « $3x + 1 + 1$ » en ne remplaçant que le signe, ce qui ne correspond pas aux substitutions qu'on réalise usuellement. Nous posons donc deux conditions. Tout d'abord substituées et substituantes doivent être du même type[2] : toutes deux expressions ou toutes deux symboles d'opérations (ce qui permet également que la formule image soit bien formée). Dans le cas où substituante et substituée sont des expressions, nous posons comme deuxième condition que la substitution ne peut se réaliser que si elle conserve la fonction syntaxique de la substituée. Autrement dit, si la substituée a une certaine fonction syntaxique correspondant à l'opérande d'un certain opérateur dans l'expression initiale, alors l'opérande de ce même opérateur dans l'expression image doit correspondre à la substituante. Ceci permet de caractériser un premier rôle des parenthèses dans les substitutions : elles peuvent être nécessaires autour des substituantes pour conserver la fonction syntaxique de la substituée dans l'expression initiale. Cette nécessité découle aussi des règles de priorités des opérations. Ainsi, en utilisant une flèche à la suite de Serfati, $x \curvearrowright x + 1$ dans « $3x + 1$ » donne « $3(x + 1) + 1$ ». L'expression « $x + 1$ » a la même fonction syntaxique (facteur du produit par 3) que « x » dans l'expression initiale. Une deuxième fonction des parenthèses est liée aux règles d'écriture des expressions, en particulier, il n'est pas possible de juxtaposer certains signes comme « + » et « – ». La substituante doit ainsi parfois être parenthésée pour que l'expression soit bien formée. Ces premiers éléments nous amènent à identifier un certain nombre de savoirs dans la dimension sémiolinguistique nécessaires à la substitution.

Or, les savoirs dans la dimension sémiolinguistique ne sont pas indépendants des savoirs dans la dimension notionnelle. Par exemple, si l'expression initiale avait été « $3 + x + 1$ » les parenthèses autour de la substituante auraient été inutiles par associativité de l'addition. Nous allons donc analyser les aspects sémantiques des expressions et des propositions engagées dans les substitutions. Quelles sont les altérations sémantiques provoquées par la substitution ? A quelles conditions une certaine conservation sémantique est-elle possible ? Dans quelle mesure l'appréhension de ces aspects sémantiques peut-elle être source de difficulté pour les élèves ?

---

[2] Nous excluons les cas où les lettres peuvent être substituées par des propositions.

2.1.2. Sémantique

La sémantique des ESA peut être caractérisée selon trois composantes principales : sens, dénotation et interprétation. Les notions de sens et de dénotation introduites par Frege (1892/1971) sont reprises par Drouhard (1992) et spécifiées dans le modèle des ESA. En première approche, on peut dire que la dénotation correspond à un certain objet mathématique, tandis que le sens relève de la manière dont est désigné l'objet considéré, « où est contenu le mode de donation de l'objet » (Frege, 1971, p. 103). Par exemple, les deux ESA « $(x + 5)(x - 5)$ » et « $x^2 - 25$ » ont même dénoté (une certaine fonction réelle), tandis qu'elles n'ont pas le même sens. La seconde expression met en avant la différence de deux carrés, tandis que la première montre un produit de deux termes. Lorsqu'une substitution modifie le sens d'une expression ou d'une proposition, le sens de l'image par substitution peut se déduire en partie de celui de la formule initiale. Ainsi la substitution $x \curvearrowright 2x$ dans l'une des expressions précédentes peut se traduire rhétoriquement par le remplacement du nombre de signe « x » par le double du nombre de signe « x ». Bardini (2003) montre toutefois que certains choix de substituantes peuvent altérer la complexité d'une expression ou en modifier le sens sans en changer la syntaxe. Remplacer 4 par 0 ou x dans « $(x + 4)^2$ » conduit soit à une expression plus simple, soit à une traduction référant au double de x plutôt qu'à la somme de x et de x.

Mais la différence de sens entre deux expressions ne se résume pas à une différence de structure. Les transformations susceptibles d'être opérées sur l'une ou l'autre participent du sens donné à chacune des expressions.

> Soient X et X' deux ESA ayant même dénotation. La sélection et la hiérarchisation, au sein des ensembles des transformations et procédures qui leur sont applicables, de celles qui sont intéressantes en fonction de la tâche à réaliser, fait partie de la différence de sens entre X et X'. (Drouhard, 1992, p. 279)

En particulier, la substituabilité des ESA est une source importante de sens. Quant à l'interprétation d'une ESA dans un certain cadre (au sens de Douady, 1986), Drouhard la définit comme « tout objet qui « correspond » à la dénotation de X dans ce cadre » (Drouhard, 1992, p. 280). Par exemple l'expression précédente peut être associée à une aire dans le cadre géométrique ou des grandeurs, une parabole d'équation $y = x^2 - 25$ dans le cadre graphique, ou un carré diminué de 25 dans le cadre arithmétique. Dans le cadre graphique, la substitution de $y + 25$ par y' correspond à une translation de la courbe : elle peut donc être interprétée, ce qui n'est peut-être pas toujours le cas dans tous les cadres. Les savoirs autour de la substitution peuvent donc incorporer des savoirs dans d'autres cadres, ce qui demande d'articuler les interprétations de la formule initiale et de son image par substitution. La question est d'autant plus délicate dans le cas de changement de dénotation par substitution.

Dans le modèle des écritures symboliques algébriques, la dénotation est une fonction δ, dont la définition est étendue du langage arithmétique au langage algébrique. En notant **R**' l'ensemble **R**$\cup${Non Défini}, la dénotation des expressions littérales est définie de la manière suivante.

> […] l'entier n étant fixé (n représentant le nombre de variables), la dénotation δ_n des expressions littérales est une application qui va de E_{Alg} vers l'ensemble des applications de $(\mathbf{R}')^n$ vers **R**' (par convention le nombre dénoté d'une expression sans lettres est assimilé à la fonction constante correspondante). (Drouhard & Panizza, 2012, p. 224)

Ainsi le dénoté d'une expression comme « $x + 5$ » est la fonction réelle $x \to x + 5$. Dans le cas des propositions, le dénoté prend ses valeurs dans {Vrai, Faux, Non Défini}.

> Une source importante de difficultés, d'ordre strictement linguistique, réside dans le fait que, dans l'usage le plus banal de l'algèbre (par exemple pour introduire une « règle », ou en général n'importe quelle propriété des nombres) certaines formules (par exemple « $(ab)^2 = a^2b^2$ ») servent à noter des substitutions, où aux lettres seront substituées des expressions, voire (dans le cas par exemple des combinaisons linéaires de lignes d'un système de type « L_1-$2L_2$+L_3 ») des propositions. (Drouhard et Panizza, 2012, p. 225)

Les dénotations de ces formules de substitutions sont alors littérales. Autrement dit, ce ne sont pas des fonctions numériques, mais des fonctions appelées *formulaires* (Drouhard et Panizza, 2012), c'est-à-dire des fonctions de E_{Alg} vers l'ensemble des applications de $(E_{Alg})^n$ vers $F_{Alg.}$ Les auteurs poursuivent :

> De même, la dénotation des propositions littérales à n variables est ici une application Δ_n qui va de P_{Alg} vers l'ensemble des applications de $(P_{Alg})^n$ vers {Vrai, Faux} ; leur sens s'exprimera en termes de substitutions.
>
> En toute rigueur, il faudrait *explicitement* distinguer les variables selon le *type* d'objets (fonctions numériques ou formulaires) que les propositions algébriques sont susceptibles de dénoter car, selon ce type, leur dénotation et leur sens ne sont plus les mêmes. (Drouhard & Panizza, 2012, p. 225)

Il ne s'agit donc pas seulement de savoir que les expressions ou les formules dénotent (Sackur et al., 1997) mais aussi de savoir que la dénotation dépend des objets associés aux variables. Ceci nous amène à interroger plus spécifiquement les savoirs autour des substitutions associées aux propositions. En particulier, à quelle(s) condition(s) une substitution conserve-t-elle le sens ou la dénotation d'une proposition ? Afin d'approfondir cette question, nous allons nous centrer sur les égalités, qui jouent un rôle important dans les substitutions.

2.1.3. Substitutions à dénotation invariante

Examinons le cas des propositions lorsque substituées et substituantes sont des expressions. Lorsque la substituante a même dénotation que la substituée (lorsqu'on remplace 5 par 2 + 3 par exemple ou $(x + 5)(x - 5)$ par $x^2 - 25$ dans une égalité comme « $(x + 5)(x - 5) = -9$ »), la dénotation de la proposition est inchangée. Ceci donne un autre sens à l'égalité « $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$ ». Toute égalité de P_{Alg} correspondant à des expressions de même dénotation peut ainsi être considérée comme une écriture de substitution. Sous certaines conditions sur les domaines considérés pour les variables, dès lors qu'on dispose d'une égalité, l'un quelconque de ses membres peut être substitué par l'autre dans toute autre proposition sans en modifier la dénotation.

Or, il n'est pas certain que ce changement de point de vue sur l'égalité aille de soi pour les élèves. Il est pourtant crucial, non seulement pour le calcul algébrique, mais aussi parfois pour la modélisation. Ainsi, une élève de 5^e (11-12 ans), renommée Manon, propose les écritures en figure 1 pour modéliser le programme de calcul « choisir un nombre entier, ajouter 3 puis multiplier le résultat par 2 ».

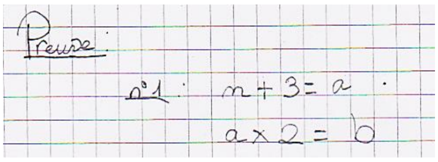

Figure 1. Multiplicité de variables et écritures symboliques associées à un programme de calcul

Considérant le processus de modélisation (Chevallard, 1989) dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous distinguons trois étapes qui le constituent. La première correspond au choix d'un certain nombre de variables pertinentes relatives à un système (intra ou extra-mathématique) au regard d'une question à l'étude. La deuxième étape, la construction du modèle, consiste à produire des relations entre ces variables. Manon réussit ces deux premières étapes. Elle doit cependant prouver que le programme de calcul ainsi modélisé est équivalent à un second programme de calcul (que nous n'examinons pas ici). Dans ce cas, son modèle ne permet pas de convoquer une technique s'appuyant sur des arguments syntaxiques (renvoyant à l'unicité de l'écriture canonique d'un polynôme par exemple) : les étapes des deux programmes de calcul décrits rhétoriquement étant différentes, elles donnent lieu à des variables en partie différentes de l'un à l'autre. La troisième étape du processus de modélisation, le travail du modèle, nécessite de produire de nouvelles égalités par substitution, mais ce n'est pas le sens premier que donne Manon aux égalités produites car les membres de droite correspondent à une codification des résultats. Le travail des écritures l'amènera d'ailleurs à écrire « $n + 3 = a \times 2 = b$ », prolongeant sans doute une interprétation de l'égalité dans le langage arithmétique comme « annonce de résultat ». Sans pouvoir leur conférer un autre sens lié aux substitutions elle ne peut conclure. Les substitutions engagent donc de nouveaux savoirs sur l'égalité.

Examinons le cas où la substitution occasionne un changement de dénoté.

2.1.4. Substitutions et changement de dénotation

Reprenons l'écriture symbolique « $k(a + b) = ka + kb$ ». Si elle généralise des égalités numériques, les variables correspondent implicitement à des nombres et la dénotation des expressions constituant les membres de l'égalité est donc *a priori* numérique. Ceci permet d'effectuer les substitutions réciproques en remplaçant les variables par des expressions de L_{Arithm}. Mais la même égalité porte une dénotation littérale à partir du moment où elle est employée pour du calcul littéral. Cette double dénotation est implicite, et la dénotation des expressions produites comme « $2(x + y)$ » est à nouveau numérique *a priori* (une fonction à deux variables). Elle pourrait être aussi littérale, si on remplace y par $x + 1$, à l'occasion de la résolution d'un système d'équations par exemple. Les changements qui s'opèrent entre sens, dénotation et interprétation des écritures peuvent être d'autant plus complexes pour les élèves que les symboles sont les mêmes ainsi que le montrent les travaux de Drouhard et Panizza (2012).

Par ailleurs, les substitutions rapportées à des opérateurs peuvent modifier le sens avec altération de dénotation ou non. Ainsi en substituant « + » par « × » dans « $k(a + b) = ka + kb$ » on obtient « $k(a \times b) = ka \times kb$ » qui correspond à la distributivité de la multiplication sur elle-même, et ne relève plus d'une identité sur **R**. Autrement dit la dénotation de la proposition a changé. En revanche remplacer + par − donne bien une identité sur le même domaine. La conservation de la dénotation dépend donc de propriétés mathématiques mais aussi de la nature des substituées, des substituantes ou de la dénotation de la formule dans laquelle elle a lieu. Effectuer une substitution dans une identité ne garantit pas l'obtention d'une égalité vraie, et les arguments permettant de trancher peuvent être variés. Ceci nous amène à supposer que les élèves puissent rencontrer des difficultés en particulier s'ils n'envisagent que des manipulations d'ostensifs indépendamment des savoirs à la fois notionnels et sémiolinguistiques qui les sous-tendent.

D'autres éléments peuvent entrer en jeu. Examinons deux exemples qui sortent quelque peu du modèle des ESA (ce qui nécessiterait une extension de la définition de la substitution donnée plus haut), mais qui sont significatifs. Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut être conduit à effectuer la substitution $n \curvearrowright n + 1$ dans une expression du type $f(n)$ correspondant à u_n. Substituée et substituante n'ont pas le même dénoté (ni le même sens), mais les ensembles images des dénotations entretiennent une relation d'inclusion, ce qui permet que l'expression obtenue par substitution soit définie. Le sens et les limites des transformations applicables peuvent également piloter les substitutions. Par exemple, lorsqu'on effectue un changement de variable pour du calcul intégral, on cherche souvent à exhiber une forme d'expression sur laquelle les manipulations sont facilitées.

De même les liens entre interprétation et substitution ne sont pas univoques. En particulier, pour réaliser une substitution dans le cas où substituantes et substituées n'ont pas la même interprétation, un contrôle sémantique est nécessaire. Par exemple, un polynôme d'endomorphismes ne s'obtient pas par substitution purement syntaxique dans l'écriture d'un polynôme : d'une part les produits (internes et externes) doivent pouvoir être définis pour que les objets soient définis, et d'autre part, la constante change de nature.

Au regard de l'étude conduite ici, il apparaît que les règles de conservation de dénotation sont d'une grande diversité, de nombreux cas sont à distinguer, ce qui rend sans doute l'examen de la « substitivité » des expressions non trivial, en particulier en cours d'apprentissage. Duval (1988) souligne le coût cognitif que peut représenter la compréhension de la substitution s'opérant entre des expressions qu'il appelle « référentiellement équivalentes », c'est-à-dire à dénotation invariante, sans être « sémantiquement congruentes » :

> Cette substitution constitue souvent, pour les individus en situation d'apprentissage ou même de recherche, un saut, entre deux réseaux sémantiques, tels qu'ils n'y pensent pas d'eux-mêmes, et que, si on la leur indique, elle leur paraît arbitraire. […] Un des obstacles rencontrés par beaucoup d'élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l'équivalence référentielle l'emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement spontané de la pensée suit, en priorité, la congruence sémantique. (Duval, 1988, p. 8-9)

Sans avoir épuisé l'ensemble des cas possibles, il apparaît que la substitution est un objet de savoir bien plus complexe qu'il n'y paraît sans doute de prime abord. La complexité tient fondamentalement à l'existence de savoirs se situant à la fois dans les dimensions sémiolinguistique et notionnelle qui, tout en étant fortement imbriqués, interagissent selon une multitude de règles. Les substitutions entretiennent des relations très diverses avec les objets égalité et expressions. Les besoins trophiques identifiés liés à la reconnaissance de structure d'une expression ou à l'usage des parenthèses qui constituent autant de conditions d'existence de la substitution paraissent peu élevés. Toutefois, les justifications des techniques permettant d'obtenir des égalités par substitution s'avèrent particulièrement délicates comme nous l'avons vu. Afin d'examiner plus avant les conditions d'existence de la substitution, nous allons compléter ces éléments par la recherche d'autres objets avec lesquels elle interagit ce qui conduit à explorer son habitat.

2.2. Différents types de substitutions et dialectique instantiation-extension

Du point de vue des savoirs savants, la substitution a changé d'habitat du XVII^e siècle jusqu'à la fin du XIX^e siècle en France. Essentiellement outil pour la résolution d'équations chez Leibniz, l'évolution du rôle et de la place de l'algèbre dans le paysage théorique des mathématiques a conduit à deux phénomènes. D'une part, la substitution a pris la place d'objet dans une théorie qui s'est autonomisée à partir des travaux de Galois et de Cauchy notamment (Ehrhardt, 2010), par rapport à la théorie des équations dans laquelle elle est née. D'autre part, avec l'émergence de l'analyse comme théorie, son statut d'outil algébrique se distancie de l'objet institué dans cette théorie renvoyant les substitutions à des méthodes calculatoires pour lesquelles les discours peuvent être très réduits pour l'expert, puisque relatifs à des pratiques élémentaires du calcul algébrique. Situant notre recherche dans la perspective d'une transposition dans l'enseignement secondaire, nous avons donc fait le choix de poursuivre l'étude écologique engagée en nous intéressant à l'émergence historique des substitutions. Nous allons donc appuyer notre propos sur une lecture des travaux de Serfati (2005) orientée par la recherche de praxéologies dans lesquelles la substitution pourrait occuper une place tout en envisageant des types de tâches qui ne se limitent pas au domaine des équations.

2.2.1. Dialectique instantiation-extension

Les travaux de Serfati (2005) montrent comment les substitutions ont été motrices d'inventions au cours du XVII^e siècle en particulier à partir des œuvres de Descartes, Leibniz et Newton. Reprenons très succinctement l'exemple de l'équation de degré deux « $4\times(x + 1)^3 - 4x^3 - 1 = 0$ » repris par Bardini (2003) à partir de Serfati (2005). Une première question que l'on peut se poser à propos de cette équation est celle de ses racines : elle possède une racine double, $-1/2$. En effectuant la substitution $3 \curvearrowright n$, on obtient un nouvel objet : une équation indéterminée. Le questionnement peut dès lors évoluer vers une problématique existentielle. L'équation précédente devient une équation possédant une racine double parmi tout un ensemble d'équations. On peut alors chercher s'il existe d'autres valeurs de n pour lesquelles l'équation « $4\times(x + 1)^n - 4x^n - 1 = 0$ » admet une racine multiple. En opérant une nouvelle substitution, on peut obtenir encore un nouvel objet : une équation paramétrée « $4\times(x + 1)^n - 4x^n - a = 0$ » dont ont peut chercher toutes les valeurs possibles de a, n étant donné, pour que l'équation admette une racine multiple. Au fur et à mesure de l'évolution des procédés de substitution décrits, de nouveaux objets mathématiques sont créés, de nouveaux problèmes peuvent être posés, voire résolus, tandis que d'anciennes solutions sont ré-examinées en en montrant une certaine généralité.

Différents types de substitutions ont émergé historiquement en fonction des substituées, tout d'abord « lettre » ou « chiffre » puis plus généralement « forme » ou « lieu » d'un assembleur. Partant de ces catégories, Serfati met à jour le rôle fondamental de la substitution dans la constitution de l'écriture symbolique tout en identifiant une dialectique entre extension et instantiation au coeur de la fonction heuristique des substitutions. Nous structurons notre étude selon les types de substitutions identifiés par Serfati (2005) en nous centrant sur celles qui engagent « lettre », « chiffre » et « forme »[3].

2.2.2. Substitutions « lettre – chiffre »

Un premier type de susbtitutions à la « lettre » qui apparaît dans les travaux de Leibniz correspond au remplacement par un nombre à toutes les occurrences, ce que Serfati nomme « chiffrage ». Elles permettent de déterminer la valeur d'une expression par exemple, ce qui correspond à une instantiation numérique. Les substitutions inverses, les substitutions « au chiffre », réalisent inversement des extensions. Elles relèvent de deux catégories que Serfati (2005) nomme les littéralisations et les canonisations. Les premières apparaissent chez Descartes qui substitue des « chiffres » par des « lettres » dans la formule de Cardan pour les équations du 3e degré. Dans le cas de propositions, les littéralisations peuvent conduire à des canonisations comme « $a^2a^3 = a^{2+3}$ » chez Descartes ou « $a^n a^p = a^{n+p}$ » chez Leibniz. L'égalité précédente est alors une instantiation de cette nouvelle égalité. La création de canons peut toutefois se heurter à la reconnaissance de forme, une manipulation préalable peut être nécessaire pour rendre possible l'analogie : l'extension demande « une préparation des propositionnelles » (Serfati, 2005 p. 306). La question de la manière dont on peut lier les variables potentielles des expressions se pose alors pour identifier de possibles substituées. Une fois le canon créé, de nouveaux chiffrages peuvent être envisagés, par exemple en remplaçant a, n ou p par des nombres qui ne sont plus entiers. Ces instantiations permettent alors d'interroger l'extension du domaine de validité de l'égalité.

[3] Pour des raisons de place nous laissons de côté les substitutions aux assembleurs.

2.2.3. Substitutions « lettre – lettre » ou « lettre – forme »

Lorsqu'une « lettre » est remplacée par une « lettre », la substitution peut correspondre à un autre type d'instantiation que le chiffrage : une instantiation littérale. Leibniz est ainsi l'un des premiers à désigner par paramètres les substituantes correspondant à ces littéralisations spécifiques. La substituante correspond alors à un donné fixé mais arbitraire.

Un autre type de substitutions à la « lettre » apparaît dans les travaux de Leibniz. Il s'agit de la substitution par une « forme » correspondant à un changement de variable pour la résolution des équations du troisième degré de la forme « $x^3 + px - q = 0$ ». Il ne s'agit pas pour Leibniz de déterminer des solutions dans le sens où elles sont connues, mais de proposer une technique de résolution pour retrouver des solutions déjà établies à partir de la méthode de Tartaglia-Cardan-Bombelli. Pour cela il indique qu'il pose (*ponatur*) $x = y + z$. L'équation est rendue plus complexe dans un premier temps, mais les nouvelles inconnues permettent de simplifier l'expression du membre de gauche de l'équation pour terminer la résolution. Si les substitutions au « lieu » d'une « lettre-chiffre » sont prépondérantes au cours du XVII^e^ siècle, elles s'étendent avec le temps à des substitutions à la place d'une « forme », et sont notamment utilisées pour rendre apparente la structure d'une expression solution d'une équation de manière condensée.

D'un point de vue écologique nous en déduisons que la substitution vit en étroite relation avec les objets paramètre, équation, modélisation et calcul algébrique avec les identités. La substitution occupe une niche écologique importante pour l'étude des équations. Une condition pour envisager sa transposition dans l'enseignement paraît toutefois être celle de l'existence de problématiques liées à l'existence, ou à l'identification de conditions ou de cas possibles et donc de certains types de tâches comme ceux identifiés par Bardini (2003). Par exemple, à partir d'une formule modélisant une suite de nombres figurés, on peut examiner l'existence d'une valeur de la variable pour laquelle la formule donne un nombre entier donné.

Pour des raisons de place et afin d'examiner plus avant les habitats de la substitution, nous allons nous centrer sur le domaine de l'algèbre élémentaire[4] et restreindre notre étude aux objets modélisation, calcul algébrique et identités en lien avec l'expérimentation réalisée. Nous n'aborderons donc pas les objets équations ou systèmes d'équations (nous renvoyons à Drouhard et Panizza, 2012 pour des éléments de discussion).

[4] Le domaine des suites et des fonctions serait également à considérer, ce que Bardini (2003) a entrepris.

3. Etude globale de praxéologies de l'algèbre élémentaire autour de la substitution

Dans cette partie, nous cherchons à caractériser des praxéologies qui pourraient s'organiser autour de la substitution comme élément technologique, et en particulier à faire des hypothèses quant aux conditions sous lesquelles elle pourrait assumer un rôle technologique. Nous illustrons notre propos à partir de tâches existantes dans les classes, mais aussi de tâches qui pourraient être nouvelles. Sans entrer dans le détail de l'étude réalisée, nous présentons les praxéologies en les regroupant selon les caractéristiques des substitutions auxquelles elles conduisent. Au regard de notre étude épistémologique, nous retenons les types de tâches suivants conduisant *a priori* à être accomplis au moyen de techniques reposant sur des substitutions :

T_1 : Développer une expression algébrique

T'_1 : Factoriser une expression algébrique

T_2 : Créer une identité à partir d'une égalité de L_{Arithm}

T'_2 : Créer une identité à partir d'une identité de L_{Alg}

T_3 : Evaluer une expression algébrique pour une ou des valeurs attribuées aux variables de cette expression

T_4 : Reconnaître ou rendre visible une « forme » d'expression

T_5 : Passer d'un modèle algébrique à un autre

3.1. Substitutions et créations d'identités

Accomplir T_2 au moyen d'une substitution peut nécessiter un certain nombre de sous-tâches. Considérons l'égalité « 5×(10 + 3) = 5×10 + 5×3 ». En effectuant la substitution partout dans l'écriture $5 \curvearrowright k$, $10 \curvearrowright a$ et $3 \curvearrowright b$ on obtient le canon « $k\times(a + b) = k\times a + k\times b$ ». Dans le cas d'un ensemble de propositions, un travail préalable peut être nécessaire pour une certaine uniformité : à partir de « 5×(10 + 3) = 5×10 + 5×3 » et de « 7×10 + 7×2 = 12×7 », il s'agit par exemple de substituer 10 + 2 à 12, d'échanger les membres de l'égalité (ce qui peut se faire par substitution) et les facteurs du produit (on substitue 7×12 à 12×7) dans l'écriture du membre de gauche. Dans les substitutions les « lieux » ont une importance. Il y a de plus un choix à effectuer dans les substituées : considère-t-on 10 comme substituée potentielle ou non ? Du point de vue syntaxique c'est sans importance, mais pour la création d'une identité, cela pose la question de la portée de l'extension. La quantification que l'on est amené à poser pour l'interprétation de ces nouvelles propositions, est héritée de leurs antécédents. Par exemple, pour la proposition précédente, les « lettres » pourraient être interprétées comme nombre quelconque de l'ensemble des entiers naturels. Par suite, un changement de point de vue peut être opéré sur la formule initiale qui devient une instantiation de cette nouvelle proposition. Quelles autres instantiations numériques peut-on alors réaliser ? Du point de vue syntaxique tout peut être envisagé. Mais ensuite, il s'agira d'en observer l'interprétation possible, et de prendre en compte les savoirs liés aux propriétés des nombres et des opérations conditionnant les chiffrages.

Une autre technique permettant d'accomplir T'_2 peut s'appuyer sur des substitutions dans des identités déjà constituées ainsi que nous l'avons évoqué dans la première partie de cet article. Examinons l'exemple suivant dont nous faisons l'hypothèse qu'il est implicitement utilisé dans certains manuels (Constantin, 2018) : « $k(a + b + c) = ka + kb + kc$ ». En effectuant les substitutions $b \curvearrowright (b + c)$ dans « $k(a + b) = ka + kb$ » on obtient « $k(a + (b + c)) = ka + k(b + c)$ ». En opérant uniquement par substitution, une étape intermédiaire est nécessaire pour produire l'égalité « $k(b + c) = kb + kc$ ». Elle consiste à poser toujours dans la même formule initiale $a \curvearrowright b$ et $b \curvearrowright c$. Cette égalité permet ensuite d'exécuter la substitution $(k(b + c)) \curvearrowright (kb + kc)$ dans « $k(a + (b + c)) = ka + k(b + c)$ » pour aboutir à l'identité visée. On retrouve plusieurs interprétations de l'égalité nécessaires à la mise en œuvre de cette technique : formule de substitution ou représentation d'une substitution potentielle. L'analyse des étapes nécessaires à une telle technique nous amène à conclure que la substitution n'est pas toujours économique pour les praxéologies considérées. Elle peut être selon les cas, remplacée par ce que Drouhard (1992) nomme une transformation de mouvement. Ainsi peut-on directement écrire la proposition voulue à partir de la précédente *via* $k(b + c) \xrightarrow{distributivité} kb + kc$. La différence s'exprime par le fait qu'une transformation de mouvement s'opère en articulation avec les propriétés mathématiques des opérations, alors qu'une substitution est isolée dans la dimension sémiolinguistique. Une transformation de mouvement permet de plus de produire une succession d'égalités (assurée par les propriétés des opérations), tandis que les substitutions s'exécutent dans une seule égalité transformée. D'autres étapes pourraient être envisagée en considérant comme formule initiale non pas une proposition mais une expression. À partir de « $k(a + b + c)$ » la substitution $b + c \curvearrowright d$ permet d'obtenir « $k(a + d)$ » puis de terminer à partir de l'égalité « $k(a + d) = ka + kd$ » dans laquelle on peut opérer la substitution inverse $d \curvearrowright (b + c)$.

Du point de vue technologique, la question de la conservation de la dénotation des égalités est cruciale. Or, comme nous l'avons vu plus haut, elle peut être en partie prise en charge par des propriétés de la substitution mais pas seulement : des propriétés mathématiques peuvent être nécessaires dans la dimension notionnelle.

Les substitutions paraissent toutefois pouvoir mettre en relation différentes identités, que ce soit celles qui existent usuellement dans les programmes et les manuels du secondaire en France, voire en construire de nouvelles comme le carré d'un trinôme par exemple. À partir de ces identités, on peut envisager des techniques de calcul algébrique qui s'appuient sur de nouvelles littéralisations.

3.2. Substitution, développements et factorisations

Examinons plus avant le cas des techniques de factorisation ou de développement. Considérant toujours le formalisme de la simple distributivité par exemple, $k \curvearrowright ((3 + x)(x + 1))$, $a \curvearrowright 5$ et $b \curvearrowright x$ donne « $((3 + x)(x + 1))(5 + x) = ((3 + x)(x + 1))5 + ((3 + x)(x + 1))x$ », ou encore $k \curvearrowright (4n + 3)$, $a \curvearrowright (7n)$ et $b \curvearrowright 1$ donne « $(4n + 3)((7n) + 1) = (4n + 3)(7n) + (4n + 3)1$ ». Ces exemples montrent que la substitution permet d'envisager des techniques sûres pour des expressions d'une certaine complexité ostensive avec des catégories d'une grande diversité pour les substituantes. On retrouve les composantes technologiques associées aux règles d'écriture. Examinons plus avant la question du parenthésage qui aurait été nécessaire si on avait remplacé k ou b par -5 par exemple. Peut-on lister des conditions qui permettent de décrire les parenthésages nécessaires ou utiles ? De manière à rendre les techniques sûres, on pourrait envisager de parenthéser toutes les substituantes. Mais dans ce cas, cela conduirait à parenthéser les écritures de nombres ce qui peut rendre difficile la lecture des écritures comme « $(-5)((3n) + (2)) = (-5)(3n) + (-5)(2)$ ». Une autre solution serait d'écrire tous les délimitants possibles ainsi que tous les signes de multiplication omis dans l'écriture de la formule initiale. A partir de « $k(a + b) = ka + kb$ » on obtiendrait alors « $k\times(a + b) = (k\times a) + (k\times b)$ ». Mais le choix de ne pas parenthéser les « lettres » conduit alors à parenthéser nécessairement certaines substituantes. En utilisant l'exemple précédent, on est alors conduit à écrire $k \curvearrowright (-5)$, $a \curvearrowright (3n)$ et $b \curvearrowright 2$. Ce travail repose nécessairement sur des reconnaissances de formes à partir de l'expression « $-5(3n + 2)$ ». On pourrait envisager alors que la technique consiste à compléter toute sous-expression comme « $-5((3n) + 2)$ », à partir des priorités des opérations. La reconnaissance de forme est-elle alors outillée, ou rendue plus malaisée compte tenu de l'absence de parenthèses autour de la « lettre » a dans la « forme » source que nous avons choisie ? En réalité cette forme apparaîtra nécessairement si l'on parenthèse les substituantes en opérant la substitution dans la forme choisie, ce qui laisse, selon nous la question finalement ouverte.

En amont de ce travail, la technique se compose d'une première étape qui correspond au choix d'une identité. Les identités existant dans le secondaire en France actuellement peuvent être au nombre de six (simple distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction, double distributivité et trois identités remarquables), ce qui correspond à douze expressions possibles. La mise en correspondance entre l'expression à développer ou à factoriser peut également se faire sur des sous-expressions. Le choix des substituantes nécessite d'examiner les occurrences et les sous-expressions à lier ou non. Par exemple pour développer « $(7x + 3)(7x + 5)$ » pense-t-on les deux premiers termes de chaque somme comme résultant potentiellement d'une même substitution associant une même substituée à une même substituante (substitution à toutes les occurrences), ou bien considère-t-on qu'une même substituante peut correspondre à deux substituées différentes ? En effectuant les substitutions à toutes les occurrences $7x \curvearrowright a$; $3 \curvearrowright c$ et $5 \curvearrowright d$, on obtient une expression qui n'est pas une sous-expression d'une identité connue, mais la substitution du deuxième $7x$ par b permet de se ramener à la double distributivité. Dans quelle mesure la reconnaissance d'une identité (étape préalable nécessaire à son utilisation) pourrait-elle dès lors s'appuyer sur des substitutions ? La substitution est en effet réversible (propriété très utilisée dans le cas de changement d'inconnue pour la résolution d'équations par exemple). Les choix peuvent être nombreux à envisager. Pour développer « $(6x + 2)(2x + x)$ » par exemple on peut considérer chaque occurrence de « 2 » comme issue d'une substitution potentielle, voire celle de « 6 » comme en lien avec 2. Se fonde-t-on sur les écritures des signes « + » et du produit de deux sommes par *pattern matching* ? Dans ce cas, on peut ne pas identifier une autre substitution qui serait $(2x + x) \curvearrowright 3x$. Une fois cette première étape réalisée, un travail sur les parenthèses est nécessaire comme nous l'avons vu précédemment. La description dans le détail des techniques et des choix à opérer montre à la fois combien ce travail peut être délicat mais aussi piloté par divers éléments technologiques dans lesquels la substitution peut jouer un certain rôle. La question du travail de reconnaissance se prolonge également dans les problèmes de modélisation comme nous allons le voir.

3.3. Substitution, reconnaissance de forme et modélisation

De même que pour la création d'identités, la construction d'un modèle peut s'appuyer sur une première étape dans L_{Arithm} consistant à partir de connaissances sur le système à produire des relations entre des valeurs numériques. La production de relations peut également se faire directement dans L_{Alg}, avec un plus grand nombre de variables que nécessaire, ainsi que nous l'avons observé précédemment (figure 1). Le type de tâches T_5 peut s'avérer utile. Une technique peut consister à retravailler les désignations en appui sur une certaine dialectique entre système et modèle. Si l'on dispose d'une égalité, une autre technique consiste à choisir une relation comme source, et à interpréter l'un des membres de l'égalité comme substituante, et l'autre comme substituée, ce qui peut nécessiter un travail préalable sur l'égalité produite pour exprimer une variable en fonction d'autres. Le travail du modèle étant piloté par la recherche d'expressions dépendant de mêmes variables, un changement de variable peut être utile. La justification s'appuie sur des propriétés liées à l'égalité : à toute égalité on peut associer deux substitutions, et le dénoté d'une proposition est conservé par substitution issue d'une égalité (sous réserve que les expressions restent définies, avec des conditions sur les domaines sur lesquels les relations sont observées).

Ces substitutions peuvent également être utiles lorsque le travail du modèle a pour enjeu de produire une certaine forme, par exemple « $3n$ », qui est une forme d'un multiple de 3. Par exemple lorsqu'on veut montrer que la somme de trois nombres entiers naturels consécutifs est un multiple de 3, si on désigne par a, b et c les entiers en question, l'expression « $a + b + c$ » ne permet guère de conclure. De même que précédemment, des essais numériques peuvent permettre de conjecturer que la somme est égale à $3b$. Avec ou sans cette conjecture, il est souvent utile de lier les variables et d'en réduire le nombre dans l'expression sur laquelle on travaille.

Ces substitutions peuvent aussi participer à l'identification d'une expression comme objet à part entière, par exemple en effectuant $n + 1 \curvearrowright N$, pour reconnaître le carré d'un nombre dans $(n + 1)^2$, et pas seulement un nombre auquel on ajoute 1 avant de calculer son carré. Plus généralement la reconnaissance de la catégorie d'une expression peut s'appuyer sur des éléments technologiques comme : si on peut par substitutions dans une expression obtenir $A \times B$ alors c'est un Produit.

Examinons plus avant le type de tâches T_4.

Deux types de tâches sont à considérer : reconnaître une forme d'expression et reconnaître une structure. Pour reconnaître la structure principale, une technique peut consister à identifier la dernière opération à effectuer en cas d'exécution du calcul en simulant T_3 ou en passant à une formulation rhétorique par étapes. Les priorités opératoires et le rôle des parenthèses constituent les ingrédients technologiques essentiels. Bardini (2003) montre néanmoins que la mise en oeuvre de cette technique demande un travail d'analyse et de synthèse non trivial. En position de lecteur, il s'agit de commencer à interpréter des opérateurs de plus bas niveau, contrairement à ce que l'on fait en position d'auteur de l'expression. Dans ce cas en effet, la structure principale guide le travail tout en considérant les autres opérateurs. Ainsi que le note Bardini à la suite de Serfati, les techniques de lecture s'appuient sur un mélange d'analyse et de synthèse permettant d'effectuer des contrôles au fur et à mesure du travail. D'autres moyens de reconnaissance peuvent également entrer en jeu. Du point de vue syntaxique la hiérarchie des opérations correspond à des caractéristiques visuelles des expressions que Kirshner a identifiées (Kirshner, 1989) : aux opérateurs de niveau 1 (addition et soustraction), correspond l'espacement horizontal large, la juxtaposition horizontale ou verticale étant associée aux opérateurs de niveau 2 (multiplication ou division) et la juxtaposition en diagonale aux opérateurs de niveau 3 (racines ou puissances).

> With operation level defined in these visual terms the character of the hierarchy of operations rule is altered: the propositional construct that exponentiation has precedence over multiplication which has precedence over addition becomes the implicit knowledge that diagonal juxtaposition 'ties tighter than' horizontal juxtaposition which 'ties tighter than' wide spacing. (Kirshner, 1993, p. 12)

Les travaux de Kirshner (1989) tendent à montrer que les élèves s'appuient de manière prégnante sur les spécificités visuelles pour les identifications de structures, les connaissances syntaxiques paraissant s'acquérir davantage dans la pratique et par l'expérience des formes, bien qu'il ne soit pas certain que le travail sur les priorités opératoires ne joue pas un rôle. Or, la substitution pourrait comme nous l'avons vu précédemment jouer un rôle pour outiller ce travail. Revenons à l'exemple de l'expression $4x(x + 5)$ que nous avons examinée dans la première partie de cet article. Le fait que l'algébriste compétent identifie un produit de deux facteurs est lié à une règle syntaxique de priorité de la catégorie Pseudo-Monôme sur la catégorie Produit[5]. Ce choix s'explique aussi du point de vue du calcul, par des raisons d'économie dans le développement. L'expert peut passer d'une structure à l'autre selon les besoins du travail qu'il a à accomplir mais ce n'est sans doute pas toujours le cas pour les élèves.

Ces analyses montrent comment les praxéologies envisagées peuvent se nourrir les unes des autres à partir de techniques fondées sur la substitution. La substitution pourrait donc être un objet relié à bien d'autres objets. Du point de vue technologique, les besoins identifiés relèvent essentiellement des règles syntaxiques liées aux signes et aux parenthèses, de reconnaissances de sous-expressions dans une formule, de la réversibilité de la substitution, ou des règles liant égalité, substitution et conservation de la dénotation, ce qui renvoie à des savoirs à la fois dans la dimension sémiolinguistique et notionnelle. Nous retenons deux nouvelles propriétés de la substitution. Pour toute substitution s de L_{Alg}, en notant s' la substitution s'obtenant en échangeant substituées et substituantes, on a

---

[5] Du point de vue de la structure linguistique, deux opérations multiplicatives peuvent être distinguées : la première, interne, correspond à la catégorie Produit (comme pour $4 \times x$), la seconde, externe, correspond à la catégorie Pseudo-monôme, comme pour $4x$. Cette distinction permet de rendre compte de propriétés permettant l'identification de la structure telle que l'expert la considère usuellement. L'agrégation par juxtaposition joue de ce point de vue un rôle particulier : la sous-structure dont dérive « $4x$ » se trouve ainsi en position de facteur dans la structure globale, ou autrement dit en position « prioritaire ».

$s' \circ s = Id_L$. De plus, en notant deux expressions algébriques e_1 et e_2, si $e_1 = e_2$, alors $e_1 \curvearrowright e_2$ et $e_2 \curvearrowright e_1$ conservent la dénotation d'une proposition (sous réserve, pour la très grande majorité des cas, que les expressions soient bien définies sur les domaines considérés pour les propositions). Néanmoins, pour un certain nombre de règles, les généralisations paraissent peu envisageables. Par ailleurs, des techniques concurrentes peuvent exister qui ne mobilisent pas la substitution (passer d'une expression algébrique à une expression rhétorique pour T_4 ou les transformations de mouvement pour T_1). Ceci contribue sans doute à ce que la substitution n'existe pas vraiment dans l'enseignement. D'autres besoins trophiques émergent dans nos analyses à partir des travaux de Serfati (2005) et Bardini (2003), c'est-à-dire des besoins répondant à l'articulation des praxéologies envisagées avec d'autres praxéologies en amont et en aval constituant des chaînes alimentaires (Chevallard, 2007). De ce point de vue, les types de tâches liés à des problématiques d'existence en lien avec la modélisation ou au passage d'une expression rhétorique à une expression algébrique et inversement explorés par Bardini (2003) amènent à penser que les praxéologies que nous avons envisagées pourraient s'insérer dans l'institution collège.

Ceci questionne les conditions didactiques sous lesquelles les organisations de savoir envisagées peuvent exister dans cette institution. Afin d'explorer quelque peu ces conditions, nous avons conçu et expérimenté dans une classe de 4e ordinaire deux exercices autour de la substitution. Cette expérimentation a un caractère très local et n'est pas adossée à la conception d'une ingénierie didactique qui aurait pour objectif de prendre en charge les praxéologies telles que nous les avons ébauchées. Il s'agit d'éclairer notre étude écologique d'un autre point de vue en nous centrant sur ce que l'on nomme le moment technologico-théorique (Chevallard, 2007) en théorie anthropologique du didactique. Ce moment didactique a pour fonction l'élaboration d'éléments permettant de décrire, d'éclairer ou de justifier la technique de substitution pour la praxéologie associée à T_1. Précisons que le terme de moment ne désigne pas un moment dans le temps et qu'il peut se réaliser en plusieurs épisodes.

4. Résultats d'une expérimentation dans une classe de 4e

4.1. Eléments méthodologiques

L'expérimentation s'est déroulée dans une classe de 4e (élèves de 13-14 ans) de 27 élèves en 2016 dans laquelle l'enseignante est la chercheure. Deux séances ont été consacrées à un travail autour de la substitution. Notons que les élèves ont travaillé les règles de priorité des opérations et la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition a été enseignée sous sa forme simple dans la classe précédente. Les règles d'écriture et de ré-écriture d'expressions algébriques (juxtaposition de signes qui nécessitent le parenthésage pour les nombres négatifs, ou effacement du signe de la multiplication dans certains cas) ont également été travaillées. La substitution a été introduite à partir de questions soulevées par un problème consistant à prouver que la somme des six premiers termes d'une suite de Fibonnacci est égale au produit du cinquième terme par 4. Certains élèves justifient à partir de sommes réorganisées et de produits vus comme additions itérées. D'autres ont utilisé la propriété de distributivité sur l'expression « $4\times(2a + 3b)$ », a et b désignant les deux premiers nombres de la suite. La question de savoir si cette transformation est légitime a ensuite été posée, et la substitution a été introduite comme permettant de décrire une manipulation fondée par l'écriture « $k\times(a + b) = k\times a + k\times b$ ».

Deux exercices ont ensuite été proposés aux élèves. Le premier consiste à travailler la technique, un ensemble de substituantes étant données, il s'agit d'effectuer les substitutions. Le second exercice consiste à développer un certain nombre d'expressions à partir de la praxéologie associée à T_4. Pour cela, la technique est imposée par l'énoncé qui est le suivant : « Proposer des substitutions possibles pour utiliser la distributivité pour développer les expressions suivantes puis effectuer le développement ». La propriété de distributivité est donnée sous la forme « $k\times(a + b) = k\times a + k\times b$ ». Les signes des multiplications sont écrits de manière à centrer le travail des élèves sur les choix des substituantes et le parenthésage, en limitant les difficultés de reconnaissance de structures pour l'identité. Cinq expressions sont proposées : « $-5(3n + 2)$ » ; « $2n(n + 3)$ » ; « $(4n + 3)(7n + 1)$ » ; « $(3n - 2)(4n + 5)$ » et « $4(3a + 2b + 1)$ ».

Nous faisons l'hypothèse que la substituabilité des expressions dépend pour les élèves des catégories des substituantes. Nous avons donc choisi des expressions pour lesquelles les substituantes pour k sont successivement un nombre négatif, un monôme, une somme et une différence. Nous cherchons à déterminer si les élèves convoquent des arguments liés aux fonctions syntaxiques ou à la nature des sous-expressions pour justifier leurs techniques et en particulier leurs choix ou la possibilité ou non d'effectuer des substitutions. Nous faisons en effet l'hypothèse que certains élèves peuvent ne pas envisager de substitutions possibles autres que pour des nombres ou des monômes, mais que la production d'une égalité par substitution pourrait être juste et servir de levier pour réinterroger la nature des substituantes possibles.

Nous cherchons également à déterminer dans quelle mesure les choix d'ostensifs envisagés peuvent outiller l'activité mathématique : au niveau symbolique et discursif. Nous avons ainsi choisi de ne pas distinguer substitution, substituées et substituantes en parlant de substitution afin d'éviter d'introduire trop d'ostensifs nouveaux. Nous avons également choisi un ostensif orienté (une flèche) pour éviter de prendre en charge (au moins dans un premier temps) l'introduction d'un nouveau statut de l'égalité. Dans quelle mesure ces choix outillent-ils ou au contraire peuvent-ils gêner le travail mathématique ?

L'autre enjeu est de déterminer des conditions sous lesquelles il est possible d'élaborer un discours dans la classe permettant de contrôler les choix de substituantes. Nous avons prévu d'interroger les élèves pour décrire leurs techniques émergeantes de manière à mettre à jour des spécificités des expressions associées à ces choix et mettre en correspondance l'expression donnée, l'identité et les sous-expressions susceptibles d'être substituées.

Nos analyses concernent les ingrédients technologiques qui émergent dans la classe. Pour cela nous mobilisons les notions d'ostensifs et de non-ostensifs. Nous cherchons à identifier et à caractériser les discours technologiques en construction : quels sont les savoirs convoqués implicitement ou explicitement par les élèves ? Quelles difficultés les élèves peuvent-ils rencontrer à l'occasion de la mise en œuvre de substitutions ?

Les élèves ont travaillé sur le deuxième exercice en fin de deuxième séance et en début de troisième séance (avec la consigne supplémentaire de réduire les expressions développées). Nous avons relevé l'ensemble des copies entre les deux séances mais nous n'avons pu récupérer que certains cahiers d'élèves à l'issue de la deuxième séance. Certaines non-réponses ou réponses incomplètes peuvent donc s'expliquer par le manque de temps imparti au moment où nous avons collecté les écrits. Huit élèves n'ont pas abordé cet exercice à l'issue de la deuxième séance. Nous allons donc nous centrer sur l'analyse des choix et les productions d'écritures associées aux substitutions des 19 autres élèves et sur les éléments technologiques émergeants au moment de la correction en classe lors de la troisième séance. Nous nous appuyons pour cela sur les retranscriptions des enregistrements audio des deux séances.

4.2. Des difficultés dans les choix de substituantes

Un premier résultat qui émerge des analyses des écrits des élèves est d'une part que les choix pour les substituantes sont réussis pour les deux premières expressions (19/19 et 18/19), tandis que des erreurs apparaissent pour les catégories Somme ou Différence (6 erreurs parmi les 18 réponses pour « $(4n + 3)(7n + 1)$ » et 3 erreurs parmi les 14 réponses pour « $(3n - 2)(4n + 5))$ », ce qui correspond aux analyses *a priori*. Nous ne considérons pas le taux de non-réponses comme significatif au regard de la collecte partielle de données. Un autre résultat est celui de la réussite de la très grande majorité des substitutions. Lorsque les élèves commettent des erreurs, elles sont systématiquement liées au parenthésage absent. Par exemple pour « $-5(3n + 2)$ » les élèves qui donnent des réponses incorrectes écrivent « $-5\times3n + -5\times2$ ».

Toutefois, les élèves peuvent ne pas parenthéser tout en pensant les écritures comme telles ainsi que le montre la production suivante (figure 2).

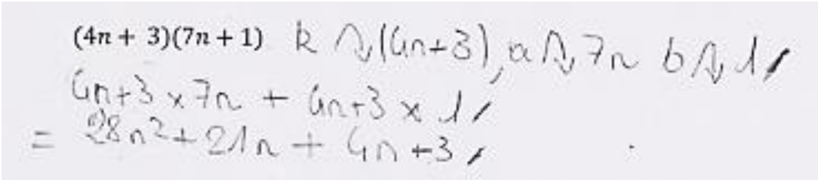

Figure 2. Ecritures non parenthésées et développement juste

Nos observations rejoignent celles de Bardini (2003) dans le cadre des fonctions en 2nde qui interprète de telles erreurs à l'occasion de substitutions comme une absence de distinction entre des écritures comportant ou non des parenthèses.

Pour les copies dont nous disposons, les élèves qui ne choisissent pas les bonnes substituantes réussissent néanmoins la substitution lorsqu'ils l'exécutent (figure 3).

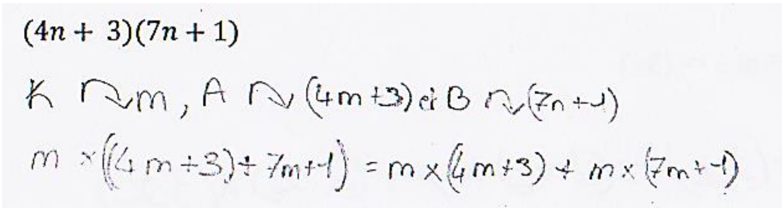

Figure 3. Une erreur dans le choix des substituantes

La substitution pouvant s'opérer de manière « aveugle », l'égalité obtenue dans cette copie (figure 3) est juste même si elle ne correspond pas à un développement de l'expression donnée. Certains élèves n'envisagent que des substituantes Constante ou Pseudo-monôme, sans aboutir. Un élève choisit des substituantes dans l'ordre de l'écriture avec $k \curvearrowright 4n$, $a \curvearrowright 3$ et $b \curvearrowright 7n + 1$ sans tenir compte des fonctions syntaxiques des sous-expressions. D'autres estiment qu'il n'y a pas de k et qu'il est impossible de mettre en œuvre la technique. Bien que partielles, les données tendent à confirmer l'hypothèse que les adaptations de techniques dans le cas d'altération de catégories peuvent ne pas être évidentes pour les élèves. L'identification de facteurs ou de sous-expressions comme substituantes possibles se révèle être une difficulté non négligeable ainsi que nous le supposions en première partie de ce texte.

Ceci nous amène à examiner plus avant les composantes technologiques associées qui émergent dans la classe à l'occasion des corrections : sur quels éléments les élèves fondent-ils leurs identifications et leurs choix dans la description et la justification des techniques ? Quels sont les moyens de contrôle des écritures qu'ils mobilisent ?

4.3. Décrire une substitution et justifier les choix de substituantes

Nous allons nous intéresser à trois extraits afin de comparer des composantes technologiques en construction autour de la description et de la justification des choix des substituantes.

La première description apparaît à l'occasion de la correction du développement de « $-5(3n + 2)$ ». Les élèves ont été renommés.

> P : Comment vous faites pour trouver les substituantes comme ça ? Heu Lou ?
> Lou : Beh on regarde par rapport au calcul qui est donné parce que *k* c'est le premier on prend le premier nombre *a* c'est le deuxième beh on prend le deuxième nombre et *b* on prend le troisième nombre

L'identification des positions suffit dans ce cas à condition de pouvoir identifier Constante et Monôme comme substituantes possibles ce qui ne paraît pas poser de problème. On peut s'interroger toutefois sur les choix des ostensifs pour désigner les expressions et sous-expressions. Lou parle de calcul pour désigner l'expression donnée, mais surtout de nombre indifféremment pour une Constante ou un Monôme. En parlant de nombre, Lou s'appuie-t-elle sur l'idée que des écritures symboliques comme « $3n$ » peuvent désigner des nombres ou bien parle-t-elle seulement des écritures des sous-expressions pour lesquelles elle ne disposerait pas d'autres mots pour les désigner ? Cet ostensif ne risque-t-il pas de conforter l'idée pour certains élèves que les seules substituantes possibles sont des nombres ? Examinons de ce point de vue le choix de Youna pour développer « $(4n + 3)(7n + 1)$ ». Plusieurs élèves ont choisi de substituer *k* par *n*, ce qui émerge au moment de la correction :

> Youna : Non c'est *k n* vu que c'est le facteur commun *n* / on voit que *n* il est dans chaque // il est dans / avec chaque nombre donc *k* c'est / *n* c'est le facteur commun donc on remplace par *k*

En justifiant son choix, Youna étend le discours usuel dans les classes de reconnaissance de *k* dans le cas des factorisations, ce qui est inopérant pour le développement. Le fait que *n* soit bien un facteur commun de sous-expressions rend sans doute d'autant plus difficile d'invalider ce choix au regard de la structure. Elle a ensuite choisi $a \curvearrowright 4 + 3$ et $b \curvearrowright 7 + 1$, sans doute en étendant une suppression de l'écriture du facteur commun, même si elle n'explicite pas davantage. L'épisode se poursuit en mobilisant la substitution comme moyen de vérification.

P : 7 plus 1 / beh il faut vérifier alors on y va / avec cette substitution on écrit l'égalité ici / ça fait ? Ava ?
Ava : Heu *n* fois 4 plus 3 plus 7 plus 1
P : Ah oui tu as raison
Ava : Est égal à *n* fois 4 plus 3 plus *n* fois 7 plus 1
P : Qu'est-ce que vous pensez de la substitution proposée par Ava ?
Maël : Ah ben elle est pas bonne
P : Pourquoi ? pourquoi effectivement ben elle heu ben elle correspond pas / c'est la substitution proposée par Youna désolée / pourquoi ça / ça marche pas / à quoi vous reconnaissez que ça marche pas cette substitution ?
Madison : C'est plus long que
P : Y'a pas que le fait que ce soit plus long / Ava ?
Ava : [inaudible] Dans la feuille
P : Ben on retrouve pas l'expression donnée dans la feuille non

Cet épisode montre que la substitution joue un rôle important pour invalider le choix de Youna pour développer. On observe par ailleurs des comparaisons qui s'appuient sur des éléments de surface des expressions, la longueur de l'écriture, ce qui suffit en réalité à conclure. Lorsque les élèves sont invités à produire un discours permettant d'identifier les substituantes, les extensions des descriptions liées à la factorisation en appui sur les occurrences sont résistantes.

P : [...] Pour cette écriture Boris était très embêté et il m'a dit mais y'a pas de / y'a pas de *k* dans cette écriture / et heu y'a pas que lui qui m'a dit ça / heu y'a Mickaela aussi qui au début me disait mais y'a pas de facteur / alors je vous pose la question comment on reconnaît le *k* / ce facteur-là comment on fait pour savoir ? Jules ?
Jul : Ben il y est plusieurs fois
Bor : […] On l'identifie beh quand il y est deux fois
P : Ah une fois qu'on a écrit l'égalité oui / mais à partir de l'écriture de la feuille c'est ça la question / dans la feuille y'avait juste écrit ça 4*n* plus 3 facteur de 7*n* plus 1 (*P écrit en même temps au tableau*) et tu m'as dit toi-même mais là on peut pas le faire / on peut pas / y'a pas de *k* // Ava ?
Ava : Beh parce que le facteur il est toujours au début
P : Heu Mikaela ?
Mik : Ben parce que y'a un fois quand même
P : Alors oui là il n'y est pas mais effectivement y'a une multiplication oui y'a un facteur ça se repère par rapport à la multiplication / Coline c'est ce que tu voulais dire ?
Col : Heu je voulais dire qu'il est aussi toujours au début

Les formulations autour de reconnaissances de structures nécessaires en amont des transformations s'avèrent d'autant plus complexes que les marqueurs des opérations n'apparaissent pas toujours dans l'écriture donnée (comme le signe de la multiplication). Notons de plus que pour les substitutions, la place (amont ou aval) des sous-expressions est importante, de sorte que les remarques d'Ava et de Coline sont aussi une condition nécessaire pour mettre en œuvre la substitution (sinon, il faut transformer l'expression en utilisant la commutativité par exemple). Le risque étant de rigidifier les techniques et de se contenter de cet indice pour identifier un facteur et reconnaître une occasion d'emploi de la propriété.

Il s'agit donc à la fois d'identifier une sous-expression associée à la fonction syntaxique de la substituée dans l'expression donnée et sa position dans l'écriture. Mais l'ensemble de l'expression est à considérer : ici il s'agit aussi d'identifier l'autre facteur comme une Somme, ce qui reste implicite dans la classe.

Notons toutefois une occasion manquée de mobiliser la réversibilité de la substitution comme moyen de contrôle des choix des substituantes. Une élève utilise en effet les substitutions inverses et retrouve l'identité à utiliser (figure 4) bien que sa production ne soit pas reprise pour la classe.

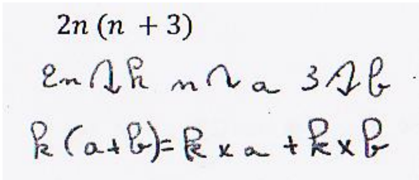

Figure 4. Réversibilité de la substitution et reconnaissance d'une identité

Ceci nous amène à conclure que la réversibilité peut effectivement exister dans les praxéologies comme nous l'avons envisagé théoriquement.

Un autre résultat concerne l'ostensif $\curvearrowright$ choisi et les ostensifs langagiers oraux associés à la substitution. Le professeur utilise « est substitué par » tandis que les élèves ne reprennent jamais cette expression, ce qui n'est pas étonnant au vu de sa complexité. Au cours de l'ensemble des séances, une seule élève interrogée parle de substitution, les autres élèves utilisent une pause ou « c'est », ou encore « égale » lorsqu'ils sont interrogés dans les moments de mise en commun. Sans que nous puissions généraliser cette observation aux usages des élèves car les élèves font souvent des réponses courtes et les deux enregistrements effectués auprès de groupes d'élèves sont inaudibles, il est à noter que les signes utilisés jusqu'alors par les élèves (« + », « − », « = »…) ne sont pas oralisés par des formes passives (si on excepte « multiplié par », très souvent remplacé par « fois »), mais en général par un seul mot. De plus l'orientation de la flèche ne correspond pas bien à l'ostensif langagier oral, ce qui peut expliquer en partie le fait que cette forme langagière ne soit pas reprise par les élèves. Bien que le phénomène réinterroge l'usage orienté du signe « = », le fait que les élèves utilisent à l'oral « égale » pour lire la flèche nous amène à penser que l'introduction de ce nouvel ostensif n'est peut-être pas utile.

4.4. Questionnement technologique et justification d'égalités

Dans la classe où a lieu l'expérimentation, un élève reprend les remarques d'Ava et de Coline quant à l'identification de k pour les contester. La question posée à la classe est alors celle de la possibilité de choisir un autre facteur. Jules propose $7n + 1$, ce qui occasionne un nouveau questionnement :

> Jul : 7*n* plus 1
> P : 7*n* plus 1 bien sûr
> Hug : Mais pourquoi on a choisi alors
> Ava : Mais ça aurait pas donné le même résultat alors

La remarque d'Ava peut être interprétée de deux manières différentes selon qu'elle réfère au sens ou à la dénotation de l'expression. Lorsqu'elle évoque un résultat, parle-t-elle de l'expression obtenue à droite de l'égalité, les développements étant différents, ou parle-t-elle du résultat du développement et de la réduction en supposant que des transformations différentes ne peuvent conduire à des expressions égales ?

Le manque de termes pour distinguer sens et dénotation, mais aussi pour identifier ce dont on parle quand on évoque l'égalité ou la mêmeté, amène dans la classe un certain nombre de confusions. Lors de la séance suivante, les élèves sont invités à comparer ce qu'on obtient avec les deux substitutions : « $(4n + 3)(7n + 1) = (4n + 3)\times 7n + (4n + 3)\times 1$ » et « $(7n + 1)(4n + 3) = (7n + 1)\times 4n + (7n + 1)\times 3$ ». Les expressions ont toutes le même dénoté, mais pas le même sens. L'enjeu consiste à identifier deux choix possibles pour effectuer le développement. Un élève remarque que « c'est l'inverse » ce qui amène l'enseignante à demander « est-ce que c'est pareil », mais cette question est ambigüe. Un autre élève évoque la substitution, ce qui amène à supposer qu'il a interprété la question au regard de la technique qui est la même, bien que les substituantes soient différentes. Une élève évoque la commutativté de la multiplication : « Parce que quand on multiplie on peut faire dans les deux sens » explique-t-elle interprétant ainsi la question au regard de l'égalité des Produits dans les membres de gauche. La transitivité de l'égalité permettrait de conclure mais elle n'est pas évoquée et les élèves ne sont pas convaincus. Un élève propose de « choisir un nombre », un autre d'aller sur tableur, et un dernier de réduire. Plusieurs échanges dans la classe montrent que les élèves ne sont pas sûrs de devoir trouver la même expression réduite à l'issue de leurs calculs, le questionnement technologique paraît donc essentiel autour de la transitivité de l'égalité ou la conservation du dénoté par substitution. Il pose cependant la question de la manière dont on pourrait distinguer sens et dénotation dans les discours.

L'étude se termine dans la classe par la réduction pour conclure à l'égalité des résultats. Toutefois, aucune propriété de la substitution n'est énoncée pour fonder des manipulations d'écritures futures. La construction de discours nouveaux pour l'enseignement pose la question de la manipulation d'ostensifs langagiers couplés à des ostensifs scripturaux qui occasionnent des tensions entre les savoirs dans la dimension notionnelle et les savoirs dans la dimension sémiolinguistique. Cette expérimentation montre néanmoins que, prenant les techniques associées à la substitution comme objet d'étude, les tâches proposées permettent de faire émerger un questionnement autour de choix ou d'identification de sous-expressions dont nous faisons l'hypothèse qu'il participe à renforcer les relations entre praxis et logos pour les élèves, le formalisme jouant alors un rôle technologique véritable au contraire de ce que l'on observe dans les manuels. Le fait que ces questionnements émergent dans la classe et que certains élèves considèrent certaines substitutions impossibles tend également à valider nos hypothèses quant aux difficultés d'élèves dans le travail de la technique.

Le questionnement technologique apparaît toutefois seulement ébauché dans la classe, dans le sens où l'analyse de l'économie, l'efficacité de la fiabilité ou du domaine d'application des techniques (Bosch et al., 2004) n'est qu'amorcé, laissant en suspens la question des aspects sémantiques. L'élucidation des savoirs de nature sémiolinguistique demande de construire des discours qui permettent de soutenir le travail qui s'accomplit en désignant les objets utiles à ce travail et les propriétés véhiculées.

Conclusion et perspectives

Les analyses de manuels et les difficultés observées en classe tendent à montrer d'une part l'existence de substitutions implicites qui véhiculent des adaptations de techniques non négligeables et peu prises en charge, et d'autre part que la transparence des savoirs qui s'y rapportent peut être une source de difficulté pour les élèves. En l'absence de la notion de substitution, les enseignants peuvent être conduits à réduire la diversité des formes d'expression pour leurs élèves afin de favoriser une proximité ostensive avec les formalismes, ou à proposer des généralisations formelles des identités qu'ils ne peuvent véritablement exploiter. Ces phénomènes nous paraissent de nature à limiter la valence instrumentale des écritures symboliques, notamment le rôle technologique des identités. Nous faisons l'hypothèse que la substitution est un savoir transparent pour les enseignants au vu des analyses d'épisodes de classe et d'entretiens, tandis que les savoirs sémiolinguistiques engagés permettant d'accompagner le travail de manipulation d'écritures reposent sur des propriétés à la fois invisibles pour les élèves et complexes à appréhender du point de vue syntaxique et sémantique.

L'expérimentation dans une classe montre que des tâches qui convoquent la substitution peuvent donner lieu à des questionnements nouveaux sur les techniques (nouveaux car ils n'apparaissent pas par exemple dans les manuels). La substitution peut également jouer un rôle technologique pour valider ou invalider des techniques de développement. De l'analyse des difficultés d'élèves à construire un discours pour décrire ce qu'ils font, émergent un certain nombre d'hypothèses pour envisager que les substitutions complètent les praxéologies envisagées. La première concerne la nécessité de mettre en mots des savoirs de nature sémiolinguistique. Or, ceux-ci ne font que peu partie des discours institués dans les mathématiques actuelles tandis que pour l'enseignement ces discours deviennent nécessaires en début d'apprentissage notamment. Il s'agit d'envisager des ostensifs permettant de désigner et manipuler les substitutions ainsi que les objets sur lesquels elles opèrent, et notamment les sous-expressions, indépendamment de leur nature ou leur fonction syntaxique. Ceci rejoint les travaux de Kirshner (1993) qui parle de Verbal Support System. Face aux aspects visuels de surface des expressions sur lesquelles s'appuient les élèves, Kirshner met en avant la nécessité pour les élèves de disposer d'un lexique spécifique (incluant par exemple « sous-expression » ou « opération dominante » ou « principales sous-expression ») afin de décrire les structures en amont du travail sur les règles de transformations. La construction de discours nouveaux pour et avec les élèves pose également la question des pratiques langagières des enseignants. L'usage de désignations comme « nombre » demande de distinguer les savoirs dans la dimension sémiolinguistique, de ceux dans la dimension notionnelle et de disposer de leviers pour faire évoluer les discours en construction. Pour que la substitution enrichisse les praxéologies de manière pérenne, il apparaît nécessaire d'institutionnaliser *a minima* un certain nombre de connaissances associées. Les analyses engagées de ce point de vue montrent combien elles peuvent être délicates, ce qui amène à envisager une étude plus approfondie de la construction et de l'évolution de discours à l'occasion de l'introduction de nouvelles notions et de nouveaux ostensifs associés (Chesnais et Constantin, 2020).

Les potentialités ouvertes par un enseignement prenant en charge certains savoirs de nature sémiolinguistique sont explorées depuis de nombreuses années dans des environnements numériques (notamment Thompson et Thompson, 1987 ; Thompson, 1989 ; Kirshner, 1989 ; Nicaud, 1989). Thompson et Thompson (1987) montrent sur un petit effectif que les élèves tendent à s'appuyer davantage sur l'identification des structures des expressions pour piloter les transformations d'expressions et les choix des propriétés utiles. Thompson (1989) décrit également comment des substitutions permettent à certains élèves de considérer des sous-expressions comme un tout, et par suite d'identifier des structures identiques pour des expressions de complexités différentes faisant le lien avec des propriétés mathématiques sous-jacentes aux manipulations des écritures. Les représentations en arbre utilisées resteraient toutefois à questionner car elles sont produites par le logiciel, de même que dans les travaux de Kirshner (1993) et Awtry (1993), ce qui confère un coût non négligeable aux techniques. Les expérimentations réalisées avec le logiciel Aplusix ont également montré des apprentissages médiés par les messages d'erreurs qui concernent notamment des appariements (Nguyen-Xuan et al., 2002), c'est-à-dire des choix de substituantes en fonction de règles qui peuvent être choisies par les élèves dans des listes, les calculs étant effectués par le logiciel. Notre expérimentation apporte une piste supplémentaire : les substitutions étant à la charge des élèves, on pourrait penser qu'elles donnent lieu à des erreurs ne permettant pas à la substitution d'assumer un rôle technologique. Dans les séances observées, et pour les expressions données, il n'en est rien. Le fait qu'elles puissent se réaliser de manière aveugle a permis d'exercer des contrôles et d'invalider des choix. Dans les pratiques humaines toutefois, ce n'est certainement pas toujours le cas. La gestion des parenthèses pour conserver les fonctions syntaxiques peut s'avérer difficile, et constitue la source majeure des erreurs commises. Le fait que le logiciel Aplusix n'ait été finalement que peu utilisé dans les classes malgré ses potentialités amène à questionner des conditions sur les pratiques enseignantes à l'occasion de l'introduction d'objets nouveaux de savoir.

Les potentialités de la substitution restent à explorer avec des tâches qui permettent aux élèves d'approfondir le questionnement technologique (au sens de Sierra et al., 2013) amorcé et au-delà comment la résolution de problèmes y compris avec des changements de cadre peut y contribuer. Par exemple, dans la séance suivant le travail sur les substitutions dans la classe observée, certains élèves identifient dans l'expression « $x^2 + 5x + 6$ » la sous-expression « $5x + 6$ » comme étant la variation d'une aire à partir de celle d'un carré de côté x. Un élève le fait spontanément en encadrant « $5x + 6$ » dans « $x^2 + 5x + 6$ », tandis que de tels encadrements n'apparaissent jamais au tableau. Nous faisons l'hypothèse que le travail effectué sur les substitutions a contribué à ce que certains puissent analyser l'expression comme une somme de l'aire du carré et d'autre chose, tandis que d'autres effectuent une soustraction pour identifier la variation. Il n'en demeure pas moins que ceci n'est pas nécessairement évident (voir Jullien, 1990) et nous conduit à supposer que des substitutions peuvent jouer un rôle dans la reconnaissance de formes y compris à l'occasion d'interprétations.

L'étude engagée ici amène plus généralement à questionner la manière dont, à partir de l'élucidation de savoirs transparents, on peut penser l'enrichissement de l'activité de l'élève au moyen de l'importation d'objets nouveaux de savoir, et plus encore, lorsque les savoirs dans les mathématiques constituées semblent trop éloignés des savoirs envisagés à enseigner : comment penser une transposition viable de ces objets, comment construire des savoirs de référence opérationnels incluant notamment des savoirs de nature sémiolinguistique ?

Ces questions rejoignent celles que posent l'identification de savoirs qui n'ont pas d'existence institutionnelle véritable ainsi que le note Chesnais (2018) à l'instar de l'énumération (Brousseau, 1984, puis Briand, 1993) pour le dénombrement à l'école, ou de la distinction entre ce que Chesnais et Munier (2016) nomment mesure empirique et mesure théorique. N'étant pas à proprement parler mathématiques, quel statut peuvent prendre de tels savoirs dans l'institution une fois ceux-ci identifiés dans la recherche en didactique ?

En particulier, instituer ces objets comme objet d'enseignement à part entière pourrait conduire à des dérives (Chesnais & Constantin, 2020) en les isolant des pratiques qu'ils éclairent ou des concepts qu'ils peuvent permettre d'enrichir. Ainsi, Chesnais (2018) observe-elle une enseignante finissant par utiliser la distinction entre les mesures empiriques et théoriques comme catégorisation sans pour autant enrichir les discours autour du concept de mesure. Dans le cas du calcul algébrique, le risque pourrait être de faire des élèves des calculateurs aveugles (Sackur et al., 1997), voire de supplanter des enjeux liés au développement d'une certaine intelligence de calcul (Artigue, 2004) ou d'autres éléments permettant de guider les transformations des expressions notamment liés à des enjeux spécifiques de la résolution d'un problème (avec des changements de cadre par exemple). Ceci nous amène à envisager la substitution plutôt comme un objet paramathématique (Chevallard, 1991) c'est-à-dire un objet que l'on peut nommer sans tout à fait le définir, pour lequel on dispose de certains éléments de savoir, mais un objet essentiellement outil de l'activité mathématique. La manière dont il peut être pris en charge dans l'enseignement reste à explorer dans les classes avec les enseignants.

Bibliographie

ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz et M.-H. Salin (Dir.), *Actes de la IXe École d'été de didactique des mathématiques* (p. 101-139). ARDM & IUFM de l'académie de Caen.

ARTIGUE, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, **54**, 23-39.

ASSUDE, T., COPPE, S. et PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (Dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (p. 35-56). La Pensée Sauvage.

ASSUDE, T., MERCIER, A. et SENSEVY, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* **27**(2), 221-252. https://revue-rdm.com/2007/l-action-didactique-du-professeur/

AWTRY, T.H. (1993). *Visual Transformations in Symbolic Elementary Algebra*. [Thèse de Doctorat, Louisiana State University].

BARDINI, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. [Thèse de Doctorat, Université Paris 7]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011697/document

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19**(1), 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

BOSCH, M., FONSECA, C. et GASCON, J. (2004). Incompletitud des las Organizaciones Matematicas locales en las instituciones escolares [Incomplétude des organisations mathématiques locales dans les institutions scolaires]. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **24**(2-3), 205-250. https://revue-rdm.com/2004/incompletitud-de-las/

BRIAND, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique.* [Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494623/file/TheseJBriand.pdf

BROUSSEAU, G. (1984). *L'enseignement de l'énumération : Etude de deux problèmes pratiques et fondamentaux dans le cadre de la théorie des situations et du contrat didactique*. [Communication orale]. Fifth International Congress on Mathematical Education. Adelaïde, Australie. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/84-6-Enum%C3%A9ration.pdf

CHESNAIS, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. [Note de synthèse, Université de Montpellier]. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02046178/document

CHESNAIS, A., & CONSTANTIN, C. (2020). Developing new discourses to deepen students' conceptual understanding in mathematics [Développer de nouveaux discours pour approfondir la compréhension conceptuelle des élèves en mathématiques]. Dans J. Ingram, K. Erath, F. Rønning, A. Schüler-Meyer et A. CHESNAIS, A. (Éds.), *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom* (p. 73-80). ERME/HAL Archive/Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology.

CHESNAIS, A., & MUNIER, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. Dans A.-C. Mathé et E. Mounier (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 212-237). IREM de Paris.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, **19**, 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné* (2ème édition). La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **17**(3), 7–16.

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. Javier García (Dir.), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (p. 705-746). Universidad de Jaén.

CONSTANTIN, C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* [Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université].

CONSTANTIN, C. (2018). Une étude des articulations entre techniques de calcul et systèmes de nombres dans les manuels de collège. *Petit x,* **107***,* 5-27.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7**(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

DROUHARD, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. [Thèse de doctorat, Université Paris 7].

DROUHARD, J.-P. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. Dans M. Abboud-Blanchard et M. Flückiger (Dir.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques - Année 2011* (p. 129-133). IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot.

DROUHARD, J.-P. et PANIZZA, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (Dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (p. 203-229). La Pensée Sauvage.

DUVAL, R. (1988). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **1**, 17-25.

EHRHARDT, C. (2010). La naissance posthume d'Évariste Galois (1811–1832). *Revue de synthèse*, **131**, 543-568. https://doi.org/10.1007/s11873-010-0135-y

FREGE, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques.* (Traduit par C. Imbert). Editions Points. (Œuvre originale publiée en 1892).

JULLIEN, M. (1990). Le calcul algébrique au collège. Etude d'un exemple. *Petit x*, **24**, 73-77.

KIRSHNER, D. (1989). The visual syntax of algebra [Syntaxe visuelle de l'algèbre]. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**(3), 274-287.

KIRSHNER, D. (1993). *The Structural Algebra Option : A Discussion Paper* [L'option de l'algèbre structurelle : un document de travail][communication orale]. Annual Meeting of the American Educational Research Association. Atlanta, GA, Etats-Unis.

MARGOLINAS, C. et LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J.-Y. Rocheix et J. Crinon (Dir.). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (p. 19-32). Presses Universitaires de Rennes.

NGUYEN-XUAN, A., NICAUD, J.-F., BASTIDE, A. et SANDER, E. (2002). Les expérimentations du projet APLUSIX. Dans J.-F. Nicaud, E. Delozanne et B. Grugeon (Dir.), *Logiciels pour l'apprentissage de l'algèbre*. *Sciences et techniques éducatives*, **9**(1-2), 63-90. https://doi.org/10.3406/stice.2002.1500

NICAUD, J.-F. (1989). APLUSIX : un système expert pédagogique et un environnement d'apprentissage dans le domaine du raisonnement algébrique. *Technique et Science Informatiques*, **8**(2), 145-155.

SACKUR, C., DROUHARD, J.-P., MAUREL, M. et PECAL, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères-IREM*, **28**, 37-68.

SERFATI, M. (2005). *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Editions PETRA.

SIERRA, T., BOSCH, M. et GASCÓN, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática : el caso del algoritmo de la multiplicación [Le questionnement technologico-théorique dans l'activité mathématique : le cas de l'algorithme de la multiplication]. *Bolema*, **27**(47), 805-828. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400006

THOMPSON, P. (1989). Artificial intelligence, advanced technology, and learning and teaching algebra [Intelligence artificielle, technologie avancée, et apprentissage et enseignement de l'algèbre]. Dans C. Kieran et S. Wagner (Dir.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (p. 135–161). Erlbaum.

THOMPSON, P. et THOMPSON, A. (1987). Computer presentations of structure in algebra [Représentations informatiques de la structure en algèbre]. Dans J. Bergeron, N. Herscovics et C. Kieran (Dir.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 248-254.

Manuels

MALAVAL, J., CARLOD, V., CHRETIEN, B., DESROUSSEAUX, P.-A., JAQUEMOUD, D., JORIOZ, A., KELLER, A., LECOLE, J.-M., MAHE, A., MAZE, M., PLANTIVEAU, A., PUIGREDO, F. et VERDIER, F. (2016). *Transmath 4^{e}*. Editions Nathan.

SESAMATH (2016). *Le manuel de cycle 4*. Editions Magnard.

CELINE CONSTANTIN

LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France

celine.constantin@umontpellier.fr