

**JOSEP MARÍA FORTUNY, TOMÁS RECIO, PHILIPPE R. RICHARD, EUGENIO
ROANES-LOZANO**

**ANÁLISIS DEL DISCURSO DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN EN
UN CONTEXTO DE INNOVACIÓN PEDAGÓGICA EN GEOMETRÍA**

Abstract. Reflective discourse analysis of pre-service teachers in a context of pedagogical innovation in geometry. The reflective narratives of three pre-service teachers are analysed from the perspective of discourse analysis and reflection on practice, applied to the acquisition of geometric competences and the role of dynamic geometry. In the context of the master's degree for future secondary school teachers in mathematics and a pedagogical innovation project, where two of the authors gave training sessions entitled 'automated visualization' and 'technological mediation', the pre-service teachers were given a questionnaire in which they were asked to return to what they had learned, questioning the contribution of their training to their future teaching practice. In the narratives collected, three degrees of reflection can be found, ranging from the naivety of certain assessments to professional initiatives and purely mathematical perspectives. The didactical and mathematical consequences of this analysis are presented and discussed, highlighting, in particular, the intrinsic difficulty of ensuring that relevant, but potentially disruptive, ideas of pedagogical innovation are conveyed to pre-service teachers against the weight of tradition and personal beliefs in mathematics teaching.

Keywords. Dynamic geometry, teacher education, reflective discourse analysis.

Résumé. Analyse du discours réfléchi des enseignants du secondaire dans leur formation initiale dans un contexte d'innovation pédagogique en géométrie. Les récits réflexifs de trois enseignants stagiaires sont analysés sous l'angle de l'analyse du discours et de la réflexion sur la pratique, appliquée à l'acquisition de compétences géométriques et au rôle de la géométrie dynamique. Dans le cadre de la maîtrise pour la formation des futurs enseignants du secondaire en mathématiques et d'un projet d'innovation pédagogique, intitulée «visualisation automatisée» et «médiation technologique», les enseignants stagiaires ont reçu un questionnaire où ils devaient revenir sur ce qu'ils ont appris, s'interrogeant sur l'apport de leur formation en vue de leur pratique pédagogique à venir. Dans les récits recueillis, on trouve trois degrés de réflexion qui vont de la naïveté de certaines appréciations aux intentions d'initiatives professionnelles, en passant par des perspectives guidées principalement par les mathématiques. Les conséquences didactiques et mathématiques de cette analyse sont présentées et discutées, soulignant notamment la difficulté intrinsèque de faire en sorte que des idées d'innovation pédagogique pertinentes, mais potentiellement perturbatrices soient dévolues aux enseignants stagiaires, face au

poids de la tradition et des croyances personnelles en matière d'enseignement des mathématiques.

Mots clés. Géométrie dynamique, formation des enseignants, analyse du discours réfléchi.

Resumen. Se analizan las narrativas reflexivas de tres profesores en formación, desde las perspectivas del análisis del discurso, aplicadas a la adquisición de las competencias geométricas y al papel de la geometría dinámica. En el contexto del máster universitario para futuros profesores de matemáticas de Secundaria y de un proyecto de innovación pedagógica, en el que dos de los autores impartieron sesiones de formación tituladas “visualización automática” y “mediación tecnológica”, se entregó a los profesores en formación un cuestionario en el que se les pedía que reflexionaran sobre lo que habían aprendido, cuestionando la contribución de su formación a su futura práctica docente. En las narrativas recogidas encontramos tres grados de reflexión que van desde la ingenuidad en ciertas apreciaciones hasta las iniciativas profesionales y las perspectivas puramente matemáticas. Se presentan y discuten las implicaciones didácticas y matemáticas de este análisis, destacando en particular la dificultad intrínseca de garantizar que las ideas relevantes, pero potencialmente perturbadoras, de la innovación pedagógica, lleguen a los profesores en formación, frente al peso de la tradición y las creencias personales en educación matemática.

Palabras clave. Geometría dinámica, formación docente, análisis del discurso reflexivo.

1. Introducción

Este estudio se enmarca y prolonga un proyecto de innovación educativa de una universidad pública española, en la cual uno de los autores es a la vez formador y investigador. De hecho, imparte en dicha universidad el módulo “Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas” del “Máster Universitario en Formación del Profesorado de Secundaria” (especialidad: “Matemáticas”) y utiliza técnicas de evaluación e investigación para encontrar mejoras en el sistema de formación. Se trata de un curso presencial de posgrado, de un año de duración, que se exige en el sistema educativo español para impartir docencia en Secundaria. Los estudiantes son futuros profesores de Secundaria, en formación inicial para la docencia, pero con títulos de grado en materias tales como ingenierías, arquitectura, física, informática y, sobre todo, matemáticas. En ese contexto, otros dos de los autores de este estudio impartieron sendas conferencias de formación en línea, de títulos respectivos:

- “Determinación simbólica de propiedades geométricas con GeoGebra”,
- “Mediación tecnológica. Ejemplos de génesis instrumental en el desarrollo de competencias geométricas”.

Estaban dirigidas al grupo de futuros profesores que cursaban dicho módulo y pudieron contar con el apoyo y los consejos del cuarto autor. Estos profesores tienen amplia experiencia en formación de futuros docentes, por lo que conocían suficientemente las características de los estudiantes a los que se dirigían, y suelen impartir cursos de posgrado en contextos similares.

La primera conferencia introdujo y desarrolló, a través de ejemplos, las características de determinados comandos de GeoGebra recientemente introducidos, que permiten al usuario deducir, comprobar o descubrir propiedades geométricas. Así, en una de las actividades mostradas a los estudiantes se imaginaba que estos tenían que comprobar algunas propiedades, como la que dice que las alturas de un triángulo son concurrentes (Fig. 1). En dicha actividad, el modo de verificación se asumía que podía ser abierto o impuesto, por ejemplo, sabiendo que puede hacerse numéricamente, utilizando el oráculo *Relación*; simbólicamente, utilizando el comando `SonPerpendiculares(h, c)`; instrumentalmente, colocando los puntos en los nodos de la cuadrícula y comparando las pendientes de las líneas h y (AC) ; o analíticamente, realizando cálculos tradicionales o utilizando el módulo de cálculo simbólico incluido en GeoGebra (Kovács et al., 2017; Kovács et al., 2018; Hohenwarter et al., 2019; Flores-Salazar et al., 2022). Finalmente se planteó el potencial papel educativo de estas herramientas, la dicotomía: como ayuda (para conjeturar y orientar al alumno) en el marco de un currículo tradicional, o como alternativa para modificar el currículo y centrarlo en la adquisición de aquellas competencias que las máquinas no pueden alcanzar.

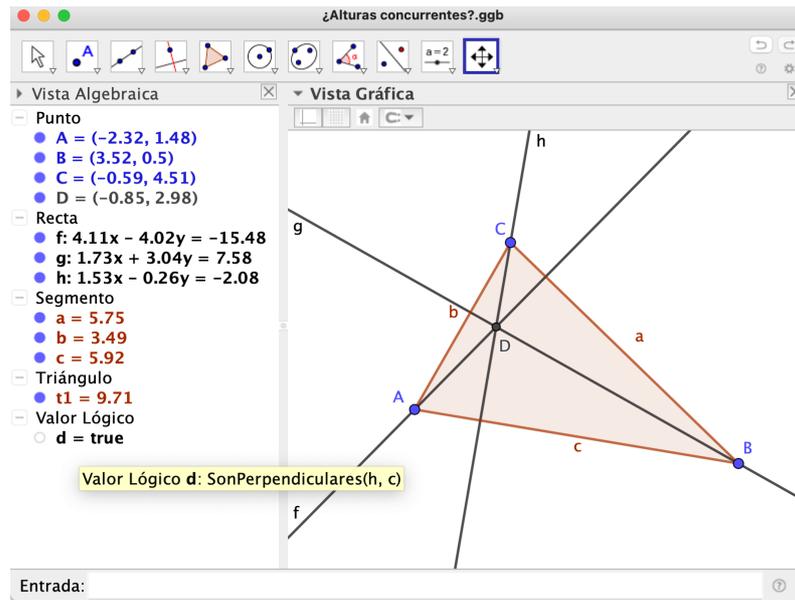


Figura 1. En la actividad denominada *¿Alturas concurrentes?*, ABC es un triángulo cualquiera, f y g son las alturas relativas a los vértices A y B que se cortan en D, y h es la recta que pasa por los puntos C y D. Cuando se tecldea `SonPerpendiculares(h, c)` en la línea de entrada, el sistema devuelve el valor lógico *true*.

En la segunda conferencia se realizó una amplia reflexión sobre el papel de la actividad matemática instrumentada y la mediación tecnológica en la enseñanza de la geometría, ejemplificando las distintas formas de interacción a través del análisis detallado de los procesos clave en la educación geométrica: visual (observar, explorar), figural (modelizar, conjeturar, definir), operacional (instrumentar, instrumentalizar) y deductivo (argumentar, demostrar). Estos ejemplos se desarrollan en diferentes situaciones escolares de Educación Primaria y Secundaria, tanto en entornos manipulativos como de simulación con un software de geometría dinámica como GeoGebra. Véase (Paneque et al., 2017). En definitiva, se focalizó la discusión en *¿cómo trabajar en clase con auténticas situaciones problemáticas, donde se puedan generar entornos de aprendizaje en que los alumnos se habitúen a experimentar y probar a partir de sus propias acciones, tanto empíricas como mentales, compartiendo su práctica y mentalización con la colaboración de sus propios compañeros y del profesorado?* Los estudiantes encontraron especialmente interesantes los problemas mostrados por el profesor que proponían optimizar el posicionamiento de una planta de pellets tratando, bien de igualar su distancia a tres ciudades (determinando con GeoGebra el circuncentro del triángulo de vértices las tres ciudades), bien minimizando la suma de distancias a esas tres ciudades (a

través de la construcción del denominado Punto de Fermat¹). El que los alumnos se sorprendan agradablemente ante la introducción de problemas de estas características ratifica, una vez más, la habitual desconexión entre los problemas propuestos en la clase de matemáticas y los problemas del mundo real, pese a que la matemática es usualmente la clave para la resolución de estos últimos (véase, por ejemplo, Roanes-Lozano y Sánchez (2017)) y siendo conocido el positivo efecto de la introducción de la tecnología en la clase de matemáticas (Martínez Zarzuelo et al., 2020). Se concluyó, en resumen, que es en el estar alerta, prestando atención al uso de diferentes medios y artefactos para mejorar las clases, donde podemos situar el papel de la tecnología en la educación geométrica.

Inspirados por el trabajo de Breen et al. (2014), en el que estos estudian – desde la perspectiva de la “Discipline of Noticing” de Mason (2002) – sus propias impresiones, como profesores universitarios, a lo largo de un curso, los autores de este artículo se plantearon la realización de una experiencia similar, aunque más modesta, con los profesores en formación del máster citado. Además, dicha experiencia se enmarcaba en otro contexto, más específico, de didáctica de la matemática, estudiando el impacto de las sesiones de formación impartidas en las creencias de los futuros profesores sobre el papel de la tecnología en la enseñanza de la geometría.

Existen trabajos de análisis de las narrativas reflexivas desde el mismo marco teórico que hemos elegido, relacionados con profesores en ejercicio, como por ejemplo el ya citado de Breen et al. (2014), sobre profesores universitarios, o (Bjuland et al., 2012), sobre un profesor de Primaria, pero no conocemos ninguno con esta misma orientación y estudiando el mismo tipo de muestra (futuros profesores de Secundaria, todavía en formación inicial).

Se diseñó para ello un experimento que comenzó con las dos sesiones de formación en línea a las que se ha hecho referencia. Tras ellas y con la finalidad de que realizaran una reflexión retrospectiva del efecto de las sesiones de formación, se remitió por correo electrónico un formulario en línea. En este formulario se les indicaba que hicieran una narración sobre dos momentos-breves-pero-vívidos de las sesiones, formularan una pregunta para ellos relativas a las sesiones, y mencionaran lo que no les había quedado claro y que creían que habían aprendido. Estas cuestiones se corresponden con estrategias de formación inicial en el marco de la pedagogía de Mason (2002) y Schön (1983). Como se ha indicado arriba, se

¹Véase, para más información sobre este Punto de Fermat, el artículo https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_de_Fermat o la descripción detallada de este punto en http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/viviani_fermat_4/actividad.html

trata en definitiva de obtener información analizando las narrativas reflexivas presentes en dichas encuestas. El análisis se centra en el interés espontáneo que pudo despertar la transmisión de ciertas novedades tecnológicas radicales, en las convicciones de los futuros profesores sobre la enseñanza de una disciplina tan tradicional como la geometría. Aunque, tal vez, su formación inicial no sea suficiente para apreciar las competencias profesionales del profesor, algo que se mencionará en las conclusiones, abogando por el desarrollo de planes que mejoren el entrenamiento de los alumnos en competencias profesionales.

Del total de profesores en formación del máster se seleccionaron tres, cuyas respuestas fueron posteriormente analizadas en detalle, como se describe en el presente trabajo. La selección se basó en la presunta heterogeneidad de los alumnos elegidos, en la diversidad de sus características formativas y personales, lo que se corroboró al explorar sus respuestas.

Tras introducir someramente, en la sección siguiente, el marco teórico del trabajo, se continuará, en la Sección 3, con la descripción detallada de la experiencia, de los datos recogidos y su análisis. El trabajo concluye con la discusión de los resultados obtenidos y las conclusiones correspondientes.

2. Marco teórico

En lo que sigue resumimos algunos antecedentes, así como el marco teórico y su uso para la interpretación de datos del discurso narrativo de profesores en formación en el contexto de esta experiencia, que se centra en el discurso reflexivo. Como información de los distintos marcos teóricos que contemplan investigaciones y experiencias similares a la nuestra, se remite al lector al reciente trabajo (Haspekian, 2020), se aborda la investigación de la práctica docente en un contexto tecnológico (TPDA = *Teacher Practice in the Digital Age*). Ese mismo contexto se recoge sintéticamente en Derouet et al. (2017), donde se hace referencia, en particular, a la capacidad de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático para coordinarse con la teoría MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) para entender mejor el conocimiento del profesor y su rol en el aula. Finalmente, un desarrollo teórico más específicamente relacionado con la aproximación ETM (Espacios de Trabajo Matemático) al uso de GeoGebra y de las herramientas de razonamiento automático ha sido desarrollado en Kovács et al. (2017) y Kovács et al. (2020), donde se pone de manifiesto el diferente enfoque e, incluso, el cambio inducido en el propio trabajo matemático del estudiante que viene determinado por usar, o no, herramientas tecnológicas para construir un ecosistema en el que desarrollar un pensamiento geométrico asistido por ordenador.

Como se ha indicado anteriormente, en este trabajo se analizan, desde el marco teórico específico del Análisis del Discurso de Sfar (2001) y la Reflexión sobre la Práctica de Mason (2002), Schön (1983) y Smith (2003), las narrativas reflexivas de tres futuros profesores de Educación Secundaria en un curso de formación profesionalizante, relacionadas con la adquisición de las competencias geométricas por el alumnado de Secundaria y con el papel de determinados avances recientes en geometría dinámica en este contexto.

Los discursos analizados manifiestan rasgos, o lo que Perrenoud (2011) llama “habitus”, de distinto nivel, calidad, estructura, función, forma y contenido profesional (relativo a la profesión docente). Los profesores en formación del máster, como participantes en las locuciones, no construyeron simplemente la representación semántica de las presentaciones verbales en su memoria episódica, sino, además, una representación (con aportaciones propias) acerca del acontecimiento de las sesiones de formación.

El estudio de las emisiones verbales como actos de habla es la tarea de la pragmática. La pragmática analiza su función o fuerza locutiva como acto de habla. Precisamente la finalidad de este estudio es evaluar el grado de dicha fuerza, estudiando el contenido de esas emisiones verbales en relación con la enseñanza de la geometría y el uso de la tecnología, así como su predisposición a una posible futura labor docente. Todo ello valorado por el nivel de profundidad y detalle que muestran los profesores en formación.

En el segundo capítulo de la parte II de libro de Mason (2002), se distinguen dos orientaciones o niveles de imparcialidad de las narrativas. Los denomina:

- “account-for”, que podríamos resumir como “explicar, interpretar”, con un contenido o descripción más personal, y
- “account-of”, que podríamos traducir como “tener en cuenta”, que describe o identifica las causas de un modo más aséptico, impersonal, independiente.

Yendo al texto original de Mason:

An account-of describes as objectively as possible by minimising emotive terms, evaluation, judgements, and explanation. (...) By contrast, an account-for introduces explanation, theorising and perhaps judgement and evaluation. (Mason, 2002, p. 40)

y también:

To account-for something is to offer interpretation, explanation, value-judgement, justification or criticism. To give an account-of is to describe or define something in terms that others who were present (or who might have been present) can recognise. (Mason, 2002, p. 41)

Por otra parte, en Cobo y Fortuny (2000) se presenta una noción de coherencia discursiva para referirse a la organización del discurso pedagógico y matemático en la clase de matemáticas, destacándose la explicitación de procesos matemáticos y conexiones entre ellos en la interacción verbal entre el profesor y los profesores en formación (Planas et al., 2016). En el actual estudio, centrado en el análisis de las narrativas reflexivas (Llinares, 2020; Mason, 2002; Smith, 2003) en el discurso matemático de profesores en formación, planteamos una noción de coherencia local que coordina dos dimensiones:

- Dimensión temática:
 - si hablan de demostración, modelización, tecnología, sentimientos, consciencia, matemáticas, el profesor, la enseñanza;
 - si se detectan iniciativas como profesor;
 - si hay intención de probar cosas.
- Dimensión interlocutiva:
 - si el discurso es imparcial (“account-of”), sólo descriptivo, anecdótico,
 - si el discurso es complejo, subjetivo (“account-for”): se fija en ideas clave, las interpreta; razonado (establece relaciones entre aspectos específicos y principios generales); crítico, efectivo (mencionando los efectos que va a tener dicha actividad en su futura práctica docente); prospectivo; si concluye lo que habría que hacer en clase.

Aunque ambas dimensiones se complementan e interaccionan, nuestra contribución se centra antes que nada en la dimensión interlocutiva. Como categorías del análisis del discurso podemos considerar: su estructura, la comprensión, la forma del discurso, los cambios en los episodios del discurso y la coherencia local. En cuanto a la estructura, entendemos que el discurso es una unidad observacional, es decir, la unidad que interpretamos al ver o escuchar una emisión.

Mientras, en lo referente a su comprensión, una de las primeras tareas de un modelo de la comprensión del discurso es organizar y reducir grandes cantidades de información muy compleja, en nuestro caso no hace falta ni reducirla ni simplificarla, puesto que ya nos centramos en la interlocución de las sesiones de formación aquí consideradas. Entendemos también el discurso como una forma de comunicación (Planas et al., 2016) en términos de las relaciones semánticas entre proposiciones individuales de la secuencia discursiva del profesor en la progresión de la enseñanza (Radford, 2013).

Sfard resalta las peculiaridades del discurso matemático:

Mathematical discourse is made special by two main factors: first, by its exceptional reliance on symbolic artifacts as its *communication-mediating* tools, and second, by the particular *meta-rules* that regulate this type of communication. (Sfard, 2001, p. 13)

Como consecuencia de esas peculiaridades del discurso matemático, en el discurso de los profesores en formación del máster se observará si se establecen transformaciones y conexiones entre representaciones (de lo expuesto en las dos sesiones de formación en línea versus lo asimilado y presentado en las narrativas) que sean coherentes con las situaciones de formación aquí consideradas. Uno de los elementos definitorios de la mejora en la observación (“notice”, representando de alguna forma una muestra de madurez o complejidad de la introspección) puede consistir en la producción de un discurso correcto y detallado, que justifique dicha notificación. El focalizarse en los detalles requiere un proceso metacognitivo de introspección, de observarse a uno mismo desde dentro. La redacción de narraciones reflexivas representa una forma constructiva de hablarnos a nosotros mismos que ayuda a desarrollar grados de conceptualización personal de la enseñanza de las matemáticas (Mason, 2002; Fernández et al., 2018).

En este estudio se identificarán tres grados de reflexión narrativa, adaptados libremente para este caso (de profesores de matemáticas en formación), a partir de las ideas de Mason (2002):

- El grado bajo, que se corresponderá con rasgos de disposición docente poco subjetiva, puramente matemática. Podemos considerarlo como una narración con un grado de reflexión bajo, en la que el profesor en formación solo describe o refiere eventos anecdóticos de las sesiones de formación y que podríamos relacionar, dado que minimiza “...emotive terms, evaluation, judgements and explanation...” (Mason, 2002, p. 40), con la dimensión “account-of”.
- El grado intermedio, en que la disposición docente es ingenua y ligeramente consciente. Así pues, consideramos en este caso que su grado de reflexión narrativa se valora en un punto medio, que podríamos identificar con una dimensión nueva, denominada “account”, entre “account-of” y “account-for”, por manifestar conatos de interpretación de ideas cruciales de las sesiones de formación.
- Finalmente, el grado alto (“account-for”), que ya indica una disposición docente reflexiva y personal, con un intento de conceptualización de las ideas clave de las sesiones y una expectativa docente para el futuro profesional.

Ya adelantamos aquí que el estudio que vamos a describir en la sección siguiente muestra cómo, en las narrativas de profesores de Educación Secundaria en formación situados en un contexto de innovación tecnológica en geometría elemental, pueden encontrarse casos de estos tres grados de reflexión. En general se reconoce ingenuidad en ciertas apreciaciones (“account”), perspectivas puramente matemáticas (“account-of”) y cierta iniciativa profesional (“account-for”). Se puede avanzar, además, que las características analizadas en los discursos de los profesores en formación muestran el escaso impacto sobre estos futuros docentes de la transmisión de las novedades tecnológicas en las sesiones de formación. Todo ello se discutirá en la sección de Conclusiones.

3. Metodología

3.1 Participantes e instrumento

En este estudio cualitativo usamos una metodología de investigación etnográfica (Eisenhart, 1988), explorando situaciones particulares de tres de los profesores en formación del máster de Enseñanza Secundaria de una universidad pública española, que se analizan en profundidad, para evidenciar y hacer emerger consideraciones teóricas sobre la coherencia del discurso.

Como se ha indicado anteriormente, se diseñó un experimento con profesores en formación, con los objetivos siguientes:

- caracterizar grados de madurez reflexiva, según Mason (2002), en las observaciones de los profesores en formación del máster, evaluando el grado de fuerza locutiva de las narraciones de los estudiantes en respuesta al cuestionario que les planteaba diversas cuestiones sobre ciertas sesiones formativas on-line que habían recibido, y
- concretar a través de este análisis de sus narraciones, las creencias y predisposición docente de estos estudiantes en un contexto tecnológico como el expuesto durante las sesiones formativas recibidas.

Como parte de la evaluación del experimento de formación, se pidió a estos profesores en formación que contestaran un cuestionario, en el que se les solicitaba que realizaran por escrito una serie de tareas centradas en el logro de cinco propósitos: realizar una retrospectiva, saber priorizar, profundizar en detalles, mostrar interés y generar pensamiento y propuestas (Tabla 1).

Las etapas de desarrollo del experimento fueron las siguientes:

- delimitación de los contenidos de las sesiones de formación en línea,
- determinación de la estructura de las citadas sesiones de formación,

- estructuración de las subsiguientes tareas a realizar por los profesores en formación (narrativas sobre varias actividades),
- realización de las sesiones de formación en línea,
- recogida y organización de las tareas realizadas por los estudiantes (Tabla 1),
- selección de los tres profesores en formación cuyas narrativas se analizarían,
- análisis de los datos recogidos hasta una semana tras las sesiones de formación.

Tabla 1. Tareas sobre narrativas reflexivas: cinco cuestiones propuestas después de las dos locuciones.

Propósitos	Tareas	Descriptorios
Retrospectiva	I. Relata dos momentos breves-pero-vívidos en la sesión.	Reflexión como toma de consciencia.
Prioridad	II. Formula una pregunta para tí, relativa a las sesiones.	Ocurrencia. Evento empírico en un contexto de formación.
Detalles	III. Responde a tu pregunta de manera específica.	Continuidad de la emisión. Coherencia semántica y pragmática
Interés	IV ¿Qué es lo que no te ha quedado claro?	Intervención de medios para solventar dificultades.
Pensamiento	V. ¿Qué crees que has aprendido?	Organiza y reduce grandes cantidades de información. Se establecen transformaciones y conexiones entre representaciones, que son coherentes con las locuciones de las dos presentaciones. Esta transformación da lugar a una nueva forma de percibir, hablar y, conceptualmente, se trata de una nueva forma de consciencia con contenido emocional de llegar a ser profesor. Es una transformación del conocimiento pedagógico u objetivación “en sí mismo”. La formación no es un estado, es un proceso personal en un momento de constitución de la consciencia.

Del total de profesores en formación del máster se seleccionaron tres, que el profesor de los mismos propuso por la diversidad de sus características personales e intelectuales, lo que se corroboró al analizar sus respuestas.

Como se verá más adelante, los discursos de los profesores en formación en respuesta a este cuestionario manifiestan rasgos de distinto nivel y calidad, estructura, función, forma y contenido profesional.

3.2 Datos y análisis

Como ya se ha mencionado, los datos de esta investigación son las respuestas de tres profesores en formación del máster (de entre los doce que respondieron al cuestionario) a las cinco tareas propuestas. Las respuestas se clasificaron de acuerdo con las dos dimensiones que propone el marco metodológico de análisis del discurso de Cobo y Fortuny (2000) (Tabla 2).

Tabla 2. Dimensiones temática e interlocutiva consideradas.

Temática	Interlocutiva
<ul style="list-style-type: none"> • hablan de demostración, • modelización, • tecnología, • sentimientos, • consciencia, • matemáticas, • el profesor, • la enseñanza, • iniciativas como profesor, intención de probar cosas. 	<ul style="list-style-type: none"> • el discurso es sencillo (“<i>account</i>”), • sólo descriptivo (“<i>account-of</i>”), • anecdótico (detalles poco relevantes) (“<i>account-of</i>”), • crucial (se fija en ideas clave, interpreta), razonado (hace relaciones entre aspectos específicos y principios generales), • crítico, • efectivo (efectos que va a tener dicha actividad en su futura práctica docente), • prospectivo (“<i>account-for</i>”), plantea acciones sobre lo que habría que hacer en clase.

Hay que tener en cuenta en las contestaciones originales el carácter y circunstancias de los alumnos del Máster en Formación de Profesorado de Secundaria: no son (todavía) profesionales de la enseñanza (aunque tratan de serlo, están en periodo de formación) y, por ejemplo, muchos de ellos están sujetos,

mientras cursan el máster, a condiciones laborales que provocan, en casi todos los casos, disponer de escaso tiempo para realizar experiencias educativas reales.

Se incluye a continuación el análisis narrativo de los discursos de los tres profesores en formación. La numeración romana utilizada se corresponde a la notación de la actividad de la Tabla 1. Los nombres de los estudiantes son ficticios.

3.2.1 Análisis narrativo de Asun

Las narrativas de Asun, que se analizarán a continuación, están incluidas de modo literal en la Tabla 3. En aras de la brevedad, no repetiremos en cada tabla los enunciados de las actividades propuestas (I-V) recogidas en la Tabla 1.

Tabla 3. Narrativas de Asun correspondientes a las tareas I, II, III, IV y V.

Tareas	Narrativas
I	<p>1. El primer presentador está diciendo que cierta figura no es un cuadrilátero mientras mueve uno de los vértices, cuando claramente sí es un cuadrilátero. Supongo que está usando la palabra cuadrilátero en lugar de cuadrado. Lo que quiere decir es que, dependiendo de cómo definas la construcción en GeoGebra, al mover el vértice, respetarás o no los ángulos. Me parece interesante.</p> <p>2. El ejercicio propuesto de dónde colocar la planta entre tres pueblos, bajo ciertas condiciones, me suscita interés.</p>
II	¿Qué es el punto de Fermat? ¿Cómo se calcula?
III	El punto de Fermat es, por definición, el que minimiza la suma de las distancias a los vértices. Se calcula como la intersección de los segmentos que unen cada vértice con el vértice más lejanos de un triángulo equilátero construido (externamente) sobre el lado opuesto.
IV	Es claro que con GeoGebra los chavales podrán aventurarse a conjeturar, corriendo el riesgo de confundir la claridad con la que “ven” un concepto con una demostración formal. Así, respondiendo a la pregunta, debo decir que no tengo del todo claro hasta dónde las herramientas de geometría dinámica son una ayuda y a partir de dónde empiezan a entorpecer el esfuerzo de visualización geométrica y de formalización que todo aprendiz de matemáticas debe hacer.

V	He aprendido muchas cosas. Para empezar qué es el punto de Fermat, quién es María Antonia Canals (y algunas ideas para mi peque de 5 años) y algunas de las posibilidades de GeoGebra (y páginas web donde averiguar más). Y para seguir, me he dado cuenta de las implicaciones casi filosóficas que para algunas personas (por ejemplo, el profesor que ha impartido la primera charla) tiene la aparición de herramientas tan potentes como GeoGebra, llegando a compararlas con el quinto postulado de Euclides y el cambio de paradigma que se genera cuando lo niegas. El tiempo dirá.
---	--

Analizando las expresiones narrativas con los indicadores discursivos de la Tabla 1, podemos afirmar que la profesora en formación Asun, en lo que concierne a la Dimensión Temática, se muestra interesada por saber cómo resolverá el estudiante la tentación de considerar como una demostración formal la mera constatación visual de una propiedad: (...) *corriendo el riesgo de confundir la claridad con la que “ven” un concepto con una demostración formal (IV).*

Si la visualización es una actividad cognitiva que permite interpretar signos matemáticos con el conocimiento que un individuo tiene, aquí se ve también un interés instrumental. Más precisamente, se nota una preocupación enfocada hacia la *instrumentación*, es decir, hacia la adaptación y asimilación del *artefacto* GeoGebra a los procesos de enseñanza tradicionales, que no se concreta luego en una clara apuesta por alguna aplicación didáctica: *El punto de Fermat es, por definición, el que minimiza la suma de las distancias a los vértices. Se calcula como la intersección de los segmentos que unen cada vértice con el vértice más lejano de un triángulo equilátero construido (externamente) sobre el lado opuesto. (III).*

Muestra sentimientos positivos: *El ejercicio propuesto de dónde colocar la planta entre tres pueblos, bajo ciertas condiciones, me suscita interés (I).* Su perspectiva es puramente matemática: *¿Qué es el punto de Fermat? ¿Cómo se calcula? (II).* Destaca un conato de conceptualización: (...) *GeoGebra, llegando a compararlas con el quinto postulado de Euclides y el cambio de paradigma que se genera cuando lo niegas. El tiempo dirá. (V).*

Manifiesta sólo una incipiente identificación de oportunidades de aprendizaje (la conjetura como primer paso hacia la demostración): *Es claro que con GeoGebra los chavales podrán aventurarse a conjeturar (IV).*

En cuanto a la Dimensión Interlocutiva, la profesora en formación Asun muestra cierta ingenuidad temporal: (...) *(y algunas ideas para mi peque de 5 años) (V).* No identifica las ideas clave puestas de manifiesto en las conclusiones de las

locuciones de los formadores en las dos sesiones, sólo describe los aspectos técnicos: (...) *cuando claramente sí es un cuadrilátero (I).*

A veces sus respuestas no recogen una reflexión personal sobre el papel de la mediación tecnológica: por ejemplo, cuando sólo menciona en el ítem I que le suscita interés el ejercicio propuesto: *El ejercicio propuesto de dónde colocar la planta entre tres pueblos, bajo ciertas condiciones, me suscita interés (I.)*

Sí interioriza el aprendizaje: *He aprendido muchas cosas. (V)* y también se aprecian rasgos de efectividad y de prospección, al referenciar en los discursos de sus respuestas el efecto de las situaciones presentadas para su futura práctica docente...*no tengo del todo claro hasta dónde las herramientas de geometría dinámica son una ayuda y a partir de dónde empiezan a entorpecer el esfuerzo de visualización geométrica y de formalización que todo aprendiz de matemáticas debe hacer. (IV).* En definitiva, como rasgos, es decir propiedades o peculiaridades distintivas e intrínsecas de la personalidad de la profesora en formación Asun, se resalta la influencia de su perspectiva puramente matemática y su menor iniciativa actual para ejercer como profesora, tanto como, al hablar de visualización y de formalización, del obstáculo que puede resaltar de la utilización de GeoGebra.

3.3.2 Análisis narrativo de Bea

Las narrativas de Bea, que se analizarán a continuación, están incluidas de modo literal en la Tabla 4.

Tabla 4. Narrativas de Bea correspondientes a las tareas I, II, III, IV y V.

Tareas	Narrativas
I	<p>Me encantó el ver cómo en obras de arte, como en la Venus de Boticelli, se encuentran numerosas construcciones matemáticas.</p> <p>Me gustó mucho también la discusión sobre el uso de regla y compás o directamente herramientas como Geogebra.</p> <p>La competencia visual en la imagen de la iglesia me gustó. Me hizo ver que hay muchas posibilidades de trabajo en cualquier imagen, y puede ser enriquecedor a los alumnos.</p> <p>También me resultó muy curioso la Y de conexión que se tuvo que diseñar y los criterios para hacerlo desde las tres capitales de Asturias.</p>
II	<p>¿Se podría implementar Geogebra para todos los niveles de ESO y Bachiller como herramienta complementaria de cálculo?</p>

III	Por supuesto, adaptando el nivel requerido, Geogebra se puede adaptar desde 1ºESO hasta 2ºBachiller suponiendo una herramienta útil para el alumnado
IV	La puesta en práctica de Geogebra con geometría esférica, pero lo buscaré ;)
V	Las posibilidades que ofrece una herramienta como Geogebra para complementar y aumentar el aprendizaje y la puesta en práctica de las matemáticas

Dimensión Temática: la profesora en formación Bea muestra interés por aspectos mas instrumentales que didácticos, en el sentido de proyectar actividades docentes precisas: *¿Se podría implementar Geogebra para todos los niveles de ESO y Bachiller como herramienta complementaria de cálculo? (II)* .

Muestra también un incipiente interés contextual: *me resultó muy curiosa la Y de conexión que se tuvo que diseñar y los criterios para hacerlo desde las tres capitales de Asturias (I)*. Expresa sus sentimientos: *Me encantó el ver cómo en obras de arte, (...) (I)*; *Me gustó mucho también la discusión (...) (I)*. Tiene un interés matemático: *La puesta en práctica de Geogebra con geometría esférica, pero lo buscaré ;) (IV)*.

Realiza una incipiente identificación de oportunidades de aprendizaje: *(...) GeoGebra para complementar y aumentar el aprendizaje y la puesta en práctica de las matemáticas (V)*.

En cuanto a la Dimensión Interlocutiva sólo describe, no entra en detalles: *suponiendo una herramienta útil para el alumnado (III)*. De la narración de la profesora en formación Bea, se desprenden, como rasgos docentes, una ligera iniciativa critica como futuro profesor: *“La competencia visual en la imagen de la iglesia me gustó. Me hizo ver que hay muchas posibilidades de trabajo en cualquier imagen, y puede ser enriquecedor a los alumnos” (I)*.

Además, intenta hacer conexiones como futuro docente: *“Geogebra se puede adaptar desde 1º ESO hasta 2º Bachiller suponiendo una herramienta útil para el alumnado” (III)*.

3.2.3 Análisis narrativo de Carlos

Las narrativas de Carlos, que se analizarán a continuación, están incluidas de modo literal en la Tabla 5. Nótese que el alumno ha contestado al ítem I de la encuesta transmitiendo dos cuestiones que se le han planteado en esos dos momentos, “breves

pero vívidos” de la sesión, a los que se refería el cuestionario. El alumno ha insistido, y consta por escrito, que esa es su respuesta al ítem I.

Tabla 5. Narrativas de Carlos correspondientes a las tareas I, II, III, IV y V.

Tareas	Narrativas
I	1- ¿Qué podemos hacer si algún alumno no es capaz de dar el paso y manejar los conceptos vistos sin la ayuda de las herramientas informáticas? 2- ¿Qué curso sería apropiado para introducir la programación? Me refiero a pequeños programas que vayan realizando los pasos que son necesarios para resolver problemas geométricos.
II	¿Crees que es necesario dar el paso y cambiar las técnicas de enseñanza para introducir por completo este tipo de herramientas informáticas?
III	1-Bajo mi punto de vista podemos trabajar en dos direcciones. Por un lado, podemos intentar utilizar herramientas más rudimentarias para mostrar el mismo concepto de forma diferente. Por otro lado, podríamos tratar de rebajar el uso de la herramienta informática en dichos casos de manera general (la seguiría usando, pero con limitaciones). 2- Creo que cuanto antes mejor. En 1º de ESO es posible introducir las nociones básicas de conceptos de triángulos (o polígonos en general) creándolas mediante rectas (perpendiculares o no), semirrectas, puntos...
IV	¿Es posible crear procesos en Geogebra que luego utilicemos como herramientas? Ejemplo: triángulo equilátero con el que juntando 6 podemos generar un hexágono regular
V	Me ha abierto la mente. Estoy acostumbrado a una enseñanza tradicional. La conferencia me ha servido para ver ejemplos de casos reales en los que introducir esta herramienta. No es difícil, solo hay que tener ganas.

Dimensión Temática: El profesor en formación Carlos intenta modelizar: *ver ejemplos de casos reales en los que introducir esta herramienta (V)*. Antes que nada, parece tener un interés instrumental al igual que Asun. De nuevo, se le ve bien preocupado por la *instrumentación*, por la adaptación y asimilación del *artefacto* GeoGebra a los procesos de enseñanza tradicionales; no se concreta luego

en una clara apuesta por una aplicación didáctica: *¿Es posible crear procesos en Geogebra que luego utilicemos como herramientas? (IV). ¿Crees que es necesario dar el paso y cambiar las técnicas de enseñanza para introducir por completo este tipo de herramientas informáticas? (II).*

Muestra un conato de conceptualización: *Por un lado, podemos intentar utilizar herramientas más rudimentarias para mostrar el mismo concepto de forma diferente (III).*

En relación con la Dimensión Interlocutiva, el profesor en formación Carlos manifiesta una iniciativa ingenua como futuro profesor: *No es difícil, solo hay que tener ganas (V)*, pero no entra en detalles: *Podríamos tratar de rebajar el uso de la herramienta informática (III).*

Como rasgos docentes de profesor en formación Carlos, destacamos que manifiesta una iniciativa ingenua como futuro profesor e intenta un cambio didáctico, pero aún no conceptual.

3.2.4 Síntesis de los análisis de los discursos de los tres profesores en formación

Sintetizamos el análisis de los discursos de estos tres profesores en formación en la Tabla 6.

Tabla 6. Síntesis del análisis de los discursos.

Profesor en formación	Rasgo docente	Grado de reflexión narrativa
Asun	Perspectiva matemática dominante, pero no exclusiva. Poca iniciativa actual de ejercer como profesor.	Grado de reflexión narrativa bajo, o “ <i>account of</i> ”. Se corresponde con rasgos de disposición docente poco reflexiva, puramente matemática, en la que el profesor en formación solo describe o refiere eventos anecdóticos de las sesiones de formación.
Bea	Ligera iniciativa crítica como futuro profesor. Intenta hacer conexiones como futuro docente.	Grado de reflexión narrativa medio o “ <i>account</i> ”. La disposición docente es ingenua y ligeramente consciente. Consideramos que su grado de reflexión narrativa es <i>medio</i> , por manifestar conatos de interpretación de ideas cruciales de las sesiones de formación.

Carlos	Iniciativa ingenua como futuro profesor. Intento de cambio didáctico, pero aún no conceptual.	Grado de reflexión narrativa alto o “ <i>account for</i> ”. Se detecta una disposición docente reflexiva, con un intento de conceptualización de las ideas clave de las sesiones y una expectativa docente para el futuro profesional.
--------	---	--

Efectivamente, tras la evaluación del grado de fuerza locutiva de sus narraciones, se puede afirmar que se dan los tres grados de madurez reflexiva en estos profesores en formación del máster (véase la tercera columna de la Tabla 6).

Por otra parte, también se hallan distintos grados de predisposición de estos estudiantes ante una posible futura labor docente (véase la segunda columna de la Tabla 6).

Es más, el análisis de estos tres discursos en las dos dimensiones, interlocutiva y temática, parece corroborar la afirmación de Mason (2002) sobre la existencia de una correlación entre la percepción de una mayor sensibilidad para los detalles y una mayor disposición para actuar con capacidad de respuesta en un contexto docente. En este caso en particular, se encuentra un incremento tanto del grado de reflexión narrativa como de la bondad de los rasgos docentes (Tabla 6) en la secuencia:

Asun → Bea → Carlos

Aunque es claramente constatable la presencia de reacciones positivas frente a las innovaciones tecnológicas en los comentarios de los tres participantes, también se observa en los tres discursos, y de manera transversal a los distintos grados de madurez reflexiva observados, una notoria incompreensión en su potencial de uso. No sabemos hasta qué punto esto es debido a las modalidades de formación, al menos parcialmente, ni si el hecho de estar «en clase» representa un obstáculo de tipo cultural o tecnológico. La relevancia de este hecho hace que nos centremos, en lo que sigue, en su análisis.

Así, Asun señala que: *Es claro que con GeoGebra los chavales (...) (corren) el riesgo de confundir la claridad con la que “ven” un concepto con una demostración formal (...) no tengo del todo claro hasta dónde las herramientas de geometría dinámica son una ayuda y a partir de dónde empiezan a entorpecer (...) (IV).*

Y Carlos plantea, como principal reacción ante las novedades, algo negativo: *¿Qué podemos hacer si algún alumno no es capaz de dar el paso y manejar los conceptos vistos sin la ayuda de las herramientas informáticas? (I) (...) podemos*

intentar utilizar herramientas más rudimentarias para mostrar el mismo concepto de forma diferente. Por otro lado, podríamos tratar de rebajar el uso de la herramienta informática en dichos casos de manera general (la seguiría usando, pero con limitaciones) (III).

Por último, Bea, tal vez transmitiendo una aproximación más optimista a las herramientas descritas, sólo hace referencia a los aspectos más tradicionales de GeoGebra como programa de Geometría Dinámica: *Me gustó mucho también la discusión sobre el uso de regla y compás o directamente herramientas como Geogebra (I)* (sin hacerse eco de las auténticas novedades transmitidas en las sesiones: demostración automática, realidad aumentada, geometría 3D...), lo que pone de manifiesto, una vez más, las dificultades que conlleva la trasmisión y el impulso de acciones de innovación pedagógica, incluso con el concurso de herramientas con una tecnología bien próxima a los alumnos.

4. Reflexiones y conclusiones

Al principio del estudio los autores eran muy conscientes de que la tradición y las creencias personales sobre la educación matemática son muy fuertes. Pero también sabían que los estudiantes de posgrado suelen ser más críticos que los que salen de la enseñanza obligatoria, de ahí el interés por examinar más de cerca su pensamiento en un contexto de innovación educativa. Sin embargo, lo que sorprende son los indicios de ingenuidad confusa o la creencia de que sólo los contenidos matemáticos son dignos de atención para la adquisición de competencias científicas.

En una nota más positiva, en este estudio se puede destacar que se ha comprobado que se dan los tres grados de madurez reflexiva propuestos en estos profesores en formación del Máster en Formación de Profesorado de Secundaria. Además, se han hallado distintos grados de predisposición ante una posible futura labor docente y, como denominador común, una manifiesta preocupación por la dificultad –más que por las posibles ventajas– de acomodar las novedades tecnológicas en la enseñanza de la geometría. Preocupación que parece, sobre todo, una especie de miedo ante lo desconocido, ante lo que no se entiende del todo o ante lo que nos hace sentir muy poco preparados frente a la vaguedad o la incertidumbre. En definitiva, podría decirse que el peso de la tradición es también un reflejo natural y una garantía de no cometer errores y de poder lidiar con las limitaciones y paradojas de la institución escolar.

Sin embargo, con el presente estudio se puede apreciar también una cierta resistencia a que las herramientas que han visto actuar en las sesiones formativas “entorpezcan” el proceso de aprendizaje; temor a que supongan un obstáculo (más que una ayuda) para alumnos menos habituados al contexto tecnológico; temor a

que su utilización requiera una dedicación excesiva. Parecen subestimar o no llegaron a la comprensión que el objetivo del uso de estas herramientas en el aula es ayudar a los alumnos a hacer matemáticas mejor y más fácilmente, de manera más creativa, mediante las amplias posibilidades de exploración y de descubrimiento que estas herramientas facilitan, promoviendo así la capacidad creativa de los alumnos y desarrollando, en suma, una forma de hacer geometría adecuada a la era digital en la que van a pasar su vida.

Todas estas dudas son, naturalmente, razonables. Pero no parece tan lógico que, para los futuros profesores, la reacción dominante sea una especie de conformismo hecho de reglas prefabricadas y no de planteamientos cuestionables y mejorables, un ver amenazada la continuidad de una enseñanza que siga ciegamente las mismas pautas que las que ellos recibieron. ¿Qué falla en la formación inicial y continuada para alimentar tanto tradicionalismo? No es éste, obviamente, un hallazgo muy original, pero lo que cambia es que estamos en 2021 y que la cuestión tecnológica es una obviedad en la vida del ciudadano «nativo tecnológico». Si el ideal en el aula de matemáticas no se puede separar de la vida cotidiana, sin duda es necesario preguntarse si la matemática tecnológica existe y cómo puede servir de referencia para la realización del trabajo matemático en la escuela. De lo contrario, podría creerse (erróneamente) que las iniciativas de innovación pedagógica están condenadas a aparecer sólo como una especie de moda sofisticada, desligada de referencias epistemológicas sólidas, y no como una realidad ineludible que se apoya en una mirada didáctica crítica.

Los datos de este estudio son cualitativos, se corresponden con el análisis de los textos narrativos de las respuestas del cuestionario. Como hemos indicado en el marco teórico, han sido interpretados de manera específica con las perspectivas del Análisis del Discurso de Sfard (2001) y la Reflexión sobre la Práctica de Mason (2002), Schön (1983) y Smith (2003). Además, el análisis se podría prolongar de manera general a partir de noción de “habitus” (Perrenoud, 2011) y de la coordinación entre el conocimiento especializado del profesor y la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Derouet et al., 2017).

En el discurso de estos estudiantes se reconocen, en general: características propias de la inexperiencia, pues sólo han impartido, si acaso, clases particulares; ingenuidad en ciertas apreciaciones (“*account*”); otras apreciaciones, posiblemente derivadas de las orientaciones propias de las titulaciones previas de los profesores en formación (en su mayoría ciencias matemáticas, física o ingeniería), que les llevan a centrarse exclusivamente en la perspectiva matemática (“*account of*”); y otras que, tal vez, pueden ser consecuencia de que ejercer como profesores no había sido su primera opción laboral al comenzar sus estudios universitarios,

independientemente de cuales hayan sido éstos (poca iniciativa como profesor, poca reflexión subjetiva y argumentada, escaso “*account for*”).

El análisis de las narrativas de los estudiantes en este experimento de formación está relacionado más en el contexto del profesor en formación, en su bagaje sentimental y sus creencias, que con el contenido de la innovación planteada. Esta afirmación es, por un lado, enriquecedora, pues hace más amplia la lección adquirida tras este análisis; y, por otro, preocupante, al constatar la intrínseca dificultad de transmitir ideas de innovación pedagógica a los futuros profesores en formación. Esto podría ser la pregunta central que se desprende del estudio y que merece ser ampliada en nuevas investigaciones. Asimismo, se entiende que una formación de dos sesiones en línea no es suficiente para despertar el interés del uso tecnológico, aun menos para fomentar la importancia de ser creativo en la profesión docente.

Esta situación que debería cambiar con la realización de unas prácticas donde se llevaran a cabo actividades que incluyeran estas innovaciones pedagógicas y que facilitaran, finalmente, una mejora en la percepción de los futuros profesores sobre las mismas y, en definitiva, influyeran positivamente sobre su futura práctica profesional docente.

Se podría pensar que, debido a su inexperiencia, difieren en el significado y grado de detalle de los conceptos considerados en las locuciones de las sesiones de formación. Esta creencia es natural, ya que el significado y la conceptualización están estrechamente relacionados, y los profesores en formación necesariamente tienen menos capacidad reflexiva sobre la dimensión temática del contenido de formación tratado.

Sin embargo, al centrar nuestra atención en el discurso sobre el pensamiento o intención docente, hemos observado hasta qué punto es relativamente pobre la articulación de las reflexiones cuando el pensamiento crítico va más allá del contenido matemático

Si bien esta disposición puede parecer decepcionante para el formador bien intencionado, plantea las siguientes preguntas cruciales en torno al cambio didáctico y, sobre todo, conceptual, necesario para adquirir la competencia de llegar a ser profesor:

- ¿Qué habría sido necesario para que los beneficios del programa de innovación pedagógica fueran más convincentes para los estudiantes?
- ¿Cómo debería haberse negociado el contrato de formación para fomentar, tanto el desarrollo de sus habilidades geométricas con el uso de herramientas

informáticas, como la adquisición de los criterios necesarios para evaluar, criticar, elegir, aplicar y usar dichas herramientas?

- ¿Las respuestas a estas preguntas se encuentran en el dispositivo de formación o vienen de fuera?

La investigación llevada a cabo nos ha permitido responder parcialmente a estas preguntas, o sea en claves de diseño de formación (a diferencia de la aplicación docente en el aula) y del instrumento escrito y a distancia para recoger datos: ¿Reflejan los datos lo que piensan los estudiantes? ¿Habrían sido más adecuadas para la investigación unas entrevistas? A pesar de eso, la investigación queda abierta a futuros análisis en los que, tal vez (véase (Kovács et al., 2020) como ejemplo), la capacidad de la teoría de los ETM coordinada, por ejemplo, con la teoría MTSK y con la práctica del análisis del discurso reflexivo, haga posible entender mejor el conocimiento, el discurso del profesor y su rol en el aula en un contexto de innovación educativa en geometría.

5. Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado al amparo del proyecto *Innova Docencia* de la Universidad Complutense de Madrid (Nº. de Referencia 177) “Utilización de metodologías activas de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, centradas en el estudiante y desarrolladas en el espacio innovador de una hiperaula”.

Los autores agradecen a los revisores anónimos de este trabajo sus detallados informes, que han contribuido mucho a la mejora del mismo.

Bibliografía

BJULAND, R., CESTARI, M., & BORGERSEN, H. (2012). Professional mathematics teacher identity: analysis of reflective narratives from discourses and activities. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 405-424.

BREEN, S., MCCLUSKEY, A., MEEHAN, M., O'DONOVAN, J. & O'SHEA, A. (2014). A year of engaging with the Discipline of Noticing: five mathematics lecturers' reflections. *Teaching in Higher Education*, 19(3), 289-300.

COBO, P. & FORTUNY, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 115-140.

DEROUE, C., KUZNIAK, A., NECHACHE, A., PARZYSZ, B. & VIVIER, L. (2017). The Mathematical Working Space model: An open and adaptable theoretical framework? *CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Irlanda. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01948866>

EISENHART, A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 99-114.

FERNANDEZ, C., SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., VALLS, J. & CALLEJO, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61.

FLORES-SALAZAR, J.V., GAONA, J. & RICHARD, P.R. (2022). Mathematical work in the digital age. Variety of tools and the role of genesis. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P.R. Richard (Eds), *Mathematical work in educational context*. Springer Nature.

HASPEKIAN, M. (2020). Teaching practices in digital era: some theoretical and methodological perspectives. En A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, Z. Lavicza, R. Weinhandl, A. Clark-Wilson & H.-G. Weigand (Eds.), *Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA), 16-18 September 2020* (pp. 3-11). Johannes Kepler University. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02932218/document>

HOWENWARTER, M., KOVÁCS, Z., RECIO, T. (2019). Using GeoGebra Automated Reasoning Tools to explore geometric statements and conjectures. En G. Hanna, M. de Villiers & D. Reid (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (vol. 14, pp. 215-236). Springer.
https://ictmt13.sciencesconf.org/data/pages/proceedings_compressed_1.pdf

KOVÁCS, Z., RECIO, T., & VÉLEZ, M. P. (2018). Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 25(2), 33-50.

KOVÁCS, Z., RECIO, T., RICHARD, P. R. & VÉLEZ, M. P. (2017). GeoGebra automated reasoning tools: a tutorial with examples. En G. Aldon & J. Trgalová (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Teaching ICTMT 13* (pp. 400-404).

KOVÁCS, Z., RECIO, T., RICHARD, P. R., VAN VAERENBERGH, S. & VÉLEZ, M. P. (2020). Towards an ecosystem for computer-supported geometric reasoning, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 10.1080/0020739X.2020.1837400

- LLINARES, S. (2020). Indicators for the development of noticing: how do we recognize them? *For the Learning of Mathematics*. 40(0), 38-43.
- MARTÍNEZ ZARZUELO, A., RODRÍGUEZ MANTILLA, J. M., ROANES LOZANO, E. & FERNÁNDEZ DÍAZ, M. J. (2020). Efecto de Scratch en el aprendizaje de conceptos geométricos de futuros docentes de Primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 23(3), 357-386. 10.12802/relime.20.2334
- MASON, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- PANEQUE, J., COBO, P. & FORTUNY, J. (2017). Intelligent Tutoring and the Development of Argumentative Competence. *Technology, Knowledge and Learning*, 22(1), 83-104
- PERRENOUD, P. (2011). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Graó.
- PLANAS, N., FORTUNY, J. M., ARNAL-BAILERA, A. & GARCÍA-HONRADO (2016). El discurso matemático del profesor: Explicaciones, ejemplos y coherencia local. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). SEIEM.
- RADFORD, L. (2013). Three key concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- ROANES-LOZANO, E. & SANCHEZ, F. (2017). An Educational Application of Dynamic Geometry: Revisiting the “Recovery Position” in Tennis. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 24(4), 173-178.
- SCHÖN, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How professionals think in action*. Temple Smith.
- SFARD, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.
- SMITH, T. (2003). Connecting theory and reflective practice through the use of personal theories. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *PME 27 International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, PME27/PME-NA25* (p. 215-222). College of Education, University of Hawai.

JOSEP MARÍA FORTUNY

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals,
Universitat Autònoma de Barcelona, Espanya

josepmaria.fortuny@uab.cat

TOMÁS RECIO

Departamento de Ingeniería Industrial, Escuela Politécnica Superior
Universidad Antonio de Nebrija, Madrid, Espanya

trecio@nebrija.es

PHILIPPE R. RICHARD

Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation,
Université de Montréal, Canada

philippe.r.richard@umontreal.ca

EUGENIO ROANES-LOZANO

Instituto de Matemática Interdisciplinar & Departamento de Didáctica de las
Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas, Facultad de Educación,
Universidad Complutense de Madrid, Espanya

eroanes@ucm.es