

MICHÈLE ARTIGUE

NOTE DE LECTURE

MATHEMATICAL WORK IN EDUCATIONAL CONTEXT  
THE MATHEMATICAL WORKING SPACE THEORY PERSPECTIVE<sup>1</sup>

---

Cet ouvrage en anglais de 280 pages, co-édité par Alain Kuzniak, Elizabeth Montoya Delgadillo et Philippe R. Richard constitue le volume 18 de la collection *Mathematics Education in the Digital Era* chez Springer.

Il est consacré aux travaux relevant de ce qui est maintenant dénommé la théorie des espaces de travail mathématiques (ThETM en français et ThMWS en anglais), une construction qui a émergé des travaux de Catherine Houdement et Alain Kuzniak sur l'enseignement de la géométrie. Au cours des deux dernières décennies, un collectif international de chercheurs a progressivement développé et consolidé les outils conceptuels et méthodologiques de cette approche théorique, une entreprise à laquelle les colloques ETM, organisés tous les deux ans depuis 2009, ont substantiellement contribué. Utilisée par un nombre croissant de chercheurs, la théorie a vu parallèlement s'élargir ses domaines d'intervention à d'autres domaines mathématiques (probabilités, analyse...), mais aussi au-delà des seules mathématiques (algorithmique, cinématique, relativité...). La publication même de cet ouvrage au sein de la collection *Mathematics Education in the Digital Era* atteste de l'importance de ce développement.

L'ouvrage est constitué de 14 chapitres qui ont tous été rédigés en co-écriture, sauf deux, et 15 chercheurs ont directement contribué à son élaboration. Ces 14 chapitres sont organisés en trois sections, intitulées respectivement : "The General Framework of the Theory of Mathematical Working Spaces", "The Different Types of Mathematical Work and MWS", et "Development of the Theory and Interaction with Other Theoretical Approaches". Ces sections comportent respectivement trois, trois et cinq chapitres. L'ouvrage se conclut par un chapitre

---

<sup>1</sup>Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Richard, P. (dir.). (2022). *Mathematical Work In Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective*. Mathematics Education in the Digital Era, 18, Springer.

globalement plus réflexif sur les acquis du travail réalisé jusqu'ici et les perspectives qui s'en dégagent pour des recherches futures.

En 2016, j'avais déjà eu à écrire un texte sur les ETM et les recherches associées (Artigue, 2016) du fait de la parution d'un numéro spécial de *ZDM*, le numéro 46.3 dédié à cette approche (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016). Je l'ai relu en préparant celui-ci.

Ce numéro spécial attestait déjà de la maturité acquise par l'approche. La plupart de ses notions fondamentales – la distinction opérée entre un plan épistémologique et un plan cognitif, les trois composantes distinguées dans chaque plan, les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives introduites pour rendre compte des relations entre ces deux plans, et même la notion de travail mathématique complet – étaient déjà présentes. Je pointais dans mon texte la diversité des méthodes utilisées par les chercheurs se réclamant de ce cadre théorique dont je soulignais l'apparente plasticité. J'avais également fait état d'un certain nombre de questions que je me posais, à la lecture de ce numéro spécial. Celles-ci, concernaient notamment la nature réelle du plan qualifié d'épistémologique, mais qui me semblait plus institutionnel qu'épistémologique, l'attribution des observables recueillis à telle ou telle genèse, et surtout la notion de genèse instrumentale qui me paraissait très distante de la conceptualisation proposée en ergonomie cognitive qui avait été à la base du développement de l'approche instrumentale à l'émergence de laquelle j'avais contribué avec d'autres collègues. Je m'interrogeais aussi sur le potentiel offert par ce cadre théorique pour analyser le travail mathématique dans la durée, et soulignais le caractère encore émergent de l'association de différents paradigmes au travail mathématique dans d'autres domaines que la géométrie.

Six ans après, où en est-on et qu'apporte ce nouvel ouvrage ? Jusqu'à quel point permet-il à une personne intéressée par cette approche didactique de se familiariser avec le travail mathématique ? Comment éclaire-il sur le sens des concepts de la théorie, des praxéologies de recherche qui lui sont associées, et d'apprécier en quoi elle contribue à l'avancée des connaissances didactiques ? C'est en ayant ces questions à l'esprit que j'ai entamé la lecture de l'ouvrage.

Les trois premiers chapitres sont essentiels de ce point de vue, en particulier pour le lecteur qui cherche à se familiariser avec la théorie, ses raisons d'être, les principes qui la fondent, la façon dont les questions didactiques y sont problématisées et méthodologiquement travaillées. Le premier chapitre, écrit par Alain Kuzniak, sans aucun doute la personne la mieux placée pour le faire, nous fait en effet pénétrer dans l'histoire de cette approche, qui vise à décrire et comprendre le travail mathématique dans les classes, et aussi à le transformer pour le rendre plus efficace. Le second chapitre est consacré aux méthodologies. Le troisième chapitre, intitulé « The theory of mathematical working spaces in brief », revient, de façon synthétique, sur les principaux éléments de la théorie et les auteurs, ayant à l'esprit

des questions souvent posées, cherchent à y répondre et à limiter les incompréhensions possibles. Ces trois chapitres permettent bien au lecteur de se familiariser avec la théorie, de rendre intelligibles ses concepts, de comprendre comment elle oriente les problématiques de recherche et la forme que prend le travail méthodologique dans les travaux qu'elle nourrit. Les auteurs montrent bien notamment que, dans cette construction théorique, les contenus mathématiques en jeu font l'objet d'une grande attention, que l'analyse cognitive se fait dans une perspective matérialiste, à partir d'une étude fine des formes et effets visibles du travail mathématique, sans chercher à en inférer des processus psychologiques sous-jacents, et aussi que l'utilisation de cette théorie ne présuppose pas une vision particulière de l'apprentissage. Le chapitre méthodologique, quant à lui, souligne clairement qu'au fil des recherches, des techniques d'étude spécifiques se sont progressivement stabilisées, exploitant les connexions entre le plan épistémologique et le plan cognitif permises par le jeu des trois genèses mentionnées plus haut et leur coordination.

La seconde partie de l'ouvrage est consacrée aux trois types d'ETM distingués dans la théorie, l'ETM de référence, l'ETM personnel et l'ETM idoine (en anglais *reference MWS*, *personal MWS* et *suitable MWS*). Ces distinctions prennent en compte les transformations qui s'opèrent au fil du processus de transposition didactique, notamment dans sa dimension interne. Comme son nom l'indique, le premier type d'espace est celui de la référence institutionnelle, il correspond au travail mathématique attendu dans une situation ou séquence donnée, le second au travail mathématique réel de chaque élève ou groupe d'élèves, et le troisième à l'adaptation faite par l'enseignant pour rapprocher le plus possible le travail personnel réel du travail attendu. Dans chaque chapitre, de nombreux travaux sont évoqués, montrant bien la vitalité de cette ligne de recherche et la diversité des chercheurs qui y contribuent. On perçoit bien que la réflexion théorique progresse, se nourrissant de travaux empiriques menés dans un nombre croissant de domaines. Cependant, pour quelqu'un qui est moins familier, ces évocations me semblent souvent rester un peu trop allusives pour permettre de bien apprécier la progression conceptuelle, et ce qu'elle permet ou non. J'aurais préféré moins d'exemples, mais présentés de façon plus approfondie, et une sélection des exemples en fonction des chapitres qui évite l'impression de répétition ressentie au fil de la lecture.

La troisième section est consacrée aux interactions avec d'autres théories et cherche aussi à montrer ce qu'apporte la théorie à travers ces interactions à des thématiques de recherche importantes en éducation mathématique, qu'il s'agisse de l'enseignement dans le monde numérique actuel, de la formation des enseignants ou de la modélisation. Le premier chapitre de cette section, intitulé "The theory of mathematical working spaces: theoretical environment, epistemological stance and dialogue with other theories" plante en quelque sorte le décor. Les auteurs

reviennent sur l'émergence de la théorie en mettant l'accent sur la richesse de l'environnement théorique existant, notamment en France, à l'époque ; ils précisent la vision épistémologique qui sous-tend la théorie, puis en viennent aux connexions théoriques qui se sont progressivement développées. Celles-ci, comme ils l'expliquent, ont répondu aux nécessités des recherches et au fait que la ThETM n'a pas la prétention de permettre à elle seule d'aborder toutes les problématiques didactiques. Elles ont été favorisées par la diversité des intérêts et cultures théoriques des chercheurs impliqués. Elles ont nourri des dialogues fructueux, mais, comme le soulignent aussi les auteurs, ceci n'a été possible que parce que les approches considérées présentaient une certaine proximité épistémologique.

Les chapitres suivants visent à montrer plus précisément les apports de ces connexions. Le premier est centré sur le travail mathématique à l'ère du numérique. Tout en rappelant que le travail mathématique a été de tout temps instrumenté, pour appréhender les nouvelles formes de travail mathématique qui se développent en cette ère numérique, les auteurs souhaitent mettre l'accent sur la façon dont la diversité des outils technologiques utilisés dans le contexte scolaire aujourd'hui affecte les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives, et leurs interactions, ce qu'ils dénomment une danse de ces genèses. Après un long développement sur la multiplication et les techniques opératoires associées, avec ou sans technologie, les auteurs s'attellent à caractériser ces nouvelles formes de travail mathématique. Le chapitre se termine par une partie qui considère le travail mathématique à la fois du point de vue de l'utilisateur et du concepteur d'artefacts technologiques. La réflexion multiforme développée dans ce chapitre propose sans aucun doute des pistes intéressantes pour appréhender les nouvelles formes de travail mathématique qui se développent en cette ère numérique et leurs effets, mais elle m'a semblé pour l'instant moins aboutie que celle proposée dans les chapitres précédents. Peut-être les auteurs ont-ils abordé trop de points différents, ceci rendant plus difficile l'identification des idées principales et de leur organisation.

Le second chapitre de cette section contraste avec ce qui précède. Il est consacré à la notion de genèse instrumentale et vise à clarifier les relations entre la notion qui a été introduite en ergonomie cognitive par Vérillon et Rabardel (1995), et le concept de genèse instrumentale tel que conceptualisé dans la théorie des ETM. Ce court chapitre est particulièrement clair et il a répondu à des questions que je me posais depuis longtemps et que j'avais pointées dans mon article de 2016. Je conseille au lecteur de ne pas attendre d'arriver à ce point de l'ouvrage pour le lire, car il permettra de mieux comprendre la notion de genèse instrumentale dans la ThETM, et aussi de montrer que, bien que très différente de celle qui a été conceptualisée dans l'approche instrumentale, cette notion peut être utilisée productivement par les chercheurs et chercheuses qui se réfèrent à cette approche, comme c'est le cas pour Jean-Baptiste Lagrange, co-auteur de ce chapitre et qui a

joué un rôle clef dans l'émergence et le développement de l'approche instrumentale.

Le troisième chapitre aborde le thème des connaissances des enseignants et de leur développement professionnel, et la contribution des recherches menées dans le cadre des ETM à cette thématique. L'analyse proposée s'appuie sur la comparaison de trois études sélectionnées à l'issue d'une méta-analyse. La première, centrée sur les connaissances mathématiques des enseignants, concerne des travaux qui combinent les ETM avec le modèle MTSK (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge) (Carrillo-Yañez et al., 2018). La seconde, centrée sur les relations entre connaissances mathématiques, domaines et tâches, met plus particulièrement en jeu les interactions entre les ETM et la théorie de l'activité. Elle s'appuie sur la thèse de Charlotte Derouet (2018) sur l'enseignement des probabilités continues en France dans la dernière année du lycée. La thèse est aussi utilisée comme exemple dans divers chapitres de l'ouvrage : elle mobilise à la fois les ETM et la double approche didactique-ergonomique des pratiques enseignantes qui repose sur la théorie de l'activité (Robert & Rogalski, 2002). La troisième est centrée sur la notion de travail mathématique complet, qualifiant un travail où les trois genèses sémiotique, instrumentale et discursive se combinent pour connecter les plans épistémologique et cognitif, avec une circulation harmonieuse du travail mathématique qui mobilise les trois plans associés à ces genèses. Elle concerne deux recherches exploitant cette notion pour analyser le travail des enseignants et guider leur développement professionnel. Ce chapitre montre bien, me semble-t-il, que sur cette thématique si importante des connaissances des enseignants et de leur développement professionnel, des connexions théoriques productives ont été effectivement développées entre la ThETM et des approches et modèles développés spécifiquement pour l'étude des connaissances et pratiques des enseignants, qu'elles permettent de nouveaux éclairages. En même temps, elles sont aussi source de questions pour la théorie elle-même.

Le dernier chapitre de cette section interroge les perspectives offertes par la théorie des ETM au thème de la modélisation. S'appuyant d'abord sur la thèse de Charlotte Derouet, mentionnée ci-dessus, et celle d'Assia Nechache (2018), concernant elle aussi l'enseignement des probabilités, les auteurs montrent d'abord ce qu'apporte une analyse soutenue par les ETM à l'approche classique en éducation mathématique en termes de cycle de modélisation. Ils élargissent ensuite la perspective, considérant le monde du travail et les travaux sur la modélisation et la mathématisation d'épistémologues francophones. Ces perspectives sont ensuite utilisées pour rendre compte d'un travail mené avec des élèves de terminale en France sur un pont suspendu, et les modèles mathématiques que ce travail va successivement mobiliser, mettant en jeu plusieurs espaces mathématiques de travail. L'analyse proposée, très fine, montre bien ce que peut apporter la théorie

des ETM sur ces questions de modélisation en ne séparant pas mathématiques et réalité, et en associant des ETM différents à la pluralité des modèles généralement envisageables. Cependant, comme le soulignent les auteurs eux-mêmes, ce potentiel des recherches utilisant la théorie des ETM a jusqu'ici été encore peu exploré.

L'ouvrage se termine par un chapitre co-écrit par six des auteurs investis dans la poursuite de la théorie. Plusieurs directions sont successivement envisagées : l'extension à de nouveaux domaines mathématiques et la prise en compte du développement du travail mathématique sur le long terme qui requièrent des méthodologies spécifiques, l'attention portée aux formes collectives de travail mathématique ou aux activités extrascolaires, et aussi l'étude des formes renouvelées de ce travail induites par l'accroissement de la multidisciplinarité ou l'incessante évolution technologique. Est posée aussi la question importante de la capacité de la théorie à guider la formation et transformation du travail mathématique. Comme cela a été souligné dès les premiers chapitres de l'ouvrage, la théorie des ETM peut-être utilisée a priori pour analyser le travail mathématique dans les classes, quelles que soient les visions de l'apprentissage et de l'enseignement qui sous-tendent ce travail. Mais toute visée transformative suppose une vision de ce qu'est un travail mathématique de qualité, même si cette vision est relativisée à un contexte donné. Comme le rappellent les auteurs de ce dernier chapitre, les formes du travail mathématique sont souvent analysées et caractérisées en fonction de trois critères : conformité à un certain paradigme, complétude au sens rappelé plus haut et correction. La question de savoir si ces caractéristiques peuvent valablement guider la transformation du travail mathématique est à ce stade une question ouverte.

Cette note de lecture ne donne sans aucun doute qu'une vision très partielle du contenu de l'ouvrage. C'est aussi une vision marquée par ma culture didactique et mes intérêts de chercheuse. Sa lecture m'a permis de mieux apprécier la diversité et richesse des travaux de recherche se réclamant de la théorie des ETM, et aussi les efforts déployés pour capitaliser les connaissances produites par ces travaux et les mettre au service de la consolidation et du questionnement théorique. Elle a confirmé ma première impression que le plan épistémologique est tout autant institutionnel qu'épistémologique. Elle m'a permis de mieux comprendre la signification donnée dans la théorie aux différentes genèses et l'importance du travail mené sur leurs interactions, même si le discours sur les relations entre genèses sémiotique et instrumentale demeure contestable dans certains chapitres. La question n'est pas facile, car les ostensifs sur lesquels s'appuie le travail mathématique, notamment ceux des registres symboliques, ont à la fois une valence sémiotique et une valence instrumentale, pour reprendre le langage de la théorie anthropologique du didactique. La puissance de ces ostensifs est

étroitement liée à leur valence instrumentale. De ce fait, les genèses sémiotiques et instrumentales qui les concernent sont étroitement imbriquées, peut-être indémêlables.

Pour revenir aux questions soulevées au début de cette note de lecture, je crois que cet ouvrage permet effectivement à une personne intéressée par cette approche didactique du travail mathématique de se familiariser avec elle, de donner du sens à ses concepts, aux praxéologies de recherche qui lui sont associées et d'apprécier comment elle contribue à l'avancement des connaissances didactiques. J'ai lu le livre dans l'ordre des chapitres. Je ne suis pas sûre que ce soit la meilleure approche, car cela confronte le lecteur à de nombreuses répétitions ou quasi-répétitions. Peut-être qu'après avoir lu les premiers chapitres, le lecteur devrait, en fonction de ses intérêts ou de ses questions, choisir comment naviguer dans l'ouvrage. Je lui souhaite une bonne lecture.

### **Bibliographie**

ARTIGUE, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lenses. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 935-939.

CARRILLO-YAÑEZ, J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L., FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D., VASCO, D., ROJAS, N., FLORES, P., AGUILAR-GONZÁLEZ, A., RIBEIRO, M. & MUÑOZ-CATALÁN, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

DEROUET, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01431913/document>

KUZNIAK, A., TANGUAY, D., & ELIA, I. (Eds.) (2016). Mathematical working spaces in schooling. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* (special issue), 48(6).

NECHACHE, A. (2018). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01345747/file/Manuscrit-Assia-Nechache-IREM.pdf>

VÉRILLON, P., & RABARDEL, P. (1995). Cognition and artefacts : A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 4, 505-528.

**MICHELE ARTIGUE**

Université Paris Cité, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy Paris Université,  
Université de Lille, Université de Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France.

michele.artigue@univ-paris-diderot.fr