ÉRIC BRUILLARD, PHILIPPE R. RICHARD

# INFORMATIQUE, MATHEMATIQUES, CONCEPTION ET USAGE DES TECHNOLOGIES NUMERIQUES

**Abstract. Informatics, mathematics, design and use of digital technologies.** This article touches up the complementary presentations provided by the authors during the conference, addressing the design, evolution, and utilization of digital technologies in education. It is composed of two distinct parts. The first one offers a perspective from the field of educational sciences, while the second focuses on the didactics of mathematics.

**Keywords.** resources, artificial intelligence, mathematical work, instrumental approach.

**Résumé.** Cet article reprend les exposés complémentaires proposés par les auteurs durant le colloque, portant sur la conception, l'évolution et l'utilisation des technologies numériques en éducation. Il est composé de deux parties distinctes. La première apporte un point de vue des sciences de l'éducation tandis que la seconde se concentre sur la didactique des mathématiques.

**Mots-clés.** ressources, intelligence artificielle, travail mathématique, approche instrumentale.

---

Depuis une quarantaine d'années, les technologies numériques se sont progressivement imposées dans l'enseignement des mathématiques et des sciences. Désormais, les outils et les instruments informatiques sont multiples et constituent l'une des nombreuses ressources numériques à la disposition des élèves et des enseignants. La recherche en éducation et en didactique s'intéresse de plus en plus à leur conception et à leur développement, ainsi qu'à leurs utilisations en classe. Les deux contributions de cet article offrent un aperçu des recherches actuelles en adoptant deux perspectives complémentaires : l'une axée sur l'éducation et l'autre davantage centrée sur la didactique des mathématiques.

Dans la première partie, Éric Bruillard dresse un panorama des évolutions des technologies informatiques et numériques, de leurs usages dans l'enseignement des mathématiques et des ressources nouvelles que les technologies procurent aux élèves et aux enseignants. Cette partie se termine par une première ouverture sur les perspectives d'avenir, notamment les potentialités offertes par le renouveau de l'intelligence artificielle, mais aussi les difficultés pour le système scolaire à scolariser des technologies en perpétuelle évolution. La deuxième partie complète le panorama des évolutions et des usages des nouvelles technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Philippe R. Richard se

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, numéro thématique 2, p. 173 – 208 © 2024, IREM de STRASBOURG.

concentre particulièrement sur la contribution spécifique de l'intelligence artificielle et reprend certaines des interrogations abordées dans la première partie : qu'est-ce qui distingue l'approche IA de l'approche « programmation » fréquentée jusque-là ? Est-ce vraiment nouveau ? Quel est le futur de l'IA dans l'enseignement des mathématiques ? Le texte aborde également des aspects liés à l'activité effective des apprenants (élèves ou étudiants, avec ou sans intention d'enseignement), en se posant les questions suivantes : quels sont les changements dans l'activité ou le travail qui sont engendrés ou facilités par l'usage des nouvelles technologies ? Comment les technologies contribuent-elles au développement des connaissances des apprenants ?

## 1. Panorama et perspectives sur les technologies numériques, les usages et les ressources

Le fait de travailler sur l'informatique (ou le numérique) en éducation et formation, tant autour de questions de conception que d'usage, me met dans une situation différente des autres contributeurs à ce numéro spécial. Il m'est difficile d'entrer dans un dialogue autour d'un thème entre deux spécialités didactiques : l'informatique, hors de l'enseignement supérieur, n'est pas complètement « disciplinée » et sa didactique n'est pas vraiment construite. Ce que peut recouvrir l'informatique pour l'éducation est encore bien éloigné de ce qui est proposé dans les programmes prescrits. L'informatique transcende la dialectique outil ou objet d'enseignement et ceci à différentes échelles (macro, méso et micro).

L'informatique actuellement déployée est ubiquitaire et apparaît sous des formes très diverses, notamment dans nos activités, même les plus quotidiennes : mode de pensée, culture, objets et technologies, communication et contrôle, autant de points de vue distincts, complémentaires, difficiles à unifier.

S'agissant de l'apprentissage, une multiplicité de contextes est concernée et pas uniquement la salle de classe. Ce n'est pas le lieu privilégié de l'apprentissage, contrairement à la plupart des disciplines scolaires. La notion de contenu d'enseignement (Fluckiger, 2019) est plus large, un contenu ne provenant pas forcément d'une discipline savante, transposé via des programmes nationaux, mais pouvant émaner de situations vécues ou discutées, identifiées par différents acteurs (enseignants, chercheurs, parents, élèves…).

Dans ce texte, je vais reprendre certains travaux permettant de mieux comprendre les interactions complexes sous-jacentes et permettant de partager quelques repères sur des questions didactiques, que ce soit au sens de spécificités liées à des contenus d'enseignement ou celui d'une responsabilité sur les enseignements. La question est celle de la place que peut prendre l'informatique, quelles délégations du travail aux machines sont acceptables et quelles formes d'informatique en éducation sont possibles ?

### 1.1 Quatre visions de l'informatique

Si l'informatique a un rapport particulier et historique avec les mathématiques, elle s'en écarte par bien des aspects. Pour la définir (« qu'est-ce que l'informatique ? »), dans une vision plutôt ontologique, Dowek (2011) met en exergue quatre concepts clés : machine, information, algorithme et langage. Dans une approche privilégiant les liens avec les activités humaines, répondant plutôt à la question : « Qu'est-ce que faire de l'informatique ? », quatre grandes catégories peuvent être distinguées (Bruillard, 2016) :

- Science du calcul : algorithmique et traitements automatisés, avec le cycle classique, données / traitement / résultats.
- Utilisation personnelle de dispositifs informatisés : interaction continue avec des machines, des artefacts sémiotiques comme les nomme Anne Nicole (2004).
- Informatique sociale : participation à des interactions avec des agents humains et non humains via les réseaux (notamment Internet).
- Informatique (ou numérique) comme « matériau » : objets communicants, informatique vestimentaire (wearable computers), design…

Ces différentes acceptations sont apparues successivement, coexistent et s'hybrident, complexifiant la vision que l'on peut avoir de l'informatique. Elles interviennent dans de multiples activités, avec diverses temporalités et distances. Leur étude est principalement, mais non exclusivement, menée selon des points de vue disciplinaires spécifiques : (1) les mathématiques et l'ingénierie, (2) la psychologie cognitive et l'ergonomie (3) la sociologie, (4) les arts et la conception, voire la santé.

Le traitement de texte est un bon exemple. Application complexe, il intègre des applications, comme le correcteur orthographique, nécessitant des algorithmes performants dans toutes les langues. Son utilisation s'inscrit dans des processus interactifs de durée indéfinie et peut être partagée avec des « personnes » distantes. Les chaînes de caractères qu'il gère peuvent constituer des matériaux pour divers processus. Il est difficile de penser une discipline scolaire prenant en charge ces différents aspects, alors que c'est leur combinaison qui constitue l'informatique, bousculant des frontières censées être bien établies, à la fois une science dure et une science humaine.

Sur le plan scolaire, en France, l'informatique est une discipline encore mal installée : des segments peu connectés dans les divers ordres d'enseignement (comme des pièces séparées sans grande liaison), des évaluations externes autour de compétences (du B2i à Pix, voir Bruillard, 2019), avec des interrogations sur ce qu'il faut enseigner. La vision dominante est finalement assez traditionnelle, reprenant les contenus de l'option informatique dans les années 1980 (Baron et Bruillard, 1996) autour de la programmation vue comme étant le cœur, complétée par des enseignements « informatique et société », au statut incertain et incluant des interrogations sociétales du moment (maintenant intelligence artificielle, protection des données personnelles, etc.), sorte de supplément d'âme sans exercisation spécifique (et ainsi sans évaluation) au contraire de l'exercisation canonique de la programmation.

### 1.2. Des explorations aux expérimentations en mathématiques

Pour l'apprentissage, l'informatique a proposé aux mathématiques et aux sciences, plus que des outils et des instruments. Elle leur a construit des « petits » mondes à explorer via la programmation.

#### *1.2.1 Logo et le pays des mathématiques*

Revenant aux origines, dans les années 1960, Feuerzeig et Papert se donnent l'objectif de développer un cadre conceptuel pour l'enseignement des mathématiques. Lors d'un colloque de l'OTAN à Nice en mai 1968, ils « décrivent un langage de programmation appelé Logo adapté pour objectiver un cadre durable d'expérimentation mathématique. » Il ne s'agit pas d'apprendre la programmation, mais de se servir de la programmation pour développer une approche qualifiée de « radicalement nouvelle »

> « Selon cette thèse, l'enseignement des langages de programmation en tant que partie intégrante du parcours scolaire peut contribuer efficacement à réduire les barrières formelles. Cet enseignement peut également être utilisé pour permettre aux élèves d'accéder à une compréhension précise de certains concepts mathématiques clés. » (Lawler, 2010).

Cette exploration est devenue plus convaincante au début des années 1970, quand Papert a ajouté la fameuse tortue, inspirée de l'objet cybernétique de Grey Walter. Objet transitionnel, la tortue permettait aux élèves de se projeter, de faire intervenir leur propre corps, ramenait de la matérialité et une sorte de guide pour l'exploration d'un micromonde faisant le lien entre le monde physique et le monde abstrait. L'ouvrage d'Abelson et diSessa (1986), dont le sous-titre est « The Computer as a Medium for Exploring Mathematics », a constitué un exemple remarquable de l'approche défendue par Papert.

Aussi séduisante que cette approche apparût, elle a rencontré un succès mondial, l'impact sur l'école n'a pas été aussi remarquable, attestant sans doute de la scolarisation problématique de ce type de démarche. D'une part, piloter et accompagner les apprenants (élèves) dans l'exploration de mondes de complexité croissante est très exigeant. Cela demande des enseignants à la fois disponibles et très compétents, et le cadre habituel de l'école (ce que d'aucuns nomment la forme scolaire) n'est peut-être pas bien adapté.

D'autre part, étendre un monde miniature, approche utilisée par l'intelligence artificielle, s'est avéré limité. Le système réduit n'a pas les mêmes caractéristiques et d'autres démarches d'enseignement sont nécessaires.

D'autres micromondes ont vu le jour, notamment en physique (White et Frederisken, 1987) ou des kits d'exploration (comme *Interactive Physics*). Ils ont laissé peu de traces au niveau de l'enseignement secondaire.

### *1.2.2 La géométrie dynamique : une innovation complète*

CABRI géomètre, et plus généralement la géométrie dynamique, héritière de SKETCHPAD (Sutherland, 1963) et de THINGLAB (Borning, 1977), ont rencontré un meilleur destin. C'est l'une des très rares innovations qui a pu s'imposer, étant innovante à la fois aux plans technologique (sans équivalent avant elle), pédagogique (relation nouvelle à la géométrie et à son apprentissage) et institutionnel (présence effective dans les programmes). Disposer de langages de description, de construction qui conduisent à des figures que l'on peut modifier sans changer les contraintes initiales, la résistance aux déplacements étant l'indicateur d'une propriété particulière, conduisait à explorer des liens avec le geste, la vitesse (de déplacement d'un point par exemple) et la mécanique, inusuels dans l'enseignement des mathématiques (Martin, 1993 ; Laborde et Capponi, 1994).

Toutefois, le rapport au geste, au corps et à la matérialité qu'elle pouvait introduire ne s'est pas généralisé et le successeur *libre* de CABRI, GEOGEBRA, offre de multiples fonctionnalités, bien au-delà du cœur de ce que la géométrie dynamique proposait. C'est comme si l'algèbre et l'analyse avaient repoussé la géométrie dans un passé révolu (mais qui pourrait renaître).

Ce type de logiciel, de micromonde, permet d'élaborer des situations que l'on peut faire vivre, mais qui ont du mal à survivre dans le contexte scolaire. Faire prendre en charge des explorations complexes par les élèves demeure une gageure.

#### *1.2.3 Réduire l'exploration à des expérimentations*

Ce qui s'est sans doute le mieux scolarisé correspond à l'utilisation d'outils de calcul, notamment via les calculatrices scientifiques. Déléguer une partie des tâches de calcul à une machine permet d'étendre le type de situations mathématiques que les élèves peuvent gérer. Dans la plupart des cas, à l'exception par exemple des problèmes dits longs, les utilisations restent compatibles avec les contraintes du temps scolaire.

Cela correspond à une valence de l'informatique, vue comme une technologie d'écriture et à certaines de ses caractéristiques. Le fait qu'elle ne soit pas attachée à un support et puisse s'en détacher permet de rejouer le processus d'écriture et de le modifier, ce qui favorise l'expérimentation, dans l'ensemble des disciplines, même celles qui n'ont que peu de rapport avec l'expérimentation. Des traces multiples sont collectables, analysables et traitables afin de voir et comprendre des processus, inviter à des postures réflexives, expérimenter et simuler, dans des travaux individuels ou collectifs.

Une difficulté est cependant à relever dans une dualité visibilité / invisibilité. Si on n'aménage pas d'accès spécifique, les instruments informatiques rendent invisibles les processus sous-jacents à leurs opérations. Comment voir les processus de calcul si on ne les fait pas ? Contrairement à un boulier ou à un calcul écrit, des algorithmes mis en œuvre via des écritures avec des chiffres ou des configurations de boules, la calculatrice ne montre rien de son fonctionnement interne. Si des gestes sont répétés avec le boulier ou le calcul écrit, chacun ayant une signification même si elle a tendance à disparaître dans l'automatisation, les gestes effectués sur ou avec une calculatrice sont coupés des processus même de calcul, sans possibilité d'y accéder.

Apprendre en observant ce que font les machines nécessiterait de revoir en profondeur leur fonctionnement. La question devient celle du coût de la délégation : une efficacité accrue, un accès à des problèmes autrement hors de portée, au prix d'un déficit de compréhension et de conceptualisation.

### 1.3. Évolution des ressources pour l'enseignement avec l'informatisation

Si l'informatique ne peut changer radicalement l'enseignement des mathématiques, elle peut toutefois renouveler son instrumentation et les ressources utiles pour leur apprentissage. L'une des ressources emblématiques de l'enseignement scolaire est le manuel.

L'histoire des manuels scolaires permet de repérer l'influence de l'instrumentation sur les activités scolaires et sur les contenus d'enseignement notamment pour des raisons d'exercisation. Selon Choppin (2005), le « texte du savoir » s'est transformé en un catalogue organisé de situations, l'exposé oral et continu en un ensemble de fiches contraintes par la matérialité du livre (la page, la double page), un système dit juridique (référence unique et simple) en une organisation complexe nécessitant la présence d'un mode d'emploi. Du livre austère conçu par un ou deux auteurs, on arrive à l'équipe de réalisation (maquette, dessins, couleurs, etc.) d'une suite d'écrans colorés et illustrés.

### *1.3.1 Manuels et changement d'aire*

Prenant l'exemple de la notion d'aire, l'exploration de manuels scolaires sur un peu plus d'un siècle montre des évolutions notables : le comptage a remplacé la géométrie. A la fin du 19e siècle, le calcul d'aires s'effectuait en identifiant des figures usuelles et en appliquant des formules. Ainsi, dans le cas d'un polygone irrégulier, il fallait tracer des segments, des perpendiculaires, mesurer les longueurs des segments, puis effectuer des calculs. Les activités de nature géométrique ont peu à peu disparu, aux terrains se sont substituées des images, au mesurage des longueurs puis au calcul se substitue le comptage de carreaux. La généralisation de l'utilisation du papier millimétré et des quadrillages, facilitant les activités des élèves en classe, a modifié profondément le traitement scolaire de la notion d'aire.

Au cours de cette histoire, on observe des activités qui changent de statut (selon les objectifs et les instruments), passant de l'introduction aux connaissances à acquérir ou devenant des exercices d'approfondissement. La technicité requise diminue, la distance au « réel » augmente et les notions construites ou à construire changent.

Cet exemple montre l'impact des instruments utilisés sur les contenus même d'enseignement, également sur la conceptualisation qui peut en découler. Pour l'illustrer, prenons l'exemple du calcul de l'aire d'un cercle. La figure 1 résume l'activité qui peut être menée : découpage d'un hexagone pour reconstituer un rectangle, pour lequel on dispose d'une formule pour le calcul de l'aire. Ensuite, on augmente indéfiniment le nombre de côtés du polygone pour obtenir un cercle, avec la formule du calcul de l'aire. Dans ce cas, l'élève peut faire des calculs et un lien direct existe entre périmètre et aire.

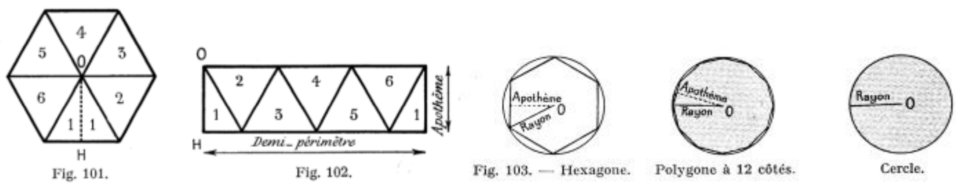
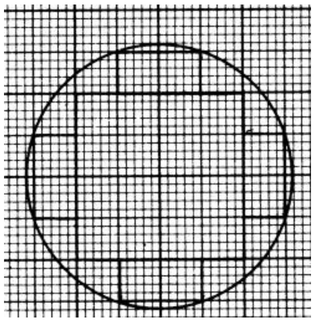



**Figure 1.** Aire polygone régulier = Demi-périmètre × apothème
Aire cercle = Demi-périmètre × rayon (Arithmétique, A.Millet, 1937, Page 102)

Dans le second cas (figure 2), la formule « sort du chapeau », avec une argumentation de précision plutôt spécieuse. Le comptage est fastidieux et le résultat que l'on est censé obtenir ne renseigne en rien sur la nature même de ce que l'on étudie.



« Nous constatons que A est un peu supérieur au triple de $r^2$.

En réalité si nous avions pu avoir plus de précision, nous aurions trouvé un nombre proche de 8,04 soit le produit par $\pi$ de 2,56. »

**Figure 2.** Calcul de l'aire d'un cercle (*Mathématiques 6e, Bordas, 1977)*

La référence à la théorie dite instrumentale développée par Pierre Rabardel est très présente dans diverses approches didactiques. Si certains développements pour l'enseignement des mathématiques sont très intéressants[1], elle se décline dans des thèses, comme un mantra autour de la genèse instrumentale, des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation, de la transformation d'un artefact en instrument (il faudrait ajouter « pour la personne qui l'utilise »). Sans dénigrer une telle théorisation, à laquelle je souscris, je trouve dommage qu'elle en soit réduite à des propositions générales alors qu'elle s'inscrit dans un courant très important étudiant ce qui se noue dans l'interaction entre les humains et les objets qu'ils utilisent. Quelles potentialités sont mises en œuvre, quelles conceptions et représentations sont construites via leur usage ? L'appropriation est un processus complexe, qui requiert du temps, du détournement et conduit à la création de schèmes. En éducation, ce sont les exercices et les activités, menés avec des outils et des instruments spécifiques qui sont au cœur de la conceptualisation. L'exemple du calcul de l'aire du cercle illustre les énormes écarts que l'on peut observer et les théorisations de Pierre Rabardel expliquent de manière convaincante comment les situations de référence influent sur les conceptualisations opérées.

Alors qu'il n'y avait pas d'instrument permettant une lecture directe de la mesure de l'aire, l'informatisation peut amener de nouveaux instruments de mesure d'aire, de nouveaux exemples et de nouvelles activités et aussi réaliser une sorte de

[1] Voir https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/michele-artigue-unit sur l'approche instrumentale

synthèse entre les activités géométriques et de comptage grâce à la mesure directe d'images à l'écran. S'agissant d'activités sur le calcul d'aire, Internet et Google fournissent des catalogues « plats » donnant directement accès à des ressources, sans leur associer de déterminants, c'est-à-dire des formes de conceptualisation souhaitées. Ainsi, concernant le calcul d'aire, se retrouvent mélangés les équivalents des exemples montrés plus haut, sans les rattacher à des visions spécifiques de la notion d'aire.

#### *1.3.2 Du manuel papier au manuel numérique*

Dans le cadre du même projet consacré aux évolutions des manuels scolaires, au milieu des années 1990, nous avons décidé de réaliser un manuel scolaire numérique. Au lieu de concevoir un objet totalement nouveau, le choix a été fait de reprendre un manuel papier de mathématiques alors en cours d'édition, ceci afin de mieux comprendre les transformations à opérer, en accord avec les auteurs (Bruillard et Baron, 1998).

Cette exploration a permis de vérifier les limitations du modèle papier, alors qu'une pédagogie différenciée s'est peu à peu imposée, nécessitant de proposer dans des livres des parcours « adaptés » aux compétences des élèves. Cela a aussi permis de mesurer les difficultés, voire les régressions pédagogiques, dans la prise en compte de l'informatique : des enseignants férus de socio-constructivisme ont tendance à reprendre une vision datée, issue du behaviorisme dès qu'il s'agit d'utiliser un ordinateur. Il est difficile, pour nombre d'enseignants, d'imaginer des formes d'utilisation en rupture avec ce qu'ils connaissent ou croient connaître, des représentations sociales correspondent à des visions peu interrogées et difficiles à déconstruire.

Le manuel, sous forme numérique, pourrait prendre un rôle majeur d'organisation des ressources (Mochizuki et Bruillard, 2019), facilitant l'orientation aux multiples ressources accessibles via Internet, répondant aux faiblesses conceptuelles signalées plus haut.

#### *1.3.3 Une vidéo de classe : dessins et gestes*

Une des idées a été de travailler sur l'informatisation du livre du maître, qui précisait les conceptions pédagogiques des auteurs et les raisons sous-jacentes aux démarches choisies. Nous avons tourné un film en juin 1997 dans une classe de sixième d'un des co-auteurs du manuel, afin d'illustrer un exemple de mise en œuvre de la méthode pédagogique préconisée.

Dans la séance étudiée, il s'agissait de montrer la conduite d'un travail en groupe autour d'un problème, d'explorer de possibles conflits socio-cognitifs et d'illustrer comment une démarche collective était susceptible de les résoudre.

L'un des exercices proposés consistait, étant donné un rectangle ABCD, à trouver un autre rectangle d'aire plus petite et de périmètre plus grand que ceux du rectangle ABCD. L'idée sous-jacente est de convaincre les élèves que l'aire et le périmètre ne varient pas forcément de la même façon. Ce n'est pas facile à admettre pour nombre d'élèves de sixième qui croient que ces deux grandeurs croissent ou diminuent ensemble, difficulté bien connue des didacticiens des mathématiques.

La vidéo était censée illustrer la démarche pédagogique, mais elle a également offert un exemple « vécu », une pratique à un moment donné, une sorte d'instance plus riche que le texte du livre du maître. Les séquences montrent les méthodes utilisées par les élèves, les éventuels blocages et les explications qu'ils sont capables de donner, ce qui permet de mieux cerner leurs difficultés. Regarder les dessins réalisés par les élèves ou leurs gestes fournit des indices intéressants sur leur mode de raisonnement.

On se limitera ici à deux exemples. La figure 3 correspond à l'image d'un cahier d'élève : l'enfant dessine des rectangles inclus les uns dans les autres. Il conclut alors logiquement qu'il est impossible de trouver une solution.

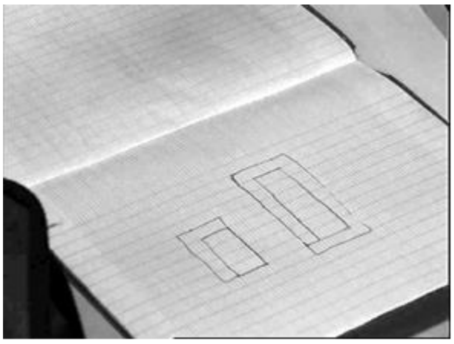


**Figure 3.** Des rectangles plus grands

Pourtant, des groupes ont trouvé numériquement des solutions au problème proposé (en donnant des valeurs à la largeur et la longueur) et exposent leur solution au tableau. Cependant, l'élève demeure dubitatif. Comprendre son erreur et résoudre son blocage impliquent une action sur l'objet lui-même, c'est-à-dire sur la façon de modifier le rectangle initial. Ce que va apporter une autre élève, expliquant, à l'aide de gestes très expressifs, qu'il faut allonger la longueur et comprimer la largeur (figure 4).

Un autre résultat (non demandé) apparaît grâce au mouvement : le rectangle recherché ne peut contenir ou être contenu dans le rectangle initial. Un tel résultat n'est pas révélé par les solutions numériques que certains groupes ont trouvées, montrant l'importance d'une certaine géométrie « dynamique ». Fallait-il simplement produire un nouveau rectangle ou déformer le rectangle initial ?

**Figure 4.** La gestuelle en renfort de l'argumentation :
« il faut diminuer une des dimensions et augmenter l'autre »

### *1.3.4 Monter des vidéos à partir de fragments pour comprendre la méthode*

Nous n'avons pu ajouter les vidéos réalisées au livre du maître, afin d'explorer leur intérêt pour comprendre les démarches pédagogiques du manuel. Nous avons toutefois pu les utiliser en formation.

Le fond constitué s'est prêté à d'autres traitements, notamment la réalisation de montages autour de points spécifiques (la méthode de l'enseignant, les réactions des élèves, l'évolution des idées des élèves dans les différentes phases de travail, etc.) ou des parcours thématiques à reconstruire dynamiquement suivant des points de vue déjà spécifiés ou à trouver. À partir des bandes vidéo brutes, une centaine de séquences de courte durée (entre 10 et 25 secondes) ont été découpées et ont fait l'objet d'une première indexation minimale. Suivant des spécifications de modes de reconstruction, trois montages ont été réalisés avec des enseignants en formation initiale (Bruillard et Baron, 1998).

Dans l'ensemble, moins de 10 heures ont été nécessaires à deux groupes d'enseignants en formation pour terminer une première version de haute qualité. Ils ont réellement produit un film ; cette activité a modifié leur représentation de l'enseignement et les a familiarisés avec l'informatique. D'autres groupes ont également terminé leurs propres films, en utilisant le même ensemble de fragments vidéo avec d'autres points de vue.

L'activité peut être vue comme étant chronophage et nécessitant des compétences en montage vidéo, elle correspond à une forme d'exercisation productive en formation d'enseignants, mais qui ne s'est pas développée.

### 1.4. Intelligence artificielle : des enjeux en éducation scolaire ?

Pour commenter des tendances plus récentes, le « retour » de l'intelligence artificielle fournit un cadre intéressant. Il est un peu curieux de constater les réactions à ce « déferlement » récent des potentialités et transformations liées à l'intelligence artificielle. En éducation, on aurait pu croire la question réglée depuis longtemps : l'expert n'est pas toujours un bon enseignant, loin de là. En tous cas, il lui faut autre chose que la seule expertise d'un domaine.

L'une des réussites visibles en 2023 est celle des agents conversationnels, soutenant un dialogue ciblé et pouvant prendre en charge du tutorat à distance ou effectuer de premiers tris et fournissant de premières réponses. C'est utile notamment dans ce qui a trait à l'orientation, ou pour des questions d'appariement. Pour des questions plus profondément éducatives, on peut regretter le manque d'études longitudinales, peu présentes en France, en raison des modes de gestion et de financement de la recherche.

Alors quel rôle l'intelligence artificielle pourrait-elle avoir ? On peut en voir deux : (1) diagnostic, reprenant les travaux sur les modèles élèves des tuteurs intelligents (Bruillard, 1996) et (2) effectuation de tâches normalement dévolues aux élèves, en tant que résolveur incomplet (Boissière et Bruillard, 2021).

Pour le premier, le diagnostic nécessite des données, des capacités d'interprétation, mises au service d'une intervention éducative. Soit il se fait au plan local dans une proximité temporelle, soit il risque d'être inopérant.

Pour le second, cela revient à compliquer les tâches et les exercices proposés aux élèves, conduisant le plus souvent à l'échec et au rejet des instruments. Leur utilité est souvent liée à la capacité des machines d'expliquer ce qu'elles font. Un exemple historique qui l'a bien montré est MYCIN, un système expert de diagnostic des maladies du sang. Un raisonnement condensé n'est pas adapté aux débutants qui ont besoin de modèles (de type causal) expliquant les diverses règles d'expertise acquises par expérience. L'explicabilité est nécessaire, aussi faudrait-il développer des modèles d'apprentissage explicatifs qui, outre des prédictions précises, fournissent des informations interprétables et exploitables par les enseignants.

Il est alors question des flux de données qui arrivent à l'enseignant et du fait que celui-ci délègue certaines décisions à un système et d'autres non (Davis, 2019). Dans l'utilisation des technologies en classe, Means (2010) montre que c'est la capacité à se servir des rapports de données générés par les logiciels qui fait la différence, à la fois en termes de gain d'apprentissage et de gestion efficace de la classe. Ainsi, on pourrait attendre des enseignants qu'ils utilisent les données des élèves pour améliorer l'efficacité de leur pratique. Mais, ce n'est pas abordé par les programmes de formation et on connaît encore très mal la nature des compétences et des difficultés des enseignants en matière d'utilisation des données pour leur fournir une formation et un soutien appropriés.

Une étude menée sur les pratiques des fournisseurs de ressources en France (Zablot et al., 2021) montre que peu de données « élèves » sont collectées, toujours les mêmes : des données d'identité (civilité, nom, prénom, identifiant…) et de scolarité (classe, groupe, degré d'enseignement, cycle...) et quelques données d'apprentissage : le score obtenu par l'élève à chaque activité, le temps passé, des indicateurs de progression.

En fait, peu de traces d'activité collectées et peu de traitements sont réalisés et l'utilisation de techniques d'intelligence artificielle reste très marginale. L'effort nécessaire pour produire des systèmes innovants est jugé très important, sans certitude de retour rapide sur investissement.

Le diagnostic ressort de modèles peu approfondis et les interventions s'appuient sur des modèles simples et robustes (répétition, renforcement). Les enseignants restent les organisateurs et décideurs locaux de l'enseignement et des activités menées par les élèves. Pour certains, un recours plus important à l'exploitation des données nécessiterait un changement des règles traditionnelles du métier.

Ainsi, des changements pourraient s'opérer au prix d'une formation des enseignants à la gestion et à l'utilisation de données d'apprentissage et à des possibilités locales, dans les établissements, de gestion de données et d'alimentation des tableaux de bord pour les enseignants.

### 1.5. Des perspectives peu ouvertes pour l'utilisation de l'informatique

Selon Collins et Halverson (2009), les systèmes scolaires ne peuvent pas convenablement « intégrer » les technologies informatiques. Ces chercheurs américains pensent que la « forme scolaire » actuelle, liée à une société industrielle, n'est pas adaptée pour cela et qu'il faudrait mettre en place d'autres formes de scolarisation.

Dans ce que l'on vient de présenter, on s'aperçoit que le recours à l'informatique dans l'éducation fonctionne pour étendre certaines possibilités, mais bute dès qu'il y a nécessité d'apprendre le fonctionnement d'un dispositif technique ou d'aborder des conceptualisations un peu nouvelles. Ainsi le tableur a un fonctionnement qui peut entrer en concurrence avec les manières classiques d'enseigner les mathématiques en collège. Dorey et coll. (2013) montrent également un phénomène de saturation pour l'utilisation en lycée de systèmes de visualisation moléculaire en 3D. L'utilisation effective reste plutôt illustrative, voire décorative, du fait qu'il n'y a pas le temps nécessaire pour ouvrir à d'autres explorations plus productives.

En fait, l'organisation scolaire, entre les disciplines et les évaluations, impose un temps fragmenté, compatible avec des approches par compétences minimales, un rythme autour d'exercices, pas autour de projets conséquents.

On peut y voir l'opposition centenaire entre Thorndike et Dewey, rappelée par Justin Reich (2012) et la mise en garde d'Ellen Lagemann selon laquelle l'histoire de l'éducation au 20e siècle peut être expliquée comme une bataille entre Thorndike et Dewey, dans laquelle Dewey a perdu. Cela correspond à deux visions éloignées de la personnalisation. La première vise à améliorer les performances individuelles, via un diagnostic individuel, puis l'application d'algorithmes pour fournir à chaque élève un contenu adapté et stimulant afin de l'aider à obtenir de meilleurs résultats à des tests standardisés. La seconde ouvre à un monde d'informations afin de donner aux élèves le pouvoir d'explorer et de créer, de suivre leurs intérêts et leurs passions dans diverses directions. Cette dernière vision émancipatrice (Dewey) est supplantée par une vision orientée vers le contrôle et la performance individuelle (Thorndike).

Pourtant, il semble que, en reprenant les idées de micromonde, il y aurait un terrain de rencontre fécond entre informatique et mathématiques autour de la modélisation. Pour cela, une certaine maîtrise de l'informatique devrait être acquise assez tôt dans la scolarité (Bruillard, 2012) pour être disponible lors de la mise en œuvre d'activités sur des modèles dès le collège. Sinon, informatique et mathématiques risquent de coexister comme des disciplines parallèles, indépendantes, ne tenant pas compte l'une de l'autre, avec l'apport potentiel de technologies informatiques puissantes faisant miroiter des choses inaccessibles. Dans le rapport au temps des activités (durée) et aux évaluations, la question devient alors celle de l'impact de la délégation d'une partie des tâches aux machines, que ce soit celles réalisées par les élèves ou celles menées par les enseignants.

## 2. Le regard naturellement riche de la didactique des mathématiques : des contraintes propulsives pour l'avenir technologique

Dans son célèbre ouvrage intitulé « Gödel, Escher et Bach », Douglas Hofstadter aborde la notion de « contraintes » de manière complexe et nuancée. À travers ses réflexions sur la cognition, la créativité et les systèmes formels, l'auteur souligne à la fois les aspects limitatifs et créatifs des contraintes. En effet, celles-ci peuvent stimuler l'exploration de nouvelles solutions et favoriser l'émergence de la complexité. Elles agissent comme des structures organisatrices, définissant les capacités d'un système et fournissant des explications lorsque nécessaire. Ce même principe s'applique à l'enseignement des mathématiques, où les concepts et les processus mathématiques conditionnent l'apprentissage. Pour comprendre ce que les technologies permettent déjà, nous pouvons examiner les technologies en général, ou réfléchir à la manière dont les modèles spécifiques de la didactique des mathématiques devraient s'intégrer à la modélisation informatique. Cependant, chaque fois que nous envisageons cette perspective et cherchons à la concrétiser, de nouveaux défis se présentent. Chaque avancée technologique qui facilite le travail mathématique et augmente l'espace des possibilités s'accompagne également de nouvelles contraintes qui entravent autant la création d'un dispositif didactique plus adapté que la conception d'un artefact numérique plus intelligent. Pour l'usager, la nouvelle technologie relance sa genèse instrumentale, et la valeur ajoutée est parfois si faible qu'on se demande vraiment si elle répondait à une problématique ou si ce n'était qu'un effet de mode. La notion de distance instrumentale, issue de la recherche, permet même d'étudier comment des contenus mathématiques sont transformés par les outils numériques (Haspekian et al., 2023). Et il est crucial de noter que des obstacles proviennent souvent de facteurs externes à la didactique des mathématiques ou à l'informatique. Où en sommes-nous, où allons-nous ?

## 2.1. Où en sommes-nous ?

### *2.1.1 Les systèmes qui nous entourent*

Au cours des dernières années, les avancées technologiques dans le domaine de l'enseignement des mathématiques n'ont pas suivi le rythme effréné observé dans l'industrie. Cependant, plusieurs entreprises et organisations spécialisées méritent d'être mentionnées pour leurs réalisations significatives. Parmi elles, on peut citer Mathletics, DreamBox Learning, Khan Academy, Math-U-See, IXL, Mathway et Euclid Learn, qui jouissent d'une bonne popularité chez nos voisins du sud[2]. Parallèlement, de nombreuses universités et instituts de recherche continuent à développer des médias numériques et des logiciels éducatifs dédiés aux mathématiques, que ce soit pour leurs propres programmes de formation ou pour les écoles externes. De plus, des développeurs indépendants, souvent des enseignants passionnés réunis au sein de petites équipes, se consacrent à la création de logiciels d'enseignement des mathématiques. Certaines équipes plus importantes, comme celle de GéoGébra (Hohenwarter, 2022) à la Johannes Kepler Universität Linz, se démarquent en s'impliquant conjointement dans diverses activités connexes. Ces activités incluent le développement de techniques intégrant plusieurs logiciels éducatifs, la recherche en didactique des mathématiques, la formation des enseignants et la promotion de la collaboration internationale pour

---

[2] L'auteur parle de son point de vue géographique de chercheur à l'Université de Montréal [Note des éditrices]

l'enseignement des mathématiques. Cependant, ces initiatives demeurent des exceptions dans le vaste monde de l'éducation, principalement en raison des contraintes et des décisions dont nous avons précédemment discuté. En ce qui concerne les outils et les pratiques, on peut identifier globalement les éléments suivants :

- Les logiciels de planification et de gestion de classe qui offrent aux enseignants la possibilité de planifier et de suivre les progrès des élèves en mathématiques. Ils peuvent inclure des outils pour créer des programmes d'études, des évaluations, des feuilles de notes ou des communications aux parents.
- Les logiciels d'enseignement qui fournissent des leçons animées ou interactives, utilisent des exercices, des jeux et d'autres activités en ligne pour soutenir les élèves dans leur apprentissage, et peuvent engager des systèmes tuteurs, des explications et des tâches d'évaluation qui facilitent l'apprentissage autonome.
- Les logiciels de résolution de problèmes : ces logiciels permettent aux élèves de résoudre des problèmes mathématiques en utilisant des outils tels que des calculatrices, des graphiques et des tableurs, incluant toute la variété des possibilités de résolution rendues possibles par les logiciels de géométrie dynamique. Ils peuvent intégrer des bases de problèmes qui s'adaptent aux rythmes et aux compétences mathématiques des élèves.
- Les logiciels de visualisation de données afin d'explorer et de visualiser des données mathématiques à l'aide de graphiques, de tableaux et d'autres outils de représentation sémiotique. Ils peuvent s'employer plus particulièrement pour aider les élèves à saisir les concepts de statistiques et de probabilités, ou pour apprendre à coordonner de façon dynamique différents systèmes de représentation sémiotiques typiques en mathématiques.
- Les logiciels de simulation et de modélisation pour que les élèves puissent à la fois manipuler des objets virtuels et proposer des situations modèles mathématisables en vue de problématiser certains phénomènes extra mathématiques. Ces logiciels sont particulièrement utiles pour simuler des situations réelles ou imaginaires, notamment avec la réalité augmentée, afin d'étudier l'implication des contraintes ou des variables retenues, et aussi les conséquences des différentes actions ou décisions. Ils peuvent s'employer dans l'enseignement pour montrer comment les connaissances

mathématiques sont utilisées dans la vie réelle, ou pour évaluer l'effet de certains algorithmes avant d'entreprendre une expérience coûteuse ou techniquement complexe.

- Les logiciels de calcul et de raisonnement qui proposent toute une panoplie d'outils de calcul avancé et de raisonnement automatisé pour l'établissement de conjectures ou la réalisation de preuve dans des situations mathématiques complexes.

Ces catégories ne sont pas du tout étanches, elles constituent un exemple parmi d'autres pour montrer l'étendue du paysage actuel. Nous aurions pu parfaitement prendre aussi « logiciels de géométrie » ou « logiciels de jeux éducatifs », ou nous inspirer plus directement d'ouvrages récents comme le *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (Pepin, Gueudet & Choppin, à paraître, 2024). Dans celui-ci, on trouve notamment des études qui se penchent sur la contribution des techniques d'intelligence artificielle à la conception d'environnements numériques pour l'enseignement des mathématiques (Lagrange, et al., 2023), ou qui traitent du comment et du pourquoi de l'évaluation des ressources numériques (Trgalova, et al., 2023). Dans ce qui suit, nous souhaitons nous concentrer sur la contribution de l'intelligence artificielle à l'enseignement des mathématiques, avant d'introduire, dans la section suivante, le développement des nouvelles mathématiques dans le monde contemporain et de souligner l'importance actuelle de l'instrumentation avec des artefacts numériques.

L'ouvrage intitulé *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (2022)[3] présente une approche concrète soutenue par des travaux de didactiques, mathématiques et informatiques, résultant d'une collaboration internationale dynamique. Il met en évidence comment l'intelligence artificielle (IA) peut être mise au service de l'apprentissage mathématique humain. Plus précisément, l'ouvrage explore la contribution de l'IA à l'enseignement des mathématiques, en mettant en avant la création de milieux d'apprentissage utilisant l'IA pour le travail mathématique à l'école. Il aborde également l'apprentissage des mathématiques assisté par l'IA, y compris un regard sur la recherche empirique pour mieux comprendre le présent et l'avenir de l'IA dans l'enseignement des mathématiques. On y trouve une classification des systèmes d'IA pour l'enseignement des mathématiques (Van Verenberg et Pérez-Suay, 2022), une illustration de l'utilité des outils de raisonnement automatisé avec GéoGébra (Kovács et al., 2022) et un

[3] Une note de lecture est également disponible dans le numéro 27 des Annales de didactique et de sciences cognitives sous la plume de Jean-baptiste Lagrange (2022).

examen du logiciel QED-Tutrix (2022) qui soutient l'élève en résolution de problèmes de preuve en combinant l'intelligence naturelle de l'utilisateur avec l'intelligence artificielle du système tuteur (Font et al., 2022).

Pour la suite, nous devons revenir sur la classification mentionnée précédemment. Il est indéniable qu'elle propose une catégorisation des types d'IA non pas dans une perspective générale, comme avec les approches de l'IA symbolique et de l'IA statistique en recherche (cf. section 2.2.2), mais orientée en fonction de la particularité « contraignante » des connaissances mathématiques. Dans un contexte où l'actualité continue de poser à juste titre : « pourquoi les IA ont-elles tant de difficultés à faire des mathématiques ? » (Vey, 2024), elle prend tout son sens. Mais auparavant, en raison d'un caprice à la fois éditorial, où la chronogenèse des textes scientifiques demeure autonome, et technologique, marqué par l'émergence croissante des modèles d'IA générative au cours de la dernière année, il est essentiel de se référer à l'article de Emprin et Richard (2023). De fait, cet article se présente comme un complément indispensable pour approfondir notre compréhension de la problématique de l'IA. Il offre un état des lieux et explore des questions spécifiques qui sont propres à la didactique des mathématiques et à l'intelligence artificielle. Si l'on envisage de développer davantage ce sujet, de nouveaux discours pourraient très certainement aborder les défis actuels de l'IA dans la configuration du travail mathématique, de l'hybridation humaine à l'automatisation, en mettant en lumière les synergies entre l'IA symbolique et les modèles génératifs. Nous évoquons brièvement la notion d'hybridation dans les sections suivantes à partir de deux projets technologiques.

### *2.1.2 Didactique des mathématiques et intelligence artificielle*

Le lien historique et naturel entre l'IA et la didactique des mathématiques est bien établi[4]. Un exemple marquant est l'ouvrage *Didactique et intelligence artificielle* (Balacheff, 1994), publié il y a près de 30 ans, qui mettait en évidence les progrès de l'IA et leur impact sur le développement d'environnements informatiques pour l'apprentissage humain. Cependant, cette période initiale d'enthousiasme a été suivie d'une phase plus sombre de désillusion au cours de laquelle nous avons sous-estimé les défis à relever. Aujourd'hui, d'une manière paradoxale, l'IA semble converger à nouveau avec la didactique, en proposant des approches axées sur la résolution de problèmes non routiniers. Ces approches intègrent des phases

[4] Dans nos considérations sur l'intelligence artificielle, nous reprenons des éléments qui ont été publiés dans les actes de la 21e école d'été de didactique des mathématiques, autour d'une table ronde sur l'IA et l'apprentissage des mathématiques (cf. Richard, 2022).

d'apprentissage, de modélisation et de prédiction qui évoquent à la fois le travail mathématique et la capacité des experts à concevoir des solutions. Pour que l'IA joue un rôle dans la réussite scolaire et le soutien des enseignants dans le suivi des acquis, toute collaboration entre un enseignant et un système tuteur ne peut se faire sans une prise en compte éclairée de la culture didactique. Le tuteur doit saisir les exigences spécifiques des relations entre les enseignants et les élèves en ce qui concerne les connaissances, afin de mieux servir ces interactions. C'est au système de s'adapter à l'humain plutôt que l'inverse, sous peine de réduire cette question à une simple problématique d'instrumentation.

L'intégration du « penser machine » et du « penser humain » en faisant appel à l'intelligence artificielle est une question antérieure au développement d'outils numériques par des informaticiens seuls. Si l'on reprend l'idée fondamentale et commune comme quoi le seul moyen de faire des mathématiques est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions, il en découle qu'en étant indispensable au travail mathématique, chaque problème représente une occasion d'apprentissage. Pour peu que l'élève en accepte la responsabilité, le processus de résolution nous informe sur l'apprentissage même, aussi bien au moment d'un blocage, du dépassement d'un obstacle ou de la simple réussite du problème. Puisqu'avec ses techniques traditionnelles, l'IA est déjà utile[5], on imagine combien elle gagne à se développer conjointement en didactique et en génie informatique dans une perspective de travail mathématique, et surtout à prospérer de façon à intégrer les utilisateurs très tôt dans le processus de conception.

L'étude sur les systèmes d'intelligence artificielle de Van Verenberg et Pérez-Suay (2022) est déjà éloquente pour préparer l'avenir. Dans leur chapitre intitulé *A Classification of Artificial InteIligence Systems for Mathematics Education*, ils abordent dès l'introduction des questions sur l'intelligence artificielle et l'apprentissage automatique, pour s'ouvrir sur l'état actuel du domaine, en

[5] Dans son chapitre intitulé *Paysage technique de l'IA*, l'OCDE (2019) souligne les progrès décisifs réalisés grâce à l'utilisation efficace d'approches statistiques par les machines pour l'apprentissage à partir de données historiques et la formulation de prévisions dans des contextes nouveaux. Avant 2011, les techniques traditionnelles de l'intelligence artificielle (IA) englobaient les arbres de décision, les algorithmes de recherche heuristique, les systèmes experts, la logique floue, les réseaux bayésiens et la recherche de motifs. Ces techniques traditionnelles ont jeté les bases de l'IA et continuent d'être largement employées dans de nombreux domaines, même si elles ont été complétées et, parfois, remplacées par des méthodes plus avancées depuis l'émergence de l'apprentissage automatique et des réseaux de neurones profonds.

présentant une nouvelle génération de calculatrices de même qu'une vision globale des systèmes tuteurs intelligents basés sur les données. Les auteurs proposent une taxonomie des techniques d'IA pour l'enseignement des mathématiques, en distinguant les extracteurs d'information, les moteurs de raisonnement, les « explicateurs »[6] et la modélisation basée sur les données. Ils revisitent le présent en abordant les calculatrices basées sur l'IA et les systèmes tuteurs intelligents. Ensuite, après avoir mis l'accent sur la modélisation étroite de l'apprenant dans les techniques actuelles, ils soulignent ainsi l'importance de l'exploration, de la créativité et de l'aléatoire. Enfin, les auteurs discutent de l'objectif de modéliser l'apprenant en mathématiques et, indirectement, la situation didactique. Cette classification offre une perspective claire et structurée des différentes techniques d'IA utilisées pour la réalisation du travail mathématique à l'école.

La modélisation de la situation didactique se révèle être un objectif à la fois audacieux et incontournable si nous aspirons véritablement à profiter de systèmes d'une utilité réelle, exploitant les avancées de l'IA et les recherches dans un intérêt commun (Emprin & Richard, 2023). De plus, la relation naturellement étroite entre les mathématiques, la didactique et l'informatique nous invite pressément à persévérer dans cette entreprise ambitieuse. En effet, la contribution majeure de l'intelligence artificielle à l'enseignement des mathématiques se révélera pleinement à travers des environnements technologiques plus avancés, personnalisés et stimulants, conçus en toile de fond pour soutenir les compétences professionnelles des enseignants. En mettant l'accent sur le travail, l'acquisition de connaissances et l'épanouissement des compétences mathématiques, scientifiques et culturelles de tous les élèves, cette contribution insufflera une nouvelle dynamique à l'école.

### 2.2. Vers où allons-nous ?

En raison de la complexité et de l'interconnexion de divers facteurs tels que les progrès technologiques, les tendances économiques et les changements sociaux, il s'avère difficile d'anticiper avec précision l'évolution future et l'utilisation des technologies numériques. En outre, malgré les réalisations technologiques existantes et les efforts consacrés par certains individus, groupes ou institutions

[6] Si les moteurs de raisonnement sont capables de résoudre des problèmes mathématiques et de générer des preuves valides, ils ne garantissent pas toujours des résultats qui sont intelligibles pour les êtres humains. En revanche, l'explicateur est un outil qui rend ces processus compréhensibles pour l'humain et, dans certains cas, il peut même avoir été intégré de manière cohérente aux modèles de raisonnement traités par la machine.

(OCDE, 2019), le contexte sociopolitique actuel pour le développement de l'IA ne semble pas nécessairement aligné sur le bien public (Lomazzi et al., 2019). À l'ère du numérique, le travail mathématique a subi des transformations profondes, ce qui nécessite une réévaluation didactique de la notion d'intelligence. Cette dernière ne se restreint plus à une faculté exclusive à l'être humain, mais englobe désormais la capacité d'une composante d'un système (qu'il s'agisse d'un agent apprenant, d'un agent tuteur, etc.) à s'adapter et à résoudre des problèmes en interagissant avec les connaissances en jeu. Cette évolution souligne ainsi l'importance d'une perspective plus large et dynamique de l'intelligence, en accord avec les nouvelles exigences imposées par le numérique.

Dans une perspective d'apprentissage ou d'utilisation d'artefacts numériques, la notion d'interaction avec le milieu semble incontournable, fût-il un milieu matériel, virtuel, social ou symbolique porteur de connaissances mathématiques. Dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques (TSDM), Brousseau (1998) définit le milieu comme étant le système antagoniste de l'élève impliqué dans la formation et l'application des concepts, processus ou attitudes mathématiques. Puisque le milieu véhicule des connaissances, celles-ci ne peuvent se révéler que lorsque l'élève l'interroge activement avec une part d'autonomie. Il ne s'agit pas d'un vis-à-vis réagissant, comme dans un modèle comportementaliste, mais bien d'un partenaire dans la création du sens. L'intelligence qui émerge de cette interaction ne dépend ni du milieu en tant qu'artéfact numérique, ni de l'humain en tant qu'individu isolé, mais plutôt de l'interaction du système élève-milieu qui définit le nouveau travail mathématique. Dans ce contexte, il est judicieux de considérer l'intelligence dans le sens traditionnellement ancré dans l'écologie, c'est-à-dire comme la capacité d'un individu à se développer en interaction avec le milieu. Ainsi, l'intelligence se révèle avant tout comme la capacité d'un individu ou d'un système informatique à s'adapter à de nouvelles situations, à comprendre et à résoudre diverses difficultés, à donner un sens aux éléments qui l'entourent, et spécifiquement chez les humains, à agir avec discernement. On peut décrire l'intelligence comme une faculté d'adaptation, une forme d'apprentissage visant à s'ajuster au milieu, ou inversement, comme une faculté de façonner le milieu pour répondre à ses propres besoins, créant ainsi une mutualisation de moyens. Cette conception élargie de l'intelligence permet d'explorer de nouvelles perspectives sur la manière dont les individus interagissent avec leur milieu et s'adaptent à celui-ci. D'ailleurs, la notion d'intelligence augmentée dans l'interaction apparaît déjà chez Douglas Engelbart (1962), célèbre pour ses travaux sur le développement de l'interface homme-machine. Ce concept prélude d'une certaine façon l'apprentissage instrumenté ou le nouveau travail mathématique qui s'enrichit avec l'usage d'une grande variété d'artefacts numériques. L'augmentation de l'intelligence qui en résulte serait caractéristique d'un système sujet-milieu émergent, en interaction, typique de celui que l'on retrouve dans la TSDM de Brousseau (1998), alors que c'est le sujet qui prend l'initiative d'un questionnement avec un milieu « artificiel » partenaire dans la construction des connaissances. Depuis l'avènement de l'apprentissage automatique et des réseaux de neurones profonds, il est désormais envisageable que les machines puissent exploiter cette forme d'intelligence augmentée pour améliorer considérablement leur contribution à l'apprentissage mathématique humain. Dans cette optique, il est nécessaire d'introduire des notions telles que l'idonéité ou le nouveau travail mathématique.

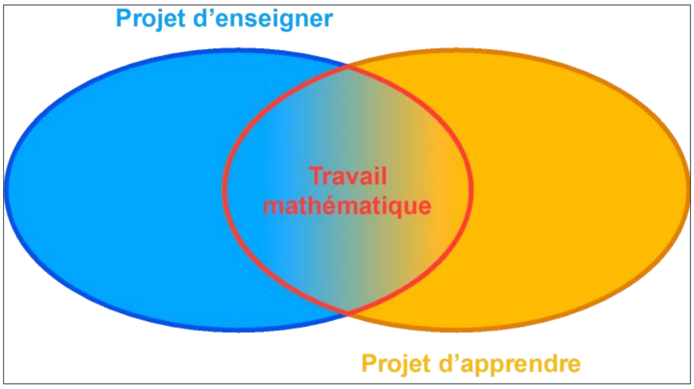



**Figure 5.** Qu'elle soit menée par un enseignant ou un élève, une tâche représente une activité ou une unité de travail à réaliser, souvent dans le cadre d'un projet ou d'une finalité plus vaste. Le travail mathématique se trouve à la croisée des projets d'enseignement et d'apprentissage, liant l'intention et la réalisation de l'apprentissage individuel à celles du soutien social, comme la collaboration et le guidage. Même si le terme « tâche » évoque une activité spécifique, dans un contexte où la problématique est à définir (ex. situation de modélisation), son sens se rapporte davantage de l'idée de projet.

### *2.2.1 Travail mathématique, idonéité et instrumentation*

La signification du travail mathématique change en fonction de l'enjeu du moment, mais surtout selon le projet de celui qui le réalise. En tant que concept fédérateur, le travail mathématique se situe à l'intersection des projets d'enseignement et d'apprentissage (figure 5). On peut voir le travail mathématique comme étant la partie visible de la pensée mathématique, même lorsqu'il s'agit de l'expression de la pensée incarnée ou de celle qui se réalise essentiellement dans l'action. Selon la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ThETM, Kuzniak et al., 2022), le travail mathématique se construit progressivement comme un processus de rapprochement entre les aspects épistémologiques et cognitifs selon trois développements génétiques entrelacés, identifiés dans la théorie comme la genèse sémiotique, instrumentale et discursive. Parce que les aspects institutionnels sont liés aux aspects épistémologiques, la notion de travail mathématique stimule la vigilance épistémologique dans les projets de formation (enseigner ou apprendre).

Lorsqu'on se centre sur le travail mathématique à l'ère du numérique, la diversité des outils technologiques utilisés affecte les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives et leurs interactions dans ce qu'on peut appeler une danse des genèses. Tout en rappelant que le travail mathématique a été de tout temps instrumenté, Flores-Salazar, Gaona et Richard (2022) définissent le nouveau travail mathématique en réfléchissant à l'interaction entre les humains et les machines afin de comprendre les nouvelles formes de travail en jeu. Les auteurs proposent des pistes intéressantes pour appréhender les formes qui se développent en cette ère numérique et leurs effets (Artigue, 2022). Parmi celles-ci, l'adaptation dans le processus itératif et convergent d'idonéité est discutée, que ce soit entre le projet d'enseignement et le projet d'apprentissage, ou l'intention du concepteur et le travail effectué par l'utilisateur.

Du point de vue du concepteur, l'idonéité s'inscrit dans une perspective d'amélioration continue qui s'appuie sur l'usage réel pour ajuster et optimiser l'exercice de conception (création de matériel didactique ou informatique) en fonction des retours des utilisateurs, mais c'est aussi un processus expert au cours duquel on tente d'intégrer le comportement humain supposé, à l'instar du lecteur modèle d'Umberto Eco pour l'écriture. En bref, l'idonéité résulte de l'adaptation et du raffinement[7], donc de l'intelligence, et, en classe de mathématique, elle s'inscrit aussi bien dans l'interaction sujet-milieu que dans l'interaction entre l'enseignent et le système sujet-milieu de Brousseau. Ainsi, lorsqu'on s'engage dans l'écriture d'un texte à travers un dialogue en question-réponse avec ChatGPT, ou lorsqu'on effectue une traduction en naviguant entre différentes langues grâce à DeepL, on suit une chaîne d'idonéité dont les éléments convergent chaque fois que l'on retient une phrase ou un passage. Pourrons-nous disposer un jour de ce genre d'outil pour soutenir la résolution de problèmes, la réalisation de preuves ou l'exercice de modélisation ? Quoi qu'il en soit, il s'agirait bien d'un milieu, dans le sens de Brousseau, en tant que partenaire de la connaissance, à la base du modèle de Balacheff et Margolinas (2005) pour raisonner sur les conceptions des élèves.

Paradoxalement, la stabilité fonctionnelle du matériel obtenu dans la quête du concepteur rend rapidement le résultat obsolète dès qu'un changement d'une certaine importance survient, comme l'introduction d'une nouvelle fonctionnalité,

[7] Selon Gonseth (2022), le concept d'idonéité, également connu sous le nom de *principe de la meilleure convenance*, introduit une solution dialectique. Voir aussi Emprin et Richard (2023) pour une section spécifique en lien avec l'intelligence augmentée.

l'atteinte des limites du domaine de validité, la prise en compte de nouvelles attentes ou besoins des utilisateurs, ou encore le désir d'améliorer la performance ou la flexibilité du matériel. L'idonéité n'est stable que provisoirement, sa remise en question demeure constante, à des degrés divers, à plus ou moins long terme. Il est donc nécessaire de bonifier le matériel « idoine » dans la durée, que ce soit pour la production de matériel didactique ou la conception d'artefacts numériques.

L'usager a, quant à lui, rarement l'occasion de manifester ses attentes auprès du concepteur. C'est sûrement moins vrai en matière de matériel scolaire, surtout lorsque l'enseignant est présent en personne, conçoit lui-même son matériel et peut négocier avec l'élève. En examinant la notion d'idonéité du point de vue du concepteur, il est intéressant de la confronter à celle d'instrumentation dans sa dimension de genèse instrumentale pour l'utilisateur au sens de la ThETM :

> As for the instrumental genesis in the ThMWS, it is first an objective entity, linking tangible artifacts and observable processes of construction. Because it also comprises a conceptual dimension transforming both the user and the mathematical knowledge, it is compatible with Vérillon and Rabardel's idea of instrumental mediation. However, instrumental genesis in the theory of MWS is based on different choices compared to Vérillon and Rabardel's notion: on the one hand it is part of a theorization of mathematical work in educational settings not limited to the use of instruments, and on the other hand it does not theorize about the transformation occurring in the instrumental genesis. The two complementary viewpoints, psychological and institutional (one providing insight into the cognitive work, the other into how techniques are understood and implemented), derived from the works of Vérillon and Rabardel, and of Chevallard, can therefore help to "flesh out" an analysis of the instrumental genesis in a particular MWS, on the condition of being cautious not to merge or confuse ideas drawn from different theoretical perspectives. (Lagrange et Richard, 2022, p.226)

Si l'on considère que les genèses sémiotiques, discursives et instrumentales s'entrelacent et rythment le travail mathématique, la ThETM se rattache facilement à l'IA dans la poursuite de la TSDM. Son importance devient évidente lorsqu'un dispositif didactique ou informatique est conçu en mettant l'accent sur l'interaction. De manière plus précise, en adoptant le modèle de Balacheff et Margolinas (2005) pour analyser les conceptions des élèves (ici, en référence à leurs connaissances personnelles), il en découle qu'agir sur l'interaction, c'est agir directement sur les conceptions, et que si l'on pouvait agir sur le raisonnement, aussi bien sur le plan des opérations que de leur gouvernance, on pourrait agir sur l'acquisition de connaissances valides et sur leurs transformations. Par ailleurs, il convient de souligner que les conceptions instrumentées diffèrent souvent des conceptions traditionnelles, comme s'il fallait avoir avec soi une petite machine pour la révéler[8]. Afin de mieux comprendre les implications de l'instrumentation, il est également essentiel de prendre en compte la problématique des contrôles.

### *2.2.2 Contrôle, nécessité et obstacle instrumental*

Dans le cadre du partenariat humain-machine, certaines rétroactions des machines ont le potentiel de changer radicalement la valeur épistémique des connaissances. Ou pourrait s'en offusquer, comme si c'était la machine qui accomplissait l'essentiel de la tâche, mais il faut reconnaître également l'instrumentation engendrée par des techniques de calcul utilisées comme artefacts symboliques. Flores Salazar, Gaona et Richard (2022) fournissent des exemples d'artefacts symboliques depuis le Moyen-Âge, tels que la technique de la multiplication par jalousie de Léonard de Pise (Fibonnacci). Malgré les aspects instrumentaux dans l'interaction avec l'utilisateur, un artefact technologique comme une calculatrice est aussi un artefact symbolique en tant qu'outil de traitement des connaissances.

Un autre exemple concerne l'usage des moteurs déductifs pour vérifier la validité d'une assertion mathématique (Hanna et al., 2019). Les démonstrateurs automatiques d'aujourd'hui sont très utiles pour établir la vérité d'un énoncé (Quaresma, 2022), mais ils ne dévoilent pas la logique de la preuve engagée par la machine, pas plus qu'ils ne produisent de preuves lisibles par l'humain. En revanche, leur efficacité même est un levier, notamment pour des raisons heuristiques ou d'idonéité. Certains outils de raisonnement automatisés, comme ceux qui sont implémentés dans GéoGébra (Kovács et al., 2022), aident à formuler des conjectures, découvrir de nouvelles propriétés, affiner et prouver des résultats

---

[8] Prenons l'exemple d'un employé travaillant dans un grand magasin. Lors des soldes, lorsqu'un client demande le prix après l'application de la réduction, l'employé lui dit : « Un instant », puis il prend sa calculatrice de poche. Il a besoin de cet outil, car sa conception implique une séquence de touches spécifique pour effectuer les calculs. Voici un deuxième exemple : si l'on demande un demi-litre de bière dans une brasserie où des pintes sont généralement servies, le serveur a souvent du mal à comprendre, surtout si l'écran tactile de sa caisse affiche les volumes en onces. S'il ne sait pas répondre, c'est parce que le système conceptuel sujet-milieu a atteint ses limites. De plus, un obstacle culturel peut s'immiscer, car au Québec comme en Angleterre, les pintes correspondent à 20 oz, soit 568 mℓ. En France, une pinte représente un demi-litre, en raison de l'utilisation du système international d'unités, tandis qu'aux États-Unis, une pinte équivaut à 16 oz, soit 473 mℓ. Hors du monde brassicole, le terme chopine (*pint* en anglais) désigne au Canada la moitié d'une pinte (*quart* en anglais), ce qui fait que sans distinction entre volume sec ou liquide, la pinte représente 1,136 ℓ, soit 40 oz, le quart d'un gallon impérial.

géométriques à partir d'une construction géométrique dynamique. Quoi qu'il en soit, le seul fait d'employer un artéfact numérique ou une quelconque machine mathématique engendre un effet boîte noire dans la mesure où l'usager a délégué une partie du traitement à la machine. Ce qui fait que dans l'interaction au sein du système élève-milieu, une partie du travail mathématique est assumé par le milieu. La genèse instrumentale dans la ThETM se présente avant tout comme une entité objective, établissant un lien entre des artefacts tangibles et des processus de construction observables. En intégrant une dimension conceptuelle, elle opère une transformation à la fois sur l'utilisateur et sur la connaissance mathématique, ce qui la rend parfaitement compatible avec le concept de médiation instrumentale que l'on retrouve dans la littérature didactique (Lagrange et Richard, 2022).

Du point de vue des machines, les techniques utilisées en IA soulèvent plusieurs questions sur le contrôle et la validité des connaissances « médiées ». L'IA est utile pour l'automatisation, l'apprentissage machine, la vision par ordinateur, le traitement de la langue naturelle, la robotique, la recherche d'invariants ou l'évaluation de risques par simulation et visualisation. Certes, elle est souvent le résultat de combinaisons plus ou moins sophistiquées de ces technologies, que ce soit pour le développement de voitures autonomes (vision par ordinateur, reconnaissance d'images, apprentissage profond, automatisation) ou le soutient aux diagnostics médicaux (reconnaissance d'images, apprentissage profond, reconnaissance vocale, formulation d'hypothèses et schémas de confiance).

Dans la recherche en IA, on identifie généralement deux approches fondamentales (OCDE, 2019). Elles sont regroupées sous l'approche symbolique, qui conserve le lien causal, mais peut souffrir de problèmes de temps de calcul exponentiel lors de son exécution, notamment avec des algorithmes de force brute. En revanche, l'approche statistique semble offrir une stratégie de résolution plus efficace face à de grandes quantités de données, bien qu'elle introduise un nouveau niveau d'opacité dans le processus, notamment lors de l'utilisation de l'apprentissage automatique profond. Contrairement à l'approche symbolique, qui peut être plus facilement schématisée pour une meilleure compréhension et permet de comprendre pleinement la logique décisionnelle, l'approche statistique peut présenter une complexité interne qui rend difficile une compréhension détaillée de son fonctionnement. De plus, elle s'appuie souvent sur des analyses fréquentielles au cours de ses phases d'apprentissage. Actuellement, on explore des hybridations qui exploitent chaque approche, notamment à travers des initiatives comme le démonstrateur de théorème AlphaGeometry (Trinh, Wu, Le, & al., 2024) ou l'intégration de la base de connaissance et des outils de calcul en langage naturel de WolframAlpha avec le prototype d'agent conversationnel basé sur la prédiction de texte ChatGPT (Wolfram, 2023).

Les approches statistiques utilisées pour l'apprentissage humain peuvent entraîner une perte de contrôle dans la structuration des connaissances, soulevant divers problèmes. Elles peuvent introduire des distorsions dans les réponses des machines, telles que celles observées avec l'IA générative, nécessitant une quantité considérable d'énergie et de ressources et suscitant des inquiétudes quant à leur soutenabilité. Ainsi, il est impératif d'assurer la fiabilité des résultats et de déterminer leur domaine de validité. En ce qui concerne les connaissances mathématiques, il est important de se demander comment générer du vrai à partir du vrai et de s'assurer de la production de connaissances non contradictoires. Assiste-t-on à des processus de traduction ou de modélisation qui impliquent une simplification de la réalité du questionnement du sujet ? Bref, comment être sûr que l'on participe encore au même mouvement ? L'étude de ces questions est certes complexe, mais leur traitement exige une collaboration constante entre l'informatique et la didactique des mathématiques (Emprin & Richard, 2023).

Tout cela, et bien plus encore, fait qu'en classe de mathématique, on doit s'habituer aux pertes de contrôle, encore faut-il que cette perte soit comprise, acceptée ou traitée d'une façon ou d'une autre. Ce n'est pas nouveau, mais l'usage des artefacts numériques n'est pas seul à créer des effets boîtes noires. Ils sont en fait inhérents à toute connaissance mathématique et à son rôle de contrôle d'une situation en classe :

> Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale. (Brousseau et Centeno, 1991, p. 176)

Prenons cette fois l'exemple de l'utilisation des nombres réels à l'école secondaire. Ils sont utilisés sans avoir été formellement définis, afin de résoudre certains problèmes et aboutir miraculeusement à la bonne réponse. Il semble alors que le travail mathématique associé à l'utilisation du calcul puisse être mené sans nécessiter une clarification explicite. Cependant, dans les situations où l'utilisation des nombres réels est inévitable, il est légitime de se demander quels principes les régissent en termes d'exactitude, de validité et d'authenticité. À l'instar du modèle proposé par Balacheff et Margolinas (2005) dans l'interaction entre un sujet et un milieu, la nécessité de connaissances provient des opérations internes qui transforment les problèmes et permettent la construction d'une réponse appropriée en fonction des conditions de la situation. La question plus générale du contrôle suit plutôt des principes externes, comme des invariants structuraux ou la logique de raisonnement contraints par la situation. En d'autres termes, s'il y a des trous dans les conceptions des élèves, ce n'est pas seulement parce qu'on a atteint les limites du domaine de validité des connaissances effectives à travers les problèmes qu'on sait résoudre. C'est parce qu'il faut aussi les chercher au sein du système élève-milieu, car c'est lui qui définit les connaissances par le problème en jeu, le questionnement du sujet, le traitement de la machine, les attentes sociales ou les impératifs de la situation. Comme les situations où le problème est déjà donné comparativement aux situations de modélisation où la problématisation est à construire. Il semble donc essentiel d'intégrer la notion d'*obstacle*, largement étudiée en didactique, sous la forme d'un obstacle instrumental afin de rendre compte du nouveau travail mathématique qui se déploie à l'ère du numérique.

Dans le sillage des travaux fondateurs de Bachelard (1938) et Gonseth (2022), Duroux (1982) introduit la notion d'obstacle en la comparant à une difficulté. Il propose une perspective selon laquelle les obstacles ne se résument pas à des circonstances exigeant beaucoup d'efforts ou caractérisées par un manque, mais représentent plutôt des connaissances ou des conceptions. Par la suite, Brousseau (1989) avance l'idée que les erreurs récurrentes sont des constructions issues des conceptions des apprenants, et non de simples accidents. Même si ces conceptions sont erronées, elles ne sont pas dénuées de valeur, car elles peuvent produire des réponses appropriées dans un contexte spécifique et, en dehors de ce contexte, conduire à des réponses erronées. Ainsi, pour obtenir une réponse correcte couvrant un champ d'application plus large, il est nécessaire d'adopter un point de vue très différent. Les obstacles, d'origine essentiellement cognitive, peuvent trouver leurs sources dans des facteurs ontogéniques, épistémologiques, didactiques ou culturels, influençant ainsi leur évolution. En proposant un obstacle lié au milieu, nous envisageons les erreurs récurrentes et persistantes dans l'interaction avec un artéfact numérique comme le résultat *produit par* et *construit autour de* conceptions. Voici une illustration de ce type d'obstacle.

Lorsqu'on résout un problème géométrique de façon traditionnelle, on dessine une figure à partir d'une description textuelle et on interprète la figure en coordonnant la signification des signes figuraux avec celle des signes discursifs. Si la figure est construite par un tiers, la situation devient plus complexe. En effet, toute représentation figurale existante cache l'ordre selon lequel la figure a été construite. Bien que le lecteur puisse partiellement le déduire s'il a accès au protocole de construction ou si des éléments contextuels semblent suffisamment clairs, il n'est pas toujours en mesure d'y arriver. Les représentations figurales sont aussi des formes qui se représentent elles-mêmes, il faut parfois une description discursive ou un dialogue avec l'auteur de la figure pour comprendre ce qu'elle est ou ce qu'elle est censée représenter. Ce problème se retrouve en géométrie interactive, mais le statut de la figure, représentée ou médiée par la machine, et les variations figurales possibles engendrent un nouveau type de complexité. Dans Flores Salazar, Gaona et Richard (2022), on montre que dans un logiciel comme GéoGébra il y a plusieurs figures : une *figure apparente* dans le module de construction géométrique qui autorise le déplacement, une *figure paramétrable* définie par la logique de la construction, une *figure numérique* sur laquelle on peut vérifier par échantillonnage certaines propriétés, de même qu'une *figure symbolique*, modélisée par l'algèbre, qui peut statuer sur la véracité de propositions à l'aide de techniques de calcul symbolique dans une logique modale.

L'imbrication de diverses figures donne à l'objet figural instrumenté toutes les caractéristiques d'une figure émergente par rapport à l'idéal traditionnel. Ainsi, en raison du dynamisme inhérent aux figures instrumentées, qui englobe à la fois la préservation des liens figuraux et l'animation des objets, certains énoncés mathématiques ne peuvent être observés qu'en animant des configurations (Coutat et al., 2016). De plus, certaines propriétés ne se révèlent que lorsque des conditions particulières envisagées par l'utilisateur sont réunies (Kovács et al., 2022). Ces processus impliquent un nouveau travail mathématique dans l'interaction avec le milieu, et si un obstacle devait surgir, il faudrait le traiter en regardant aussi ce que dit le milieu et ce qu'il est possible de dire avec lui. Des considérations similaires sont également abordées par Richard, Venant et Gagnon (2019) concernant les preuves instrumentales et le raisonnement instrumenté.

Cet exemple d'obstacle instrumental ne porte pas sur l'efficacité de l'artéfact numérique, mais caractérise plutôt la nature de l'interaction cognitive. Il est évident qu'en réalisant un nouveau travail mathématique, de nouveaux rapports sémiotico-instrumentaux émergent. Pour identifier ce type d'obstacles de manière conventionnelle en didactique des mathématiques, il serait nécessaire de recenser les erreurs récurrentes et persistantes observées dans les pratiques courantes. Malheureusement, compte tenu de la rapidité fulgurante avec laquelle les artefacts numériques sont développés et utilisés dans les écoles, cette tâche s'avère pratiquement impossible. Selon notre point de vue, la recherche d'idonéité dans la réalisation du travail mathématique est inévitable et représente un compromis optimal, offrant un avantage décisif dans une perspective humaine et objective d'interaction avec les artefacts numériques. Il s'agit d'un processus évolutif ouvert et cohérent avec le progrès des connaissances. Pour conclure avec un clin d'œil : « nous adoptons le principe d'idonéité car il se révèle idoine » (Gonseth, 2022).

## 3. Conclusion générale

Les travaux présentés dans les deux parties de cet article mettent en évidence la complexité et l'étendue du domaine qui englobent l'informatique, les technologies numériques et leurs interactions dans les sciences de l'éducation et la didactique des mathématiques. Dès l'introduction de la section 1, l'ampleur de ce domaine devient apparente. Bien que certaines intersections se produisent localement, tel que l'intérêt commun pour l'intelligence artificielle dans l'éducation, les recherches sur l'éducation à l'informatique et la didactique des mathématiques demeurent largement distinctes. Dans la section 2, on approfondit spécifiquement ce point en soulevant l'effet incontournable des contraintes inhérentes au travail mathématique. Les questions relatives aux ressources numériques et aux pratiques instrumentées, qu'elles soient celles des enseignants ou des élèves, sont abordées directement ou indirectement dans les deux textes. Toutefois, traiter ces questions sous un point de vue intégré représente un défi considérable qui touche à des aspects qui ne sont pas naturellement compatibles, notamment pour la conception d'artefacts numériques.

L'interdisciplinarité dans le monde de l'éducation, particulièrement en relation avec les technologies d'aujourd'hui, reste largement à construire. La question se pose : peut-on la développer ou la promouvoir en abandonnant l'approche disciplinaire actuelle ? Les définitions spécifiques à chaque discipline, issues de leurs institutions de référence, continuent d'être essentielles pour préserver la rigueur, éviter la superficialité et garantir l'efficacité. Il est donc primordial de les comprendre dans chaque domaine avant de chercher à les croiser ou à trouver des compromis satisfaisants. Insuffler de l'intelligibilité dans ce vaste et évolutif domaine reste une tâche extrêmement complexe. Ce texte apporte sa contribution au thème de l'étude, mais oser une synergie plus poussée dans le cadre d'un dialogue c'était risquer d'appauvrir la qualité scientifique des contributions par des rapprochements qui pourraient s'avérer d'une grande « banalité » !

## Bibliographie

ABELSON, H. & DISESSA, A. (1986). *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics.* MIT Press. 498 p.

ARTIGUE, M. (2022). Note de lecture : Mathematical Work in Educational Context—The Mathematical Working Space Theory Perspective. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 27*, 175-182.

BACHELARD G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Paris : Vrin.

BALACHEFF, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques 14*(1,2), 9-42.

BALACHEFF N. & MARGOLINAS C. (2005). Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans A. Mercier. & C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, 75-106. Grenoble : La pensée sauvage.

BARON, G.-L. & BRUILLARD, É. (1996). *L'informatique et ses usagers dans l'éducation.* Paris : Presses universitaires de France.

BOISSIERE, J. & BRUILLARD, É. (2021). *L'école digitale. Une éducation à construire et à vivre*. Paris : Armand Colin.

BORNING A. (1977). Thinglab—An Object-Oriented System for Building Simulations Using Constraints in *Proceedings IJCAI 77*, pp.497-498.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. & CENTENO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques 11*(2,3), 167-210.

BRUILLARD É., & BARON G.- L. (1998). Setting up virtual films with preservice teachers as a preservice training activity: a case study in mathematics, *in Technology and Teacher Education Annual 1998*, *Proceedings SITE 98*, AACE, Washington DC, 10-14 march 1988, p. 607-609.

BRUILLARD É., & BARON G.-L. (1998). Vers des manuels électroniques ? Résultats d'une étude en mathématiques en classe de sixième, *in Sciences et Techniques Éducatives, vol. 5, n° 4*, p. 343-370.

BRUILLARD, É. (1996). Les machines à enseigner. Hermès.

BRUILLARD, É. (2012). Lire-écrire-computer : émanciper les humains, contrôler les machines. In e-Dossier de l'Audiovisuel « Éducation aux cultures de l'information », INA. En ligne : http://www.inasup.com/ressources/dossiers-de-laudiovisuel/les-e-dossiers-de-laudiovisuel/lire-ecrire-computer-emanciper-le

BRUILLARD, É. (2016). Quelle informatique à repenser et à construire pour les élèves de l'école primaire ? *In F. Villemonteix, J. Béziat & G.-L. Baron (éds.), L'école primaire et les technologies informatisées. Des enseignants face aux TICE*. Lille : Presses Universitaires du Septentrion,

BRUILLARD, É. (2019). Chapitre 12 : Évaluer et certifier des compétences numériques *In Baron G.-L. & Depover C. (éds.), Les effets du numérique sur l'éducation*, Lille : Presses universitaires du Septentrion.

CHOPPIN, A. (2005). L'édition scolaire française et ses contraintes : une perspective historique. *In Bruillard Éric (dir.). Manuels scolaires, regards croisés. CRDP de Basse-Normandie, Documents, actes et rapports sur l'éducation*, Caen.

COLLINS, A. & HALVERSON, R. (2009). Rethinking Education in the Age of Technology: The Digital Revolution and Schooling in America. New York, Teachers' College Press.

COUTAT, S., LABORDE, C., & RICHARD, P.R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 93*, 195–221.

DAVIS, M. R. (2019). How will AI change the role of the teacher around personalized learning? EdWeek, November 5, 2019

DEEPL [Logiciel de traduction automatique]. (2022). Consulté le 5 décembre 2022. URL : https://www.deepl.com/translator.

DIEUDONNÉ, J. (1968). *Calcul infinitésimal*. Paris : Hermann.

DOREY, S., BLONDEL, F.-M., BRUILLARD, É. (2013). Common uses of molecular visualization software in secondary school: reaching a saturation point. SITE 2013, New-Orleans; full paper, 25-29 March.

DOWEK, G. (2011). Les quatre concepts de l'informatique. *Sciences et technologies de l'information et de la communication en milieu éducatif : Analyse de pratiques et enjeux didactiques.* Oct 2011, Patras, Grèce. pp.21-29. ⟨edutice-00676169⟩

DROT-DELANGE, B., PELLET, J.-P., DELMAS-RIGOUTSOS, Y., BRUILLARD, É (2019). Pensée informatique : points de vue contrastés, *Rubrique de la Revue STICEF, Volume 26, numéro 1.*

DUROUX, A. (1982). *La Valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure*. France : Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

EMPRIN, F., & RICHARD, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 28*, 131-181. https://doi.org/10.4000/adsc.3286

ENGELBART, D. C. (1962). *Augmenting Human Intellect: A conceptual framework*. Menlo Park, CA: Stanford Research Institute.

FEURZEIG W. & PAPERT, S. (1968). Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics, *in F. Bresson et de M. Montmollin (eds), La recherche en enseignement programmé, tendances actuelles, Actes Colloque OTAN, Nice, mai 1968,* Dunod, coll. « Sciences du comportement », n° 8, p. 233-248.

FLORES SALAZAR, J. V., GAONA, J. & RICHARD, P.R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P. R. Richard (dir.) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 18*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8.

FLUCKIGER, C. (2019). *Une approche didactique de l'informatique scolaire.* Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2019, 228 p.

FONT, L., GAGNON, M., LEDUC, N. & RICHARD, P. R. (2022). Intelligence in QED-Tutrix: Balancing the Interactions Between the Natural Intelligence of the User and the Artificial Intelligence of the Tutor Software. Dans P. R. Richard, M. P. Vélez, M. P. & S. Van Vaerenbergh, S. (dir.) *Mathematics Education in the Age of*

*Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_3.

HANNA, G., REID, D. & DE VILLIERS, M. (dir.) (2019). *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 14*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1.

HASPEKIAN, M., KIERAN, C., DRIJVERS, P., BRÅTING, K., TABACH, M. (2023). Algebra Education and Digital Resources: A Long-Distance Relationship? In B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (Dir.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1-16). Springer International Handbooks of Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_16-1

HOHENWARTER, M. (2022). GeoGebra Classic 5.0 (Version 5.0.426.0-d) [Logiciel et site Web]. Consulté le 5 décembre 2022. URL : https://www.geogebra.org/.

GONSETH, F. (2022). *La géométrie et le problème de l'espace* (Rééd. en un volume des ouvrages publiés entre 1945 et 1955). St-Imier, Suisse : Association F. Gonseth.

KOVÁCS, Z., RECIO, T. & VÉLEZ, M. P. (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What Are They? What Are They Good For? Dans P. R. Richard, M. P. Vélez, M. P. & S. Van Vaerenbergh, S. (dir.) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2.

KUZNIAK, A., MONTOYA-DELGADILLO, E. & RICHARD, P. R. (dir.) (2022). *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 18*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

LABORDE, C., & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 14(1.2), 165–210. https://revue-rdm.com/1994/cabri-geometre-constituant-d-un/

LAGRANGE, J. B. & RICHARD, P. R. (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (dir.) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 18*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9.

LAGRANGE, JB., RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P. & VAN VAERENBERGH, S. (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education. In: Pepin, B., Gueudet, G., Choppin, J. (dir.) *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer International Handbooks of Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_37-1

LAWLER, B. (2010). Préface, ré-édition du texte de Feurzeig et Papert (1968), *Interactive Learning Environments, Volume 19, 2011 — Issue 5*. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10494820903520040

LOMAZZI, L., LAVOIE-MOORE, M., GÉLINAS, J. & HÉBERT, G. (2019). *Financer l'intelligence artificielle, quelles retombées économiques et sociales pour le Québec ?* consulté le 1er mars 2022. URL : https://iris-recherche.qc.ca/publications/financer-lintelligence-artificielle-quelles-retombees-economiques-et-sociales-pour-le-quebec/.

MARTIN, Y. (1993). Cabri géomètre : applications didactiques. *Expressions*, 03, 189-241. Hal-02399798

MEANS, B. (2010). Technology and education change: Focus on student learning. *Journal of Research on Teacher Education*, 42, 3, 285-307.

MOCHIZUKI, Y. & BRUILLARD, É. (eds.) (2019). Rethinking pedagogy: Exploring the potential of Technology in Achieving Quality Education. UNESCO MGIEP. https://cloud.parisdescartes.fr/index.php/s/wpt7gerq6FxdSmc

NICOLLE, A. (2004). Prolégomènes à une théorie des processus interactifs de durée indéfinie. *Publication du séminaire « Sujet, Théorie et Praxis »*, 2004, France. p.29-45. ⟨hal-00250956⟩

OCDE (2019). *L'intelligence artificielle dans la société*. Éditions OCDÉ, https://doi.org/10.1787/b7f8cd16-fr.

PEPIN, B., GUEUDET, G. & CHOPPIN, J. (dir.). (À paraître, 2024). *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6

POTVIN, P., BRAULT FOISY, L.-M., ARVISAIS, O., BÉGIN, C., GAUVIN, I., & BRUYÈRE, M.-H. (DIR.). (2020). Qu'est-ce que la didactique ? [Numéro thématique]. *Didactique*, *1*(1). https://doi.org/10.37571/2020.01.

QUARESMA, P. (2022). Evolution of Automated Deduction and Dynamic Constructions in Geometry. Dans P. R. Richard, M. P. Vélez, M. P. & S. Van Vaerenbergh, S. (dir.) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_1.

REICH, J. (2012). Battling over the meaning of personalization. Edweek, 25 juin 2012.
https://blogs.edweek.org/edweek/edtechresearcher/2012/06/battling_over_the_meaning_of_personalization.html

RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P. & VAN VAERENBERGH, S. (dir.) (2022). Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. *How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0.

RICHARD, P.R., VENANT, F. & GAGNON, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. Dans G. Hanna, D. Reid & M. de Villiers (dir.) *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 14*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7.

SUTHERLAND, I.E. (1963). Sketchpad, a man-machine graphical communication system in *Proceedings Spring Joint computer conference 1963*, pp.329-345.

TRGALOVÁ, J., DONEVSKA-TODOROVA, A. & EDSON, A.J. (2023). Evaluation of Digital Resources: The "How" and "What for". In: Pepin, B., Gueudet, G., Choppin, J. (dir.) Handbook of Digital Resources in Mathematics Education. Springer International Handbooks of Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_45-1

TRINH, T. H., WU, Y., LE, Q. V., & AL. (2024). Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature, 625*, 476–482. HTTPS://DOI.ORG/10.1038/S41586-023-06747-5

VAN VAERENBERGH, S. & PÉREZ-SUAY, A. (2022). A Classification of Artificial Intelligence Systems for Mathematics Education. Dans P. R. Richard, M. P. Vélez, M. P. & S. Van Vaerenbergh, S. (dir.) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_5.

VEY, T. (2024, 6 février). Pourquoi les IA ont-elles tant de difficultés à faire des mathématiques ? *Le Figaro, Sciences*, p. 10. https://www.lefigaro.fr/sciences/l-intelligence-artificielle-est-elle-vraiment-nulle-en-maths-20240205

WHITE, B.Y., & FREDERIKSEN, J.R. (1987). Qualitative Models and Intelligent Learning Environments *in Lawler and Yazdani (eds.), Artificial Intelligence and Education*, Vol 1, Ablex, p.281-305.

WOLFRAM, S. (2023). *Wolfram|Alpha as the Way to Bring Computational Knowledge Superpowers to ChatGPT*. Consulté le 28 février 2023. URL : https://writings.stephenwolfram.com/2023/01/wolframalpha-as-the-way-to-bring-computational-knowledge-superpowers-to-chatgpt/.

ZABLOT, S., GHABARA, K., & BRUILLARD, É. (2021). *Collecte et traitement de données d'apprentissage : quelles pratiques des fournisseurs de ressources ?* EDA, Université Paris-Descartes.

**ÉRIC BRUILLARD**
EDA (Université Paris Cité)
eric.bruillard@parisdescartes.fr

**PHILIPPE R. RICHARD**
Université de Montréal
philippe.r.richard@umontreal.ca