LALINA COULANGE, GRÉGORY TRAIN

FRACTION À L'ÉCOLE PRIMAIRE EN FRANCE : UN « OBJET » À (RE)QUESTIONNER ?

Abstract. Fractions in primary school in France : an 'object' to (re)question? We aim to identify in this text what may pose difficulties in teaching and learning fractions at school in the French educational context. Different experiments conducted over several years within an LéA (Associated educational Place) are studied and discussed in relation to institutional requirements, as well as research work in the field of Mathematics Education. We test different tasks in the mathematics class that are not commonly used in the French curriculum and discuss their potential and limitations. This allows us to contribute to a broader perspective on the teaching and learning of fractions in France and elsewhere.

Keywords. fraction, french curriculum, share problems, benchmarking

Résumé. Nous cherchons à baliser dans ce texte ce qui est susceptible de faire difficulté dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école dans le contexte scolaire français. Différentes expérimentions conduites depuis plusieurs années au sein d'un LéA (Lieu d'éducation Associé) sont étudiées et mises en discussion avec les prescriptions institutionnelles et plus largement avec des travaux de recherche relevant du champ de la *Mathematics Education*. Nous mettons à l'épreuve de la classe de mathématiques, différentes tâches peu fréquentées dans le curriculum français et discutons de leurs potentialités et de leurs limites. Ceci nous permet plus largement d'alimenter des perspectives sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions en France comme ailleurs.

Mots-clés. fraction, curriculum français, problèmes de partage, benchmarking

---

Ce texte se veut une synthèse de travaux de recherche conduits depuis plusieurs années sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école primaire en France. Ces travaux prennent appui sur une recherche collaborative initiée dans le cadre d'un Lieu d'éducation Associé (réseau LéA-IFÉ[1]) et menée sur une période de sept ans (2014-2021), bien que nous ne présentions ici que les résultats de deux années de collaboration avec une enseignante en particulier. Même si les matériaux retenus pour l'étude restent contextualisés au curriculum français, nous nous appuyons sur des travaux de recherche s'inscrivant dans le champ élargi de la *Mathematics Education.* Nous suivons ainsi la voie déjà investie dans deux thèses en didactique des mathématiques soutenues en France sur cette thématique de

[1] https://ife.ens-lyon.fr/lea

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 65 – 119.

l'enseignement des fractions à l'école (Allard, 2015 ; Martinez-Ibanez, 2018). Notre objectif n'est pas de faire une synthèse de cette littérature, à l'instar de celles conduites dans les thèses mentionnées ci-avant qui contribuent d'ailleurs depuis plusieurs années à la diffusion des travaux de Behr *et al.* (1992) au sein de la communauté des didacticiens français. Nous souhaitons plutôt rendre compte du cheminement d'une enquête que nous avons menée, en problématisant au fil du texte un ensemble de faits observables sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions dans le contexte singulier de l'école primaire en France et en prise d'appui sur une recherche collaborative conduite sur la durée (dont nous livrons une vue synthétique en annexe). Dans cette perspective, nous nous appuyons sur des travaux ciblés, en réponse à des questions parfois très spécifiques qui ont émergé au fil de l'avancée de notre propre recherche. L'étude de ressources institutionnelles visant à documenter des spécificités de la trajectoire d'étude des fractions, telle qu'envisagée dans le curriculum français, participe de cette problématisation. En outre, nous explorons des tâches « classiquement » peu proposées, voire absentes, de la classe de mathématiques « française » – mais largement représentées dans certaines recherches de la *Mathematics Education* telles que des problèmes de partage et de comparaison de fractions convoquant ce que ces recherches désignent par du *benchmarking* et/ou du *residual thinking.* Notre enquête s'articule ainsi autour de deux volets successivement documentés : l'un visant à interroger la place et le rôle des problèmes de partage dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école, l'autre permettant de proposer quelques repères possibles dans l'enseignement de ce thème qui tendraient à renforcer la place donnée à la comparaison de fractions en primaire. Nous revenons dans un dernier paragraphe conclusif sur les principaux résultats de notre recherche et esquissons quelques perspectives concernant la question de l'apprentissage et l'enseignement des fractions à l'école primaire.

1. La fraction, un objet à (re)questionner dans le curriculum français ?

1.1. Des premiers constats d'étude étayés par des résultats d'enquêtes internationales

Depuis plusieurs années, les enquêtes internationales *Trends in Mathematics and Science Study* (TIMSS) et *Programme for International Student Assessment* (PISA) donnent à voir des résultats français en mathématiques en deçà de ceux d'autres pays de l'Union Européenne (UE) et de l'Organisation de Coopération et de Développement Economique (OCDE). Dans l'enquête TIMSS 2015 (Mullis *et al.*, 2016) et concernant le thème d'étude des fractions, Martinez et Roditi (2017) mettent en avant un différentiel important entre le pourcentage global de réussite des élèves en France (37 %) et le pourcentage moyen de réussite des élèves de 11 autres pays ou provinces[2] (64 %) en se basant sur la comparaison de 14 items sur ce thème.

Nous avons considéré un des rares items « libérés » de TIMSS 2015 sur les fractions reproduit dans la figure 1 ci-dessous (Mullis *et al.*, 2016).

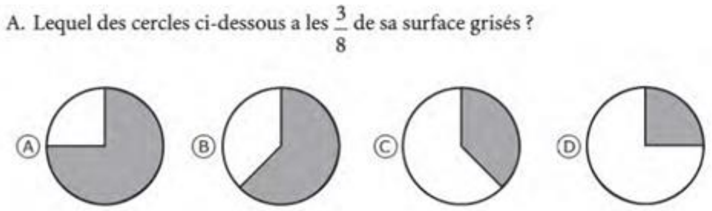


Figure 1. Item « libéré » sur les fractions de TIMSS 2015 (Mullis *et al.*, 2016b, p. 91)

Cet item n'est réussi que par 35 % des élèves français, tandis que la moyenne de réussite, calculée sur 11 pays ou provinces s'élève à 59 % (Martinez & Roditi, 2017). De plus, l'ensemble des 64 pays ou provinces participant à l'enquête affiche une moyenne de 44 % de réussite.

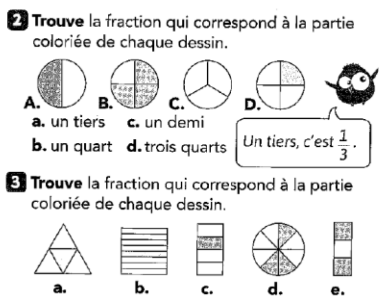
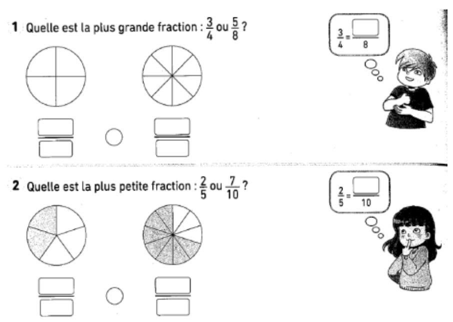
Un tel item peut pourtant être considéré comme accessible à des élèves français de fin CM1 (première année d'enseignement des fractions) dans la mesure où sont convoquées des fractions de l'unité « dites simples[3] » (demis, tiers, quarts, huitièmes), toutes inférieures à l'unité. De plus, il fait intervenir des représentations circulaires que nous supposons familières aux élèves, bien que nous n'ayons pas trouvé d'études quantifiant leur usage dans les classes françaises. Quand ces représentations circulaires sont utilisées, elles sont souvent accompagnées de traits visibles marquant les subdivisions de l'unité, à l'instar de celles trouvées dans deux manuels de CM1 contemporains (tableau 1).

---

[2] La sélection des onze pays/provinces s'est fondée sur deux critères principaux : l'accessibilité des instructions officielles et des critères économiques comparables à ceux de la France. Les pays retenus sont : l'Angleterre, la Corée du Sud, la Floride, la France, Hong Kong SAR, l'Irlande du Nord, l'Ontario, le Québec, la République d'Irlande, Singapour, et Taipei chinois.

[3] L'actuel document ressource (MEN, 2016b) définit une fraction simple de la manière suivante : « Lorsque le partage de l'unité se fait en un petit nombre de parts (2, 3, 4 …) et que l'on prend un petit nombre de telles parts, on parle de **fraction simple :** $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{10}$, etc. » (p. 1)

Tableau 1. Extrait de manuels et représentations circulaires de fractions

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Extrait de Maths explicites CM1</td>
<td>Extrait de Maths Méthode de Singapour CM1</td>
</tr>
</table>

Les manuels français que nous avons consultés[4], confirment la présence de ces représentations circulaires, mais leur fréquence d'utilisation varie sensiblement d'une ressource à l'autre : elles sont peu fréquentes dans certains manuels[5] et bien davantage utilisées dans d'autres (comme ceux cités dans le tableau 1).

Quoi qu'il en soit, l'absence de ces « traits » de partage (en demis, en huitièmes ou en quarts de l'unité) dans l'item de TIMSS peut participer d'une singularité inhabituelle pour des élèves français. Un tel constat soulève la question de l'initiative des élèves quant à l'ajout de ces traits[6] ou de leur capacité à raisonner en l'absence d'une telle indication. Nonobstant cette singularité, une variété de stratégies accessibles au niveau scolaire considéré peut *a priori* être mises en œuvre pour parvenir à la bonne réponse. Les élèves peuvent envisager (physiquement ou mentalement) le partage en huitièmes de l'unité et le dénombrement associé. Ils peuvent également raisonner « en termes de taille » des parts grisées ou non, représentées à partir de la même unité. Il est par exemple possible d'exclure les figures A et B de l'item TIMSS (figure 1) au motif qu'elles représentent toutes deux des fractions supérieures à un demi de l'unité (et $\frac{3}{8}$ étant inférieur à $\frac{4}{8}$ soit à $\frac{1}{2}$ …). En

---

[4] *Eurêka CM1* (Loarer *et al.*, 2019), *Au rythme des maths CM1*(Hélayel *et al.*, 2020), *Maths au CM1* (Duprey *et al.*, 2021), *Nouveau Cap Maths CM1* (Anselmo *et al.*, 2020), *Haut les maths !* (Kazandjian *et al.*, 2016), *Opération Maths CM1* (Peltier *et al.*, 2016), *Maths explicites* (Castioni *et al.*, 2020), *Méthode de Singapour CM1* (Kritter, 2018) et *Tandem Maths CM1 et CM2* (Grosjean *et al.*, 2021).

[5] Elles sont même absentes d'un des manuels de CM1 que nous avons consultés, celui de la collection *Cap Maths* (Anselmon *et al.*, 2020), et également très peu présentes dans le manuel de la série *Opération Maths* (Peltier *et al.*, 2016).

[6] En 2015, le test a été donné uniquement dans une version « papier crayon » aux élèves.

ce qui concerne la figure D, sa disqualification repose alors sur le fait qu'un quart de l'unité correspond à deux huitièmes de l'unité. Le fait que seulement 35 % des élèves français aient répondu correctement à cet item montre dès lors leur faible outillage au regard de cet éventail de stratégies possibles.

Ce constat soulève des interrogations sur les connaissances d'élèves au sujet des fractions dites « simples » et pourtant parfois considérées comme proches de concepts quotidiens[7] (Vygotski, 1934/1997), ainsi que sur les représentations circulaires qui leur sont parfois associées dans l'univers scolaire. Une première étude (Coulange & Train, 2020) nous a permis de montrer que des élèves de CM1[8] avaient des connaissances très hétérogènes sur ce que recouvre la désignation verbale « quotidienne » de telles fractions (la moitié, le quart) et même parfois de leur fractionnement (comme la moitié de la moitié ou la moitié du quart…) en amont de l'enseignement des fractions à l'école. Nous considérons aujourd'hui que certaines de ces connaissances quotidiennes ou « familières » peuvent se constituer en obstacles mais aussi en leviers pour l'acquisition scolaire de la notion de fraction. Ceci va de pair avec la question du rôle donné ou à donner à des représentations circulaires ou plus généralement liées à des surfaces (rectangulaires, voire de formes plus variées), susceptibles de favoriser des ancrages dans des contextes concrets et quotidiens comme le partage de « gâteaux », de « tartes » ou de « pizzas », qu'il s'agira toutefois de dépasser dans l'univers scolaire.

1.2. La question des représentations de fractions

Le curriculum français présente des spécificités qui nous paraissent à même de peser sur le rôle donné aux représentations des fractions enseignées à l'école primaire. En particulier, ce curriculum envisage un enseignement tardif des fractions (en CM1-CM2) par rapport à d'autres curricula (Martinez & Roditi, 2017 ; Martinez-Ibanez, 2018 ; Mounier & Priolet, 2015), celui-ci semblant essentiellement tourné vers l'enseignement et l'apprentissage des décimaux. Ainsi, la documentation institutionnelle (MENJ, 2002) indique depuis plusieurs années qu'au cycle 3 (élèves de 9 à 12 ans), « une toute première approche des fractions est entreprise dans le but d'aider à la compréhension des nombres décimaux. L'étude des fractions et des

---

[7] La « double germination » entre concepts quotidiens et concepts scientifiques (Rogalski, 2008) étant actuellement reprise et retravaillée par des travaux en didactique s'intéressant au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Chesnais, 2018 ; Chesnais & Coulange, 2022 ; Coulange & Train, 2020).

[8] Cette étude s'appuie sur un questionnaire adressé à des élèves de CM1 en amont de l'introduction des fractions dans la classe de mathématiques. Il a été posé une première fois à des élèves majoritairement issus de milieux socio-défavorisés (dans une école située dans un quartier prioritaire) puis à un public d'élèves hétérogène (dans une autre école située dans un autre quartier de la même ville), deux ans plus tard.

nombres décimaux sera poursuivie au collège » (MENJ, 2002, p. 21) et précise qu'« en dehors de la connaissance des fractions d'usage courant, le travail sur les fractions est essentiellement destiné à donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ou sommes de fractions décimales » (MENJ, 2002, p. 21).

Ces spécificités du curriculum français ont des conséquences sur les fractions mises à l'étude à l'école primaire et sur leurs représentations, mentionnées par Martinez-Ibanez (2018). Les élèves français rencontrent très vite des fractions supérieures à l'unité et la représentation des fractions sur la droite numérique est privilégiée en vue de mettre en lien des écritures fractionnaires et des écritures décimales.

Nous faisons l'hypothèse qu'en contrepartie, la place accordée aux représentations circulaires et même plus généralement liées aux surfaces et aux aires a pu être minorée au profit de représentations associées aux segments et aux longueurs. D'anciens travaux de recherche en didactique tendaient d'ailleurs à en pointer les potentiels écueils (Adjiage & Pluvinage, 2000), s'agissant notamment de la représentation de fractions supérieures à l'unité. Un tel discours émettant des réticences quant à l'usage de représentations circulaires et surfaciques semble avoir été repris à l'époque, notamment dans la formation initiale et continue d'enseignants du primaire[9].

Toutefois, les auteurs d'une note de synthèse récente (Sander *et al.*, 2022) redonnent une place aux représentations circulaires en mentionnant qu'elles permettent « la mise en valeur de ce qui reste pour faire le tout » (Van de Walle & Lovin, 2006 cité par Sander *et al.*, 2022). Dans le même temps, ces mêmes auteurs émettent également des réserves dans le rôle donné à ces mêmes représentations, en listant de possibles « écueils de la compréhension de l'unité » que constitue un « tout » qui peut rester implicite et réduit à un seul objet rendu visible. Sans par ailleurs disqualifier le recours à ces représentations circulaires, un tel constat conduit les auteurs de la note à privilégier la grandeur longueur mise en avant comme une transition vers la droite numérique et la représentation des fractions sur cette droite. Cette centration sur la droite numérique comme aide à la compréhension des rationnels, tend même à se renforcer actuellement, du fait de l'importance accordée à ce support dans les recherches en neurosciences (Hirsh & Roditi, 2022).

Nous ne pouvons pas nous prononcer sur l'impact du discours mentionné ci-dessus sur les pratiques ordinaires d'enseignement des fractions en France, en l'absence

[9] On en trouve trace dans plusieurs documents (dont certains étiquetés « nationaux ») à destination d'enseignants, difficiles à référencer, par exemple : https://media.eduscol.education.fr/file/education_prioritaire_et_accompagnement/17/7/jeux_fractions_decimaux-approches_115177.pdf

d'études sur le sujet. Rien n'indique qu'il influence réellement les pratiques des enseignants ni que les élèves rencontrent moins souvent les représentations circulaires dans l'apprentissage des fractions. Nous pouvons, en revanche, convenir que, quoi qu'il en soit, les élèves français apparaissent démunis, plus que d'autres, à un moment donné de leur scolarité, dans la production de réponses valides à l'item TIMSS 2015 mentionné précédemment (figure 1), cet item faisant justement appel à des représentations circulaires. En résumé, bien que le rôle des représentations circulaires et surfaciques puisse être sujet à controverse, la question d'explorer plus avant leur utilité ou leur impact dans l'enseignement des fractions, tout en tenant compte de spécificités du contexte français se pose. Une première piste d'investigation à ce sujet nous a paru résider dans la résolution de problèmes de partage pour lesquels les élèves peuvent spontanément convoquer de telles représentations.

2. Des problèmes de partage : potentialités et limites

Comme annoncé dans l'introduction, nous conduisons depuis plusieurs années une recherche collaborative sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions et des décimaux au sein d'un LéA (Lieu d'éducation Associé) développé en partenariat avec l'IFÉ (Institut Français d'Éducation). Ce LéA concernait initialement une école primaire située dans un quartier prioritaire de la ville de Bordeaux. La participation active d'une enseignante à cette recherche a été en partie à l'origine de nos propres questions de recherche. Nous donnons en annexe une vue synthétique de cette collaboration conduite pendant cinq années consécutives qui détaille les matériaux plus particulièrement concernés par cet article.

Initialement, à l'instar d'autres collègues de l'école, cette enseignante s'appuyait sur des situations d'enseignement et d'apprentissage extraites de l'ouvrage *ERMEL CM1* (Charnay *et al.*, 2005) pour introduire les fractions en CM1. Ces situations étaient elles-mêmes transposées des travaux de l'ingénierie didactique de Douady et Perrin (1986). Nous avons analysé les difficultés rencontrées par les élèves, tant dans sa classe que dans celles de deux autres enseignantes de la même école, dans ces situations d'enseignement basées sur la grandeur longueur. Suite aux retours issus de notre collaboration, cette enseignante a décidé de concevoir et tester une nouvelle approche pour l'enseignement des fractions. C'est de sa propre initiative que l'enseignante a choisi de baser cette nouvelle démarche sur des problèmes de partage équitable de type partition (Vergnaud, 1990). Nous avons accompagné la conception et analysé la mise en œuvre de cette approche auprès d'un groupe d'élèves de CM1 la première année (2017-2018), puis dans une classe de CM2, partiellement composée des mêmes élèves, la deuxième année (2018-2019). Ce choix, centré sur des problèmes de partage, peut être considéré comme assez inhabituel dans le curriculum français, en lien avec les spécificités institutionnelles mentionnées plus haut, bien qu'il soit largement documenté dans le domaine de la *Mathematics Education*.

2.1. Des problèmes « bien connus » dans la *Mathematics Education*

Les problèmes de partage concernant des « objets » (des gâteaux, des pizzas, etc.) à partager entre un certain nombre de personnes sont en effet un point d'intérêt de la littérature de recherche en *Mathematics Education* depuis de nombreuses années (Lamon, 1996 ; Post *et al.*, 1986 ; Behr *et al.*, 1986) et l'alimentent encore aujourd'hui (Charles & Nason, 2000 ; Empson *et al.*, 2006).

Ces travaux s'accordent sur la variété des stratégies mises en œuvre par les élèves dans la résolution de tels problèmes. Par exemple, Lamon (1996) identifie trois grandes stratégies de partage qu'il illustre sur des représentations circulaires représentant les « objets » du partage : *Preserved Pieces Strategy*, *Mark-all Strategy* et *Distribution Strategy*. La première qualifiée de *Preserved Pieces Strategy* est rendue possible dès lors que le nombre « d' objets » à partager est plus grand que le nombre de personnes pour lesquelles opérer ce partage. Dans ce cas, les élèves distribuent d'abord des « objets » sans en envisager le partage puis opèrent un unique partage sur un objet restant. La stratégie qualifiée de *Mark-all Strategy* consiste à partager chaque objet en le nombre de personnes indiqué, mais les parts rendues visibles ne sont distribuées que lorsqu'elles ne permettent pas de recomposer un « objet entier ». La troisième stratégie qualifiée de *Distribution Strategy* consiste de la même manière à partager chaque objet en le nombre de personnes indiqué mais cette fois-ci, la distribution s'opère avec chacune des parts obtenues (sans recomposition « d'objets entiers »). La distinction opérée entre ces trois stratégies repose ainsi sur les traces de partage des « objets » rendues visibles sur les représentations circulaires et leurs usages dans la résolution du problème. Lamon (1996) montre par ailleurs que plusieurs de ces stratégies peuvent être convoquées par un même élève en fonction du contexte dans lequel le problème est posé : qu'il s'agisse des objets donnés à partager ou des nombres d'objets et de personnes. Une hypothèse formulée par ce même auteur est que ces stratégies demeurent étroitement liées à des pratiques sociales. Cette observation l'amène à questionner les connaissances mathématiques convoquées, y compris dans les stratégies appréhendées comme les plus élaborées de son point de vue (celles utilisant du « *re-unitizing* », soit des « objets entiers » recomposés).

Lorsque l'on se réfère à des travaux plus récents sur ces mêmes problèmes de partage, les auteurs ne semblent pas parvenir à un consensus précis concernant les connaissances mathématiques convoquées dans leur résolution. Dans leur étude portant sur 112 élèves (6-10 ans), Empson *et al.* (2006) recensent diverses procédures dans le but d'« évaluer la sophistication conceptuelle des stratégies des enfants » (p. 6). La description de ces procédures sert à formuler des descripteurs des actions et des verbalisations produites par les élèves dans la résolution de problèmes de partage. Pour ces chercheurs, elle permet d'identifier les caractéristiques mathématiques des stratégies adoptées. Ils font l'hypothèse que certaines d'entre elles renvoient à l'utilisation de connaissances conceptuellement avancées sur les fractions, telles que la commensuration[10] ou le rapport partie-partie. D'autres auteurs, tels que Charles et Nason (2000) laissent davantage ouverte cette question des connaissances mathématiques d'élèves (6-10 ans) spécifiquement liées aux fractions dans la résolution de problèmes de partage. Ces auteurs mettent notamment en avant plusieurs conditions associées aux stratégies de partage convoquées par les élèves qui viseraient à faciliter l'accès à la conceptualisation qualifiée de *partitive quotient fraction construct*[11]. Ils ajoutent d'ailleurs que, bien que ces conditions soient nécessaires, elles ne suffisent pas à elles seules pour garantir l'accès à ces connaissances au regard du caractère instable des types de stratégies d'élèves observées.

Dans la suite du texte, nous avons choisi d'entreprendre une étude de ces problèmes en mobilisant les outils « classiques » de la théorie des situations didactiques. Notre approche diffère sensiblement de celles proposées par Empson *et al.* (2006) et Charles et Nason (2000), car elle prend en compte les spécificités du curriculum français, où seule la conception de la fraction comme « partage de l'unité » est enseignée et apprise à l'école en France. Nous cherchons en particulier à examiner comment cette seule conception peut conduire à une diversité de stratégies utilisées par des élèves de fin de primaire pour résoudre des problèmes de partage. En suivant une démarche similaire à celle employée pour concevoir une situation fondamentale ou « mathématique à usage didactique » (Brousseau, 1997), nous avons élaboré un énoncé générique de problème de partage, que nous détaillons dans la section suivante. L'analyse des différentes instanciations possibles de cet énoncé nous permet d'identifier des variables didactiques susceptibles d'influencer les stratégies de résolution et leur économie. Ce découpage nous est apparu comme un premier

[10] Pour partager 8 gâteaux entre 12 personnes, des élèves partagent chacun des gâteaux en 3, ce qui leur permet d'obtenir 24 parts, distribuées par la suite. Empson *et al.* (2006) associent une telle stratégie à la commensuration. Brousseau et Brousseau (1987) définissent la commensuration de la manière suivante : « une quantité (si elle existe) sera les $\frac{a}{b}$ d'un entier si en la reportant b fois (en en prenant b identiques à elle-même), on obtient a entiers » (p. 524). Nous reviendrons plus loin sur le type de stratégies mis en avant par Empson *et al.* (2006) que nous qualifions plus volontiers, de « partage simultané » (voir la section suivante), celui-ci nous paraissant *a priori* très éloignée de la commensuration telle que définie par Brousseau et Brousseau (1987) et que nous étudions par ailleurs (Fregona *et al.*, 2023).

[11] Cette conceptualisation vise à mettre en relation un problème de partage et une fraction de la façon suivante : en rapprochant le dividende du numérateur et le diviseur du dénominateur de cette fraction.

pas nécessaire pour mieux cerner les connaissances mathématiques sollicitées dans la résolution de ces problèmes.

2.2. Des problèmes de partage dans une classe de CM2

Nous nous intéressons ici à deux problèmes de partage (voir tableau 2) proposés aux élèves de CM2. Le premier a été soumis individuellement aux élèves sous forme de questionnaire avant la reprise d'étude des fractions. Le second a été proposé en classe entière après avoir recueilli les réponses au questionnaire. L'enjeu de ce deuxième problème était de permettre aux élèves d'échanger sur les stratégies de résolution envisagées et d'officialiser la reprise d'étude des fractions avec eux.

Tableau 2. Problèmes[12] de partage proposés à des élèves de CM2

Problème de partage – questionnaire posé individuellement en amont de la reprise d'étude des fractions	Problème de partage – reprise d'étude des fractions dans la classe
Pour le dîner, trois enfants ont cinq pizzas à se partager. Aide-les à faire le partage. Quelle part a chaque enfant ?	La maman de Théo doit partager 6 *cakes* entre les 15 invités du goûter d'anniversaire. Quelle sera la part de chacun ?

2.2.1. Analyse d'un énoncé générique de problème de partage

Pour analyser les deux problèmes de partage abordés en classe de CM2, nous nous appuyons sur l'énoncé générique suivant : « partager m unités entre n personnes », où m et n désignent des entiers naturels non nuls. Dans un souci de simplification, nous nous limitons au cas où m n'est pas un multiple de n. Nous privilégions les relations arithmétiques entre m et n, en supposant que ces relations influencent fortement les stratégies de partage adoptées ainsi que les connaissances mathématiques mobilisées. Nous laissons délibérément[13] de côté la nature des objets à partager et la taille des nombres impliqués, afin de nous concentrer sur les aspects arithmétiques liés à ces nombres. Nous avons ainsi repéré plusieurs stratégies liées aux problèmes de partage, susceptibles d'être influencées par les relations arithmétiques entre n et m.

[12] Les énoncés sont repris tels que proposés aux élèves, et les variations relatives aux désignations verbales ou chiffrées des nombres dans les deux énoncés relèvent d'un choix non intentionnel, sans impact visible par ailleurs sur la diversité des stratégies de résolution repérées chez les élèves.

[13] Sans minimiser le fait par ailleurs que ces variables peuvent avoir une influence sur les stratégies mises en œuvre.

Dans les deux cas de figures ($m > n$; $m < n$), il est toujours possible de faire un partage simultané de chacune des m unités en n ce qui permet de distribuer des paquets de m n-ièmes de l'unité aux n personnes.

Dans le cas où $m > n$, les élèves peuvent commencer par distribuer des unités entières aux n personnes avant d'envisager le partage des ($m – n$) unités restantes. Ils peuvent éventuellement répéter cette distribution si cette différence reste supérieure à n. Le problème revient alors à partager $m – n = m'$ unités entre n personnes (avec $m' < n$)

Dans le cas où $m < n$, ou lorsque, après avoir distribué des unités entières, les élèves se retrouvent avec m' unités à partager entre n personnes ($m' < n$), une stratégie de partage prenant appui sur les relations entre le nombres d'unités m (ou m') et n est possible *:* si m et n ont un diviseur commun p tel que $m = p \times q$ et $n = p \times r$, les élèves peuvent faire un partage simultané de chacune des m unités en r, ce qui permet de distribuer des paquets de q r-ièmes de l'unité[14].

Notons par ailleurs que des premiers partages des m unités (autres que ceux envisagés ci-dessus[15]) peuvent conduire, après une (ou plusieurs) distribution(s), à une situation où le reste à distribuer devient inférieur à l'unité. Il s'agit alors de « repartager » en n une fraction de l'unité, ce qui peut poser la question du saut de complexité que recouvre l'évaluation de cette « fraction d'une fraction » de l'unité.

Nous avons qualifié de partage simultané d'unités le partage de chaque unité prise au sein d'une pluralité d'unités potentiellement anticipé par les élèves (« je partage chacune des unités en… »). Un tel geste semble constituer une étape incontournable dans la résolution, quelle que soit la stratégie adoptée. Cependant, il reste à comprendre ce que ce geste de partage simultané d'unités recouvre en termes de connaissances mathématiques mobilisées par les élèves. Nous reviendrons sur ce point, mais avant cela, il nous paraît nécessaire d'analyser les activités potentielles d'élèves de CM2 lors de la résolution de tels problèmes.

2.2.2 Le problème de partage proposé dans le cadre du questionnaire

Le problème de partage (première colonne du tableau 1) proposé dans le questionnaire ancre les élèves dans un univers familier de partage de « pizzas », propice à la prise d'appui sur des connaissances quotidiennes. La formulation de la question vise à encourager d'une part, la représentation (schématique) d'actions de

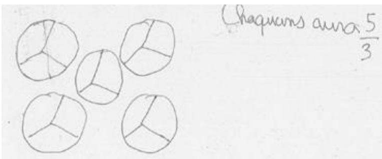
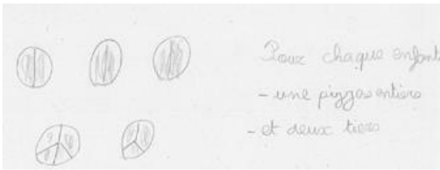
---

[14] Dans le cas particulier où m divise n (*i.e.* $km = n$), les n personnes ont chacune un $k^{\text{ième}}$ de l'unité ($q = 1$).

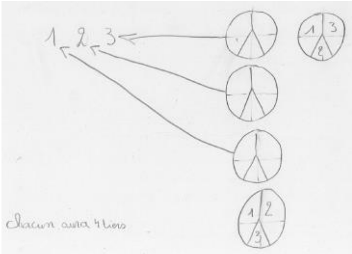
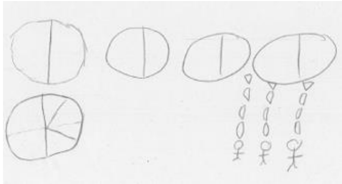
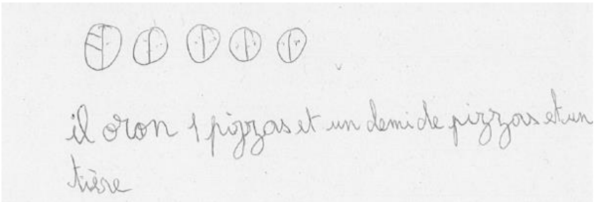
[15] Les autres partages envisagés ici correspondent à ceux qui ne permettent pas d'épuiser la collection des m unités dans une première distribution : par exemple, un partage en 2 dans le cas (m ; n) = (4 ; 7) et une demi-unité restante à partager. Cette situation se produit quand le partage en k des m unités est tel que $km > n$ et $n > (k\text{-}1)m$ (sous couvert d'existence).

partage (« aide-les à faire le partage ») et, d'autre part, à renseigner la part attribuée à chacun (« quelle part à chaque enfant ? »). Cette formulation laisse par ailleurs ouverte la manière de renseigner une telle part (par un schéma, par une désignation verbale, une écriture fractionnaire…).

L'analyse des réponses révèle une diversité de stratégies effectivement investie par les élèves de CM2. Ils sont au final assez peu à s'être trouvés totalement démunis[16], et ce, qu'ils aient ou non rencontré des problèmes de partage l'année précédente. La variété que nous illustrons ci-dessous à partir de quelques-unes des productions recueillies était rendue prévisible par notre analyse. La figure 2 illustre une partie de la diversité des approches utilisées par les élèves de CM2 dans leurs réponses, qu'elles soient correctes ou incorrectes.

Production de CLEM (qui n'a pas fréquenté des problèmes de partage en CM1)	Production de MEN (qui a fréquenté des problèmes de partage en CM1)
 Reproduction de la trace écrite sur la copie : « chacun aura 5/3 » Correcte	 Reproduction de la trace écrite sur la copie : « Pour chaque enfant – une pizza entière – et deux tiers » Correcte

[16] Sur 21 productions d'élèves recueillies en réponse au questionnaire, on dénombre : 3 non réponses ; 10 réponses fausses dont 4 comportent des aspects valides quant à la représentation de la situation de partage ; 8 réponses correctes y compris dans l'appréciation de la valeur de la part obtenue.

<table>
<tr><td>Production de LUC (qui a fréquenté des problèmes de partage en CM1)</td><td>Production de DEB (qui a fréquenté des problèmes de partage en CM1)</td></tr>
<tr><td>
Reproduction de la trace écrite sur la copie : « chacun aura 4 tiers »
Incorrecte – erreur de dénombrement des tiers de l'unité distribués</td><td>
Correcte - même s'il manque l'appréciation de la valeur de la « part » donnée à chacun comme trois demis et un sixième de l'unité</td></tr>
<tr><td colspan="2">Production de STOM (qui n'a pas fréquenté des problèmes de partage en CM1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Reproduction de la trace écrite sur la copie (avec correction orthographique) : « ils auront 1 pizza et un demi de pizza et un tiers »
Incorrecte - shématisation et appréciation d'un sixième de l'unité</td></tr>
</table>

Figure 2. Productions d'élèves – problème de partage du questionnaire : « Pour le dîner, trois enfants ont cinq pizzas à se partager. Aide-les à faire le partage. Quelle part a chaque enfant ? »

La production de CLEM renvoie à une mise en œuvre réussie d'un partage simultané de chaque unité en 3, suivie d'une évaluation de la valeur obtenue pour la part de chaque enfant après distribution, celle-ci étant codée symboliquement « $\frac{5}{3}$ ». La réponse de MEN, quant à elle, révèle deux partages simultanés : le partage de 3 pizzas en 2 (partage superflu puisque dans un « après coup », il semble avoir recomposé chacune des 3 unités à distribuer aux 3 enfants) et le partage des 2 pizzas restantes en 3 (pour distribuer un tiers à chacun). Il désigne verbalement la valeur de la part obtenue par chacun (« *une pizza entière et deux tiers de pizza* »). La production de LUC se rapproche de celle de CLEM du point de vue de la stratégie adoptée (partage simultané en 3 de chaque unité) même si elle recouvre une erreur de dénombrement et donc d'appréciation de la valeur de la part obtenue, désignée verbalement comme *4 tiers* au lieu de 5 tiers. Les productions de DEB et de STOM relèvent d'une autre stratégie : celle d'un partage simultané en deux de chaque unité, puis d'un partage d'une demi-unité en trois qui reste après distribution. Ces deux productions attestent du saut de complexité que représente le partage en 3 d'une subdivision de l'unité : STOM la représente de manière erronée et la qualifie à tort de « *tiers* », perdant de vue l'unité de référence, tandis que DEB la représente correctement mais ne la désigne pas comme un sixième de l'unité (et ne répond pas à la question posée sur la valeur de la part).

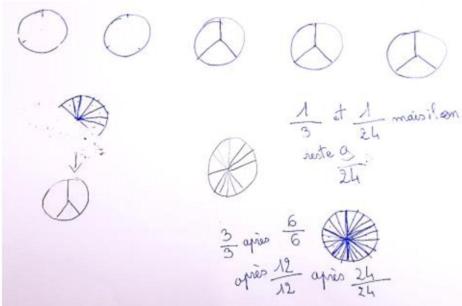
Ces productions montrent comment des élèves de CM2 ont investi des stratégies variées de résolution, avec des réussites plus ou moins partielles. Certains élèves n'avaient pourtant pas fréquenté ce type de problèmes l'année précédente et y ont été confrontés pour la première fois à cette occasion. Ces productions mettent en lumière, dans le même temps, le rôle essentiel que joue le partage simultané d'une pluralité d'unités, quelle que soit la stratégie adoptée, pour résoudre un tel problème.

2.2.3. Le problème de partage proposé dans le cadre de la séance

Le problème de partage (deuxième colonne du tableau 1) proposé lors de cette séance peut également ancrer les élèves dans un univers familier même si le contexte évoqué n'est pas tout à fait de même nature : l'évocation de *cakes* au lieu de pizzas peut ouvrir davantage à des représentations autres que circulaires. De plus, le partage de 6 *cakes* entre 15 élèves convoque potentiellement des fractions unitaires moins usuelles, telles que les quinzièmes.

Lors de la recherche de solutions, les binômes d'élèves ont rapidement investi des stratégies variées. Ces stratégies demeurent d'ailleurs globalement assez proches de celles recueillies par le biais du questionnaire, même si des valeurs de variables didactiques différentes ont conduit à quelques variations : 6 (le nombre de *cake*s) est inférieur à 15 (ce qui invite d'emblée au fractionnement) et 3 est un diviseur commun de 6 et de 15, ce qui peut conduire à une recherche d'économie dans un partage simultané en 5 . Nous en rendons compte dans les figures 3 et 4 ci-dessous, en présentant quelques extraits de transcription associés aux productions d'élèves.

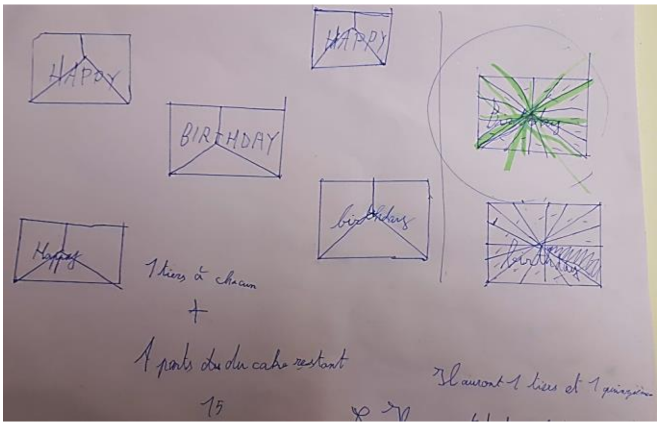
<table>
<tr><th colspan="2">Episodes observés pendant la phase de recherche en binômes</th></tr>
<tr>
<td>
Environ 9 min. après le début de la séance

Schéma légendé par MEN : « chaque enfant aura un tiers et un quinzième »
ENS[17] : ils auraient tous quelle part là ?
MEN : un tiers.
ENS : d'accord. Et tu vas partager le dernier en 15 et chacun aura ?
MEN : un quinzième.
ENS : et donc en tout ?
MEN : un tiers et un quinzième. (…)
Environ 12 min. après le début de la séance
MEN : on a terminé. (…)
</td>
<td>
Environ 11 min. après le début de la séance


LOU : un vingt-quatrième (…) ben en fait, tu as un cake, tu le partages en trois donc tu as trois parts mais tu dois partager en quinze donc c'est pas assez. Donc tu repartages les parts en deux, ça fait des sixièmes. c'est toujours pas assez, du coup tu le re-partages, chaque part en quatre, oui quatre. après ça fait des douzièmes. Après tu repartages mais je ne sais pas si tu dois partager en six pour faire des vingt-quatrièmes mais nous on veut le partager en cinq, du coup, je ne sais pas ce que c'est en fait.
</td>
</tr>
</table>

[17] L'acronyme ENS désigne l'enseignant.

Episode observé pendant la phase de mise en commun



Production projetée lors de la mise en commun

SOU : ça en faisait trop. Il en restait, on pouvait faire…

ENS. : tu me dis qu'avec six unités, tu avais dix-huit tiers. Comment tu as fait ?

SOU : du coup, euh… si on en enlève un, ça fait les quinze tiers, du coup, on peut leur donner un tiers chacun.

ENS : tu leur as donné quinze tiers c'est ça ?

SOU : oui. [en pointant l'écrit « 1 tiers à chacun »]

ENS : et il restait quoi ? il restait un gateau.

SOU : que l'on a partagé en quinzièmes.

ENS : donc ce gâteau là, vous l'avez partagé en quinze quinzièmes, c'est ça.

SOU : du coup, on leur a donné un quinzième chacun. [en pointant l'écrit « 1 part de cake restant »]

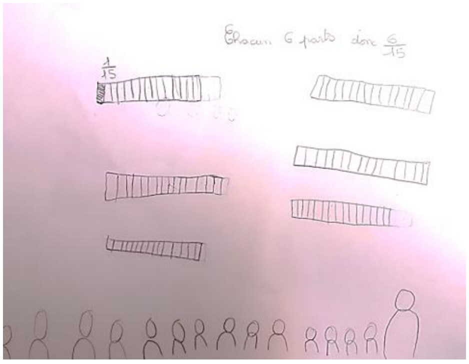
ENS : du coup, chacun a combien ? [inaudible] un tiers plus un quinzième.

Figure 3. Productions et extraits de transcription associés – « un tiers et un quinzième »

Plusieurs binômes d'élèves ont procédé à un partage simultané d'unités en trois. Notons qu'*a priori,* le saut de complexité apparu dans la résolution du problème précédent correspondant au partage d'une fraction de l'unité, n'avait pas lieu d'être ici car après distribution des tiers provenant de cinq des six unités données initialement, il reste exactement une unité et non une fraction d'unité à re-partager en quinze. Toutefois, un premier binôme d'élève, celui de LOU, a spontanément partagé simultanément l'ensemble des six unités en trois et s'est retrouvé dans une situation proche. Ces élèves ont alors cherché à re-partager simultanément les tiers de cette unité avec des partages en deux successifs et ont produit une réponse erronée : « *un tiers et un vingt-quatrième* ». À la fin de l'épisode, LOU semble revenir sur un partage simultané de chacun des tiers en cinq. Le binôme envoyé au tableau, lors de la mise en commun, a visiblement procédé de la même façon en partageant simultanément chacune des six unités en trois, ce qui leur permet d'obenir « *dix-huit tiers* » mais elles semblent avoir recomposé l'unité restante après avoir distribué les quinze tiers – ce qu'elles formulent de la manière suivante : « *si on enlève un, ça fait les quinze tiers* ». Le binôme de MEN a procédé un peu différemment : en considérant d'emblée le partage simultané en trois seulement pour cinq des six unités, puis en partageant en quinze l'unité restante. Nous faisons l'hypothèse que le binôme de MEN a anticipé que le résultat du partage de « seulement » cinq unités en trois permettrait de produire quinze parts à répartir entre quinze élèves et écarté l'unité restante. Au final, c'est davantage cette anticipation du résultat d'un geste de partage simultané d'une partie des unités données qui distingue sa stratégie de celle adoptée par le binôme de LOU.

<table>
<tr><td colspan="2">Episodes observés pendant la phase de recherche en binômes</td></tr>
<tr>
<td>


Environ 14 minutes après le début de la séance

AND a représenté six surfaces rectangulaires et tente de partager chacune d'entre elles en quinze (même si cela pose un souci du fait de son choix de « quadrillage »).
</td>
<td>


Environ 13 min. après le début de la séance

NOA : c'est bon maîtresse on a fini. (…)

ENS : il va falloir me donner la part de chacun.

NOA : chaque personne a six parts.

ENS : chacun à six parts mais comment vous exprimez ces parts
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>mathématiquement ? NOA ? une part c'est combien ?

NOA : c'est un quinzième.

ENS : un quinzième… tu as partagé en quinze d'accord. Donc si chacun a six parts.

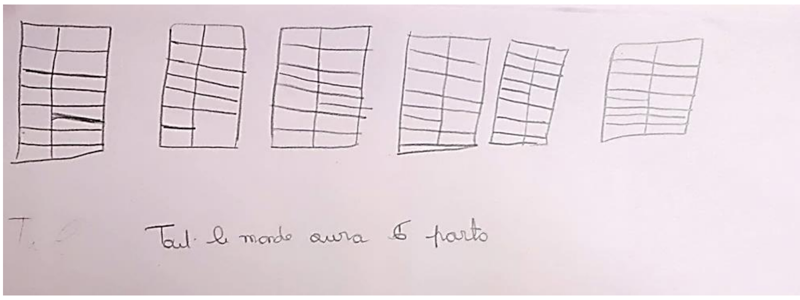
ZOL : chacun aura un quinzième

ENS : chacun a six parts, ça correspond …

ZOL : ah oui.

ENS : tu m'as dit chacun à six parts, ça correspond à quoi ?

ZOL : six quinzièmes.

ENS : donc pour vous, chacun aura six quinzièmes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Episode observé pendant la phase de mise en commun</td></tr>
<tr><td colspan="2">

ENS : donc cette solution là proposée par AN. AN, on t'écoute. Il y en a d'autres qui ont fait cette solution ? J'ai ZOL et NOA qui ont trouvé la même.

AND : oui.

ENS : AND, on vous écoute. Comment avez-vous partagé votre gâteau ?

AND : d'abord on a fait six gâteaux et après on les a partagés en… en… quinze.

ENS : donc vos six gâteaux, ils sont devenus…

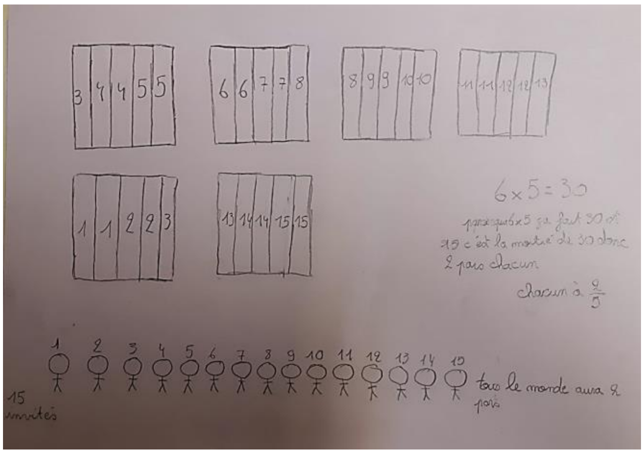
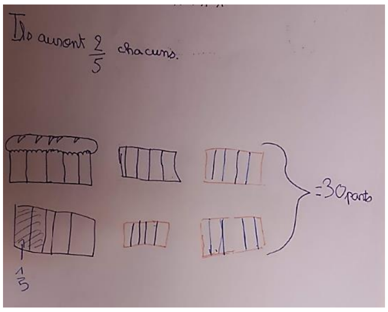
AND : en quatorze et (inaudible)… on a rajouté un petit trait.

ENS : donc vous les avez partagés en quinze. Et qu'est-ce que vous avez fait une fois que vous les avez partagés en quinze ?</td></tr>
</table>

Figure 4. Productions et extraits de transcription associé – « six quinzièmes »

D'autres binômes d'élèves ont choisi de partager simultanément chacune des six unités initiales en quinze. Il est difficile, de déterminer si les élèves perçoivent pleinement la portée systématique de cette technique à partir des données dont nous disposons. En effet, ceux qui l'ont adoptée lors de cette séance ne sont pas forcément ceux qui l'avaient adoptée précédemment pour résoudre le problème du questionnaire, et vice-versa. Par exemple, CLEM, qui avait adopté cette stratégie pour répondre au problème posé dans le questionnaire, a cette fois-ci opté pour une autre stratégie (que nous décrirons plus bas dans le texte). Ni les élèves, ni l'enseignante n'ont évoqué explicitement la portée de cette stratégie (ou d'autres) lors de la mise en commun. Par ailleurs, il est intéressant de noter que les tracés réalisés par les élèves, comme celui du partage en quinze d'une surface rectangulaire ou celui, plus haut, du partage en trois d'une autre surface rectangulaire, ne représentent pas nécessairement des partages « vraiment » équitables. Cet aspect n'a pas été commenté ni par l'enseignante ni par les autres élèves. Ceci ne signifie pas pour autant que les élèves ne savent pas que le partage représenté (d'un « cake ») est censé être équitable. Nous serions même enclins à penser le contraire car c'est bien le caractère équitable du partage qui semble piloter les raisonnements d'élèves. Les schémas produits sont ici considérés avant tout comme des outils pour produire ce type de raisonnements. Si ce caractère « équitable » semble bien piloter les raisonnements d'élèves, en revanche, nous questionnons le fait que la grandeur aire et même l'égalité d'aires interviennent dans les connaissances convoquées par ces mêmes élèves. Nous y reviendrons par la suite.

Comme l'illustre la figure 5, d'autres binômes d'élèves ont opté pour un partage simultané de chaque unité en cinq, anticipant que le résultat d'un tel partage simultané permettrait d'obtenir un nombre de parts égal au double du nombre « d'invités » (« *ça faisait trente* »). Cette procédure paraît donc correspondre à une recherche d'optimisation, prenant en compte la présence d'un multiple commun (trois) entre six (le nombre de *cakes* qui correspond à deux fois trois) et quinze (le nombre « d'invités » qui correspond à cinq fois trois).

Episode observé pendant la phase de recherche en binômes
 *Environ 16 min. après le début de la séance* *LUC a représenté six surfaces rectangulaires et a partagé chacune d'entre elles en cinq – il a rendu sa distribution apparente en numérotant les « invités » et les parts distribuées à chacun – la valeur de la part obtenue est renseignée « chacun a* $\frac{2}{5}$ *»*
Episode observé pendant la phase de mise en commun
 *Production projetée lors de la mise en commun* ENS : je vais vous montrer une autre proposition qui est la proposition de CLEM, ANI et MAY qui est la même que celle de LUC. ENS : on vous écoute CLEM. CLEM : en fait, on a partagé chaque cake en cinq (…)

CLEM : on a partagé chaque cake en cinq parce que ça faisait (inaudible) trente. Et du coup on peut leur donner deux parts chacun parce que deux fois quinze ça fait trente.

ENS : donc toi tu as décidé de partager les six en cinquièmes, ça te faisait trente cinquièmes.

ENS : et donc quelle est la part de chacun ? (…)

CLEM : deux cinquièmes.

Figure 5. Productions et extraits de transcription associé – « deux cinquièmes »

Lors de la mise en commun, l'enseignante a rapproché ces différentes stratégies valides (épisodes transcrits dans les figures 3, 4 et 5) pour mettre en évidence des égalités de fractions codées symboliquement (voir figure 6). Tous les binômes d'élèves ont réussi à opérer un partage équitable des six *cakes* entre les quinze invités, ce qui a permis de produire l'égalité entre les fractions codant les parts obtenues (« *donc un tiers plus un quinzième, c'est la même chose que 6 quinzièmes…* »). La séance observée a ainsi révélé une variété de stratégies appliquées avec succès par les élèves, que l'enseignante a exploitée. Elle a veillé à expliciter les raisonnements sous-jacents et a montré aux élèves les implications en termes d'égalité de fractions.

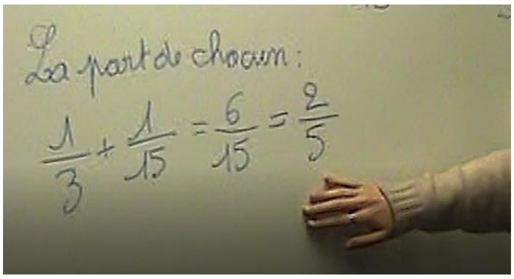


Figure 6. Une égalité de fractions obtenue à l'issue de ce problème de partage

Bien que certains élèves n'aient pas réussi à résoudre l'intégralité du problème (quatre des douze binômes), ils ont semblé néanmoins, tout autant que les autres, mettre en oeuvre un geste de partage simultané d'unités : ces élèves ont réalisé des partages simultanés correspondant à des « fractions simples » (quarts, demis…) de l'ensemble des unités qui ne leur ont pas permis d'aboutir – comme l'illustre la production de la figure 7.

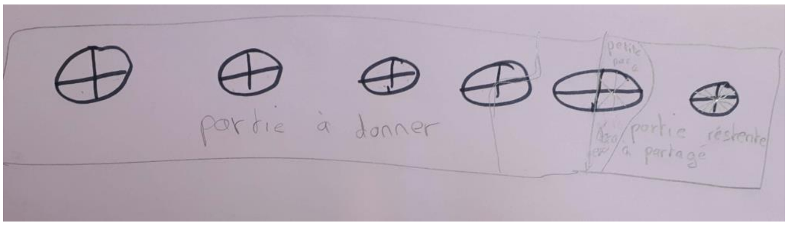


Figure 7. Une production correspondant à une stratégie n'ayant pas permis d'aboutir – « partage simultané en quarts »

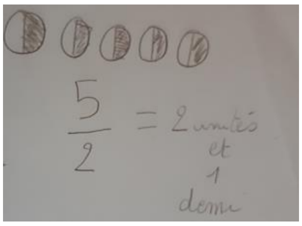
Finalement, presque tous les élèves ont investi des partages simultanés d'unités, et pour une majorité d'entre eux, ces partages ont permis de résoudre rapidement le problème posé. Le temps accordé à la recherche en binômes n'a guère dépassé un quart d'heure, ce qui renseigne sur la facilité avec laquelle les élèves ont envisagé des partages simultanés d'unités, que ceux-ci concernent l'ensemble des unités de la pluralité donnée initialement ou des parties de cette pluralité. C'est ce qui nous conduit à vouloir interroger plus avant ce que ce partage simultané recouvre potentiellement en termes de connaissances mathématiques.

Des faits observables lors de cette séance nous laissaient penser que ces connaissances n'étaient pas aussi conceptuellement avancées sur les fractions que nous aurions pu « naïvement » le penser de prime abord ou que certains travaux de *Mathematics Education* semblent le suggérer (voir section précédente). D'une part, certaines des connaissances formulées par les élèves dans la mise en œuvre de ces stratégies restaient parfois proches de connaissances très élémentaires sur les nombres entiers. Par exemple, nous avons observé des élèves comptant de deux en deux ou de quatre en quatre pour anticiper le résultat d'un partage simultané en deux ou en trois, en pointant chaque unité (« *quatre, huit, douze…* » en lien avec la production de la figure 7). D'autre part, la plupart des formulations présentent des proximités avec des raisonnements arithmétiques portant sur des nombres entiers (« *chaque cake en cinq parce que ça faisait (inaudible) trente. Et du coup on peut leur donner deux parts chacun parce que deux fois quinze ça fait trente* » (voir figure 5) et ce, même si ceux-ci leur permettent de produire un résultat fractionnaire (comme deux cinquièmes dans le cas présent).

Un autre fait a particulièrement attiré notre attention lors de cette séance. Il s'agit d'une remarque émise par un élève au moment où l'enseignante présentait l'égalité de fractions. Cet élève, qui avait produit un raisonnement lié aux « *six quinzièmes* », semblait accorder une importance particulière au nombre de parts obtenues après le partage d'une unité, plutôt qu'à la quantité que l'une de ces parts représentait. Il commente le « *deux cinquièmes* » produit par d'autres élèves en déclarant : « *du coup, ils mangent pas beaucoup* ». Pour autant, exception faite de cette intervention isolée, aucun élève ne semble remettre en question l'égalité produite par l'enseignante au tableau (figure 6). Nous faisons l'hypothèse que cette égalité n'est pas remise en cause car les autres élèves sont convaincus qu'elle reflète correctement les résultats obtenus en réponse au « même » problème de partage équitable. En d'autres termes, l'égalité est établie parce qu'un même nombre de *cakes* est partagé entre un même nombre d'invités et que quelle que soit la méthode de partage envisagée, la part attribuée à chacun sera *in fine* la même. Toutefois le contrôle de la taille d'une « part » (un cinquième par rapport à un quinzième) n'est peut-être pas garanti pour autant.

2.3. Des problèmes de partage à la fraction « partage d'une grandeur mesurée » ?

A ce stade de notre enquête, nous faisons le constat que ce que nous avons qualifié de partage simultané d'unités émerge comme un élément commun à toutes les stratégies de résolution utilisées pour résoudre des problèmes de partage équitable. Les élèves investissent cet élément commun, indépendamment du type de problème de partage qui leur est proposé, que ce soit en CM1 ou en CM2. Par ailleurs, nous avons observé que certains élèves dans ces deux classes avaient remobilisé ce partage simultané d'unités dans d'autres tâches scolaires, même si celles-ci semblaient a priori quelque peu éloignées du contexte de ces problèmes de partage. Par exemple, les élèves de la classe de CM1, invités à produire une représentation schématique de la fraction $\frac{5}{2}$, ont produit deux représentations différentes reprises dans la figure 8.



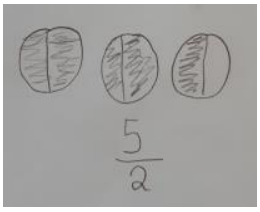


Figure 8. Deux représentations circulaires de $\frac{5}{2}$ proposées par les élèves de CM1

L'une de ces représentations circulaires (celle de gauche) a probablement été favorisée par la fréquentation avec des problèmes de partage étudiés en amont par ces mêmes élèves.

La perspective de mettre en lien le partage simultané d'unités, unanimement adopté par les élèves, avec la notion de fraction « partage d'une grandeur ou d'une mesure de grandeur »[18], et qui serait étendue à une grandeur autre que celle considérée comme l'unité ou à une mesure de grandeur autre que « 1 » a suscité notre intérêt.

En particulier, les représentations proposées par les élèves de CM1 (figure 8) nous ont amenés à penser qu'une telle mise en lien était possible. En d'autres termes, nous avons cherché à répondre à la question suivante : dans quelle mesure le partage simultané en *n* de chacune des unités d'un ensemble constitué de *m* unités peut-il avoir à voir (ou non) avec « déterminer 1 *n*-ième de *m* unités (avec $m > 1$) » ?

Un tel questionnement revêt une importance particulière, car ces problèmes de partage sont précisément envisagés comme un moyen d'établir un lien entre $m$fois $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ de m dans le document récemment rédigé par le groupe de travail réuni par le CSEN, déjà cité (Sander *et al.*, 2022). En effet, les travaux de Neagoy (2017) largement cités dans ce document, illustrent, à partir de l'exemple d'un partage de trois pizzas entre quatre personnes, la possibilité de « conceptualiser l'équivalence entre « 3 fois $\frac{1}{4}$ » et « $\frac{1}{4}$ de trois » (p. 40). Dans le même temps, aborder un tel questionnement nécessite d'examiner les connaissances mathématiques nécessaires pour établir un tel lien. Les expérimentations menées précédemment dans les classes de CM1 et CM2 suggèrent que les élèves mobilisent principalement des connaissances élémentaires sur les nombres entiers ou en directe extension de telles connaissances lors de la résolution des problèmes de partage.

Dans ce qui suit, nous nous consacrons à l'exploration de ce questionnement. Nous montrerons notamment que nos conclusions diffèrent sensiblement de celles formulées dans la note du CSEN mentionnée précédemment.

2.4. Partage simultané d'une pluralité d'unités et fraction « partage d'une grandeur mesurée » ?

Plutôt que de parler dans la suite, de fraction « partage d'une grandeur ou d'une mesure de grandeur », nous désignerons l'objet qui nous intéresse, à savoir « 1 *n*-ième de *m* unités (avec $m > 1$) », par l'expression fraction « partage d'une grandeur mesurée ». D'une part, cela nous permet de penser l'extension du partage au-delà d'une grandeur considérée comme une unique unité. D'autre part, nous pouvons

---

[18] Les actuels programmes du cycle 3 (MENJ, 2023a) ouvrent cette possibilité en parlant de l'utilisation des fractions « pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs » (p. 101) et en donnant des exemples qui ne se restreignent pas à un partage d'une grandeur-unité ou d'une mesure de grandeur « 1 », y compris dans les attendus de la fin du CM1. Nous repréciserons ci-après, ce que nous-mêmes nous entendons par « prendre une fraction d'une grandeur mesurée » qui nous semble potentiellement à l'œuvre dans une telle extension.

considérer qu'il s'agit de partager une nouvelle « entité », celle que constitue la « grandeur mesurée », avec une autre grandeur prise comme unité.

Nous nous intéressons au problème instancié suivant, ceci à des fins illustratives : est-il possible de mettre à profit le partage simultané d'unités pour établir l'équivalence entre « cinq demis de l'unité » et « un demi de cinq unités » ?

Une réorganisation des représentations circulaires (voir figure 9) laisse apparaître un unique trait partageant cette pluralité de cinq unités en deux. Cependant, les cinq unités ainsi réorganisées doivent alors être appréhendées comme formant une grandeur mesurée (cinq unités) qui est partagée en deux, afin d'espérer mettre en relation « cinq demis de l'unité » et « un demi de cinq unités ».

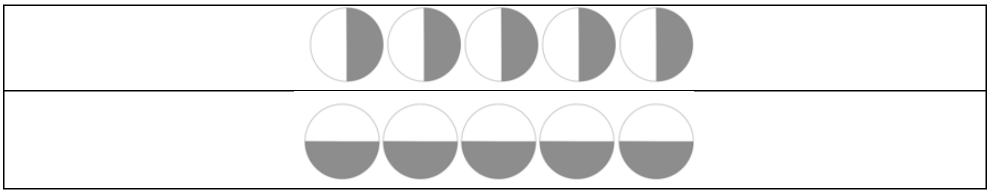


Figure 9. Réorganisation d'unités pour mettre en relation 5 fois $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ de 5

De la même manière, en partant de l'autre représentation produite par les élèves (celle de droite dans la figure 8), on pourrait envisager des ajouts d'unités et mettre en évidence une symétrie, comme celle représentée en figure 10. Cependant, l'ajout d'unités « n'irait pas de soi » et ne garantit pas que la « nouvelle » pluralité d'unités ainsi obtenue soit appréhendée comme une grandeur mesurée (cinq unités) qui serait partagée en deux.

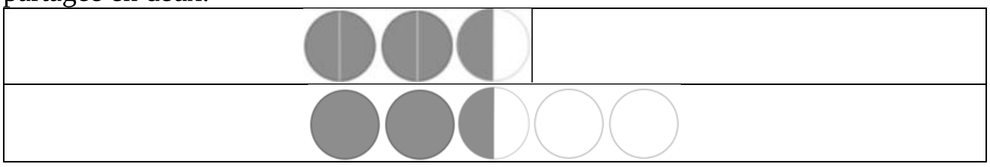


Figure 10. Réorganisation/ajout d'unités pour mettre en relation 5 fois $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ de 5

La complexité que recouvre la mise en lien entre le partage simultané de chacune des unités d'une pluralité d'unités et le partage d'une grandeur mesurée avec cette unité se révèle encore plus clairement à travers l'utilisation de représentations rectangulaires. Si nous reprenons le problème mentionné précédemment dans la classe de CM2, examinons ce que recouvrirait la mise en relation du partage de six unités en quinze, pour lequel certains élèves avaient produit la réponse « six quinzièmes » , avec le quinzième de six unités.

Nous considérons dans la figure 11, une représentation rectangulaire « classique » de $\frac{6}{15}u$ (soit une unité partagée en quinze et six fois « un quinzième de l'unité »).

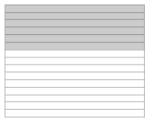


Figure 11. 6 fois $\frac{1}{15}$ obtenu par partage d'une unité

La représentation des six unités, ainsi que le partage simultané de chacune d'elles en quinze, correspond à la représentation donnée dans la figure 12. On pourrait d'ailleurs établir un lien assez facile avec la représentation précédente, tout comme l'enseignante l'a fait avec ses élèves pour les représentations circulaires de $\frac{5}{2}$.

Figure 12. 6 fois $\frac{1}{15}$ obtenu par « partage simultané » de six unités

Considérer cette collection comme représentant le quinzième de six unités nécessiterait d'appréhender ces six unités comme composant une nouvelle grandeur mesurée, elle-même partagée en quinze. On peut certes (aisément) accoler les représentations rectangulaires pour produire une nouvelle représentation rectangulaire comme celle illustrée en figure 13. Cependant, le changement de perspective nécessaire pour interpréter cette représentation (avec de « nouvelles » lignes qui partagent cette surface rectangulaire dans le sens de la longueur) comme un quinzième d'une « nouvelle » unité correspondant à la grandeur mesurée (six unités) ne va pas de soi. Ce résultat paraît même presque « surprenant »[19].

[19] Cet enchainement de représentations rectangulaires a souvent surpris quand nous l'avons présenté dans le cadre de formations de formateurs d'enseignants du primaire en France.

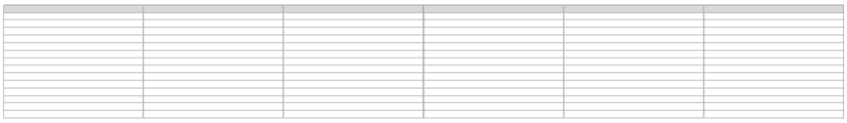


Figure 13. Réorganisation de 6 fois$\frac{1}{15}$ obtenu par « partage simultané » de six unités

Ainsi, nous ne partageons pas l'avis exprimé dans le document de synthèse du CSEN (Sander *et al.*, 2022). Partager simultanément chaque unité d'une pluralité d'unités données ne nous paraît pas pouvoir participer simplement de la conceptualisation d'une fraction partage d'une grandeur mesurée considérée comme « un tout » constitué ou recomposé à partir de cette même pluralité d'unités. Après avoir mené notre propre enquête sur le sujet, nous rejoignons plutôt les propos de Steffe (2010), qui remet en question le fait que les élèves perçoivent dans la résolution des problèmes de partage, la fraction d'un « tout » (« *all of the pizza* ») correspondant à la pluralité d'unités (« *each pizza of the original unit »)* données initialement.

> "If the restructuring is the result of productive thinking rather than an accidental restructuring, the child would also understand that partitioning each pizza of the original unit containing all four pizzas into three pieces and then combining the parts would produce three equal shares of all of the pizzas." (Steffe, 2010, p. 70)

Ces constats nous ont conduits, dans un second temps, à nous intéresser à ce que recouvre la fraction partage d'une grandeur mesurée dans le curriculum français. Nous exposons quelques remarques à ce sujet dans la section qui suit.

2.5. Fraction partage d'une grandeur mesurée – un impensé du curriculum français ?

Dans le programme actuel du cycle 3 en France (MENJ, 2023a), s'agissant des fractions, il est fait mention que les élèves doivent « *connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par ½)* » et utiliser « *les fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs* » (p.101). Ce type de commentaires ouvre potentiellement la voie à ce que nous avons appelé la fraction partage d'une grandeur mesurée, même si peu de précisions restent données à ce sujet dans le programme.

Si l'on s'intéresse aux attendus de fin d'année tels que définis par le Ministère de l'Éducation Nationale (2023b), on découvre un problème adressé aux élèves de CM1 qui relève de la notion de fraction partage d'une grandeur mesurée : « *Eric possède un paquet de 126 bonbons. Il donne deux tiers du paquet à 6 amis qui vont les partager. Combien de bonbons chaque ami d'Eric aura-t-il ?* » (MENJ, 2023b, p. 7) La complexité de cet exemple qui consiste à prendre deux tiers de 126 unités peut d'ailleurs surprendre ! De surcroit, aucun problème similaire n'est mentionné parmi les attendus de fin de CM2. Ce que l'on y retrouve présente une formulation plus proche de celle trouvée dans les programmes, « faire le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (par exemple, faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par ½) » (MENJ, 2023c, p. 3). Une telle formulation suggère *a priori* une complexité moindre dans ce qui serait attendu. Dans les attendus de fin de sixième (MENJ, 2023d), on retrouve ce même commentaire avec des exemples de réussite qui mettent en lien la notion de pourcentage (« la moitié de » et « 50 % de » ou « un quart de » et « 25 % de ») (MENJ, 2023d, p. 3). On peut par ailleurs s'interroger sur la manière dont cette orientation mettant en lien fractions simples et pourcentages, peut faciliter le calcul de « 13 % de 225 € », calcul proposé en exemple dans ce même document institutionnel (MENJ, 2023d, p. 6).

Le parcours d'étude de la notion de fraction, en tant que partage d'une grandeur mesurée, tel qu'il est recommandé dans la documentation institutionnelle actuelle (programmes, repères de progressivité et attendus de fin d'année), semble comporter certaines zones d'ombre, voire des incohérences, qui rendent les prescriptions parfois difficiles à interpréter.

En examinant les programmes antérieurs (MEN, 2004, 2016a, 2020), il apparaît que les commentaires relatifs à ce sujet demeurent tout aussi sibyllins. S'il est bien question de la « *fraction d'une quantité* » dans le programme de sixième de 2004, le propos tenu oscille entre un rapprochement avec la notion de quotient (ou de produit par un quotient) et une référence aux fractions simples ainsi qu'aux expressions familières (moitié, tiers, quart). Dans les deux cas, l'accent semble davantage mis sur les nombres et le calcul que sur les grandeurs à proprement parler.

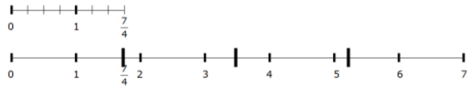
Il existe, en quelque sorte, une exception commune à cette documentation institutionnelle, qu'elle soit passée ou actuelle. Cette exception concerne le discours portant sur le passage de la « fraction partage de l'unité » à la « fraction quotient » dans la transition école-collège. Si les programmes antérieurs mettent davantage l'accent sur cette transition, le discours à ce sujet est néanmoins repris dans un « document ressource » contemporain (MEN, 2016b), tiré d'un ancien « document d'accompagnement »[20] (MEN, 2008).

Dans la transition entre la fraction dite « partage de l'unité », (a/b comme le b-ième de l'unité, itéré a fois) et la fraction dite « quotient » (a/b comme le nombre qui multiplié par b donne a), la fraction « partage d'une grandeur mesurée » (le b-ième

[20] Ce qui au passage, pose selon nous, la question de la mise en cohérence de la documentation institutionnelle (abondante) actuelle.

de *a* unités)[21] semble jouer un rôle clé. Les illustrations visant à éclairer cette transition reposent, dans l'ancien document d'accompagnement (MEN, 2008), sur l'utilisation de la droite numérique. Dans l'actuel document ressource (MEN, 2016b), elles prennent appui sur la grandeur longueur (mesurée avec une unité) et l'usage d'un instrument, le « guide-âne »[22]. Le tableau 3 présente les illustrations ainsi que des extraits de discours associés, tirés de ces deux documents institutionnels.

Tableau 3 : Extraits d'un ancien document d'accompagnement *Nombres au collège* (MEN, 2008) et d'un nouveau document ressource *Nombres et calculs* (MEN, 2016b)

Ancien document d'accompagnement *Nombres au collège* (MEN, 2008)
Une fraction comme 7/4 évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture sept quarts (7/4 c'est 7 fois le quart de l'unité). Au collège, dès la classe de sixième, l'écriture fractionnaire prend également une autre signification : 7/4 , c'est le quart de 7 (donc représentée en reportant l'unité 7 fois, puis en partageant ce qui est obtenu en 4 parts égales), c'est aussi le nombre qui multiplié par 4 donne pour résultat 7. Si on se réfère à une ligne graduée, ces deux conceptions de la fraction 7/4 peuvent être illustrées de la façon suivante :  L'équivalence entre ces deux significations (7/4 c'est 7 fois un quart et 7/4 c'est le quart de 7) ne va pas de soi et doit faire l'objet de questionnements et de tentatives de vérification et de justification en classe de sixième, de façon à permettre aux élèves de bien les assimiler. La vérification peut être faite dans le cadre des grandeurs ou dans le cadre du repérage sur une ligne graduée. La justification nécessite une approche plus

[21] Dans les deux textes (le document ressource contemporain et l'ancien document d'accompagnement), la fraction partage d'une grandeur mesurée (le tiers de 7 unités) paraît assimilée à la fraction dite quotient : le nombre qui multiplié par 3 donne 7 correspondrait au tiers de 7. Toutefois, nous questionnons depuis quelques années déjà, l'amalgame fait entre ces deux points de vue (Coulange & Train, 2017). Quand on recontextualise la fraction dite « quotient » dans le domaine des grandeurs et mesures, la définition qui en est donnée dans les programmes (le nombre qui multiplié par … donne …) se rapprocherait davantage de la « commensuration » (plutôt que d'une « fraction de ») (Brousseau & Brousseau, 1987). Nous avons d'ailleurs à cœur d'explorer plus avant cet autre point de vue (Fregona *et al.*, 2023), dans une perspective d'enseignement des fractions au niveau du collège (Coulange & Train, 2021 ; Coulange *et al.*, 2022).

[22] Réseau de droites parallèles qui permet de partager un segment en un nombre donné de segments de même longueur.

théorique. En voici deux exemples, utilisant soit le langage ordinaire, soit le langage symbolique :

- on part de ce qui est connu : 7/4 = 7 × 1/4 (7 fois un quart, défini au cycle 3)

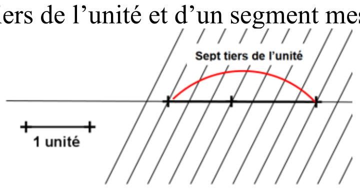
- on se demande si cela est compatible avec le fait que 7/4 est le nombre qui multiplié par 4 donne comme résultat 7 (c'est-à-dire aussi le quart de 7) : en langage ordinaire, le raisonnement suivant peut être exprimé : « 4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 »

- le même raisonnement peut être exprimé à l'aide du langage symbolique

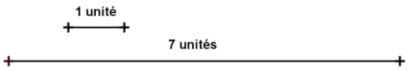
$$4\times\frac{7}{4}=4\times\left(7\times\frac{1}{4}\right)=28\times\frac{1}{4}=\frac{28}{4}.\ \text{Or}\ \frac{28}{4}=7\times\left(4\times\frac{1}{4}\right)=7\times\frac{4}{4}=7\times1=7.$$

Document ressource contemporain *Nombres et calculs* (MEN, 2016b)

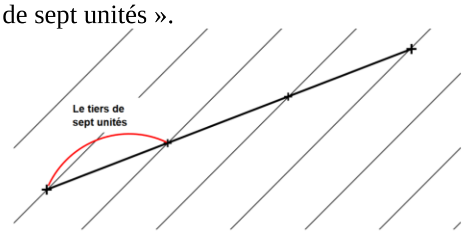
Le guide-âne (réseau de droites parallèles) permet de montrer l'égalité des longueurs d'un segment qui mesure sept tiers de l'unité et d'un segment mesurant le tiers de sept unités



À l'aide d'un réseau de droites parallèles, on partage un segment d'une unité de longueur en trois parties égales. Sur la droite portant ce segment, on trace un segment dont la longueur correspond à sept fois le tiers de l'unité.
On trace ensuite un segment de longueur 7 unités



À l'aide d'un réseau de droites parallèles, on partage ce segment en trois parts égales ; chaque part mesure donc le tiers de sept unités. On constate alors, en comparant par juxtaposition les longueurs des deux segments obtenus, que « sept tiers de l'unité » correspond au « tiers de sept unités ».



Les validations explicitées ci-dessus pour concilier les deux conceptions de la fraction (partage et quotient) ne peuvent être menées et comprises en autonomie par les élèves. Il est important que le professeur explicite ce passage, de façon à ce que les élèves comprennent que les deux conceptions de la fraction représentent en réalité le même nombre.

Les propositions décrites dans ces documents ne règlent pas totalement la complexité qui se joue dans le passage de la fraction partage d'une grandeur unité (apparentée au nombre « 1 » ou à « 1 unité »), soit le « quart de 1[23] » ou le « tiers de l'unité », à la fraction partage d'une grandeur mesurée, soit le « quart de 7 » ou le « tiers de sept unités ».

Certes, le partage en quatre d'un segment d'extrémité le point d'abscisse « 7 » sur la droite ou le partage en trois (avec le guide âne) d'un segment de longueur mesurée « 7 unités » permet d'obtenir des nouveaux segments de longueurs respectivement assimilables au « quart » ou au « tiers » des longueurs respectives des segments initiaux. Toutefois au moment où s'opère le partage, est-il vraiment associé au partage d'une nouvelle « grandeur mesurée », c'est-à-dire sans perdre de vue que cette grandeur est elle-même composée d'autres grandeurs unités (qui est dans un cas, la longueur du segment d'extrémités les points d'abscisses « 0 » et « 1 » et dans l'autre, celle de « l'unité » indiquée dans les deux illustrations qui précèdent) ? De plus, ainsi que le document d'accompagnement antérieur (MEN, 2008) l'indique, ne s'agit-il pas plus d'une « vérification » que d'une justification mathématique ? Notons d'ailleurs que les justifications proposées par la suite s'éloignent du domaine des grandeurs et soulèvent des questions quand on tente de les y réinscrire[24].

Il nous semble donc risqué d'éviter d'aborder la complexité inhérente à la conceptualisation de la fraction comme « partage d'une grandeur mesurée ». D'autres documents institutionnels semblent avoir pris une autre voie, en privilégiant un discours axé sur les nombres et les opérations, qui écarte explicitement toute tentative de justification mathématique : « 1/3 d'une chose se traduit par 1/3 × chose, le « de » signifiant mathématiquement toujours « × » (MENJ, 2018, p. 14).

En nous appuyant sur des travaux conduits en collaboration avec Chambris (Chambris *et al.*, 2021), nous estimons aujourd'hui qu'une autre voie est envisageable sous certaines conditions. L'une d'elles revient à considérer des relations de comparaison multiplicative (Greer, 1992 ; Van de Walle & Lovin, 2006) entre des « unités relatives » (Chambris, 2021), c'est-à-dire des unités *n* fois plus petites ou *n* fois plus grandes que d'autres. Cette voie nécessite par ailleurs un théorème que nous avons qualifié de « *théorème de compensation* » : *« n* fois plus/moins que *p* unités (chacune *n* fois plus petites/grandes que *u*) = *p* unités *u* » (Chambris *et al.*, 2021).

[23] En fait c'est plutôt « 1 u » avec l'unité retenue pour graduer la droite numérique donnée, mais précisément ce « u » est bel et bien un absent du texte cité.

[24] Et si on replonge la justification proposée en langage naturel (verbal) d'ailleurs… on tombe sur : multiplier « 7 quarts de l'unité » par 4 et on obtient 7 unités. Mais l'opération inverse de multiplier par 4, soit diviser par 4 : est-ce vraiment prendre « le quart de » ?

Dans ces conditions, prendre « le tiers de 7 unités », c'est prendre « le tiers d'une unité 7 fois plus grande que l'unité *u* » ce qui revient à prendre « 7 fois plus d'unités qui seraient chacune le tiers de l'unité *u* », soit « sept tiers de l'unité ». Si un tel raisonnement semble direct, voire évident, il convient de reconnaître que les conditions nécessaires pour y parvenir ne sont pas aisément réunies. Dès lors, quelles pourraient être de nouveaux repères qui prendraient en considération les résultats de notre enquête, pour envisager une progréssivité dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école ?

Dans la suite de notre propos, à l'instar des travaux de Chambris (2022a, 2022b), nous préférons parler des connaissances mathématiques convoquées par les élèves en termes de *quantités.* Ce choix est d'abord motivé par la nécessité de prendre des précautions concernant la manière dont les élèves appréhendent effectivement l'objet fraction du point de vue des grandeurs et des mesures. Nous souhaitons en effet aborder ce questionnement en évitant de tirer des conclusions trop hâtives sur des concepts relatifs aux grandeurs géométriques potentiellement en jeu et à leur mesure, plus précisément relativement à la grandeur aire souvent associée aux représentations surfaciques (circulaires ou rectangulaires). En lien avec ce que nous avons qualifié précédemment d'unités relatives (Chambris *et al.*, 2021), il nous paraît plus pertinent de considérer des connaissances et des savoirs spécifiques des quantités et de leur mathématisation (Chambris, 2022a, 2022b). Il s'agit notamment d'envisager des unités du point de vue de leurs possibles mises en relation (multiplicatives, additives, etc.).

Parmi les différents éléments mis en avant par Chambris (2022a, 2022b) dans le cadre d'une théorie mathématique des quantités, l'ordre joue un rôle essentiel. La comparaison de quantités apparaît alors comme un élément incontournable à envisager pour pouvoir construire des relations additives et multiplicatives entre les unités.

3. Quelle (nouvelle) progressivité pour l'apprentissage des fractions à l'école : de l'importance de l'ordre ?

Dans la recherche de ce qui pourrait fonder une (nouvelle) progressivité pour l'apprentissage des fractions à l'école, il nous paraît important de réfléchir à la place et au rôle à donner aux problèmes de partage : « partager *m* unités entre *n* personnes » (avec *m* non multiple de *n*)[25]. Ces problèmes présentent l'avantage de faire fréquenter aux élèves une variété de stratégies associées à différents partages possibles d'une même pluralité d'unités. Cette variété peut constituer une occasion d'explorer des relations multiplicatives entre le nombre

[25] *m* et *n* sont des entiers naturels non nuls.

d'unités à partager et le nombre de personnes impliquées dans le partage : il s'agit notamment d'anticiper et de construire un (ou plusieurs) nombre(s) de « parts », qui soit (soient) égal (égaux) ou multiple(s) du nombre de personnes. Ainsi, notre propos n'est nullement de disqualifier l'étude de tels problèmes en classe ni de minimiser leur contribution dans l'apprentissage des fractions. Toutefois, il convient de mieux circonscrire la part de cette contribution.

De ce point de vue, si la désignation (verbale ou symbolique) des « parts », qui résultent de partages simultanés d'unités, implique des fractions de l'unité, il ne faut pas se méprendre sur ce que de telles désignations recouvrent. Elles correspondent à des résultats d'actions de partage. Même si ces partages ont été considérés comme équitables à un moment donné, il n'y a pas de garantie absolue quant à ce que ces fractions désignent en termes de quantités, sauf peut-être en rapprochant différentes stratégies de résolution, une fois le problème résolu, comme cela a été observé dans la séance expérimentée et présentée plus haut (voir section 2.2.3). Dans ce cadre, le fait qu'une même pluralité d'unités a été partagée équitablement entre un même nombre de personnes assure que les diverses désignations verbales ou symboliques des « parts » de chacun représentent bien une même quantité.

Nous rejoignons Steffe (2010) en considérant que la résolution de tels problèmes ne garantit pas une conceptualisation avancée des unités, notamment en ce qui concerne la construction d'unités relatives (Chambris, 2021). En effet, les élèves peuvent se limiter à la production de nouveaux objets résultant d'actions de partage équitable (des « tiers de » pizzas, des « quarts de » *cakes*, etc.), ainsi qu'à la prise en considération de paquets d'objets (« trois tiers dans une unité », « deux tiers dans la part de chacun », etc.) et ce, même s'ils désignent ces objets par des fractions unitaires ou ces paquets d'objets par des fractions non unitaires. Les opérations envisagées sur ces objets ou sur ces paquets d'objets resteraient dès lors *a minima* proches du dénombrement (on compte des tiers, éventuellement de trois en trois) ou *a maxima*, proches de calculs similaires à ceux effectués sur des entiers (deux paquets de trois tiers, cela fait six tiers). Si des relations multiplicatives sont convoquées, elles resteraient potentiellement similaires à celles convoquées pour les entiers, et ce, même si celles-ci peuvent parfois conduire à la recherche de multiples communs (comme six, multiple commun de deux et de trois ou trente, multiple commun de six et de quinze) afin d'optimiser la nature d'un partage simultané à opérer.

Nous avons par ailleurs montré qu'une autre tâche scolaire, proposée à des élèves de CM2[26], bien plus classiquement rencontrée dans les classes françaises, consistant à se prononcer sur l'équivalence de deux fractions données (avec un dénominateur multiple de l'autre), semblait résolue par une majorité d'élèves en convoquant des

[26] Il s'agit de la même classe de CM2 que celle évoquée dans la partie précédente.

raisonnements restés centrés sur des objets et des paquets d'objets (Chambris *et al.*, 2021).

Plus encore, lorsque pour cette même tâche de comparaison de fractions, une élève[27]de CM2 raisonne autrement, en convoquant des relations multiplicatives de comparaison entre des fractions unitaires et le « *théorème de compensation* », les autres élèves paraissent dans l'incapacité de s'approprier un tel raisonnement et ce, malgré les efforts d'étayage faits par l'enseignante.

Et pour cause, les conditions nécessaires à la construction de telles relations multiplicatives de comparaison entre des fractions permettant de les considérer comme des unités relatives – par exemple, « un septième comme trois fois plus grand qu'un vingt-et-unième » et même « un tiers comme trois fois plus petit que l'unité » – nous semblent aujourd'hui loin d'être réunies dans le curriculum français. Ne serait-ce que parce que de telles relations de comparaison multiplicative ne peuvent être envisagées qu'à la condition de disposer de la comparaison en amont, c'est-à-dire de l'ordre[28].

3.1. La comparaison de fractions : un savoir quasi-absent du curriculum français

Dans sa thèse, Martinez-Ibanez (2018) observe que le curriculum français met principalement l'accent sur la fraction comme outil pour introduire et justifier l'écriture décimale des nombres décimaux, notamment à travers le lien entre écritures fractionnaires et décimales, plutôt que sur un enseignement des fractions pour elles-mêmes. Cette orientation expliquerait en partie « le faible nombre de types de tâches relatifs aux fractions dans les programmes et le caractère tardif de leur enseignement par rapport aux autres curriculums étudiés » (Martinez-Ibanez, 2018, p. 82). En particulier, l'étude des comparaisons de fractions n'est véritablement abordée qu'à partir de la classe de sixième. De tels constats semblent pour partie encore largement d'actualité dans les programmes actuels. Si la comparaison de fractions apparaît aujourd'hui plus précocément mise à l'étude, notamment dans les attendus de CM1 et de CM2, elle reste limitée aux fractions ayant le même dénominateur[29]. En sixième, de nouvelles possibilités apparaissent, en lien avec le positionnement de fractions sur la droite numérique (entre deux entiers consécutifs)

[27] Qui n'est autre que l'élève surnommée CLEM, plus haut.

[28] En cela, encore, nous rejoignons de nouveau les travaux de Chambris (2022a) qui considère l'ordre comme un « incontournable » d'une perspective liée aux grandeurs et aux unités dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire.

[29] Un tel choix laisse encourir le risque de rabattre ces tâches de comparaison au seul dénombrement de paquets d'objets : 3/8 < 5/8 car « 3 parts versus 5 parts » sans nécessairement porter l'intérêt sur la taille de ces parts.

ou en lien avec les nombres décimaux et leur écriture à virgule. Toutefois rien n'est dit sur les techniques de comparaison des fractions elles-mêmes, ni même sur celles qui pourraient par exemple supporter leur positionnement sur la droite numérique[30]. Ces constats tendent à montrer que la comparaison de fractions est absente (ou quasi-absente) des programmes actuels français au niveau du cycle 3. Lorsqu'elle est finalement abordée au cycle 4 (comparaison et rangement de nombres rationnels, négatifs et positifs), la réduction au même dénominateur semble être la seule technique enseignée. Par ailleurs, Martinez-Ibanez (2018) fait le constat que l'aspect ordinal des fractions est davantage mis à l'étude dans d'autres curricula et ce, à plusieurs égards. D'une part, la comparaison et de rangement des fractions sont abordés parallèlement aux premiers apprentissages des fractions dans plusieurs curricula[31]. D'autre part, relativement aux pays concernés par l'étude, « la France est le pays dans lequel la diversité des types de tâches est la plus faible » (Martinez-Ibanez, 2018, p. 165), à l'inverse d'autres curricula qui explorent une plus grande variété de techniques pour comparer des fractions.

3.2. La voie inexplorée du « *benchmarking* » pour comparer des fractions

De nombreuses recherches antérieures (Sowder, 1998 ; Post *et al.*, 1986) soulignent qu'un travail sur l'ordre participe pleinement de la construction des savoirs liés aux fractions :

> The connection between the comparison of fractions and development of number sense is clear. Comparing fractions is necessary for obtaining an intuitive feel of the size of fractions. If a fractional number is recognised to be close to 1/3 or 1/2, for example, one has a better feel for its magnitude. This fractional number sense is particularly important when estimating with fractions. (Sowder, 1988, p. 189).

En ce qui concerne la comparaison de fractions, de nombreux travaux (par exemple, Behr *et al.*, 1984 ; Post & Cramer, 1987 ; Pearn & Stephens, 2004 ; Mitchell & Horne, 2010) ont largement documenté les difficultés inhérentes à cette tâche. Ces difficultés sont en partie liées aux connaissances antérieures des élèves sur les nombres entiers et à leur compréhension de l'écriture fractionnaire a/b comme mettant en relation les nombres *a* et *b*, ainsi qu'à la multiplicité de conceptions associées à la fraction et à leur mise en lien. Différentes stratégies de comparaison[32],

---

[30] En particulier, le recours systématique à la droite numérique classique (présence de l'abscisse « 0 ») dans les tâches de comparaison de fractions est susceptible de privilégier la seule technique de comparaison des distances à « 0 » des abscisses des points repérant les fractions, au détriment d'autres techniques.

[31] Généralement constitués par l'étude de l'association d'une fraction et d'un dessin.

[32] Désignées en anglais par : *GAP thinking, residual thinking, reference point, concrete representation stragy, omparing denominators*, etc.

renvoyant à diverses conceptions de la fraction, sont par ailleurs décrites dans cette littérature. Plusieurs de ces recherches en *Mathematics Education* mettent en avant le rôle du *benchmarking* dans la comparaison de fractions (Behr *et al.*, 1984 ; Clarke & Roche, 2009). Le *benchmarking* consiste en une technique de comparaison mobilisant l'usage de « repères » (*benchmarks*), ces repères étant généralement des fractions unitaires (1/2, 1/3, etc.) ou l'unité elle-même. L'usage de ces repères ouvre différentes voies pour comparer des fractions :

- identifier un repère permettant de situer deux fractions de part et d'autre de ce celui-ci (par exemple deux fractions : l'une plus petite que 1/2, l'autre plus grande que 1/2) ;
- mettre en œuvre ce qui relève du *residual thinking* par rapport à un repère choisi. Ici, le terme *residual* est à comprendre comme un « résidu » à envisager pour atteindre le repère choisi. La comparaison de deux fractions repose alors sur l'appréciation de ce « résidu ». Classiquement, pour des fractions inférieures à l'unité ou à une demi-unité (ces dernières étant souvent introduites plus tôt que les fractions impropres, c'est-à-dire supérieures à l'unité), on peut prendre appui sur l'unité ou la demi-unité (*benchmark*) pour comparer des « résidus » à ce repère, souvent en prenant appui sur des connaissances liées à l'ordre de fractions unitaires ou de même numérateur. Un cas très élémentaire de residual thinking correspondrait ainsi à l'exemple suivant : pour comparer $\frac{8}{9}$ et $\frac{6}{7}$, on va apprécier $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{7}$ comme ce qui « manque » respectivement à ces deux fractions par rapport à l'unité ; et comme $\frac{1}{9}$ est inférieur à $\frac{1}{7}$, $\frac{8}{9}$ est supérieure à $\frac{6}{7}$.

Notre intérêt à considérer ces techniques liées au *benchmarking*, comme le *residual thinking* (ou d'autres que nous ne détaillons pas ici) repose principalement sur deux raisons. D'une part, ces techniques ouvrent la voie à une variété de techniques de comparaison, rarement prises en compte dans le contexte éducatif français. D'autre part, ces mêmes techniques de *benchmarking* peuvent être envisagées dès l'école primaire en France, car elles peuvent prendre appui sur la conception de la fraction comme « partage de l'unité », seule conception enseignée et apprise à ce niveau scolaire. Il nous a donc semblé pertinent d'investir cette voie dès les premiers apprentissages des fractions au niveau CM1-CM2 (élèves de 9-11 ans).

3.3. Des tâches de comparaison (*benchmarking*, *residual thinking*, etc.) proposées à des élèves de CM1-CM2

En collaboration avec la même enseignante que précédemment, nous avons conçu et mis en œuvre un ensemble de tâches de comparaison de fractions destinées à des élèves de CM1 et de CM2. Bien que ces tâches soient inspirées du *benchmarking* et du *residual thinking*, elles s'en distinguent pour deux raisons : d'une part, par leur intégration en classe de CM1-CM2 dans le contexte scolaire français, et, d'autre part, parce qu'elles sont adressées à des élèves qui du fait de notre collaboration avec leur enseignante, ont eu un parcours spécifique dans l'apprentissage des fractions[33], en amont même de ces tâches.

Il est important de noter que les tâches proposées concernent à la fois des « ajouts » et des « retraits » (les « résidus » considérés dans le *residual thinking*) de fractions unitaires. Deux types de repères (*benchmarks)* sont en jeu : l'unité et la demi-unité. Par ailleurs, les dénominateurs des fractions à comparer ne sont ni identiques, ni multiples l'un de l'autre. Ceci implique qu'au niveau scolaire considéré[34], les tâches ne peuvent être résolues qu'en comparant les « ajouts » ou « retraits » aux repères considérés, à savoir des fractions unitaires. Le tableau 4 liste les tâches finalement conçues et expérimentées avec les élèves.

---

[33] Ces élèves ont notamment développé un rapport spécifique à la production de représentations schématiques des fractions, encouragée à plusieurs reprises dans les tâches proposées par l'enseignante.

[34] Le recours à d'autres techniques de comparaison est certes possible mais peu probable au regard du niveau scolaire considéré en France. Par exemple, si certaines des fractions données dans le tableau 4 pourraient se prêter à une mise au même numérateur, cette technique de comparaison n'est pas enseignée à ce niveau et n'a que peu de chances d'être envisagée en prise d'appui sur la seule conception de la fraction « partage de l'unité ».

Tableau 4. Tâches de comparaison de fractions – *benchmarking* proposées en CM1-CM2

Tâches proposées à des élèves de CM2 (2018-2019) et CM1 (2020-2021)
Laquelle de ces fractions est la plus grande ? $\frac{6}{5}\ et\ \frac{9}{8}$ $\quad$ $\frac{3}{4}\ et\ \frac{6}{7}$ $\frac{5}{8}\ et\ \frac{7}{12}$ $\quad$ $\frac{4}{10}\ et\ \frac{2}{6}$ *Sous chaque couple de fractions données, les élèves disposent d'un espace leur permettant de produire la réponse et d'y associer des représentations schématiques de leur choix ou d'autres traces de leur raisonnement.*

Ces tâches ont d'abord été expérimentées auprès de la même classe de CM2 (10-11 ans) mentionnée précédemment. Elles ont été proposées plusieurs semaines après la séance dédiée aux problèmes de partage, toujours durant l'année scolaire 2018-2019.

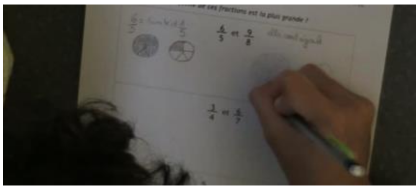
Par la suite, ces mêmes tâches ont été proposées deux ans plus tard (2020-2021) à des élèves de CM1 (9-10 ans) en collaboration avec la même enseignante mais dans une classe au profil plus hétérogène[35]. Nous rendons compte ci-après des observations filmées faites dans ces deux classes.

3.4. Des tâches de *benchmarking* en CM2

Dans la classe de CM2, lorsque l'enseignante a présenté la question posée, une élève a rapidement demandé s'il était possible que les fractions soient égales. L'enseignante a confirmé que c'était effectivement possible. Cette réponse a sans doute renforcé, par effet de contrat, la tendance observée chez de nombreux élèves dans la comparaison des deux premières fractions. En effet, à l'instar du groupe dont les brèves interventions orales sont retranscrites en figure 14, plusieurs binômes d'élèves ont représenté les fractions données (six cinquièmes et neuf huitièmes) à l'aide des représentations schématiques, qu'elles soient circulaires ou rectangulaires. Notons qu'à chaque fois, ils ont correctement fait apparaître une unité (l'une partagée en cinq, l'autre en huit), à laquelle est ajoutée un *n*-ième d'une seconde unité (un cinquième et un huitième). Toutefois, dans un premier temps, ils ont conclu à l'égalité des deux fractions sans comparer la taille respective de chacun des *n*-ièmes

[35] L'enseignante a été affectée dans une nouvelle école primaire en 2020. Cette école se caractérise par des élèves de profils contrastés : située dans un quartier à forte mixité sociale elle accueille des élèves qui suivent des enseignements à horaires aménagés (cursus musical) regroupés avec des élèves qui suivent un parcours classique.

ajoutés à l'unité : un cinquième et un huitième ont simplement été considérés comme « une part » supplémentaire ajoutée à l'unité, indépendamment de leurs tailles respectives.



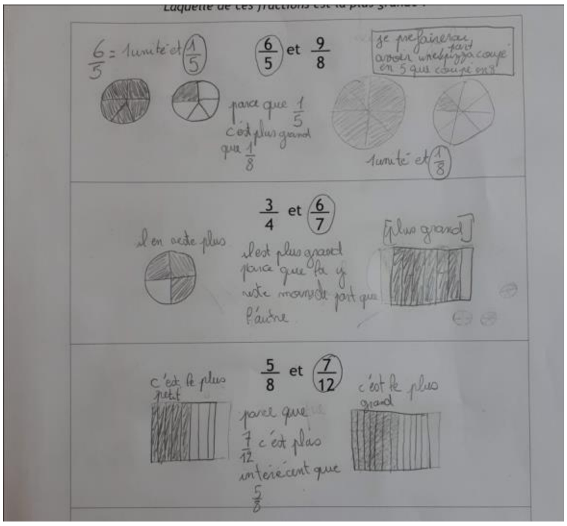
L'élève a représenté $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$ avec des représentations schématiques circulaires

LUC : là on en prend une du coup elles sont égales.

LUC (en écrivant) : elles sont égales.

Figure 14. Episode observé pendant la recherche – Comparaison de $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$

Ce raisonnement erroné semble être partagé par plusieurs binômes d'élèves de CM2. Rappelons que ces mêmes élèves, et LUC en particulier, avaient pourtant montré de bonnes performances dans la résolution de problèmes de partage. Les observations confirment que la réussite dans ce type de problèmes de partage ne garantit pas une appréhension de fractions (même unitaires) comme des unités relatives. Pour LUC et son binôme, la question de la taille des *n*-ièmes (cinquième et huitième) ne semble pas se poser. Pour autant, à la suite d'une aide apportée par l'enseignante (à laquelle nous n'avons pas pu assister), ces deux élèves ont finalement levé cette difficulté et réussi à comparer $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$. Ils ont transféré l'argument concernant la taille de la part pour comparer les deux fractions suivantes ($\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$) en le réintégrant dans ce qui relève d'un « retrait » de *n*-ièmes ($\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{7}$) à l'unité. Pour la question qui suit, qui consiste à comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, LUC revient d'ailleurs sur la taille respective des *n*-ièmes concernés en mentionnant des « *gros huitièmes* » et des *« petits douzièmes* », comme illustré dans la figure 15. Toutefois sans que l'on puisse savoir pourquoi (l'épisode filmé du travail de ce binôme sur cette question s'arrête avant – l'observatrice ayant pensé que la conclusion serait dès lors valide), cet argument de taille ne semble pas résister au nouveau repère suivant (une demi-unité), puisque dans leur production écrite, les élèves concluent finalement que $\frac{7}{12}$ est « *le plus grand* ». Ceci tend à montrer que, pour ces deux élèves, la mise en relation entre un nombre de « *parts* » et la taille respective de celles-ci reste encore fragile à ce stade de la séance.



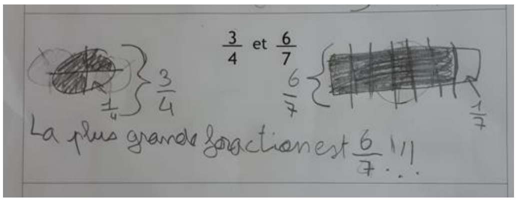
Production écrite finale de LUC et AEL

LUC : sept douzièmes est plus petit que cinq huitièmes, on est d'accord ? (…) moi je préfère avoir des grosses parts, des grosses parts, euh des gros huitièmes que des petits douzièmes.

Figure 15. Episode observé pendant la phase de recherche – Comparaison de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$

Lors de la mise en commun, les retours de l'enseignante sur les différentes tâches permettent d'expliciter les connaissances mobilisées, ainsi que les raisonnements valides élaborés par certains élèves. Cependant, des tensions récurrentes émergent au cours de cette discussion concernant la prise en compte des tailles respectives des *n*-ièmes et le nombre de *n*-ièmes. Les sauts de complexité inhérents à la succession de tâches proposée aux élèves – à savoir le passage d'un « ajout » à un « retrait » de *n*-ièmes à l'unité, puis le passage d'un repère correspondant à l'unité à un repère correspondant à une demi-unité – sont négociés lors de cette mise en commun. Ces tensions et ces sauts de complexité demeurent visiblement délicats pour certains élèves qui interviennent publiquement lors de cet épisode de mise en commun (voir figure 16) : comme NOA pour le « retrait » à l'unité ou LUC pour le passage à la demi-unité comme un nouveau repère à considérer. Toutefois les formulations produites tant par l'enseignante que par les élèves nous paraissent particulièrement significatives de connaissances qui commencent à être partagées par une majorité d'entre eux : par exemple : « *un septième c'est plus petit qu'un quart* », « *Donc on a un demi dans les deux, il nous reste un huitième et un douzième. Lequel est le plus grand ? Celui qui a un huitième de plus ou celui qui a un douzième de plus ?* ». Bien que certaines de ces formulations soient parfois (ré-)ancrées dans des contextes

« quotidiens » (comme le partage de gâteaux : « *il me reste un quart à manger et du coup, là il reste plus des parts que si je mange six septièmes et il reste qu'un septième, il en reste moins* »), cet ancrage vise précisément à construire et à expliciter ce qui se joue du point de vue des quantités. Nous reviendrons sur ces deux points en relation avec les observations faites plus bas dans le texte concernant la classe de CM1.



Production écrite finale de STO et CLEM vidéo-projetée au tableau[36]

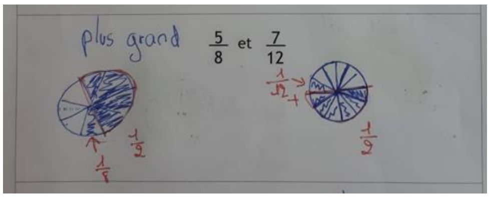
STO : un septième c'est plus petit que un quart. Et du coup, c'est six septièmes parce qu'il y en a plus…. parce qu'il y a moins de parts… il y a moins de parts.

ENS : la petite part qui reste c'est un septième, elle est plus petite que un quart. (…)

NOA : moi, je ne suis pas d'accord (…) moi je pense que c'est égal.

LUC : nous… entre trois quarts et six septièmes, on a dit comme STO que six septièmes, il est plus grand car il reste moins de parts. Par exemple là, ici [*l'élève se déplace vers le tableau*]. Ah oui, si là, par rapport à un quart, là, si il mange les trois parts, il m'en reste une part, il me reste un quart à manger et du coup, là il reste plus des parts que si je mange six septièmes et il reste qu'un septième, il en reste moins.

ENS : il en reste moins. Donc ça veut dire que la fraction est plus grande. Oui, NOA ?



Production écrite finale de MAR et VIR vidéo-projetée au tableau

MAR : euh, nous en fait, du coup, on s'est rendu compte que les deux, il y avait la moitié.

ENS : dans cinq huitièmes, qu'est-ce qu'il y a ?

MAR : il y a la moitié déjà.

[36] Notons que si le choix de STO et CLEM est d'utiliser deux représentations différentes (l'une circulaire, l'autre rectangulaire), le raisonnement de STO porte bien sur une même et seule quantité (indépendante du système de représentation retenu).

ENS : un demi plus quoi ?

MAR : plus un (inaudile) [*P écrit au tableau* $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$]. Pareil dans sept douzièmes, il y a un demi plus (inaudible). [*P écrit au tableau* $\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$]. Et on s'est rendu compte que le plus grand c'était …

ENS : lequel est le plus grand ? Dans tous les deux, on a un demi. Est-ce que tout le monde est d'accord ? (…) un demi, c'est combien de huitièmes ? LUC, c'est combien de huitièmes un demi ? (…)

Lucas : quatre huitièmes.

ENS : est-ce que c'est pas quatre huitièmes plus un huitièmes, cinq huitièmes ?

E : ah oui [*La classe approuve globalement*]

ENS : tu as un demi plus un huitième, t'es d'accord ou pas ? (…) ici, est-ce que l'on peut vérifier, combien de douzièmes pour faire un demi ? (…) six douzièmes plus un douzième, est-ce ça fait bien sept douzièmes ? (…) Donc on a un demi dans les deux, il nous reste un huitième et un douzième. Lequel est le plus grand ? Celui qui a un huitième de plus ou celui qui a un douzième de plus ? CLEM ?

CLEM : celui qui a un huitième de plus. (…)

E : du coup, c'est cinq huitièmes qui est plus grand.

ENS : du coup, cinq huitièmes va être le plus grand, exact.

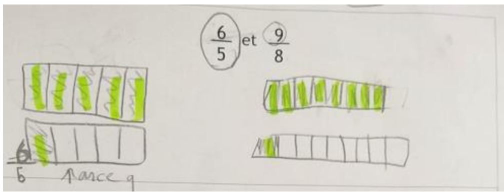
Figure 16. Episodes de mise en commun – comparaison de $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$ puis de $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{8}$

3.5. Quelques compléments sur les tâches de *benchmarking* en CM1

Dans la classe de CM1, bien que les tâches aient été proposées de manière plus précoce, nous avons observé des phénomènes proches de ceux pointés précédemment. Par exemple, certains élèves de CM1, n'ayant pas considéré les tailles respectives de *n*-ièmes, ont temporairement conclu à l'égalité des deux premières fractions à comparer ($\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$). Toutefois, plusieurs binômes d'élèves semblent avoir rapidement investi la prise en compte de la question des tailles des *n*-ièmes, comme le montre l'épisode retranscrit en figure 17. Cet épisode donne également à voir que les arguments formulés par une des deux élèves[37] (RAN) en

[37] Nous ne nous attardons pas sur ce point, mais nous avons par ailleurs des données sur la trajectoire de cette élève pendant la période dédiée à l'enseignement des fractions, qui montrent des avancées spectaculaires en termes de conceptualisation (Chesnais & Coulange, à paraître).

vue de convaincre sa camarade que $\frac{1}{5}$ est plus grand que $\frac{1}{8}$ présentent des proximités avec ceux formulés par les élèves de CM2. Bien que ces arguments soient ancrés dans un contexte quotidien (le partage de « gâteaux »), ils se centrent sur des mêmes quantités (« *imagine, c'est les mêmes gâteaux* ») et établissent des relations d'ordre entre ces quantités.



Production écrite finale de RAN et JAD

RAN : six cinquièmes parce que ce sera la plus grosse part, ce sera la plus grosse / si tu découpes l'unité en petit, et bien ça te fera tout le grand gâteau, ce sera énorme.

JAD : non, RAN, c'est celui-là le plus grand c'est juste maitresse qui a montré parce que je disais c'est impossible de faire six cinquièmes.

RAN : voilà regarde par rapport à eux [*en montrant les cinquièmes*]. Regarde, ils sont de plus en plus petits [*en montrant les huitièmes*] alors que eux, ils ont tout le gâteau, énorme. (…) tu m'as pas compris JAD. Regarde, derrière je t'explique. (…)

ENS : alors qu'est-ce que vous me faites là les filles ?

RAN : j'essaie de lui faire comprendre. (…)

JAD : elle, elle dit c'est celle-là la plus grande [*en montrant* $\frac{6}{5}$]

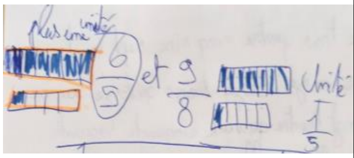
RAN : Parce que quand tu coupes le gâteau. Imagine c'est les mêmes gâteaux. Lui il sera plus petit [*en montrant* $\frac{9}{8}$] et lui ce sera plus gros.

ENS : la question, c'est cette part est-ce qu'elle est plus grande que cette part ? Là tu as coupé ton gâteau en cinq, tu es d'accord ? Et là on l'a coupé en huit. Est-ce que tu préfères une part d'un gâteau coupé en cinq ou une part d'un gâteau coupé en huit ? (…)

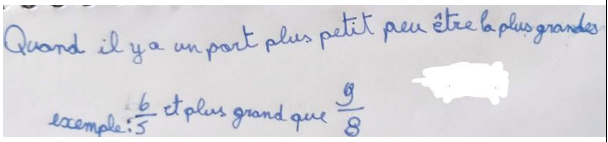
JAD : en cinq comme il y a moins de parts, elle est plus grosse.

Figure 17 : Episode observé pendant la phase de recherche – Comparaison de $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$

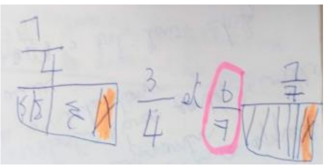
A la suite d'un épisode de mise en commun (présentant de fortes proximités avec celui observé en classe de CM2), les élèves de CM1 ont produit des écrits dans un « carnet de notes », où ils étaient invités à consigner librement ce qu'ils pensaient utile de retenir à l'issue de la séance sur la comparaison de fractions, dont certains sont repris dans la figure 18.



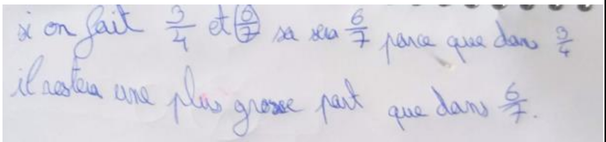
Ecrit de JAD



Ecrit de REN



Ecrit de JUL



Ecrit de ASS

Figure 18. Ecrits personnels d'élèves de CM1 à l'issue de la séance sur la comparaison

Ces écrits personnels témoignent des tentatives des élèves de formuler voire de décontextualiser les connaissances construites à l'issue de la suite de tâches proposées. Certains écrits restent proches des tâches données mais avec des indications supplémentaires que nous interprétons comme des indices de compréhension des connaissances en jeu : comme les annotations « *plus unité* » ou « *unité* » dans l'écrit de JAD et la coloration de « résidus » (correspondant à $\frac{1}{4}$ et à $\frac{1}{7}$) dans l'écrit de JUL. L'écrit d'ASS reste contextualisé à une tâche donnée tout en prenant une forme verbale plus argumentative. Si l'écrit de REN parait un peu contradictoire en apparence (« *quand il y a une [un nombre de parts] part plus petite [petit], [la fraction] peut être la plus grande* »), il semble néanmoins vouloir exprimer de manière plus décontextualisée que les écrits précédents que même si le nombre de parts est plus petit, la fraction peut être plus grande. Ces écrits constituent des indices solides de ce qui paraît avoir été conceptualisé par les élèves à l'issue de la séance observée.

Les observations menées en CM2 comme en CM1 confirment ainsi les potentialités de la séquence de tâches de comparaison, conçues en prise d'appui sur le *benchmarking*. Ces tâches amènent les élèves à questionner l'ordre de fractions unitaires pour comparer des fractions plus grandes ou plus petites que le repère. Bien que la comparaison de « *n*-ièmes » puisse sembler élémentaire, il apparaît que cette question est rarement posée aux élèves français. Comme on l'a vu, en l'absence de questionnement sur la comparaison, le risque est grand de voir ces *n*-ièmes que comme des « objets » privés de toute considération liée aux grandeurs ou aux mesures de grandeurs. A ce sujet d'ailleurs, la perspective ouverte ici rejoint pleinement celle des travaux de Chambris (2022a, 2022b) sur les quantités, évoquée en amont. Les raisonnements convoqués par les élèves relèvent bien de la comparaison de quantités mathématisées, même lorsqu'ils restent ancrés dans des contextes quotidiens (de gâteau, de pizza ...), modélisés par des représentations surfaciques (rectangulaires ou circulaires). En cela ces représentations et les raisonnements d'élèves asssociés ne convoquent vraisemblablement pas la grandeur aire, rapportée à des figures géométriques (qui seraient des rectangles ou des disques dans le cas présent). De notre point de vue, ces raisonnements d'élèves relèvent néanmoins de preuves intellectuelles (Balacheff, 1987) et participent de la conceptualisation de la notion de fraction, portée par des discours intermédiaires (Chesnais & Coulange, 2022).

4. Conclusions et perspectives

Si nous avons choisi de débuter cet article par l'examen des résultats quelque peu inquiétants d'un item sur les fractions issu de l'évaluation TIMMS 2015, ce n'est évidemment pas pour blâmer qui que ce soit, ni les enseignants, ni les élèves français. Notre propos était plus volontiers de souligner la nécessité de problématiser la progressivité envisagée pour la construction de connaissances et savoirs sur les fractions dans le contexte scolaire français. Dans cette perspective, nous nous sommes appuyés sur des observations conduites dans le cadre d'une recherche collaborative avec une enseignante et des élèves de CM1-CM2. Ces observations ont constitué autant d'occasions de prendre un peu de distance par rapport aux repères de progressivité classiquement envisagés dans l'enseignement des fractions en France, ou du moins, par rapport à ceux que la littérature institutionnelle ou professionnelle semblait mettre en avant, jusqu'à aujourd'hui. Notons que de nouvelles propositions de programmes (formulées dans le courant de l'année 2024) pourraient conduire à des évolutions importantes de ces repères, en rendant l'enseignement des fractions bien plus précoce (dès le CE1) qu'il ne l'est actuellement et en lui donnant beaucoup plus d'espace.

Nous avons voulu débuter notre interrogation sur le(s) rôle(s) donné(s) aux représentations liées à des surfaces circulaires dans l'enseignement actuel des fractions à l'école primaire en France. Nous pensions que ce type de représentations étaient remises en question par la documentation institutionnelle française au profit d'autres, privilégiant la grandeur longueur. Toutefois, d'une part, un rapport de synthèse récent, commandé par le Conseil Scientifique de l'Éducation Nationale (Sander *et al.*, 2022), en propose une vision plus nuancée et positive. D'autre part, même si nous n'avons pas de certitude sur l'écho de cette documentation institutionnelle dans les pratiques enseignantes, les manuels que nous avons consultés, nous ont semblé présenter des usages assez variés en la matière.

Un premier moment d'enquête a consisté à explorer les problèmes de partage, favorisant la production et l'utilisation de représentations de surfaces circulaires ou rectangulaires. Ces problèmes nous ont paru peu fréquentés par les élèves français de CM1-CM2 qui rappelons-le ici, passent très rapidement de l'étude des fractions à celle des décimaux. L'aisance observée chez les élèves de CM2 dans la résolution de ces problèmes nous a amenés à interroger plus en profondeur les connaissances mobilisées à travers leurs stratégies variées. Ces problèmes sont par ailleurs « bien connus » du champ de la *Mathematics Education* et la diversité des stratégies de résolution adoptées par les élèves est largement documentée. Cependant, ces stratégies, bien que variées, nous ont semblé s'inscrire davantage dans la continuité des connaissances sur les nombres entiers et sur leurs relations arithmétiques ou multiplicatives. Si nous ne nions pas que ces problèmes puissent participer de premiers apprentissages sur les fractions, nos propres résultats de recherche invitent à la vigilance sur certaines des potentialités parfois mises en avant dans la littérature internationale (Charles & Nason, 2000 ; Empson *et al.*, 2006). Notamment, nous avons montré que partager simultanément une pluralité d'unités en *n* pouvait être difficile, voire impossible à rapprocher de prendre le *n*-ième d'une grandeur mesurée qui serait constituée ou recomposée à partir de cette pluralité d'unités. Dans le même temps, nous avons montré que le *n*-ième d'une grandeur mesurée restait par ailleurs un impensé du curriculum français. Cela peut d'ailleurs participer à (re)poser la question de la signification finalement donnée à la fraction « partage de l'unité » au regard d'un sens limité donné aux « nouvelles » unités potentiellement en jeu, qui ne prendraient pas le statut d'unités relatives (Chambris, 2021). Le risque pris est grand que des raisonnements d'élèves supposés liés aux fractions, portent davantage sur des « objets » et des « paquets d'objets », et ce, indépendamment des unités, des grandeurs et mesures en jeu.

Un deuxième point d'éloignement par rapport à une progressivité classiquement envisagée dans les classes françaises concerne la comparaison de fractions. En accord avec les travaux de Chambris (2022a), l'ordre paraît un incontournable, y compris pour comprendre ce que recouvre le *n*-ième d'une unité, au-delà du seul résultat d'une action (pratique) de partage équitable de cette « unité » (ou objet ?). Cela résonne avec l'importance accordée à la comparaison de fractions par de nombreux travaux de la *Mathematics Education* (Behr *et al.*, 1984 ; Post & Cramer, 1987 ; Pearn & Stephens, 2004 ; Clarke & Roche, 2009 ; Mitchell & Horne, 2010). Ces travaux mettent en avant une variété de techniques possibles de comparaison de fractions, dont nous avons toutes les raisons de penser qu'elle ne trouve *a priori* pas de place dans le curriculum français actuel. Pourtant, des tâches faisant la part belle à ce que d'aucuns de ces travaux désignent par le *benchmarking* et/ou le *residual thinking* et qui prennent en compte des spécificités du curriculum français (comme l'étude de fractions supérieures à l'unité prévue assez rapidement à la suite de l'introduction même des fractions) paraissent recéler des potentialités fortes. En effet, ces tâches ont apparemment constitué des leviers pour amener des élèves de primaire à envisager les fractions dans une perspective liée à la notion de quantité (Chambris, 2022a, 2022b) qui semblait bel et bien échapper à une majorité d'entre eux jusqu'ici. Et ce même si ces quantités ne sont pas encore ou pas tout à fait ni des aires, ni des longueurs, d'ailleurs …

La réflexion amorcée dans ce texte mérite d'ailleurs d'être poursuivie au regard de ce fait en particulier, en repositionnant l'enseignement et l'apprentissage des fractions, dans une « théorie des quantités » (Chambris, 2022b), qui pourrait contribuer à renouveler plus globalement le regard didactique porté sur les savoirs à enseigner en arithmétique à l'école primaire. À l'heure même où de nouveaux projets de programme parus récemment rendraient potentiellement l'enseignement des fractions bien plus précoces dans le futur curriculum français, dès le cycle 2 (à partir du CE1-CE2, élèves de 7 à 9 ans), il nous semble particulièrement important de poursuivre nos travaux dans cette direction, d'ores et déjà impulsée par Chambris (2024).

Bibliographie

ADJIAGE, R., & PLUVINAGE, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 147–176.

ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. https://hal.science/tel-01249807

ANSELMO, B., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P., MADIER, D., FRONT, M., RAVOUX, A., & CHARNAY, R. (2020). *Nouveau Cap maths, CM1*. Hatier.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147–176.

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T.R., & LESH, R. (1992). Rational number, rotio, and proportion. Dans D. A. Grouws (Dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A projet of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 296-333). Macmillan Publishing.

BEHR, M. J., POST, T. R., & WACHSMUTH, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. Dans H. Schoen & M. Zweng (Dir.), *Estimation and mental computation* (p. 101–111). NCTM.

BEHR, M.J., WACHSMUTH, I., POST, T.R., & LESH, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323–341.

BROUSSEAU, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*, Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf/view

BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

CASTIONI, L, AMIOT-DESFONTAINE, M., & BUDON-DUBARRY, H. (2020). *Maths explicites*. Hachette.

CHAMBRIS, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Dir.), *Actes de la 20ième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 169–196). La Pensée Sauvage.

CHAMBRIS, C. (2022a). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités* [Habilitation à Diriger des Recherches non publiée, CY Cergy Paris Université]

CHAMBRIS, C. (2022b). *La notion de quantité est-elle encore d'actualité ?* [Conférence]. Séminaire de l'Irem de Paris. https://irem.u-paris.fr/agenda/seminaire-du-9-novembre-2022-la-notion-de-quantite-est-elle-encore-dactualite-0

CHAMBRIS, C. (2024). *Commentaires sur les projets de programme de mathématiques du cycle 1 et du cycle 2*. Conseil Supérieur des Programmes. https://hal.science/hal-04604251v1

CHAMBRIS, C., COULANGE, L., RINALDI, A.M., & TRAIN, G. (2021). Unités et systèmes d'unités pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres et du calcul à l'école. Contribution à un état des lieux-potentialités. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A.C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Dir.), *Actes de la 20ième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 373–396). La Pensée Sauvage.

CHARLES, K., & NASON, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 191–221. https://doi.org/10.1023/A:1017513716026

CHARNAY, R., DOUAIRE, J., VALENTIN, D., & GUILLAUME, J.C. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM1, Cycle3 (Ermel)*. Hatier.

CHESNAIS, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. [Habilitation à Diriger des Recherches, Education. Université de Montpellier]. https://hal.science/tel-02046178

CHESNAIS, A., & COULANGE L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques, *Revue française de pédagogie*, *214*, 85–121.

CHESNAIS, A., & COULANGE L. (à paraître). Vers une dimension sociologique du point de vue de l'élève en didactique des mathématiques. Dans C. Indarramendi, D. Frandjo & C. Joigneaux (Dir.), *Scolarisation, subjectivation, lutte contre les inégalités – ouvrage en hommage aux travaux de J-Y. Rochex*. Presses Universitaires de Vincennes.

CLARKE, D.M., & ROCHE, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 127–138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

COULANGE, L., & TRAIN, G. (2017). Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? Dans B. Lebot & F. Vandebrouck (Dir.), *Mathématiques en cycle 3* (p. 143-156). IREM de Poitiers.

COULANGE, L., & TRAIN, G. (2020). The School Mathematical Discursive Community: Diversity and the role of language in meaning-making. *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*, 81–87.

COULANGE, L., & TRAIN, G. (2021, mai). *Reasoning and comparing fractions Potentials of commensuration meaning*. [communication orale]. 9th ERME Topic Conference: Perspectives on conceptual understanding of flexibility and number sense in arithmetic, Leeds, United Kingdom. https://ccpp.leeds.ac.uk/wp-content/uploads/sites/21/2021/05/010-Train_Coulange_TWG2_ETC.pdf

COULANGE, L., OVIDE, A., & TRAIN, G. (2022). Multiplicative comparison of fractions: potentials and limits of commensuration meaning. Dans J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Dir.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)* (p. 354–361). ERME/ Free University of Bozen-Bolzano.

DOUADY, R., & PERRIN-GLORIAN, M. J. (1986). *Liaison école-collège. Nombres décimaux.* IREM de Paris Sud.

DUPREY, S., DUPREY, G., DROCOURT, V., MAUFREY, F., MAUFREY, I., GODE, V., & GRISWARD, G. (2021). *Maths au CM1*. Accès Éditions.

EMPSON, S. B., JUNK, D., DOMINGUEZ, H., & TURNER, E. (2006). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(1), 1–28. https://doi.org/10.1007/s10649-005-9000-6

FREGONA, D., ORUS, P., COULANGE, L., & TRAIN, G. (2023). Le CRDM Guy Brousseau, un « bon outil » pour ressourcer l'activité du chercheur en didactique. In A. Chesnais & H. Sabra (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 65–92). IREM de Paris.

GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. Dans D. A. Grouws (Dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 276–295). Macmillan Publishing CO, Inc.

GROSJEAN, C., GILGER, C., & CORTAY, C. (2021). *Tandem Maths CM1 et CM2*. Retz Édition.

HELAYEL, J., FOURNIE, C., CASASNOVAS, J., & VRIGNAUD, C. (2020). *Au rythme des maths CM1*. Bordas.

HIRSH, M., & RODITI, E. (2022). Neurosciences cognitives et apprentissage des nombres rationnels : un point de vue didactique. *Petit x*, *116*, 51–74.

KAZANDJIAN, E, MAZOLLIER, M.-S., PFAFF, N., & GUIMARD, S. (2016). *Haut les maths !*. Édition Retz

KRITTER, C. (2018). *Méthode de Singapour CM1*. Librairie Des Écoles.

LAMON, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170–193. https://doi.org/10.2307/749599

LOARER, C., SOBRERO, A., IMBAULT, C., & LÉVY, A. (2019). *Eurêka CM1 – Livre de l'élève 2019*. Edition Belin.

MARTINEZ-IBANEZ, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS.* [Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité]. https://theses.hal.science/tel-02524942v2

MARTINEZ, S., & RODITI, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS. *Education & Formations*, *94*, 23–40.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2004). Programmes des collèges – Mathématiques. https://www.education.gouv.fr/bo/BoAnnexes/2004/hs4/maths_sixieme.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2008). *Les nombres au collège.* https://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/2/doc_acc_clg_nombres_109172.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2016a). *Programme du cycle 3.* https://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/75/8/Programme_cycle_3_pour_B.O._1424758.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2016b). *Fractions et nombres décimaux au cylcle 3*. https://eduscol.education.fr/document/36665/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2018). *Référents Mathématiques de Circonscription & Formation.* https://eduscol.education.fr/document/1481/download?attachment

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2002). *Documents d'application des programmes.* https://bibnum.publimath.fr/MEN/MEN02003.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020). *Programme du cycle 3.* https://cache.media.education.gouv.fr/file/31/88/7/ensel714_annexe2_1312887.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023a). *Programme du cycle 3*. https://eduscol.education.fr/document/50990/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023b). Attendus de fin d'année – CM1. https://eduscol.education.fr/document/13990/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023c). Attendus de fin d'année – CM2. https://eduscol.education.fr/document/14002/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023d). Attendus de fin d'année – sixième. https://eduscol.education.fr/document/14014/download

MITCHELL, A., & HORNE, M. (2010). Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like? Dans L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Dir.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (p. 414–421). Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).

MOUNIER, E., & PRIOLET, M. (2015). Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire – De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire. [Rapport de recherche] Dans *Conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire.*Cnesco et Ifé-ENS de Lyon.

MULLIS, I. V. S., MARTIN, M. O., FOY, P., HOOPER, M. (2016B). TIMSS 2015. *International Results in Mathematics, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).* https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-International-Results-in-Mathematics.pdf

MULLIS, I. V. S., MARTIN, M. O., GOH, S., & COTTER, K. (2016). *TIMSS 2015 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/

NEAGOY, M. (2017). *Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding*. Association for Supervision & Curriculum Development.

PEARN, C., & STEPHENS, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. Dans I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Dir.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2004* (p. 430–437). MERGA.

PELTIER, M.-L., BRIAND, J., NGONO, B., & VERGNES, D. (2016). *Opération Maths CM1*. Hatier.

POST, T., & CRAMER, K. (1987). Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher, 35*, 33- 35.

POST, T., BEHR, M. J., & LESH, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(1), 39–48.

ROGALSKI, J. (2008). Mise en regard des théories de Piaget et Vygotsky sur le développement et l'apprentissage. Dans F. Vandebrouck (Dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes* (p. 33–44). Octarès.

SANDER, E., NEAGOY, M., RIVIER, C., SCHEIBLING-SEVE, C., & SENSEVY, G. (2022). *De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique.* https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/CSEN_Synthese_structures-mutliplicatives_web.pdf

SOWDER, J. T. (1988). Mental computation and number comparisons: The role in development of number sense and computational estimation. Dans J. Hiebert & M. Behr (Dir.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 182–197). Lawrence Erlbaum and National Council of Teachers of Mathematics.

STEFFE, L. P. (2010). Articulation of the reorganization hypothesis. Dans L. P. Steffe & J. Olive (Dir.), *Children's fractional knowledge* (p. 49–74). Springer.

VAN DE WALLE, J. A., & LOVIN, L. A. H. (2006). *Teaching student-centered mathematics: Grades 3–5*. Pearson.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133–170.

VYGOTSKI (1934/1997). *Pensée et langage*. La Dispute.

LALINA COULANGE

Lab-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux

lalina.coulange@u-bordeaux.fr

GREGORY TRAIN

Lab-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux

gregory.train@u-bordeaux.fr

Annexe. Vue synthétique d'une recherche collaborative sur l'enseignement des fractions au sein d'un LéA

La recherche collaborative sur laquelle prend appui cet article, a été conduite avec une enseignante collaboratrice surnommée Anne, de 2016 à 2021 au sein d'un LéA (Lieu d'Education associé) en partenariat avec l'IFE (Institut Français d'Education). Exception faite de la dernière année d'expérimentation, les observations ont été conduites dans une école primaire située dans un quartier prioritaire de la ville de Bordeaux (dans des classes variées avec des élèves CM1 et de CM2, de 2016 à 2020). La dernière année, la collaboration et les expérimentations se sont poursuivies dans une classe de CM1, au sein d'une autre école, se caractérisant par un public très hétérogène d'élèves (2020-2021).

Première année d'expérimentation (2016-2017) : introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur la ressource ERMEL CM, inspirée de l'ingénierie de Perrin et de Douady et Perrin (1986) en classe de CM1. La séquence d'enseignement a été intégralement construite par l'enseignante et mise en œuvre dans une classe de CE2-CM1.	Quelques résultats tirés des observations et analyses de la séquence sont cités en introduction de la section « *2. Des problèmes de partage : potentialités et limites ?* »
Deuxième année d'expérimentation (2017-2018) : passation d'un questionnaire visant à interroger les élèves sur des premières significations données aux expressions « quart », « moitié », « la moitié d'un quart », etc. en amont de l'étude des fractions. Introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur une situation de partage, le « partage du trésor des pirates » (classiquement utilisé pour introduire la division euclidienne en prise d'appui sur la ressource ERMEL CM) en CM1. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM1.	Quelques conclusions de l'étude des réponses au questionnaire sont signalées dans la transition entre la section « *1.1. Des premiers constats d'étude étayés par des résultats d'enquêtes internationales* » et la section « *1.2. La question des représentations de fractions* ». La figure 8 « *Deux représentations circulaires de* $\frac{5}{2}$ *proposées par les élèves de CM1* » dans la section « *2.4. La question des représentations de fractions* » provient d'une observation de classe faite sur un exercice de routine proposé cette année-là

Troisième année d'expérimentation (2018-2019) : Questionnaire posé aux élèves posé en amont de la reprise d'étude des fractions intégrant plusieurs problèmes de partage. Reprise d'étude des fractions en prise d'appui sur un problème de partage. Tâches de comparaison de fractions. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM2.	L'ensemble de la section « *2.2. Des problèmes de partage dans une classe de CM2* » (tableau 1, figures 2 à 7) s'appuie sur un corpus élaboré à partir d'observations conduites sur des problèmes de partages durant cette année d'expérimentation. L'ensemble de la section « *3.4. Des tâches de benchmarking en CM2* » (figures 11 à 13) s'appuie sur un corpus élaboré à partir d'observations conduites sur des tâches de comparaison de fractions durant cette année d'expérimentation.
Quatrième année d'expérimentation (2019-2020) : Introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur des problèmes de partage – en continuité du « partage du trésor de pirates » en CM1. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM1-CM2.	*Du fait de la crise sanitaire, les observations conduites de manière partielle ou ré-aménagées en partie à distance durant cette année d'expérimentation ne sont que peu évoquées dans cet article*
Cinquième année d'expérimentation (2020-2021) : Introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur des problèmes de « commensuration à l'unité ». Tâches de comparaison de fractions. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM1.	L'ensemble de la section « *3.5. Quelques compléments sur les tâches de benchmarking en CM1* » (figures 14 et 15) s'appuie sur un corpus élaboré à partir d'observations conduites sur des tâches de comparaison de fractions durant cette année d'expérimentation.