ERIC MOUNIER, DAVID BEYLOT, ALINE BLANCHOUIN, FRANÇOISE CHENEVOTOT-QUENTIN, NADINE GRAPIN, LAURENCE LEDAN

REPÉRER LES DÉMARCHES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES D'UN ÉLÈVE DE GRADE 2 PAR L'ANALYSE DE SES PROCÉDURES : INFLUENCE DE LA TAILLE DES NOMBRES

Abstract. Identifying the problem-solving approaches of a grade 2 pupil by analyzing his/her procedures: influence of number size. The research reported in this article is to provide a detailed description of the activity of a grade 2 pupil when solving arithmetical problems with verbal statements concerning additive structures. This challenge has the particularity of being addressed using tools drawn primarily from didactics of mathematics. We have revisited the modelling of the activity in solving arithmetical problems with verbal statements proposed by Verschaffel and De Corte (1997, 2008) as well as the definition of approach, which constitute significant contributions at the theoretical level. We have developed an innovative methodology which, when put to the test, has enabled us to identify new results concerning a pupil's activity. They shed new light on the link between the “size” of the numbers present in verbal statements of arithmetical problems concerning additive structures and the approaches taken by a grade 2 pupil.

Keywords. problem solving, activity, modelling, procedures, approach, elementary schools

Résumé. La recherche relatée dans cet article a pour ambition d'accéder à une description fine de l'activité d'un élève de grade 2 lors de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux concernant les structures additives (RPAV+). Ce défi a la particularité d'être relevé en utilisant des outils prioritairement issus de la didactique des mathématiques. Nous avons revisité la modélisation de l'activité en RPAV proposée par Verschaffel et De Corte (1997, 2008) ainsi que la définition de démarche, ce qui constitue des apports significatifs au niveau théorique. Nous avons élaboré une méthodologie innovante qui, mise à l'épreuve, nous a permis de dégager de nouveaux résultats concernant l'activité d'un élève. Ils éclairent d'un jour nouveau le lien entre la « taille » des nombres présents dans des énoncés de RPAV+ et les démarches qu'un élève de grade 2 emprunte.

Mots-clés. résolution de problèmes, activité, modélisation, procédures, démarche, école élémentaire

---

Introduction

Nous nous intéressons dans cet article au contexte particulier de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncé verbal (RPAV), des « problèmes numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles et dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit » (Houdement, 2011, p. 68) et qui « racontent des histoires. Ils

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 121 – 159.

sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique » (Feyfant, 2015, p. 9).

En outre, nous limitons notre étude aux problèmes additifs (RPAV+) c'est-à-dire pouvant se résoudre à l'aide d'une addition ou d'une soustraction. Nous restreignons également notre recherche aux élèves en France de début de CE1[1] (grade 2) qui sont, selon les programmes scolaires, au début de leur apprentissage concernant la RPAV+ (MENJ, 2020). Les instructions officielles (MENJ, 2019) prescrivent un apprentissage de la résolution de problèmes relevant des structures additives (Vergnaud, 1990) : « Cela recouvre les problèmes à deux données […] où il s'agit de déterminer une troisième valeur à énoncé court […], syntaxe simple, sans information superflue : les « one-step problems », objets d'étude de Vergnaud » (Houdement, 2018, p. 118). En CP[2] (grade 1), il s'agit de problèmes de transformation (recherche de l'état initial, de l'état final ou de la transformation) et de problèmes de composition de deux mesures (recherche d'une partie ou du tout). Nous circonscrivons notre étude à des problèmes « basiques » (Houdement, 2018) du fait qu'ils « rendent compte des raisonnements élémentaires en relation avec les quatre opérations, donc qui définissent les sens des opérations » (Houdement, 2018, p. 118) et qu'ils sont une étape indispensable à la résolution de problèmes complexes définis comme « des agrégats de problèmes basiques » (Houdement, 2018, p. 119).

Notre article rend compte d'une étude exploratoire qui a pour but de décrire l'activité cognitive d'un seul élève en RPAV+ à partir de certaines traces de celle-ci. Cette étude s'inscrit dans le prolongement d'une recherche précédente (Grapin & Mounier, 2024) qui interroge le rôle que joue la « taille » des nombres dans cette activité. Ces travaux se situent dans un projet de recherche plus large visant à documenter l'activité en résolution de problèmes de l'élève de cycle 2 (élève âgé de 6-9 ans), en tenant compte des spécificités des élèves de cet âge et de ce niveau scolaire. Notre objectif *in fine* est d'accompagner l'enseignant dans les rétroactions qu'il propose pour qu'elles soient adaptées aux connaissances et aux besoins de ses élèves (Blanchouin *et al.*, 2022a).

Dans cet article, pour fonder notre problématique, nous explorons certaines recherches antérieures qui nous ont conduits à adapter le modèle de Verschaffel et De Corte (1997, 2008) afin d'analyser l'activité en RPAV+ des élèves. Nous décrivons ensuite l'enquête et sa méthodologie basée sur un croisement de données et exposons alors les résultats concernant l'activité en RPAV+ d'un élève. La conclusion est l'occasion d'indiquer des limites et perspectives à propos des résultats et de la méthodologie.

[1] CE1 – Cours Élémentaire 1re année – élèves âgés de 7-8 ans.
[2] CP – Cours Préparatoire – élèves âgés de 6-7 ans.

1. Cadre théorique

1.1. Distinction entre tâche et activité

Puisqu'il s'agit de comprendre comment « raisonne » l'élève en fonction de ce qu'on lui demande, nous convoquons tout d'abord la distinction entre tâche et activité explicitée dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) :

> La tâche est ce qu'il y a à faire ; le « but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions » […] L'activité est ce que développe le sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi des inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, la manière dont il gère son temps, mais aussi son état personnel […]. (Rogalski, 2003, p. 349-350)

Un élève répond alors à la tâche qu'il s'est redéfinie à partir de la tâche qu'on lui a prescrite (Rogalski, 2003). Cette redéfinition est influencée par les connaissances dont il dispose, mais aussi possiblement par un contrat didactique, c'est-à-dire les attentes réciproques de l'enseignant et de l'élève (Brousseau, 1990 ; Bessot, 2003) qui ne sont pas nécessairement explicitées au moment de la prescription de la tâche.

Voici, à titre d'exemple (figure 1), une tâche de RPAV+ que nous avons soumise à des élèves de CE1 en début d'année scolaire accompagnée de la production de deux élèves, Maé et Iris :

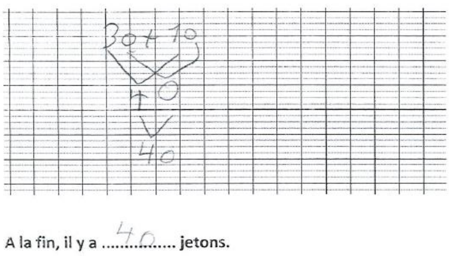
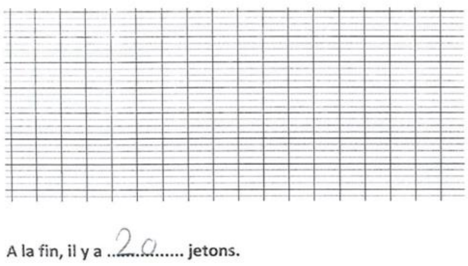
<table>
<tr><td colspan="2">On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends 10 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ? Prends le temps qu'il te faut. Tu peux utiliser ton crayon à papier et ta gomme pour rechercher (l'espace quadrillé Seyès est montré). Écris ta réponse sur les pointillés.</td></tr>
<tr><td>Maé
</td><td>Iris
</td></tr>
</table>

Figure 1. Tâche prescrite et production de deux élèves de CE1

Une tâche prescrite à l'identique a engendré une activité différente qui mène pour Maé à une réponse fausse et pour Iris à une réponse exacte. En outre, les traces écrites de l'activité concernent pour Maé une procédure et une réponse, alors que pour Iris, il n'y a que la réponse.

1.2. L'influence des connaissances sur les nombres et les opérations sur l'activité en RPAV

Les élèves de ce niveau scolaire peuvent entreprendre des comptages et des calculs pour résoudre les problèmes arithmétiques étudiés.

> Les comptages s'apparentent aux dénombrements parce qu'ils utilisent comme support des systèmes symboliques figurant des quantités […] les calculs traitent les opérations numériques reflétant les transformations et comparaisons des quantités. (Conne, 1987, p. 1)

Les élèves de CE1 peuvent recourir au comptage un à un, au surcomptage (comptage à partir de ...), au comptage à rebours (par exemple à partir de cinq jusqu'à deux). Ils peuvent mobiliser les doigts, des collections manipulables ou figurées, des stratégies informelles « qui conduisent de jeunes enfants non encore scolarisés à trouver par simulation mentale la solution à des problèmes qui seraient également résolubles par des opérations arithmétiques » (Sander, 2018, p. 134). Les calculs peuvent être mentaux en automatisant des faits numériques de répertoires additifs ou en mobilisant des décompositions additives (Butlen, 2004). Les connaissances potentiellement mobilisées sont différentes selon le type de calcul : les calculs posés « en colonnes » – la mise en signe d'algorithmes usuels enseignés à l'école (Mounier & Priolet, 2016) – font prioritairement appel aux propriétés de la numération écrite chiffrée (aspect décimal et aspect positionnel) ; les calculs mentaux font prioritairement appel aux propriétés de la numération orale (Mounier, 2012)[3].

Butlen (2007) souligne l'influence de certaines connaissances des élèves sur les nombres et les opérations sur l'activité en résolution de problèmes :

> Une plus grande familiarité avec les nombres et les propriétés des opérations s'accompagne d'une plus grande aisance calculatoire. Un plus grand nombre de procédures de calcul sont disponibles. Les élèves les mettent en œuvre plus sûrement et commettent donc moins d'erreurs de calcul. Cet effet concerne la résolution mentale comme la résolution écrite des problèmes. Nous pensons que cette aisance contribue aussi à alléger la charge en mémoire consacrée au traitement opératoire au profit du stockage des données et de la représentation du problème. (Butlen, 2007, p. 100)

Fayol (2008) nous semble aller dans le même sens :

> En résumé, l'impact de la connaissance fluide (exacte et rapide) des opérations simples sur les performances en résolution de problèmes, attestée par de nombreux résultats, pourrait reposer à la fois sur l'économie cognitive réalisée par la résolution de ces opérations ne nécessitant plus de recours à l'attention et sur la capacité de manipuler les termes des opérations de manière à faciliter les traitements. (Fayol, 2008, p. 54)

[3] Il est aussi possible de « poser » un calcul « dans sa tête ».

Dans nos recherches précédentes (Grapin & Mounier, 2024), nous avons constaté que la « taille » des nombres influence la réussite des élèves en résolution de problèmes. Notre but était de fournir des résultats quantitatifs sur les réussites et qualitatifs sur les réponses. Nous avons donné douze problèmes à résoudre à une cohorte de 83 élèves de fin de CP. Les contextes des problèmes étaient les mêmes (des collections de jetons dans des situations de réunion ou de transformation) et les conditions de passation identiques. Plus précisément, il s'agissait de six « one-step problems » relevant des structures additives. Ils étaient déclinés en deux versions qui ne différaient que par les nombres en jeu : l'une avec ce que nous avons qualifié de « petits » nombres (des nombres inférieurs à dix), l'autre avec des nombres que nous avons qualifiés de « grands » (de 10 à 52). Les élèves de CP sont plus familiers de ces « petits » nombres, dans le sens où ils les ont fréquentés plus souvent, mais aussi depuis plus longtemps que les « grands » nombres qu'ils découvrent durant cette année scolaire. Nous nous sommes intéressés en particulier aux élèves qui réussissent avec les « petits » nombres, mais échouent avec les « grands » nombres ou inversement. Selon la classe de problèmes, ils représentent entre un quart et presque la moitié des effectifs. Si les élèves qui échouent avec les « petits » nombres et réussissent avec les « grands » sont moins nombreux, ils ne sont cependant pas absents, et représentent même 17 % de l'effectif total pour une des classes de problèmes (la recherche d'un état final après transformation positive). Nous avons formulé des hypothèses concernant ces résultats surprenants, notamment du point de vue de la redéfinition de la tâche. Mais les inférences que nous avons pu faire concernant les procédures des élèves en étudiant leurs réponses écrites (dénombrements réalisés ou choix des nombres pour les calculs) ne nous ont pas permis de décrire l'activité des élèves de manière suffisamment précise pour véritablement éclairer ces résultats et discuter ces hypothèses. Les connaissances des élèves en calculs et dénombrements peuvent-elles expliquer ces différences de réussite ? En quoi l'activité en résolution de problèmes de l'élève est-elle si fortement impactée par la taille des nombres ?

Des résultats de recherches anciennes en psychologie et psychopédagogie concernant les « stratégies informelles de résolution (essentiellement basées sur le comptage) développées par les jeunes enfants » (Fagnant, 2008, p. 132) signalent que :

> Les élèves avaient des compétences importantes dans ce domaine, même avant tout enseignement formel en arithmétique et en résolution de problèmes. Ils développent une grande variété de stratégies qui, généralement, modélisent les actions ou les relations décrites dans les problèmes. (Fagnant, 2008, p. 132)

Cela pose la question de l'identification de « stratégies ». Les recherches précitées indiquent le rôle que peuvent jouer les connaissances sur les nombres et les opérations dans l'activité en RPAV. Pour préciser ce rôle, nous avons besoin de mieux comprendre ce que peut recouvrir cette activité.

1.3. L'activité en RPAV : notre adaptation du modèle de Verschaffel et De Corte (2008)

Nous avons retenu le modèle théorique de résolution de problèmes développé par Verschaffel et ses collègues qui fait la synthèse des modèles existants (Hanin & Van Nieuwenhoven, 2016). Le schéma (figure 2, ci-après) de Verschaffel et De Corte (2008) permet de considérer la potentielle complexité de l'activité en résolution de problèmes en général et celle en RPAV en particulier.

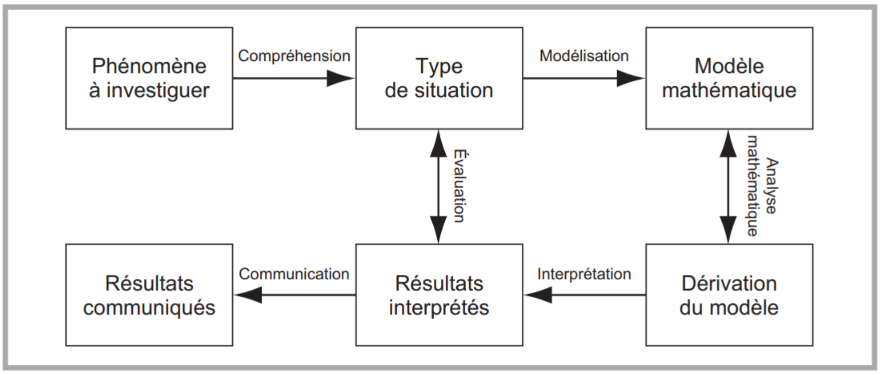


Figure 2. Schéma du processus de modélisation dans la résolution de problèmes selon Verschaffel et De Corte (2008, p. 155)

Cette approche adopte le point de vue de la modélisation mathématique. Bien qu'elle date de plus de vingt ans (cf. par exemple Verschaffel & De Corte, 1997), elle a été convoquée dans des recherches bien plus récentes (Houdement, 2011 ; Van Dooren *et al.*, 2015 ; Fagnant, 2018) concernant la RPAV à l'école élémentaire.

Nous allons indiquer comment nous adaptons ce modèle dans le cadre de notre recherche qui a la spécificité de s'intéresser à de jeunes élèves au début de l'apprentissage de la RPAV+.

1.3.1. Trois sous-processus

Signalons dès à présent que nous sommes dans un cas particulier de « phénomène à investiguer » : la tâche ne consiste pas à élaborer un problème mathématique à partir d'une situation réelle puis d'y répondre (voir par exemple la mathématisation horizontale d'Yvain (2018), mais de répondre à une question explicitement posée à partir de données numériques présentes dans un texte écrit ou oral. Pour cette raison, et à la suite de Fagnant (2018), nous utiliserons le terme « phénomène sous étude » plutôt que celui de « phénomène à investiguer ». Nous retenons ensuite l'idée de processus, allant de la prise en compte du « phénomène sous étude » jusqu'au « résultat communiqué », qui est dans notre cas la réponse donnée au problème, mais nous notons aussi la non-linéarité de ce processus. En effet, les composantes de la figure 2 ne sont pas à considérer comme des étapes qui doivent nécessairement être réalisées successivement et dans cet ordre. Cet aspect non linéaire du processus nous semble faire écho à ce que Julo (1995) dit de l'activité en RPAV :

> Il existe nécessairement des liens étroits et une dynamique commune entre la manière dont on cherche la solution et la manière dont on interprète le problème, entre les procédures ou les stratégies que l'on élabore et la représentation que l'on se construit peu à peu, entre les connaissances qui vont servir à agir et celles qui vont servir à comprendre le problème. (Julo, 1995, p. 25)

Afin d'élaborer une problématique prenant en compte la place de l'activité déployée dans des calculs ou dénombrements, nous allons définir trois sous-processus articulés et des contrôles intervenant potentiellement lors de la RPAV (figure 3).

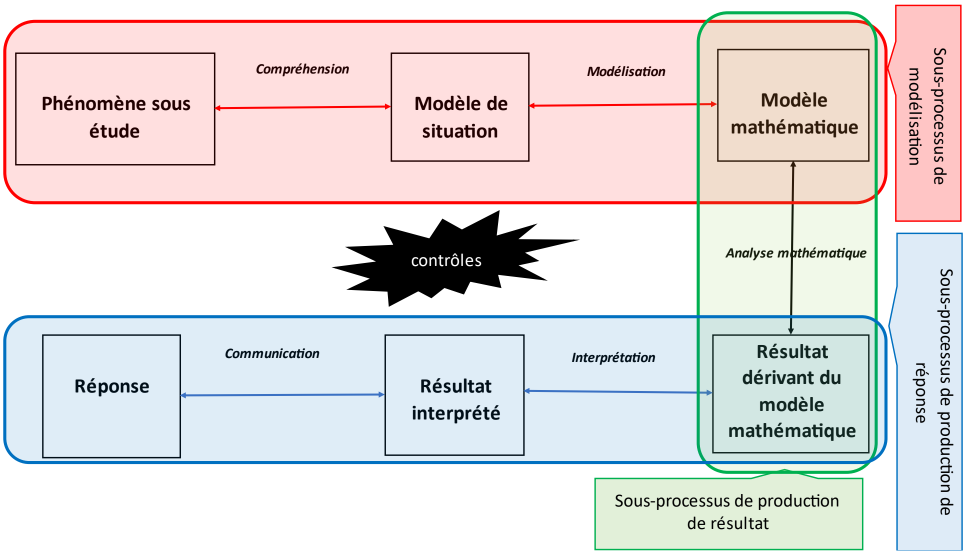


Figure 3. Trois sous-processus adaptés du schéma de Verschaffel et De Corte (2008)

1.3.2. Le sous-processus de modélisation

Le sous-processus de modélisation concerne les trois bulles horizontales en haut de la figure 3 (en rouge), du « phénomène sous étude » pour aboutir « au modèle mathématique » en passant par le « modèle de situation », ce dernier « portant sur les éléments, relations et conditions qui composent le problème à résoudre » (Van

Dooren *et al.*, 2015). Julo (2000 ; 2002)[4] n'envisage pas l'activité en RPAV comme un processus de modélisation mathématique comme le font Van Dooren *et al.* (2015). Il nous permet cependant de préciser ce qu'est « comprendre un problème » dans le cas de la RPAV :

> Ce sont ces relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte. On dira alors que se représenter un problème c'est non seulement se représenter un objet particulier […], mais aussi se représenter la tâche particulière qui est associée à cet objet (cette notion de « tâche » sert en psychologie à désigner l'ensemble formé par le but, les contraintes et les aides dans une situation où la production d'une action est attendue). (Julo, 1995, p. 13)

Nous rapprochons ainsi la « compréhension » présentée sur la première flèche des figures 2 et 3 de ce que Julo nomme la représentation du problème, qui va au-delà de la compréhension du texte puisque cela inclut aussi celle de la tâche « résoudre un problème ».

La présence d'une écriture avec un signe opératoire pourrait se comprendre comme dérivant de l'emploi d'un modèle mathématique. Pour autant, nous le verrons plus loin dans la description des démarches superficielles, cela ne signifie pas que le sous-processus de modélisation comprenne un modèle de situation : le modèle mathématique utilisé peut, par exemple, relever simplement de la prise d'indices de surface.

1.3.3. Le sous-processus de production de résultat

Le deuxième sous-processus est schématisé par les trois bulles disposées verticalement à droite dans la figure 3 (en vert). Typiquement, ce serait le passage d'une opération (modèle en écriture mathématique) à l'obtention d'un résultat numérique. L'écriture des étapes d'un calcul serait une trace de l'analyse mathématique amenant au résultat numérique qu'il resterait encore à traiter pour fournir une réponse. Nous avons vu précédemment des exemples de procédures numériques comme le comptage ou le calcul. Dans la suite de cet article, nous allons alors réserver l'usage du terme « procédure » à l'activité que l'élève déploie spécifiquement dans ce sous-processus. Nous relions ce sous-processus de production de résultats aux propos de Butlen (2007) et à ceux de Fayol (2008) sur

[4] Julo (2002) dresse en outre un panorama de l'état de la recherche sur la résolution de problèmes avant 2002 en identifiant des courants de pensée dont au moins une partie des recherches actuelles nous semble encore relever.

les connaissances des élèves sur les nombres et les calculs que nous avons mentionnés.

Mais, pour de jeunes élèves qui découvrent les opérations, les choses ne nous paraissent pas faciles à délimiter. Une opération est-elle clairement mobilisée ? Comment le résultat est-il obtenu ? L'élève opère-t-il sur des nombres par un calcul ou en utilisant uniquement des relations entre les nombres ? L'élève traite-t-il des quantités par un comptage, en s'aidant des doigts ou de matériel ? C'est la raison pour laquelle nous nommons ce sous-processus « sous-processus de production de résultat » et non par exemple « sous-processus de calcul ».

1.3.4. Le sous-processus de production de réponse

Une fois un résultat numérique obtenu, intervient possiblement un troisième sous-processus que nous qualifions de « sous-processus de production de réponse ». Il est schématisé par les trois bulles horizontales en bas de la figure 3 (en bleu). Le résultat est issu du deuxième sous-processus dans lequel l'activité concerne les nombres ou les quantités (par exemple des calculs, des dénombrements…). Communiquer ce résultat pour donner une réponse à la question posée dans le texte du problème (Houdement, 2011) peut exiger un formalisme (comme une phrase de réponse). Mais, pour en faire une réponse au problème, ce résultat nécessite une interprétation (Van Dooren *et al.*, 2015) en revenant au modèle de situation du phénomène à l'étude dans laquelle peuvent intervenir la qualification[5], l'ordre de grandeur, la nature du nombre pour la réponse (entier, décimal, rationnel), etc. Il s'agit alors d'une évaluation rétrospective, c'est-à-dire une vérification *a posteriori* (Burgermeister & Coray, 2008 ; Margolinas, 1993).

L'évaluation du résultat peut aussi être prospective, c'est-à-dire réalisée avant l'obtention d'un résultat, via par exemple une estimation (Burgermeister & Coray, 2008). De manière plus générale, il peut ainsi exister des contrôles de l'activité déployée dans la RPAV intervenant à différents moments et ne concernant pas uniquement le résultat.

1.3.5. Les contrôles

Certains didacticiens des mathématiques utilisent le terme de « contrôle » dans leurs recherches sur la résolution de problèmes. Pour Margolinas, les contrôles concernent

---

[5] Houdement (2011, p. 74) définit la notion de qualification comme « […] une sorte de syntaxe sur les grandeurs (que les physiciens nomment les équations aux dimensions), dont la version minimale est d'associer un nombre et une unité (12 euros) » qui permet de « […] prendre en compte les deux plans d'étude liés à un problème verbal arithmétique : plan de la réalité et plan des mathématiques ». Cela peut renvoyer selon nous à l'« interprétation » des figures 2 et 3.

l'ensemble de la résolution de problèmes : « Nous appelons processus de contrôle le processus d'anticipation de la validation » (Margolinas, 1993, p. 213). A sa suite, Burgermeister et Coray (2008) appellent processus de contrôle « […] l'ensemble des moyens, adéquats ou pas, efficaces ou non, mis en œuvre par l'élève en situation de résolution de problèmes pour répondre à ses doutes quant à sa résolution en voie d'élaboration. » (p. 68). Houdement, quant à elle, met l'accent sur des inférences et contrôles de nature pragmatique ou syntaxique potentiellement utilisés en RPAV par des élèves de grades 3, 4 et 5 (élèves âgés de 8 à 11 ans). Ceux de nature pragmatique se réfèrent à « […] la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème (notamment l'ordre de grandeur des résultats) qui régule le résultat et éventuellement convainc l'élève de commencer un autre calcul » (Houdement, 2011, p. 73). S'ils concernent le résultat obtenu, ils sont aussi à relier à l'interprétation envisagée par Van Dooren *et al.* (2015) (figure 2) dans ce que nous avons nommé le sous-processus de production de réponse (figure 3). Ceux de nature syntaxique se réfèrent au fait que :

> C'est l'analyse des relations entre les objets mathématiques (ici les nombres) qui permet d'avancer : seuls les nombres sont conservés (les mesures en jeu sans référence aux grandeurs qu'elles mesurent, par exemple 12, et non 12 euros ou 12 tables). Le contrôle s'exerce alors sur les écritures mathématiques, indépendamment de la signification que ces écritures ont par rapport au texte du problème ou des grandeurs en jeu. Cette décontextualisation est souvent très utile pour l'obtention d'un résultat ; par contre elle peut se révéler problématique pour l'obtention de la réponse. (Houdement, 2011, p. 73-74)

Ces derniers contrôles renvoient donc au sous-processus de production de résultat. Houdement a identifié des « connaissances cachées » qui ne sont pas explicitement enseignées ni même repérées par les programmes et la recherche et dont l'« absence poserait problème aux élèves qui en sont démunis » (Houdement, 2011, p. 68).

Les activités de contrôle incluent ainsi celles requises pour l'interprétation du résultat telle que définie par Verschaffel *et al.* (2000). Cependant, elles s'inscrivent de manière plus large encore dans des stratégies d'autorégulation cognitive (De Corte & Verschaffel, 2008 ; Hanin & Van Nieuwenhoven, 2016), c'est-à-dire « la capacité de l'individu de planifier et contrôler délibérément ses propres processus cognitifs en vue de la réalisation d'un but » (Focant & Grégoire, 2008, reprenant Gombert, 1990, p. 204).

Les contrôles concernent donc les trois sous-processus. Comme pour le modèle initial de Verschaffel & De Corte (2008), l'adaptation que nous proposons ne traduit pas une articulation linéaire des sous-processus puisque les contrôles peuvent conduire à des allers/retours entre eux. Par exemple, cela peut entrainer une modification du modèle de situation (voire une élaboration si dans un premier temps il n'existait pas comme dans les démarches superficielles décrites ci-après), un changement du modèle mathématique choisi initialement ou encore une vérification de la procédure dans le traitement mathématique (une erreur de calcul a pu se glisser).

2. Complément théorique et problématique

Les éléments théoriques et les recherches cités vont maintenant nous permettre de formuler notre problématique concernant l'activité en RPAV+ d'un élève et sa sensibilité aux variations des données numériques. Nous débutons par un complément théorique qui vise à caractériser cette activité en termes de démarche.

2.1. Trois démarches pour caractériser l'activité en RPAV

Il s'agit de définir des activités archétypales en RPAV susceptibles de rendre compte de l'activité d'un élève de début de CE1. Nous les dénommons démarches, en reprenant le terme déjà employé par Fagnant (2018) dans les expressions « démarche superficielle » et « démarche experte », dans la continuité des travaux de Verschaffel et de ses collaborateurs déjà cités. Elles vont correspondre à l'existence ou non d'une activité dans certains sous-processus, ce qui va nous amener à définir une nouvelle démarche, la « démarche intermédiaire ». Ces définitions vont nous permettre de formuler la problématique en termes de recherche de démarche à identifier.

Signalons auparavant que, pour les élèves de cet âge, il est toujours envisageable que le texte soit compris de manière incorrecte. Par exemple, « Je prends 10 jetons dans la boîte » pourrait être interprété comme « Je prends 10 jetons pour les mettre dans la boîte ». Cette mauvaise compréhension du texte pourrait correspondre, dans les termes de Riley *et al.* (1983) (repris par Fagnant, 2008) à une difficulté « conceptuelle ».

2.1.1. Démarche experte

Une démarche experte (figure 3) correspond à l'ensemble du processus de modélisation : le sous-processus de modélisation fait intervenir un modèle de situation (stratégie de modélisation experte) ; le résultat dérivant d'un sous-processus de production de résultat a été interprété avant d'être communiqué comme solution du problème. Signalons que la non-linéarité de l'ensemble du processus de RPAV ne permet ni de savoir *a priori* comment le processus de modélisation a été initié, ni même de connaitre *a priori* sa nature exacte. Il a pu s'agir de stratégies d'essais/erreurs mobilisant successivement plusieurs modèles, et donc le modèle finalement adopté n'a pas forcément été généré uniquement à partir d'un modèle de situation initial. Par ailleurs, comme nous avons pu le préciser précédemment, d'autres activités ont pu être déployées relativement aux contrôles, notamment celles concernant les deux autres sous-processus.

Notons que, pour nous, une démarche experte favorise l'obtention d'une réponse exacte, mais ne l'assure pas. Notre définition rejoint alors celle de Fagnant (2018) puisqu'en particulier il existe *a minima* des contrôles concernant le processus de production de réponse. Nous envisageons cependant plus explicitement la possibilité d'une grande variété de contrôles tout au long de la recherche.

2.1.2. Démarche superficielle

Dans le cas d'une démarche superficielle (figure 4), il n'y a pas eu de modélisation faisant intervenir un modèle de situation. Ce qui entraine que, avant d'être communiqué, le résultat n'a pu faire l'objet d'interprétation. Les contrôles, s'il y en a eu, sont restreints au sous-processus de production de résultat (par exemple des vérifications dans les calculs ou les comptages).

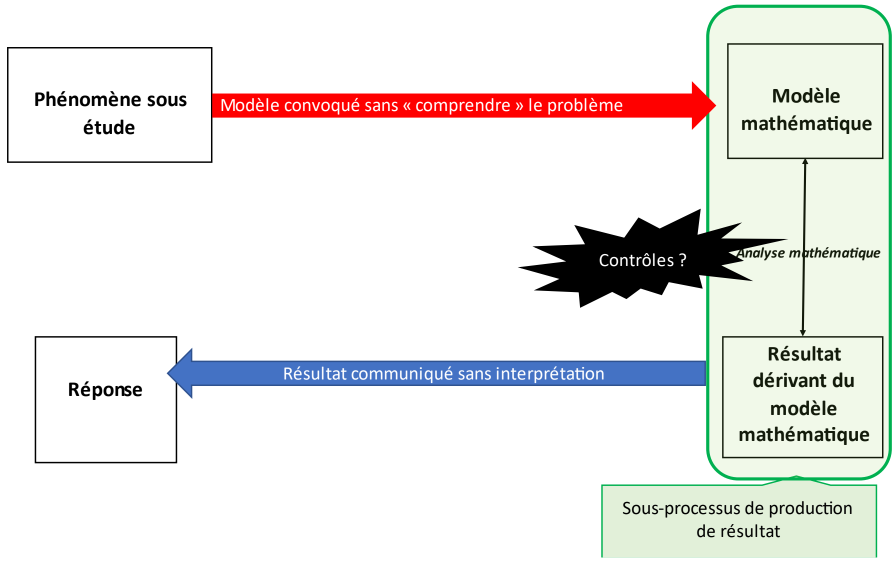


Figure 4. Démarche superficielle. Reprise de Van Dooren *et al.* (2015) et Fagnant (2018)

Les démarches que nous qualifions de superficielles nous semblent proches de la définition donnée par Van Dooren *et al.* (2015) :

> […] la mobilisation d'un modèle mathématique, correct par ailleurs, appliqué en vertu d'indices de surface – éventuellement en fonction de certains mots clés (comme « plus » et « fois »)[6] – et la communication du résultat des calculs sans retour sur l'énoncé ou la situation-problème afin de vérifier si la réponse proposée a du sens par rapport à la question posée ou si elle est réaliste. (p. 206)

Pour ces auteurs, une démarche superficielle s'oppose à une démarche experte qui prend en compte tous les éléments qui sont décrits par la figure 3. Ils listent alors des facteurs qui pourraient expliquer l'emploi de démarches superficielles : la représentation pour l'élève de ce qu'est l'activité en mathématiques qui renvoie à une « collection de stéréotypes » (certitude, règles enseignées par le professeur à appliquer, autorité du professeur sur la validité d'une réponse) et certains aspects de l'enseignement (la présence très importante d'exercices techniques stéréotypés dans les ressources utilisées en classe favorisant des routines ou encore la représentation des enseignants sur les mathématiques) menant ainsi dans un contexte de classe à des contrats didactiques propices aux démarches superficielles.

Nous adoptons cependant une définition plus restrictive que celle de Fagnant (2018), car, contrairement à Fagnant, dans nos démarches superficielles, le modèle mathématique n'est jamais issu d'un modèle de situation : il n'y a donc pas eu de modélisation à proprement parler.

2.1.3. Démarche « intermédiaire »

Dans le cas d'une démarche « intermédiaire » (figure 5), comme pour une démarche experte, un modèle de situation (stratégie de modélisation experte) est intervenu dans le sous-processus de modélisation. Cependant, ensuite, le résultat dérivant du sous-processus de production de résultat n'a pas fait l'objet d'interprétation avant d'être communiqué. Les contrôles, s'il y en a eu, n'ont concerné que les deux autres sous-processus.

[6] Ces auteurs utilisent ce terme de mots-clés, c'est aussi le cas de Sander. D'autres, comme Houdement, emploient l'expression « mots inducteurs » ou plus généralement la notion d'indices de surface. C'est ce que nous ferons aussi dans cet article pour indiquer le rôle de ces mots-clés.

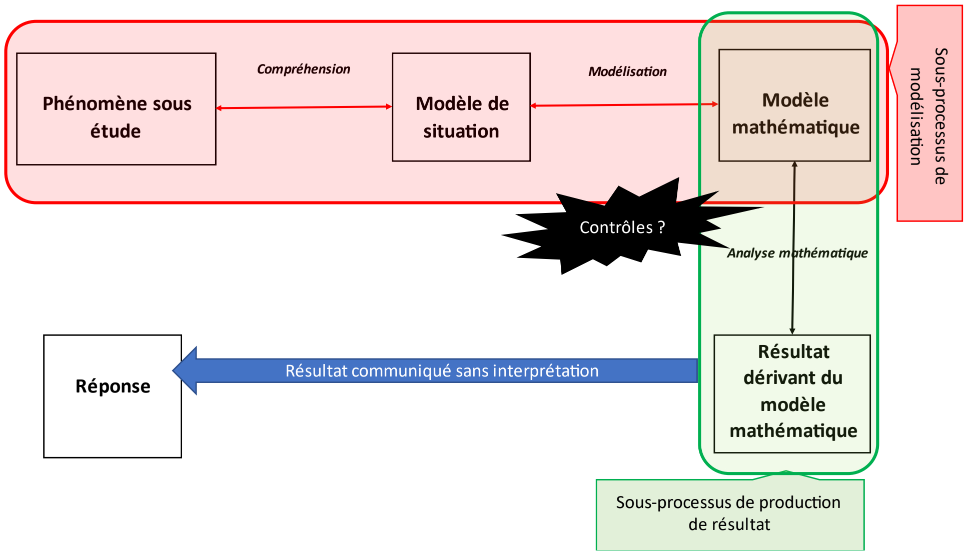


Figure 5. Démarche intermédiaire. Nouveau label, adapté de Van Dooren *et al.* (2015) et Fagnant (2018)

Il nous semble qu'à travers les exemples qu'elle donne, Fagnant (2018) qualifie aussi ce type de démarche comme étant superficielle. Afin de mieux cerner l'activité de l'élève, nous distinguons ces démarches qui omettent le sous-processus de production de réponse, mais dans laquelle un modèle de situation est intervenu : c'est pour cette raison que nous la qualifions de démarche intermédiaire.

2.2. Problématique

Dans le contexte de début d'enseignement de la RPAV+ du programme scolaire français, nous avons trouvé peu de descriptions « fines » de l'activité d'un élève de cet âge (non pas d'une cohorte de sujets) dans le champ des recherches en didactique des mathématiques. Toutefois, les travaux de Fayol et ceux de Butlen montrent que les connaissances sur les nombres et les calculs des élèves de l'école élémentaire influent sur la validité de leur réponse dans la résolution de problèmes (voir notamment Fayol, 2008 ; Butlen, 2007). Ils émettent des hypothèses sur les raisons de ce constat en termes d'« économie cognitive » ou de « charge en mémoire », mais sans détailler l'activité de l'élève. Ces recherches ont attiré notre attention pour investiguer la RPAV+ lorsque les données numériques changent. Dans nos propres travaux (Grapin & Mounier, 2024), nous avons constaté que la « taille » des nombres influence les performances des élèves de fin de grade 1 en RPAV+. En particulier, certains élèves obtiennent la bonne réponse à un problème que nous avons considéré comme comportant des « petits » nombres et échouent en présence de « grands » nombres et inversement. Nous avons opéré cette distinction entre « petits » et

« grands » nombres pour prendre en compte les connaissances des élèves. En effet, contrairement aux premiers, les seconds ont été introduits dans l'année et sont reliés à des situations qui engagent la mobilisation de connaissances nouvelles, par exemple dans des tâches de dénombrement ou de calcul[7]. Ces dissonances de réussite, entre RPAV+ identiques avec des « petits » et des « grands » nombres qui ne sont pas imputables à des erreurs de calcul, nous ont interpelées.

Tous ces travaux interrogent l'activité en RPAV+ lorsque les données numériques changent. Formulée à l'aide de notre cadre théorique, notre problématique consiste à regarder comment les changements de nombres dans l'énoncé d'un problème influenceraient l'activité au-delà de celle déployée dans le seul sous-processus de production de résultat (autrement dit, les procédures). Ainsi, selon les nombres en jeu, l'élève pourrait adopter des démarches superficielles ou intermédiaires le conduisant à choisir un modèle mathématique adapté dans certains cas et non adapté dans d'autres.

Pour donner des éléments de réponse à notre problématique, nous avons adopté une approche qualitative visant à décrire l'activité en RPAV+ pour des « one-step problems » « basiques » (Houdement, 2018) de Maé, un élève de début de CE1, en jouant sur la variable « taille des nombres »[8].

Nous voulons repérer, pour un élève, les démarches qu'il adopte (telles que définies dans le paragraphe précédent) en prenant en compte des informations sur les procédures qu'il utilise et les contrôles potentiellement entrepris.

Cette problématique, ancrée dans le champ de la didactique des mathématiques, est orientée par les outils qu'elle met à disposition, en tout premier lieu une analyse *a priori* des tâches proposées (cf. paragraphe dédié dans la partie méthodologie). Notre méthodologie, décrite ci-après, est basée sur l'analyse croisée de certaines traces de l'activité de l'élève concernant un panel de problèmes qui lui ont été posés. Nous prenons le parti de ne pas utiliser *a priori* des traces comme des schémas ou des dessins pour renseigner directement le processus de modélisation, ce type de traces n'étant pas forcément produit spontanément par les élèves de cet âge.

3. Méthodologie

La méthodologie d'enquête adoptée repose sur une analyse croisée des traces de l'activité d'un même élève, Maé, sur douze problèmes. Il s'agit de renseigner deux éléments de l'activité en RPAV+ qui permettent potentiellement d'identifier sa

[7] C'est au CP que la numération écrite chiffrée est introduite dans ses aspects positionnels et décimaux pour les nombres jusqu'à 99.

[8] Nous reviendrons sur cet aspect « taille des nombres » dans la description de l'enquête menée.

démarche : les procédures et certains contrôles. Après avoir décrit le dispositif général, nous exposons une analyse *a priori* de la tâche donnée à l'élève. Elle délimite ses activités potentielles et permet d'éclairer nos choix pour l'enquête. Nous indiquons finalement quelles sont les traces recueillies et la façon dont nous les avons traitées.

3.1. Le dispositif de l'enquête

Ce dispositif a concerné dix élèves de début de CE1, mais nous n'étudierons qu'un seul cas (Maé) pour cet article ce qui permet d'expliciter la méthodologie et de montrer le type de résultats obtenus. Maé est un élève de début de CE1 âgé de sept ans que son enseignante reconnait comme « ayant des difficultés en mathématiques et en maitrise de la langue », mais qui peut lire un texte court comme celui proposé dans la RPAV. Il a résolu individuellement une série de douze problèmes. La passation a eu lieu dans une salle de l'école en tête-à-tête avec un chercheur. Elle s'est déroulée en trois temps à raison de quatre problèmes par demi-journée (voir le détail de l'organisation de la passation en annexe 1). L'élève dispose d'un crayon et d'une gomme ; un chercheur lit deux fois l'énoncé à l'élève puis ce dernier répond sans limitation de temps. Des échanges entre l'élève et le chercheur ont pu avoir lieu après la résolution de chaque problème, en particulier pour préciser, si nécessaire, la procédure utilisée.

Nous avons filmé toutes les passations et avons conservé les productions des élèves. Cet ensemble relatif à Maé constitue les matériaux recueillis pour l'enquête.

3.2. Les douze problèmes

Quatre problèmes de transformation et deux problèmes de composition de mesure (Vergnaud, 1990) sont soumis sous deux versions aux élèves (cf. annexe 2). Comme on peut le voir dans l'exemple de la figure 6, un problème est proposé avec des nombres de deux tailles différentes : les « petits nombres » (PN) et les « grands nombres ronds » (GNR). Les PN sont des nombres inférieurs à cinq tandis que les GNR sont des nombres parmi 10, 20, 30, 40, 50 (1 à 5 dizaines). Nous reviendrons sur ces choix.

Problème (version avec PN)	Problème (version avec GNR)
On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 5 jetons dans la boîte. Je prends 2 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?	On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends 10 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?

Figure 6. Exemple d'un problème proposé avec des nombres de deux tailles différentes : PN et GNR

Les tâches prescrites dans les énoncés de problèmes et leur formulation partagent des caractéristiques communes : les événements sont décrits en respectant l'ordre chronologique ; les contextes, la syntaxe et le vocabulaire sont familiers des élèves ; il n'y a pas d'illustration ; les nombres sont dits à l'oral et écrits en chiffres ; pour donner la réponse, une phrase est à compléter uniquement par un nombre ; un encart de papier Seyès est à la disposition de l'élève (cf. figure 1).

3.3. Choix des nombres et analyse *a priori* des procédures (sous-processus de production de résultats)

Le choix de la taille des nombres est un levier pour donner des éléments de réponse à la problématique, car les élèves sont susceptibles de mobiliser des procédures différentes. Un calcul ou un dénombrement doit être mobilisable pour ces nombres en dehors de toute résolution de problèmes, permettant donc *a priori* une activité dans le sous-processus de production de résultat.

En nous rapportant aux connaissances supposées avoir été apprises par les élèves de CE1, indiquées dans les repères de progression accompagnant les programmes en CP, nous avons envisagé deux catégories de nombres : les « petits nombres » (PN) et les « grands nombres ronds » (GNR). Nous avons défini ces catégories en considérant les procédures envisageables par les élèves dans le sous-processus de production de résultat (calcul et comptage) dont nous avons entrepris l'analyse de manière très précise en nous appuyant sur Grapin *et al.* (2022).

Pour les PN qui sont des nombres inférieurs à cinq, les procédures peuvent reposer :

- (PerGlo) sur une perception globale des quantités (visualisation mentale par subitizing) ou la reconnaissance d'une configuration connue (par exemple, avec les doigts de la main : une main entière et un doigt levé, l'élève sait que c'est six) ;
- (Compt) sur des comptages (un, deux, trois, quatre, cinq), surcomptage (trois, quatre, cinq), comptage à rebours (cinq, quatre) avec ou sans l'aide des doigts, ou en appui sur une collection dessinée ;

– (CalMent) sur un calcul mental, mémorisé (cinq moins trois est égal à deux) ou réfléchi sur la base de décompositions additives de nombres.

Pour les GNR qui sont des nombres parmi 10, 20, 30, 40, 50 (1 à 5 dizaines), on retrouve les mêmes types de procédures que pour les PN, mais il y a en outre celles qui s'appuient sur les dizaines :

– (CalMent) on utilise, par exemple, que 30 c'est 3 dizaines et 10 c'est 1 dizaine et on procède avec les dizaines comme pour les PN ;

– (CalAlgo) on peut aussi « poser » l'opération et utiliser l'algorithme usuel sur les chiffres (somme des unités et somme des dizaines), avec une mise en signes (disposition en colonnes, en ligne, avec un « arbre », etc.) qui peut varier (Mounier & Priolet, 2016) ;

– (Compt) il est aussi possible de s'appuyer sur la comptine orale des dizaines (dix, vingt, trente, etc.) comme on s'appuie sur celle des unités avec les PN (un, deux, etc.).

Il est important de rappeler que, pour les élèves de début de CE1, les procédures sur les petits nombres sont des connaissances déjà travaillées à l'école maternelle (élèves âgés de 3 à 5 ans) et donc susceptibles d'être mobilisables dans la RPAV+, alors que celles sur les GNR n'ont été introduites qu'en CP et ne sont pas nécessairement maîtrisées, même dans une tâche isolée de calcul (sans avoir un problème verbal à résoudre).

3.4. Analyse *a priori* des problèmes

Les douze problèmes (cf. annexe 2) sont issus de six classes de problèmes (Vergnaud, 1990) :

– Quatre problèmes de transformation :

  - recherche de l'état final après une transformation positive (Ef+),
  - recherche de l'état final après une transformation négative (Ef–),
  - recherche de la transformation positive (T+),
  - recherche de la transformation négative (T–) ;

– Deux problèmes de composition de mesures (partie-partie-tout) :

  - recherche du tout (Tt),
  - recherche d'une partie (P).

Les travaux anciens de Riley *et al.* (1983), repris et confirmés depuis, attestent de réussites différentes selon la classe de problèmes. Potentiellement, l'activité diffère donc selon les six classes de problèmes. Mais elle peut aussi varier entre les deux problèmes d'une même classe de problèmes puisque les nombres en jeu permettent l'emploi de procédures différentes.

Par ailleurs, en reprenant la terminologie de Fagnant (2008, p. 137), selon les problèmes, le calcul relationnel (c'est-à-dire « écrit en conformité du problème ») et le calcul numérique (c'est-à-dire « écrit de telle sorte que la réponse soit derrière le signe égal ») coïncident ou non. Par exemple, dans chaque problème (Ef–) de la figure 6, ils coïncident pour le problème PN (5 – 2 = ?) et GNR (30 – 10 = ?). C'est aussi le cas pour les problèmes Ef+ et Tt (cf. tableau 1 et annexe 2). Par contre, ils ne coïncident pas pour les problèmes T+ (par exemple pour les PN, 3 + ? = 5 pour le calcul relationnel et 5 – 3 = ? pour le calcul numérique) et c'est aussi le cas pour les problèmes T– et P. Ces coïncidences ou non-coïncidences sont indépendantes des nombres en jeu[9]. Dans les cas de non-coïncidence, même si le calcul n'est pas écrit ou même si la procédure ne relève pas d'un calcul (mais d'un comptage par exemple), les procédures liées à des calculs numériques « standards » semblent plus difficiles à mobiliser pour les élèves (Fagnant, 2008). Nos propres travaux vont dans le même sens. Par exemple, nous avons observé que pour un problème dont le calcul relationnel se traduit par 3 + ? = 5, le surcomptage « de 3 pour aller à 5 » est plus souvent employé (stratégie informelle) que la soustraction 5 – 3 en ôtant 3 de 5.

Par ailleurs, Sander propose une analyse des textes de problèmes en termes d'analogie de substitution : « Les analogies de substitution portent sur les notions mathématiques elles-mêmes. Elles se repèrent par le fait qu'une notion est conçue par analogie avec une connaissance familière » (Sander, 2018, p. 126). L'analogie de substitution de l'addition très majoritairement observée est l'ajout que l'on rencontre dans les deux classes de problèmes Ef+ et Tt. Dans le cas de la soustraction, c'est le retrait rencontré dans la classe de problèmes Ef–. Les problèmes relevant de ces classes de problèmes sont considérés comme sources d'analogies facilitatrices. Nous notons alors que, pour les classes de problèmes dont relèvent les problèmes de notre enquête, la coïncidence calcul relationnel/calcul numérique correspond à des analogies facilitatrices et leur non-coïncidence à des analogies obstructives (tableau 1). La présence d'analogies facilitatrices influence positivement la réussite, mais rend plus difficile le repérage de démarches superficielles.

De nombreux auteurs, dont Julo, Fagnant, Houdement et Verschaffel, signalent que certains mots, formulations et expressions, peuvent être « inducteurs » de démarches superficielles en RPAV (voir notamment Julo, 1995, 2000 et 2002 ; Fagnant, 2008,

[9] Voir Fagnant (2008) pour plus de détails sur la classification des problèmes (en particulier p. 140 et 141). Soulignons que le terme « calcul » est utilisé ici avec le substantif « relationnel » ou « numérique ». Il renvoie à une analyse *a priori* de la structure d'un problème.

2018 ; Houdement, 2011, 2018 ; Verschaffel & De Corte, 1997, 2008). Dans les textes des problèmes de notre enquête interviennent les formulations « je verse », « je mets », « j'ajoute » et « je prends ». Les trois premières expressions peuvent renvoyer à une situation d'ajout (bien que « je verse » puisse aussi évoquer un retrait, un manque par rapport à la quantité de départ), la dernière à une situation de retrait (ce qui ne correspond pas forcément à l'opération dans le calcul numérique).

Nous avons regroupé dans un tableau les caractéristiques des problèmes selon les éléments précédents.

Classe de problèmes	Ef+ Recherche de l'état final. Transf. posit.	Ef– Recherche de l'état final. Transf. négat.	T+ Recherche de la transf. positive	T– Recherche de la transf. négative	Tt Recherche du tout	P Recherche d'une partie
Calcul relat. PN	2 + 3 = ?	5 – 2= ?	3 + ? = 5	5 – ? = 2	2 + 3 = ?	2 + ? = 5
Calcul relat. GNR	20 + 30 = ?	30 – 10= ?	10 + ? = 30	30 – ? = 10	20 + 30 = ?	20 + ? = 30
Calcul num. PN	2 + 3	5 – 2	5 – 3	5 – 2	2 + 3	5 –2
Calcul num. GNR	20 + 30	30 – 10	30 – 10	30 – 10	20 + 30	30 – 20
Coïncidence	Oui	Oui	Non	Non	Oui	Non
Analogie	Facilitatrice	Facilitatrice	Obstructive	Obstructive	Facilitatrice	Obstructive
Expression inductrice	Ajout « Je mets encore »	Retrait « Je prends »	Ajout « J'ajoute »	Retrait « Je prends »	Ajout « Je verse »	Ajout « Je verse »

Tableau 1. Des critères pris en compte pour l'activité potentielle dans les 12 problèmes

Signalons que le cas de T– est un peu particulier. En effet, pour T–, bien qu'ils ne coïncident pas, le calcul relationnel et le calcul numérique prennent tous les deux la forme d'une soustraction. Bien que T– ne corresponde pas à une analogie facilitatrice de la soustraction (*a contrario* de Ef–), les soustractions 5 – 2 et 30 – 10 donnent cependant la réponse exacte.

3.5. Traces recueillies et méthode d'analyse

Les matériaux recueillis sont les productions de Maé, mais aussi les vidéos des passations. Les traces écrites donnent déjà des indications pour inférer des procédures. Pour compléter, grâce aux vidéos, nous considérons des gestes corporels (les mains de l'élève en particulier), des attitudes (regards, mimiques) et aussi des éléments de discours spontanés. Nous nous référons alors à l'analyse *a priori* pour émettre des hypothèses sur les procédures. Concernant les traces de contrôles, nous tenons en outre compte du temps mis entre la fin de la lecture du problème et le début de la procédure observée, entre le début de la procédure et l'obtention d'un résultat, ainsi qu'entre la production du résultat et celle de la réponse. Nous notons d'éventuels nouveaux essais. Des échanges ont pu avoir lieu après la résolution du problème, à l'initiative du chercheur, pour préciser certains éléments de l'activité, en particulier la procédure. Nous en tenons aussi compte en étant attentifs au fait que les dires, faits et gestes de l'élève apparaissent ou non en contradiction avec sa première activité de résolution (qui s'est opérée sans intervention d'un tiers).

Nous identifions alors des procédures et des contrôles pour formuler des hypothèses (lorsque cela est possible) sur les démarches concernant tout d'abord chaque problème de manière isolée. Ensuite, nous reprenons les données en les croisant de trois manières différentes :

- pour chaque classe de problèmes, comparer les versions PN et GNR ;
- puis pour les six problèmes GNR, comparer selon les classes de problèmes ;
- enfin pour les six problèmes PN, comparer selon les classes de problèmes.

Ces croisements nous servent à enrichir l'analyse isolée de l'activité dans chaque problème.

4. Résultats de Maé concernant l'analyse problème par problème

4.1. Réponses et procédures

Concernant les procédures, de manière générale, l'activité que Maé déploie quand il résout seul chaque problème offre pour les PN peu d'observables (traces écrites et orales, gestes). Pour les GNR, c'est essentiellement la production écrite finale (par exemple, l'arbre de la figure 1) qui fournit des indications sur la procédure utilisée.

Le tableau 2 indique les réponses, les traces écrites relevées ainsi que les procédures que nous avons inférées en nous appuyant sur l'analyse *a priori* réalisée.

Pour les PN, Maé a exclusivement recours à des procédures de comptage que nous avons été amenés à préciser lorsque nous sommes parvenus à les identifier :

- (Compt) PN1 : surcomptage sur les doigts à partir d'un nombre donné (par exemple : trois doigts levés, « j'ai mis trois dans ma tête », puis un 4^e^ et un 5^e^ de la même main, en prononçant « quatre » et « cinq ») ;

– (Compt) PN2 : abaissement de doigts à partir d’une quantité levée, puis dénombrement des doigts restant par comptage ou reconnaissance de configuration (par exemple : deux doigts sont abaissés sur une main de cinq doigts levés ; il en reste trois) ;

– (Compt) PN3 : réunion de deux collections de doigts et dénombrement du tout (par comptage ou reconnaissance de configuration) ;

– PNX : procédure non identifiée, mais différente de celles observées dans les autres problèmes (Maé semble vouloir soustraire 1 à un nombre donné).

Pour les GNR, lorsque nous avons pu identifier sa procédure, Maé s’appuie majoritairement sur un calcul algorithmique et réalise des additions au moyen d’un arbre de calcul visible sur sa production :

– (CalAlgo) GNR1 : additions effectuées à l’aide d’un arbre de calcul (cf. figure 1) dans lequel les sommes des unités et des dizaines sont obtenues séparément, l’arbre prenant en charge l’aspect positionnel de la numération écrite chiffrée ;

– GNRX : pas de trace pour la procédure, pas de réponse donnée. Procédure non identifiée, mais différente de celles observées dans les autres problèmes.

Maé		Ef+	Ef–	T+	T–	Tt	P
PN	Réponse	5	3	**8** (2)	3	5	**4 ?** (3)
	Procédure	PN1 Pas de trace	PN2 Pas de trace	PN1 Trace : 3+5=8	PN2 Pas de trace	PN1 ou PN3 ? Pas de trace	PNX Pas de trace
GNR	Réponse	50	**40** (20)	**40** (20)	**Pas de réponse** (20)	50	**50** (10)
	Procédure	GNR1 Trace : arbre	GNR1 Trace : arbre	GNR1 Trace : arbre	GNRX Pas de trace	GNR1 Trace : arbre	GNR1 Trace : arbre

Tableau 2. Traces écrites, réponses (quand elle est fausse, la réponse est en gras – la réponse exacte est entre parenthèses) et procédures de Maé

Nous avons pu voir et interpréter facilement les gestes uniquement pour le problème de transformation avec recherche de la transformation positive avec petits nombres (T–(PN)). Nous avons donc dû tenir compte des échanges entre le chercheur et l'élève, après que l'élève a eu fini sa résolution de manière autonome. Dans un seul cas (T–(GNR)), Maé n'a pas donné de réponse, n'a pas laissé de trace de procédure et est resté muet lors des échanges. Deux cas, Tt(PN) et P(PN), restent sujets à discussion pour identifier avec certitude la procédure. Pour P(PN)[10], Maé semble raconter une « histoire » (malheureusement peu audible dans l'enregistrement) en se référant au texte du problème : il prononce le mot « enlève » et dit « quatre », mais est-ce sa réponse ? Ce n'est que lorsque des éclaircissements sont demandés par le chercheur qu'il écrit aussi « 5 [espace] 1 ». Il met ensuite le signe « – » quand le chercheur lui demande quel signe mettre entre les nombres. Cela illustre le fait que, très souvent, les demandes d'explicitations après-coup ne sont pas comprises par Maé comme des demandes d'éclaircissement de la procédure. En fait, dans beaucoup de cas, les propos de Maé se centrent sur la correction du résultat (sous-processus de production de résultat) et non sur les raisons qui l'ont amené à choisir son calcul ou dénombrement (sous-processus de modélisation), ni même sur le passage du résultat à la réponse (sous-processus de production de réponse), même quand le chercheur le lui demande de manière explicite (par exemple en confrontant son résultat obtenu au texte du problème qui est relu).

4.2. Les contrôles

Concernant l'identification de contrôles, nous relevons que Maé se lance systématiquement instantanément dans une procédure dès la fin de la lecture de l'énoncé, et le résultat obtenu est inscrit immédiatement dans la phrase de réponse. Il n'y a jamais d'essai de deuxième procédure ni de retour au texte de l'énoncé une fois un premier résultat obtenu. Ainsi, il n'y a pas d'interprétation visible du résultat, et aucun autre contrôle n'est observable (avec nos outils) durant le processus de résolution.

4.3. Les démarches

Les données précédentes conduisent au fait que Maé ne semble pas utiliser de démarche experte. En considérant chaque problème de manière isolée, lorsque la réponse est exacte, ces données ne nous ont pas permis de déterminer lequel des deux types de démarche intermédiaire/superficielle est adopté par Maé. Si la réponse est

[10] P(PN) : « J'ai deux sachets et une boite vide. Dans un sachet, il y a 2 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet il y a des jetons d'une autre couleur. Je ne sais pas combien il y en a. C'est le sachet mystère. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. A la fin, j'ai 5 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons qu'il y avait dans le sachet mystère ? ».

fausse, on peut faire l'hypothèse de démarches superficielles, mais sans en être assuré. Il est donc difficile d'aller plus loin en prenant en compte chaque problème de manière isolée.

5. Résultats de Maé concernant les analyses croisées des problèmes

5.1. Analyse pour chaque classe de problèmes selon PN et GNR

Pour les classes de problèmes T+ et P, les procédures mènent à des réponses fausses à la fois pour les GNR et les PN. Ces deux classes de problèmes sont les seules comportant à la fois une analogie de substitution obstructive, une non-coïncidence calcul relationnel/calcul numérique et des mots inducteurs renvoyant à un ajout alors que la situation est celle d'une différence ou d'un écart (Maé fait une somme). Ces deux classes de problèmes cumulent donc de potentiels obstacles et il est difficile de savoir ce qui a pu jouer sur la démarche de Maé. Les réponses fournies auraient pu être évaluées rétrospectivement via une estimation qui nous semble à la portée de l'élève (les résultats trouvés n'auraient pas dû être supérieurs à ceux de l'énoncé) si celui-ci avait construit un modèle de situation approprié. Cela va dans le sens de l'emploi de démarches intermédiaires, voire superficielles, en particulier dans le cas des GNR où l'élève dessine un arbre à calcul d'une somme.

Pour les classes de problèmes Ef+ et Tt, les procédures mènent à des réponses exactes à la fois pour les GNR et les PN. Ce sont deux classes de problèmes catégorisées comme présentant une coïncidence calcul relationnel/calcul numérique avec analogie facilitatrice, comportant des mots inducteurs renvoyant à une procédure adaptée au problème. Dans ces cas, il est difficile de faire des hypothèses sur les démarches.

Cependant une troisième classe de problèmes est de la même catégorie que Ef+ et Tt : c'est Ef– (ici le calcul relationnel/calcul numérique est une soustraction). Or, pour celle-ci, la procédure utilisée par Maé mène à la réponse exacte pour les PN, mais pas pour les GNR. Il semblerait alors que la présence des PN ou des GNR influencerait le choix du modèle mathématique sous-jacent à la procédure. Un autre élément va dans ce sens. En effet, pour T–, on constate aussi des réponses exactes pour les PN, mais pas pour les GNR. Or, pour cette classe de problèmes, les réponses exactes (à la fois pour PN et GNR) sont favorisées si on se base sur le mot inducteur, mais elles ne le sont pas si on considère que les problèmes sont sans coïncidence calcul relationnel/calcul numérique et correspondent à une analogie de substitution obstructive.

En conclusion, si on ne considère que l'activité inférée dans chaque classe de problèmes selon PN et GNR, il est difficile d'aller plus loin et donc d'identifier des types de démarche. Mais croiser la taille des nombres avec les mots inducteurs semble une piste pour éclairer l'adoption des procédures par Maé.

5.2. Analyse pour tous les problèmes GNR selon les autres critères

Les procédures de Maé sont identiques pour cinq des six problèmes avec GNR (deux nombres sont ajoutés de manière correcte via un arbre de calcul), alors qu'elles ne mènent à un résultat fournissant une réponse exacte que dans trois de ces cinq cas. Ceci se rencontre quel que soit le type d'analogie ou de coïncidence calcul relationnel/calcul numérique ou de mots inducteurs. En outre, le choix de la procédure s'opère presque instantanément et la procédure de calcul se fait rapidement de manière exacte (semble-t-il, avec assurance). Le dernier problème avec les GNR, T–(GNR), est l'unique problème où aucune trace de procédure n'est observée. A ce stade de l'analyse, nous formulons l'hypothèse d'un possible « conflit » entre d'une part le fait d'utiliser la procédure additive « arbre » comme dans les autres problèmes avec GNR et, d'autre part, le mot inducteur « je prends » qui a conduit Maé à employer une procédure non additive dans le problème idoine avec les PN.

En conclusion, un faisceau d'indices converge vers le fait que la présence de GNR dans le texte des problèmes déclenche chez Maé la mobilisation d'une unique procédure (la procédure « arbre ») témoin de l'emploi d'un unique modèle mathématique (additif). Les autres éléments caractérisant les problèmes semblent avoir une influence seconde (comme les mots inducteurs) voire nulle (comme la classe de problèmes, le type d'analogie et la coïncidence calcul relationnel calcul numérique). Les démarches apparaissent alors comme superficielles, même dans le cas de l'obtention d'une réponse exacte (des cas de « faux positifs »). Qu'en est-il pour les PN ?

5.3. Analyse pour tous les problèmes PN selon les autres critères

Pour les problèmes avec PN, Maé mobilise quatre procédures différentes. Dans les cas de T– et Ef–, le calcul numérique correspond à une soustraction. La même procédure est alors utilisée, bien que le calcul relationnel/calcul numérique coïncide pour l'un mais pas pour l'autre. Dans le cas de Ef+ et Tt, le calcul numérique correspond à une addition et deux procédures différentes sont observées.

Plusieurs procédures sont donc disponibles selon les problèmes. Le choix effectué à chaque fois ne peut s'expliquer par la (seule) caractérisation du problème selon la coïncidence du calcul relationnel/calcul numérique, en fonction du type d'analogie ou de la classe de problèmes.

Nous pouvons cependant remarquer que le choix des procédures de Maé est cohérent avec les mots inducteurs dans cinq des six classes de problèmes. Le résultat correspond à une réponse exacte dans des cas où le calcul relationnel et le calcul numérique coïncident et l'analogie est facilitatrice (Ef+, Ef–, Tt). Quand ils ne coïncident pas et que l'analogie est obstructive, la réponse peut être exacte (T–) ou fausse (T+). Dans ce dernier cas, il ne s'agit vraisemblablement pas d'une erreur de calcul, mais de l'ajout des deux données (5 et 3) alors que la différence 5-3 ou le complément de 3 à 5 permettrait d'obtenir la réponse exacte. Ces arguments plaident en faveur d'une activité dans le processus de production de résultat orientée par les mots inducteurs. Mais qu'en est-il pour la classe de problèmes P dans laquelle Maé décrit la façon dont il raisonne avant de donner la réponse (c'est le seul cas) ? Pour ce problème, bien que les données soient trop fragmentaires pour en être sûr, il est possible que « je verse » n'oriente pas vers le choix d'une procédure dont le modèle sous-jacent est additif (contrairement à Tt) et engage un modèle sous-jacent soustractif amenant à une procédure mal maitrisée.

Nous formulons alors l'hypothèse que, pour les PN, Maé utilise des démarches superficielles, fondées en premier lieu sur les mots inducteurs, ou des démarches intermédiaires. Dans le cas de réponses correctes, même ses explications données *a posteriori* ne permettent pas de trancher entre les deux types de démarche. Dans le cas d'une réponse erronée, des erreurs de calcul ou de dénombrement ne semblent pas être en cause (*i.e.* l'activité déployée dans le sous-processus de production de résultat). L'hypothèse d'une stratégie superficielle semble plus étayée, au moins pour le problème T+.

5.4. Éléments de réponse à la problématique

Il nous semble que Maé adopte une « marche à suivre » bien à lui face à la résolution de problèmes, car ses démarches nous apparaissent sous-tendues par des logiques d'action influencées par les procédures disponibles. Tout se passe comme si la tâche principale qu'il s'est redéfinie (possiblement fruit d'un contrat didactique) est de trouver puis d'appliquer « la » procédure à utiliser (calcul ou comptage), selon des facteurs qui engagent alors à adopter des démarches superficielles ou intermédiaires.

Pour les GNR, Maé semble disposer d'une seule procédure sûre et efficace pour obtenir un résultat et atteindre son but. Son activité est réduite au sous-processus de production de résultat, après une prise d'information des deux nombres en jeu. Sa démarche apparait superficielle.

Pour les PN, information qu'il prend d'abord en compte, plusieurs procédures sûres et efficaces nous apparaissent s'offrir à lui. Il lui faut donc trouver un autre indicateur pour faire un choix. Dans l'analyse selon chaque classe de problèmes, la coïncidence calcul relationnel/calcul numérique et le type d'analogie ne nous ont pas permis de trouver une logique à ses choix de procédures et ses réponses (tableau 2). Par contre, cette décision pourrait être orientée par les mots inducteurs ; c'est d'ailleurs ce qu'il semble indiquer dans certains échanges avec le chercheur, les rares fois où il ne discute pas uniquement de la procédure. Toutefois, la présence de mots inducteurs identiques dans les problèmes Ef+ et Tt l'a pourtant conduit à des procédures différentes. Il se pourrait alors que Maé emprunte, au moins dans ce dernier cas, une démarche intermédiaire, mais toutefois jamais de démarche experte.

Soulignons finalement que le fait de réussir un problème avec les PN ne semble pas aider à réussir avec les GNR. La démarche de Maé ne nous parait pas experte, étant donné la pauvreté ou l'absence d'activité déployée dans le sous-processus de modélisation, de production de réponse, mais aussi de contrôle de manière générale. Lorsqu'elle est éventuellement menée, l'activité de contrôle apparait restreinte au sous-processus de production de résultat (vérification de la procédure, calcul ou comptage) ; c'est souvent à cela que répond Maé dans les échanges avec le chercheur, même lorsque ce dernier tente de lui faire interpréter la réponse donnée.

6. Conclusion

Notre objectif était d'étudier les conséquences de changements de nombres dans l'activité déployée en RPAV+ par un élève de grade 2. Nous avons pour cela convoqué des recherches antérieures qui nous ont conduits à spécifier un modèle d'activité en RPAV (figure 3), à problématiser en termes d'identification de types de démarches (superficielles, intermédiaires, expertes) et à préciser les nombres choisis. Nous avons ensuite décidé d'enquêter en basant notre méthodologie sur la possibilité d'identifier ces démarches à partir de l'activité dans le sous-processus de production de résultat (les procédures) et de l'activité de contrôle. Nous revenons ici sur les résultats obtenus, leur portée, ce qui interroge aussi les potentialités de notre méthodologie pour étudier d'autres cas.

6.1. Le rôle joué par la disponibilité des procédures dans l'activité en RPAV+

Avec le cas de Maé, nous avons pu mettre en évidence que les procédures dont dispose un élève[11] pourraient intervenir de manière déterminante dans sa démarche en RPAV+. La valeur des nombres peut être prise comme première voire unique information, en cohérence avec une redéfinition de la tâche en résolution de problèmes qui se réduit à trouver « ce qu'il faut faire avec les nombres » sans considérer tous les éléments requis pour y arriver tels que décrits dans une démarche experte. S'il ne dispose que d'une seule procédure pour les nombres qu'il a repérés dans l'énoncé (ce serait le cas de Maé pour les GNR), l'élève pourrait l'utiliser sans autres considérations et sa démarche serait donc superficielle. Si l'élève dispose de plusieurs procédures, il lui est nécessaire d'aller plus loin pour faire un choix. Il peut alors, par exemple, s'appuyer sur un mot inducteur et il s'agirait encore d'une démarche superficielle, mais pas obligatoirement. En effet, dans les cas des PN, Maé a pu changer de procédure pour la recherche de l'état final après transformation positive et pour la recherche du tout, ces deux problèmes contenant pourtant des mots

[11] Robert (1998) parlerait ici de procédures mobilisables voire disponibles.

inducteurs évoquant un ajout. Le fait de disposer de plusieurs procédures lui aurait permis de faire un choix entre elles (et donc aussi potentiellement un choix du modèle mathématique sous-jacent) non motivé uniquement par un mot inducteur. Cela a pu l'engager dans une activité concernant le sous-processus de modélisation qui ne relèverait donc pas d'une démarche superficielle, mais, dans son cas, d'une démarche intermédiaire.

Cela éclaire différemment les réflexions de Butlen (2007) et de Fayol (2008) concernant le rôle joué par la disponibilité de procédures de calcul sur l'activité de l'élève. Butlen indique qu'une plus grande maitrise des calculs permettrait d'« alléger la charge en mémoire consacrée au traitement opératoire au profit du stockage des données et de la représentation du problème » (Butlen, 2007, p. 100). Dans le cas de Maé, on peut considérer que l'éventail des procédures dont il dispose restreint ou ouvre les possibilités pour effectuer la tâche qu'il s'est redéfinie. Nous pouvons ainsi émettre l'hypothèse que ce qu'il sait faire avec ses doigts est à la fois un moyen pour opérer avec les nombres (ce qui réfère à son activité dans le sous-processus de production de résultat), mais aussi une représentation possible de la situation : par exemple la recherche du tout en réunissant deux collections de doigts comme dans PN3, la recherche de l'état final en relevant successivement des doigts comme dans PN1. Cela va dans le sens des propos de Fagnant (2008) qui signale que les élèves « développent une grande variété de stratégies qui, généralement, modélisent les actions ou les relations décrites dans les problèmes » (p. 132). Ceci met l'accent sur l'élaboration du modèle mathématique en jeu et son identification par le chercheur, au carrefour du sous-processus de modélisation et du sous-processus de production de résultat. Développer certaines connaissances sur des procédures mettant en jeu les doigts (comme représentation de la quantité, au moins pour les PN) pourrait alors aider les élèves dans ces deux sous-processus et favoriser l'accès à des démarches non superficielles. Cela ne semble cependant pas jouer *a priori* directement sur l'ensemble de l'activité de contrôle nécessaire pour adopter des démarches expertes.

Nos hypothèses sur le rôle joué par les connaissances sur les procédures avec PN et GNR sur l'activité en RPAV+ de Maé montrent en outre que d'autres caractéristiques des problèmes (calcul relationnel/calcul numérique, analogie de substitution, classe de problèmes) ne pourraient influencer que de manière seconde cette activité, surtout dans le cas où ces connaissances sont réduites.

6.2. Retour sur le cadre théorique et la méthodologie

Établir la problématique a mobilisé au niveau théorique l'identification d'un nouveau type de démarche, les démarches intermédiaires, non décrites explicitement dans les recherches antérieures. La méthodologie nous a permis de formuler des hypothèses argumentées concernant les démarches adoptées en RPAV+ par un élève, Maé, à partir du repérage de procédures et de contrôles, mais aussi de décrire plus finement des cas de démarches superficielles et intermédiaires. Revenons sur ces éléments.

Considérons tout d'abord les contrôles. Si on regarde tous les problèmes, des régularités ont permis de forger une image générale de l'activité de contrôle de Maé. Comme nous avons eu du mal à interpréter isolément les gestes et mimiques, nous nous sommes appuyés sur des indices variés. Nous avons pris en compte des indicateurs tels que le temps écoulé entre la fin de la lecture du problème et le début de l'engagement dans la procédure observée, la durée de la procédure, ainsi que le laps de temps entre la production du résultat et celle de la réponse. Ces éléments nous ont permis de supposer que les contrôles sont peu présents, voire absents. Ces premiers éléments permettent déjà de penser que Maé n'emprunte vraisemblablement pas de démarche experte. Cette hypothèse est renforcée en considérant les problèmes pour lesquels les résultats erronés obtenus auraient été invalidés si une interprétation en avait été faite en revenant au texte du problème. Dans le cas de réponses exactes, il subsiste un doute sur l'existence ou non de ce type de contrôle, surtout pour les PN et certaines classes de problèmes qui pourraient être familiers de l'élève.

Concernant les procédures, leur analyse *a priori* et la prise en compte d'observables (traces écrites ; gestes, en particulier avec les doigts) nous ont permis de les inférer chez Maé. Nous avons alors essayé de repérer des régularités en les éclairant selon la caractérisation des problèmes que nous avons faite. L'étude de l'activité par problème pris isolément ne nous a pas permis de conclure sur les démarches empruntées. C'est donc en croisant nos analyses sur des regroupements de problèmes, en faisant des parallèles, que nous avons pu avancer dans notre réflexion : nous avons pris en compte les procédures selon la classe de problèmes (en faisant varier la taille des nombres PN ou GNR), selon les GNR (en faisant varier les classes de problèmes) et finalement selon les PN (en faisant varier les classes de problèmes). Dans le cas de Maé, le premier regroupement, selon les classes de problèmes, n'a pas donné de résultat. Cet élément n'apparait pas déterminant pour lui, bien que beaucoup de recherches indiquent son influence sur la réussite des élèves[12]. Ce sont les régularités dans les deux autres regroupements qui ont permis de formuler des hypothèses argumentées non seulement sur la probabilité de l'utilisation de démarches superficielles ou intermédiaires, mais aussi sur leur description. Avions-nous besoin de regarder toutes ces classes de problèmes ? En particulier, on aurait pu penser que la classe de problèmes Ef–, avec analogie facilitatrice, coïncidence entre calcul relationnel et calcul numérique et comportant un mot inducteur évoquant

[12] Les recherches que nous avons consultées s'intéressent cependant le plus souvent à une cohorte d'élèves (% de réussite global) et ne portent pas sur un individu.

l'opération à faire (une soustraction), ne nous aurait été d'aucune utilité. Pourtant elle a donné lieu à une réponse exacte pour les PN et fausse pour les GN. Il nous apparait donc nécessaire d'analyser l'activité sur une diversité de classes de problèmes, y compris celles qui ne sembleraient pas *a priori* donner beaucoup d'informations sur la démarche.

D'un point de vue méthodologique, quels matériaux sont nécessaires à l'identification de procédures et de contrôles ? Le cas de Maé souligne en effet cette difficulté malgré les enregistrements vidéo effectués. Des entretiens ont été menés lorsque le chercheur en ressentait la nécessité pour l'aider dans la confirmation d'hypothèses faites *in vivo* sur les procédures et les contrôles rétrospectifs. Cette activité réflexive de l'élève après-coup ne correspond cependant pas forcément à celle déployée auparavant lors de la résolution du problème. Alors, quels apports, quelle complémentarité à notre méthodologie issue de la didactique des mathématiques, d'entretiens par exemple d'explicitation (Vermersch, 2019) ou de démarche de type ethnographique (Delalande, 2008) ?

6.3. Questions et perspectives de recherche

Le modèle que nous avons adapté de celui de Verschaffel et son équipe, le choix des problèmes et les croisements dans les analyses ont été appropriés pour produire des résultats originaux. Il ne s'agit cependant que d'un seul cas ! Pour aller plus loin et donc pour répondre de manière plus complète à nos questions, il est nécessaire de considérer d'autres élèves. Nous voudrions exploiter les mêmes données que celles concernant Maé, recueillies auprès d'une dizaine d'enfants de début CE1. Notre méthodologie donnerait-elle alors des résultats ? Lesquels ? Il serait aussi intéressant d'investiguer du côté d'élèves plus âgés pour voir si cette méthodologie reste pertinente. Leurs connaissances évoluant, il apparait cependant nécessaire d'adapter non seulement les classes de problèmes, mais aussi les nombres en jeu, voire la complexité des problèmes. D'ailleurs, ces questions sont aussi à considérer pour les élèves de début de CE1 comme Maé. Par exemple, que ce serait-il passé pour lui si nous avions proposé des quantités telles que 25 et 37 jetons qui requièrent des procédures différentes ? Une autre démarche serait-elle apparue ?

Ces questions peuvent être posées dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Il s'agirait de repérer dans l'activité de l'élève les schèmes qui sont à l'œuvre et d'observer « pour une même classe de situations, des conduites largement automatisées, organisées par un schème unique » ou d'« amorçage successif de plusieurs schèmes, qui peuvent entrer en compétition et qui pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinés » (Vergnaud, 1990, p. 136). Si on peut penser que « lorsque l'enfant utilise un schème inefficace pour une certaine situation, l'expérience le conduit soit à changer de schème, soit à modifier ce schème » (Vergnaud, 1990, p. 138), ce processus d'adaptation ne peut s'opérer que si l'élève se rend compte de cette inefficacité, ce qui questionne donc son activité de contrôle.

Nous allons continuer à enquêter sur l'activité de l'élève en résolution de problèmes dans le cadre de recherches collaboratives réunissant chercheurs, formateurs et enseignants (Blanchouin *et al.*, 2022a, 2022b ; Beylot *et al.*, 2024).

Bibliographie

BESSOT, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz, 91*.

BEYLOT, D., BLANCHOUIN, A., MOUNIER, É., LEDAN, L., CHENEVOTOT, F., & GRAPIN, N. (2024). Accompagner les professeurs des écoles à la prise en compte de la diversité de l'activité des élèves en résolution de problèmes : potentialités et limites d'usages du modèle de Verschaffel et De Corte (2008). *Actes du 49e Colloque COPIRELEM* (p. 847–874). ARPEME.

BLANCHOUIN A., GRAPIN, N., & MOUNIER, É. (2022a). Étude de gestes évaluatifs en situation de résolution de problèmes au cycle 2. Dans A. C. Adihou (Dir.), *Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone* (p. 943–959). Université de Sherbrooke.

BLANCHOUIN A., GRAPIN, N., & MOUNIER, É. (2022b). Planification et gestes évaluatifs en contexte d'ingénierie évaluative : un exemple d'étude en mathématiques à l'école élémentaire. Dans I. Issaieva (Dir.), *Actes du 33eme colloque de l'ADMEE-Europe* (p. 507–513). ADMEE-Europe.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309–336.

BURGERMEISTER, P-F., & CORAY, M. (2008). Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 28*(1), 63–106.

BUTLEN, D. (2004). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles.* [Habilitation à diriger des recherches, Université Paris 8]

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique.* Presses universitaires de Franche-Comté.

CONNE, F. (1987). Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(1), 71–116.

DE CORTE, E., & VERSCHAFFEL, L. (2008). Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 25–54). De Boeck Supérieur.

DELALANDE, J. (2008). Enquêter auprès d'enfants pour restituer leurs points de vue et leurs expériences. Dans B. Albero & J. Thievenaz (Dir.), *Traité de méthodologie de la recherche en sciences de l'éducation et de la formation* (Vol. 2, p. 46–61). Éditions Raison et Passions.

FAGNANT, A. (2008). Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 131–150). De Boeck Supérieur.

FAGNANT, A. (2018). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? Dans J. Pilet & C. Vendeira (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 94–113). IREM de Paris.

FAYOL, M. (2008). La résolution de problèmes : de la compréhension aux opérations. *Actes du séminaire national – L'enseignement des mathématiques à l'école primaire. 13-14 novembre 2007* (p. 49–60). MEN-DGESCO.

FEYFANT, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ*, *105*.

FOCANT, J., & GREGOIRE, J. (2008). Les stratégies d'autorégulation cognitive : une aide à la résolution de problèmes arithmétiques. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 201–221). De Boeck Supérieur.

GOMBERT, J. E. (1990). *Le développement métalinguistique.* Presses Universitaires de France.

GRAPIN, N., & MOUNIER, É. (2024). Évaluer la résolution de problèmes additifs au CP : une étude exploratoire autour de la taille des nombres. *Grand N*, *113*, 29–48.

GRAPIN, N., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., LEDAN, L., BEYLOT, D., MOUNIER, É., & BLANCHOUIN, A. (2022). Étude exploratoire de procédures d'élèves de 7-8 ans en calcul mental additif. *Revue Math-Ecole*, *238*, 29–40.

HANIN, V., & VAN NIEUWENHOVEN, C. (2016). Évaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire. *Évaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation*, *2*(1), 53–88.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactiques et de Sciences cognitives, 16*, 67–96.

HOUDEMENT, C. (2018). Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème. Dans J. Pilet & C. Vendeira (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 114–141). IREM de Paris.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2000). Aide à la représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal. *Actes du Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques 1999-2000* (p. 1–14). Institut de recherche mathématique de Rennes.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, *69*, 31–52.

MARGOLINAS, M. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* La pensée sauvage.

MENJ (2019). *Cycle 2. Mathématiques. Attendus de fin d'année de CP.* https://www.education.gouv.fr/bo/19/Hebdo22/MENE1913283N.htm

MENJS (2020). Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2). *BOEN n°31 du 30 juillet 2020.* https://www.education.gouv.fr/media/70279/download

MOUNIER, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 17,* 27–58.

MOUNIER, E., & PRIOLET, M. (2016). La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire Le cas de l'addition et de la soustraction. *Grand N*, *98*, 5–26.

RILEY, M. S., GREENO, J. G., & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. Dans H. P. Ginsburg (Dir.), *The development of mathematical thinking* (p. 153–196). Academic Press.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139–190.

ROBERT, A., & ROGALSKI , J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *2*(4), 505–528.

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(3), 343–388.

SANDER, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S^3. Dans J. Pilet & C. Vendeira (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 94–113). IREM de Paris.

VAN DOOREN, W., VERSCHAFFEL, L., GREER, B., DE BOCK, D., & CRAHAY, M. (2015). La modélisation des problèmes mathématiques. Dans M. Crahay & M. Dutrévis (Dir.), *Psychologie des apprentissages scolaires* (2e éd., p. 199–219). De Boeck.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 133–170.

VERMERSCH, P. (2019) *L'entretien d'explicitation.* ESF Editions.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1997). Word problems: a vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? Dans T. Nunes & P. Bryant (Dir.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (p. 69–97). Psychology Press Ltd.

VERSCHAFFEL, L., & DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 153–176). De Boeck Supérieur.

YVAIN, S. (2018). Vers une possible dévolution de la mathématisation dans un processus de modélisation. Dans Y. Matheron et G. Gueudet (Dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, *Actes de la XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 734–743). La pensée sauvage.

ERIC MOUNIER

LDAR, Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ. Rouen, F-94010 Créteil, France

eric.mounier@u-pec.fr

DAVID BEYLOT

INSPE de Poitiers, Université de Poitiers

david.beylot@univ-poitiers.fr

ALINE BLANCHOUIN

CREAD, Université de Bretagne Occidentale

aline.blanchouin@inspe-bretagne.fr

FRANCOISE CHENEVOTOT-QUENTIN

LDAR, Université de Lille, Université Paris Cité, Univ. Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Rouen, F-59000 Lille, France

francoise.chenevotot@univ-lille.fr

NADINE GRAPIN

LDAR, Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ. Rouen, F-94010 Créteil, France

nadine.grapin@u-pec.fr

LAURENCE LEDAN

INSPE de Toulouse, Université de Toulouse Jean Jaurès

laurence.ledan@univ-tlse2.fr

Annexe 1. Organisation de la passation : succession des douze problèmes posés à Maé les 22 et 23 octobre 2020

	1^{er} problème	2^{e} problème	3^{e} problème	4^{e} problème
Jour 1 matin	Ef+(PN)	Ef–(GNR)	T–(PN)	Tt(GNR)
Jour 1 après-midi	Ef+(GNR)	T+(PN)	T–(GNR)	P(PN)
Jour 2 matin	Ef–(PN)	T+(GNR)	Tt(PN)	P(GNR)

Annexe 2. Textes des douze problèmes et production écrite finale de Maé

<table>
<tr>
<td>

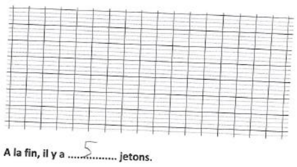
Ef+(PN)

Recherche de l'état final pour une transformation positive « petits nombres ».

On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 2 jetons dans la boîte.

Je mets encore 3 jetons dans la boîte.

Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?



</td>
<td>

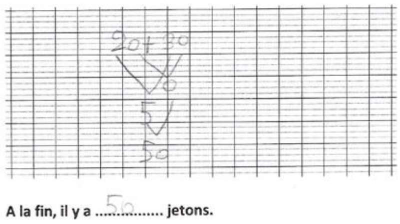
Ef+(GNR)

Recherche de l'état final pour une transformation positive « grands nombres ronds ».

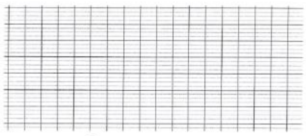
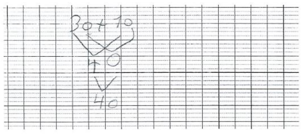
On a une boîte et des jetons.

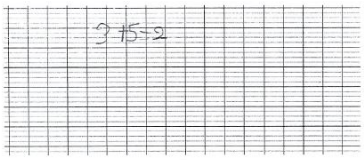
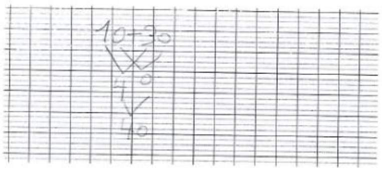
Au début, il y a 20 jetons dans la boîte. Je mets encore 30 jetons dans la boîte.

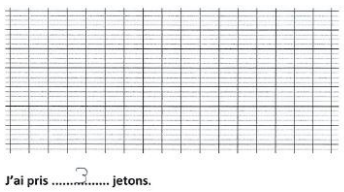
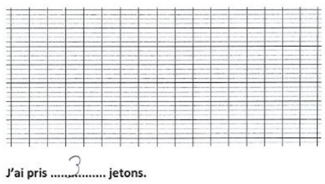
Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?

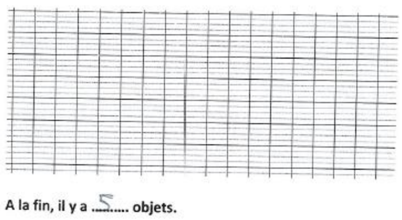
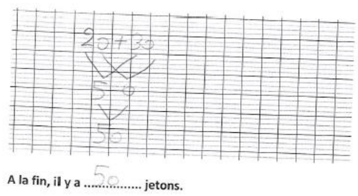


</td>
</tr>
</table>

Ef–(PN)	*Ef–(GNR)*
Recherche de l’état final pour une transformation négative « petits nombres ». On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 5 jetons dans la boîte. Je prends 2 jetons dans la boîte. **Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?**  	***Recherche de l’état final pour une transformation négative « grands nombres ronds ».*** On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends 10 jetons dans la boîte. **Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?** 

T+(PN)	*T+(GNR)*
Recherche de la transformation positive « petits nombres ». On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 3 jetons dans la boîte. J’ajoute des jetons. À la fin, dans la boîte, il y a 5 jetons. **Quel est le nombre de jetons que j’ai ajouté dans la boîte ?**  	***Recherche de la transformation positive « grands nombres ronds ».*** On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 10 jetons dans la boîte. Je verse des jetons dans la boîte. À la fin, dans la boîte, il y a 30 jetons. **Quel est le nombre de jetons que j’ai ajouté dans la boîte ?** 

T–(PN)	*T–(GNR)*
Recherche de la transformation négative « petits nombres ». On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 5 jetons dans la boîte. Je prends des jetons de la boîte. À la fin, dans la boîte, il y a 2 jetons. **Combien ai-je pris de jetons ?** 	***Recherche de la transformation négative « grands nombres ronds ».*** On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends des jetons de la boîte. À la fin, dans la boîte, il y a 10 jetons. **Combien ai-je pris de jetons ?** 

Tt(PN)	***Tt(GNR)***
Recherche du tout « petits nombres ». J'ai deux sachets et une boîte vide. Dans un sachet il y a 2 crayons. Dans l'autre sachet, il y a 3 feutres. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. **Quel est le nombre d'objets dans la boîte à la fin ?** 	***Recherche du tout « grands nombres ronds ».*** On a deux sachets de jetons et une boîte vide. Dans un sachet il y a 20 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet, il y a 30 jetons d'une autre couleur. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. **Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?** 

P(PN)	***P(GNR)***
Recherche d'une partie « petits nombres ».	***Recherche d'une partie « grands nombres ronds ».***
J'ai deux sachets et une boîte vide. Dans un sachet, il y a 2 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet, il y a des jetons d'une autre couleur. Je ne sais pas combien il y en a. C'est le sachet mystère. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. À la fin, j'ai 5 jetons dans la boîte.	J'ai deux sachets et une boîte vide. Dans un sachet, il y a 20 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet, il y a des jetons d'une autre couleur. Je ne sais pas combien il y en a. C'est le sachet mystère. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. À la fin, j'ai 30 jetons dans la boîte.
Quel est le nombre de jetons qu'il y avait dans le sachet mystère ?	**Quel est le nombre de jetons qu'il y avait dans le sachet mystère ?**