JEAN-PIERRE BOURGADE, CLÉMENT DURRINGER

LE *LOGOS*, ENTRE PRODUCTION ET INSTITUTIONNALISATION, DANS LES MANUELS SCOLAIRES DE MATHÉMATIQUES

Abstract. The *logos*, between production and institutionalization, in school mathematics textbooks. In this work, we propose to carry out a study of some school textbooks with the intention of finding clues as to the organization of study as envisaged by the profession. In particular, we will seek to establish that the knowledge of the skills studied is not always satisfactorily produced or, when it is, properly institutionalized. The study is based on tools derived from the anthropological theory of didactics.

Keywords. textbooks, didactic moments, institutionalization, activity

Résumé. Dans ce travail, on se propose de mener une étude de quelques manuels scolaires dans l'intention d'y trouver des indices sur l'organisation de l'étude telle que l'envisage la profession. On s'attachera en particulier à établir que le *savoir* des *savoir-faire* étudiés n'est pas toujours produit de manière satisfaisante ni, lorsqu'il l'est, correctement institutionnalisé. L'étude se fonde sur des outils issus de la théorie anthropologique du didactique.

Mots-clés. manuels scolaires, moments didactiques, institutionnalisation, activité

En France, les manuels scolaires sont des outils fréquents et souvent centraux dans la pratique des professeurs de mathématiques. Ils fournissent ainsi une information indirecte sur les pratiques de la profession : écrits par des professeurs pour des professeurs, parfois sous le regard bienveillant de l'inspection académique, les manuels peuvent donner à voir comment des professeurs envisagent l'organisation de l'étude des mathématiques. Le schéma général « activité, cours, exercice » est celui qui structure également la plupart des manuels que nous avons consultés.

Nos observations de séances de mathématiques menées par des professeurs stagiaires, ainsi que la lecture de transcriptions de séances réalisées par des enseignants expérimentés, rédigées par des étudiants de master MEEF 2è année en mathématiques en formation à l'INSPE, nous ont permis de mettre en lumière certaines difficultés professionnelles liées à la gestion de la transition entre les « activités » et le « cours » (Bourgade et Durringer, à paraître). En particulier, les professeurs n'identifient pas toujours l'institutionnalisation comme une fonction de l'étude à part entière, ils la réduisent le plus souvent à l'écriture du cours ; l'articulation entre le cours et les activités qui le précèdent n'est alors pas pleinement travaillée, et le rôle des activités comme moyen de *produire* les nouveaux savoirs et savoir-faire n'est pas bien compris. Nous souhaitons explorer ces difficultés plus

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 191 – 215

avant et déterminer dans quelle mesure les manuels scolaires permettraient aux professeurs qui les utilisent de les surmonter.

L'étude de manuels est intégrée, depuis les débuts de la TAD, dans les recherches et la formation. Nous proposons ici de mener une étude des manuels à travers les *fonctions didactiques* qu'ils pourraient aider à réaliser et dont on trouve les traces dans l'organisation du texte. Plus précisément, il s'agit de déterminer si les organisations de savoir qui sont étudiées dans ces manuels sont suffisantes, mais aussi de déterminer *comment* elles sont élaborées, dans quelle *temporalité didactique*, en faisant l'hypothèse que la structuration du manuel est le reflet d'une organisation possible de l'étude – bref, qu'une chronogenèse possible se laisse entrevoir à la lecture du manuel. Nous étudions plus particulièrement les moments de l'étude consacrés à la production du savoir (moment technologico-théorique) et à son institutionnalisation (moment d'institutionnalisation). Nous souhaitons déterminer si les « activités » (dont nous postulons que, dans les manuels, elles doivent permettre la production des organisations de savoir à étudier) et le « cours » (qui donne une idée de ce que pourrait être le texte du savoir institutionnalisé) sont reliés, et comment. Notre propos n'est pas d'indiquer des manques dans l'environnement technologico-théorique tel qu'il apparaît dans les manuels, mais de montrer que les conditions ne sont pas créées par les manuels pour faciliter la prise en charge des moments technologico-théorique et d'institutionnalisation par les professeurs qui souhaiteraient le faire en s'aidant de ces manuels.

Les moments de l'étude ont fait l'objet de nombreux travaux en théorie anthropologique du didactique (voir notamment : Chevallard, 2002a, 2002b ; Artaud, 2011), et l'institutionnalisation en particulier, qui est née dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD, voir Brousseau, 2004 ; voir également, pour une caractérisation des savoirs et des connaissances dans le cadre de la TSD, Margolinas, 2014 ; pour le lien entre dévolution et institutionnalisation, qui rejoint une part de notre interrogation sur le lien entre activités et institutionnalisation, Laparra & Margolinas, 2008). Nous proposons de mener un travail d'étude des manuels de l'enseignement secondaire pour l'analyse de l'organisation de l'étude, en procédant d'abord à un rapide exposé des notions utiles de la théorie anthropologique du didactique (TAD ; Chevallard, 2020), puis à l'étude de deux exemples développés.

1. Cadre théorique et problématisation de la question de recherche

1.1. L'objet de l'étude

La TAD postule que toute action humaine peut être décrite comme la réalisation de *types de tâches* au moyen de *techniques* qu'un discours, la *technologie*, vient justifier, rendre intelligible, produire, discours qui, à son tour, est justifié, rendu intelligible et produit par une *théorie*. Un type de tâches et une technique permettant de le réaliser constituent une *praxis*, tandis que l'environnement technologico-théorique qui la justifie, la produit et la rend intelligible constitue un *logos*. On parle également de savoir-faire pour la *praxis* et de savoir pour le *logos*. Un point essentiel pour notre discussion est le lien étroit qui unit la *praxis* et le *logos* : le *logos* remplit une *fonction* à l'endroit de la *praxis*, une fonction triple : de justification, d'explication et de production.

Prenons un exemple mathématique simple (en classe de sixième) : soit le type de tâches *déterminer si un nombre est un multiple de 3*. Une technique bien connue consiste à calculer la somme des nombres représentés par les chiffres de l'écriture décimale du nombre étudié (par exemple, pour le nombre 327, on fait la somme des nombres 3, 2 et 7 ; on obtient 12). Si le nombre obtenu est un multiple de 3, alors le nombre de départ est aussi un multiple de 3 (12 est un multiple de 3, donc 327 également). Cette technique se justifie ainsi : un nombre en écriture décimale, tel que abc, peut s'écrire $100a + 10b + c$ (ainsi $327 = 3\times100 + 2\times10 + 7$), ou encore $99a + a + 9b + b + c$. Comme $99a + 9b$ est un multiple de 3, il faut et il suffit, pour que abc soit un multiple de 3, que $a + b + c$ en soit également un. Pour déterminer si un nombre est un multiple de 3, il suffit donc de déterminer si la somme des nombres que représentent les chiffres qui permettent de l'écrire est un multiple de 3 (cette somme est en effet $a + b + c$). La théorie de cette technologie comporte les éléments suivants : un critère de divisibilité doit être un moyen de ramener une question portant sur la *nature* d'un nombre (le fait qu'il soit ou non un multiple d'un nombre donné) à une question portant sur son *écriture*.

Cette présentation n'est pas nécessairement celle qui est donnée dans les cours de mathématiques, où le *logos* est généralement réduit. Ainsi, dans le manuel de la collection *Dimensions 6*^{e} (Agnel *et al.*, 2016, p. 64) le *logos* est réduit à une propriété (par ailleurs fautive, la somme de chiffres n'étant pas un objet mathématique bien défini) : « un nombre est divisible par […] 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. » En outre, cette propriété est regroupée avec deux autres propriétés qui ont des formes approchantes : un nombre est multiple de 9 si la somme de « ses chiffres » est divisible par 9, il est divisible par 4 si « le nombre formé par ses deux derniers chiffres » est divisible par 4. Le *logos* qui est ainsi produit est incomplet et peut laisser place à un discours endogène, produit par les élèves sous la pression de besoins *praxiques* : ayant à déterminer si un nombre est un multiple de 7, ils pourront être conduits à calculer la somme de ses « chiffres » et à déterminer si elle est divisible par 7, ou bien à déterminer si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est un multiple de 7. Aucun de ces deux critères n'est valable. En revanche, la somme $2a + 3b + c$ est un multiple de 7 si et seulement si le nombre abc l'est. Ainsi, 343 est un multiple de 7, car $2\times3 + 3\times4 + 3 = 21$ qui est un multiple de 7. Vérifions : $343 = 350 - 7 = 7\times50 - 7 = 7 \times 49$, ce qu'il fallait montrer. D'où sort ce critère (calculer la somme du double du « chiffre » des centaines, du triple du « chiffre » des dizaines et du « chiffre » des unités) ? Le *logos* limité que propose le manuel *Dimensions 6^è^* ne permet pas d'en avoir l'idée, alors qu'il suffit de reprendre l'idée envisagée plus haut : écrivons 100 comme la somme d'un multiple de 7 le plus grand possible et d'un autre nombre, et procédons de même pour 10. On a $100 = 77 + 23 = 77 + 21 + 2 = 98 + 2$, et $10 = 7 + 3$. On a donc : $abc = 100\times a + 10\times b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c$, qui est la somme d'un multiple de 7 ($98 + 7b = 7 \times (14a + b)$) et du nombre $2a + 3b + c$. On conclut comme pour le critère de divisibilité par 3. Il est bien clair que ces arguments ne sont pas adaptés à une classe de sixième (ils nécessitent des techniques algébriques qui ne sont maîtrisées qu'en cinquième) ; en revanche, le principe même du fonctionnement du critère de divisibilité par 3, ou par 7, peut être travaillé sur des exemples à valeur générique.

La richesse relative du *logos* permet donc une maîtrise plus ou moins grande de la technique et surtout une adaptabilité variable à de nouvelles situations.

L'exemple que nous avons étudié est particulier : le manuel ne fournit aucun élément de justification des propriétés qu'il énonce, pas même expérimentale. D'autres cas sont plus délicats à analyser : les manuels sont riches d'œuvres[1] qui pourraient fournir la matière de développements technologico-théoriques, ou même qui sont mis à profit pour cela. Néanmoins, ces œuvres sont souvent confinées dans un espace limité : celui des « activités » et des « exemples ». Il est rare que l'intégralité des éléments de *logos* produits dans une activité soit reprise dans l'espace dédié au « cours ».

Il peut également se produire que les éléments de *logos*, notamment les définitions, énoncés dans le « cours » soient insuffisants pour fonder correctement les *praxis* : dans ce cas, la *praxis* apparaît comme un élément arbitraire, injustifié, devant être appris pour lui-même sans raison sérieuse. Le *logos* a une fonction essentiellement métaphorique : il permet de se faire une idée de ce dont il s'agit, sans donner une réelle prise sur les objets définis, comme certaines définitions chez Euclide (« le point est ce dont la partie est nulle »). Nous dirons alors que le *logos* n'est pas *fonctionnellement* relié à la *praxis* (il ne permet pas d'en produire et d'en assurer le bon *fonctionnement*).

Nous souhaitons illustrer sur quelques exemples archétypiques les (més)usages qui peuvent être faits du *logos* dans les manuels. Nous avons retenu deux exemples : l'un porte sur le produit scalaire en classe de terminale, l'autre sur les volumes en classe de sixième.

[1] En TAD, une œuvre est un produit, quel qu'il soit, de l'activité humaine (Chevallard, 2022, p. 208). Une technique, un savoir, une table, un film ou une conversation sont des œuvres. Un manuel scolaire, un paragraphe tiré d'un manuel scolaire sont des œuvres.

1.2. Le temps de l’étude

En théorie anthropologique du didactique, l’étude d’un savoir et d’un savoir-faire est considérée comme l’étude des praxéologies qui y sont afférentes. L’étude d’une praxéologie se déploie dans une certaine temporalité didactique, une chronogenèse, marquée par la réalisation de différentes *fonctions de l’étude* (Chevallard, 2002a) à l’occasion de différents *moments de l’étude* :

– Le moment de première rencontre avec le type de tâches et d’identification du type de tâches, où le collectif d’étude prend conscience de l’existence d’un type de tâches dont la réalisation est problématique pour lui et à l’étude duquel il décide de s’employer (*moment de première rencontre*) ;

– Le moment de l’exploration du type de tâches et de l’émergence de la technique, au cours duquel le collectif d’étude envisage plusieurs spécimens du type de tâches pour essayer de les réaliser, favorisant ainsi l’émergence d’une technique (*moment exploratoire*) ;

– Le moment de la construction de l’environnement technologico-théorique durant lequel s’élaborent les éléments de justification de la *praxis* (*moment technologico-théorique*) ;

– Le moment de l’institutionnalisation de la praxéologie qui est marqué par la production d’un rapport officiel au savoir et au savoir-faire émergeant : le collectif d’étude devra désormais *connaître* ce qui a été produit, et le connaître d’une façon bien particulière (*moment de l’institutionnalisation*) ;

– Le moment de travail praxéologique qui consiste en la mise au travail de la praxéologie émergente afin de la faire évoluer, de la stabiliser, etc., mais aussi de construire la maîtrise de cette praxéologie par les membres du collectif d’étude (*moment de travail*) ;

– Le moment de l’évaluation de la praxéologie et de sa maîtrise, dans lequel il s’agit pour le collectif d’étude d’évaluer la robustesse, la stabilité, etc., de la praxéologie produite, mais aussi sa propre maîtrise de cette praxéologie (*moment d’évaluation*).

Les trois premiers moments que nous avons présentés contribuent à l’émergence praxéologique ; nous les appellerons *moments de genèse praxéologique*. La fonction d’institutionnalisation praxéologique (*moment d’institutionnalisation*), qui va nous occuper largement

> [a] pour objet de préciser ce qu'est « exactement » [la praxéologie] élaborée, en distinguant notamment, d'une part les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans [la praxéologie] visée – distinction que cherchent à préciser les élèves lorsqu'ils demandent au professeur, à propos de tel résultat ou de tel procédé, s'il faut ou non « le savoir ». (Chevallard, 1999, p. 253)

Le point de vue de la Théorie anthropologique du didactique, ainsi exprimé, se démarque quelque peu de celui porté par la Théorie des situations didactiques (TSD) où la notion d'institutionnalisation a vu le jour :

> [une] situation d'institutionnalisation d'une connaissance […] est une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives. (Brousseau, 2010, p. 4)

La différence se fait essentiellement sur l'exploitation du milieu dans le cours de l'institutionnalisation : Chevallard (1999) insiste sur le fait que les éléments de milieu ne vont pas tous être conservés pour entrer dans le « texte du savoir », certains passeront par pertes et profits de l'étude. Néanmoins, comme le précise Kuzniak (2005), l'institutionnalisation contribue à la décontextualisation des savoirs :

> les faits, observés et interprétés grâce à sa théorie [ont montré à Brousseau] la nécessité de donner par l'institutionnalisation le statut décontextualisé et « officiel » de savoir à certaines connaissances. […] Cette phase est indispensable pour assurer le passage d'une connaissance reliée à une situation vécue individuellement et très contextualisée à un savoir décontextualisé actif dans une institution donnée. (p. 32)

La genèse praxéologique peut par exemple passer par l'étude d'une situation problématique dont l'étude requiert la production d'un nouveau savoir-faire : tout ce qui relève de la situation elle-même, mais aussi le caractère situé dans un premier temps de certains éléments praxéologiques, va peu à peu s'effriter et la praxéologie « visée » se dégager pour ainsi dire de cette gangue. La décontextualisation du savoir et du savoir-faire conduit à la production d'une praxéologie qui sera institutionnalisée, et qui prendra un statut officiel par « ce sous-moment d'*officialisation*, une [praxéologie] mathématique désormais coupée de l'histoire singulière qui l'a portée à l'existence fait son entrée dans la culture de l'institution qui en a hébergé la genèse » (Chevallard, 1999, p. 254), en l'occurrence, la classe de mathématiques[2].

[2] On remarquera que l'institutionnalisation au sens de la TAD n'est pas nécessairement « le processus par lequel le professeur montre aux élèves que les connaissances qu'ils ont construites se trouvent déjà dans la culture (d'une discipline) » (Sensevy, 2001) : dans le cadre plus général posé par la TAD, il peut y avoir institutionnalisation de nouveaux savoirs,

L'effet de cette *officialisation* est de poser une nouvelle *norme* de savoir et de savoir-faire, un *rapport officiel*, ou encore un *rapport institutionnellement attendu*[3], auquel devront désormais se conformer les rapports personnels des membres de l'institution ; le moment de l'évaluation met bien en évidence l'existence de cette norme élaborée dans le cours de l'institutionnalisation puisque

> *l'évaluation* […] s'articule au moment de l'institutionnalisation : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. (Chevallard, 1999, p. 254)

En particulier, l'institutionnalisation ne se limite pas au « cours » : nous souhaitons insister au contraire sur le fait que l'institutionnalisation est un *processus* qui, à partir d'un milieu nourri d'éléments praxéologiques produits lors d'une activité, conduit à la production d'un rapport de référence (une *norme*), lequel est ensuite éventuellement décrit dans un « cours » (ce n'est pas toujours le cas : que l'on pense aux classes de maternelles ou à des contextes d'apprentissage informel).

La réalisation des fonctions de l'étude, en différents moments qui eux-mêmes peuvent être réalisés dans des ordres à peu près quelconques, simultanément parfois, en plusieurs épisodes souvent, etc., se matérialise en une certaine *organisation de l'étude*. Celle-ci peut être conçue *a priori*, mais elle diffère alors toujours plus ou moins sensiblement de l'organisation effective de l'étude observable dans la réalisation d'une séance ou d'une séquence : la contingence des relations entre les différents membres du collectif d'étude, d'autres facteurs liés à leurs rapports personnels aux savoirs et savoir-faire engagés dans l'étude contribuent à modifier l'organisation prévue pour l'adapter à l'imprévu.

Une conséquence simple, mais importante pour nous, concerne les manuels : ils ne représentent pas une organisation de l'étude réelle dans une classe, mais ils peuvent donner des informations sur la façon dont leurs auteurs envisagent une telle organisation. Si ces *ressources* font l'objet d'un travail mené par le professeur pour être converties en *documents* (suivant le processus de genèse documentaire décrit par Gueudet & Trouche (2008), et donc d'une appropriation personnalisée, on peut formuler l'hypothèse que les schèmes mis en œuvre pour cette conversion, ou, pour le formuler dans le cadre de la TAD, le *logos* des praxéologies de conception de cours à partir de manuels, sont gouvernés par un rapport à l'organisation de l'étude qui est lui-même largement informé par les injonctions institutionnelles, comme nous allons le préciser ici.

---

nouveaux même pour l'institution où se produit l'institutionnalisation. Toute institution n'est pas scolaire et ne renvoie pas à l'étude de savoirs déjà constitués.

[3] Rapport institutionnel qui est voué à évoluer au gré des changements institutionnels : ce qui est attendu en tel état de l'institution ne l'est plus en tel autre qui suscite d'autres attentes.

La plupart des manuels proposent des « activités » ou des « exemples » avant le « cours » qui lui-même est suivi d'exemples : on peut y lire le souhait d'inviter les professeurs qui les utilisent à programmer la réalisation de moments de genèse praxéologique avant l'institutionnalisation puis le travail praxéologique. Dans la mesure où nous avons observé, dans un autre travail de type clinique (Bourgade & Durringer, à paraître) que les professeurs faisaient souvent précéder l'institutionnalisation d'activités dites « de découverte », nous pensons que l'hypothèse que nous formulons à propos des manuels est fondée : l'organisation des chapitres reflète une certaine idée de l'organisation de l'étude en classe – même si n'y apparaissent pas des dispositifs tels que les rituels de début de séance, etc.

Le programme de cycle 4 de 2018 précise que[4] :

> **Une trace de cours** claire, explicite et structurée aide l'élève dans l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux *étapes importantes de recherche, de découverte, d'appropriation individuelle ou collective*, de présentation commentée, de débats, de mise au point, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies étudiées. *Ne se limitant pas à un catalogue de recettes, mais explicitant les objectifs et les liens*, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il pourra se tourner autant que de besoin et tout au long du cycle. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mise en mémoire et le développement de compétences. (MENJ, 2020, p. 33)

Dès 2008, les programmes de mathématiques indiquaient la place privilégiée qui devait être celle de la résolution de problèmes dans l'étude des mathématiques[5] :

> La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, *sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles*. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. (MENJ, 2008, p. 10)

On voit se dessiner alors une organisation régulièrement observée dans les classes, présentant successivement une activité, du cours, puis des exercices. La profession se heurte notamment à deux grandes difficultés : la conception et la mise en œuvre d'activités qui répondent aux exigences mentionnées dans le programme de 2008 ; la réalisation de la fonction d'institutionnalisation à partir des éléments de savoir et de savoir-faire qui émergent lors des activités.

---

[4] Nous soulignons.

[5] Nous soulignons.

1.3. Modèle didactique de référence

Un modèle didactique de référence est un cas particulier de *modèle praxéologique de référence* (voir par exemple, Chevallard, 2020 ; Gascón, 2001 ; Fonseca, *et al.*, 2014 ; Ruiz-Munzón *et al.*, 2011), dans le cas où l'environnement praxéologique étudié relève de praxéologies *d'études*. C'est le cas ici, puisque l'on considère des praxéologies de réalisation des moments de l'étude.

Le modèle didactique de référence que l'on prendra comme point de repère pour l'étude des manuels est lié aux injonctions des programmes : il consiste en une organisation de l'étude suivant une structure quaternaire. Les activités d'étude et de recherche (AER) autorisent la réalisation des trois moments de genèse praxéologique ; ils sont suivis d'un temps de synthèse au cours duquel se réalise le moment d'institutionnalisation ; par la suite, des exercices permettent la réalisation du moment de travail praxéologique ; enfin, un contrôle contribue à la réalisation du moment d'évaluation. Cette structure quaternaire est habituelle dans les classes, même si les activités proposées ne sont pas toujours des AER (sur les AER, voir par exemple Chevallard, 2009). Nous défendons par ailleurs, en nous appuyant sur ce qu'écrit Chevallard (1999, voir supra), l'idée que l'institutionnalisation ne se réduit pas à *l'écriture* du cours, mais comprend également tout un travail d'élaboration du contenu du cours à partir des éléments praxéologiques produits lors de l'activité. Ainsi, des éléments épars, technologico-théoriques et praxiques, doivent être rassemblés, articulés, décontextualisés, pour aboutir à la production d'un *rapport* officiel aux mathématiques étudiées. Ce rapport servira dès lors de *norme* (Chevallard, 1999) à laquelle les rapports personnels des élèves devront se conformer.

Dans la suite, nous n'étudions pas pour eux-mêmes les éléments de *logos* qui sont apparents dans les « activités » ou dans le « cours » dans les manuels, mais la façon dont les activités et le cours sont reliés. Certains éléments technologico-théoriques apparaissent dans les activités, d'autres (éventuellement les mêmes) dans le cours, et il s'agit de s'interroger sur le lien entre les uns et les autres. Plus précisément, nous avons évoqué en introduction quelques difficultés que présentent aux enseignants la réalisation du moment de l'institutionnalisation et son articulation aux moments de genèse praxéologique. On s'interrogera donc sur les ressources que peuvent offrir les manuels pour permettre aux professeurs de mathématiques de concevoir une organisation de l'étude plus adéquate de ce point de vue. À travers deux exemples, nous prétendons illustrer certaines situations où les manuels, loin de fournir un point d'appui, contribuent à rendre confuse la gestion de la transition entre activité et cours.

1.4. Objectif et moyens de l'étude

Sans prétendre à l'exhaustivité, notre étude se veut résolument clinique, et souhaite donner à voir comment utiliser les outils de la TAD pour étudier des ressources comme les manuels du point de vue de l'organisation de l'étude qu'ils permettent d'envisager. Nous nous appuyons sur le modèle didactique de référence que nous venons de présenter (structure quaternaire de l'étude) pour mettre en évidence le fait que les manuels ne fournissent pas toujours des ressources suffisantes pour qu'un professeur de mathématiques puisse s'en emparer en vue de concevoir et mettre en œuvre les moments technologico-théorique et d'institutionnalisation. Selon le modèle que nous adoptons, l'institutionnalisation devrait constituer un processus conduisant d'éléments épars et contextualisés à un rapport officiel à une praxéologie complète.

Nous étudions deux exemples en détail, choisis parce qu'ils illustrent bien le type d'entrave que certains manuels peuvent poser et qui peuvent créer des contraintes défavorables à la production, par les professeurs qui s'en inspireraient, d'une organisation didactique propice à une réalisation satisfaisante des moments technologico-théorique et d'institutionnalisation.

Pour chaque exemple, nous décrivons les contenus abordés et la structure retenue pour les aborder (notamment l'ordre de succession activité/cours), puis nous faisons un bilan des difficultés observées. Nous indiquons également au passage ce que pourrait être une étude consistante des mathématiques rencontrées (complétant par là même le modèle didactique de référence à propos de deux praxéologies mathématiques enjeux de l'étude).

2. La production et l'institutionnalisation du *logos* dans les manuels scolaires : quelques exemples

Dans la suite, nous n'étudions pas pour eux-mêmes les éléments de *logos* qui sont apparents dans les « activités » ou dans le « cours » dans les manuels, mais la façon dont les activités et le cours sont reliés. Certains éléments technologico-théoriques apparaissent dans les activités, d'autres (éventuellement les mêmes) dans le cours, et il s'agit de s'interroger sur le lien entre les uns et les autres. Plus précisément, nous avons évoqué en introduction quelques difficultés que présentent aux enseignants la réalisation du moment de l'institutionnalisation et son articulation aux moments de genèse praxéologique. On s'interrogera donc sur les *ressources* que peuvent offrir les manuels pour permettre aux professeurs de mathématiques de concevoir une meilleure organisation de l'étude de ce point de vue. À travers deux exemples, nous prétendons illustrer certaines situations où les manuels, loin de fournir un point d'appui, contribuent à rendre confuse la gestion de la transition entre activité et cours.

2.1. Le produit scalaire en première

Nous étudions principalement dans le manuel *Métamaths* (Hérault & Sotura, 2019) la partie du chapitre sur le produit scalaire qui est consacrée aux activités, aux exemples, au cours (savoir et savoir-faire) et à un QCM intitulé « se tester ».

Après une première page consacrée à la « mobilis[ation des] acquis » (p. 219[6]), une série de 6 pages (p. 220-225) est consacrée à la transition « des exemples au cours ». Suivent des pages (p. 226-228) dédiées au « savoir-faire » et enfin une page pour « se tester » (p. 229). Les 6 pages où se déploient les exemples et le savoir sont organisées ainsi : la page de gauche présente des exemples (sous la forme d'exercices résolus) alors que la page de droite opère une synthèse des observations faites dans l'exploitation des exemples. On peut lire ces pages de la manière suivante : les pages de gauche peuvent servir de base à la conception des moments de genèse praxéologique, ainsi qu'à la formulation d'un premier bilan, tandis que les pages de droites peuvent servir à concevoir l'institutionnalisation.

2.1.1. À propos du « défaut d'orthogonalité »

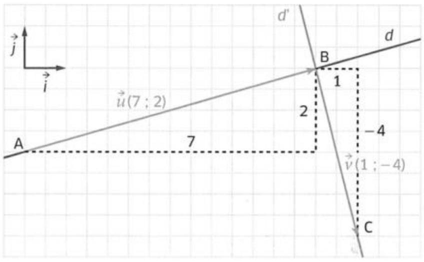
L'exemple 2 p. 220 fait le lien entre perpendicularité de droites, orthogonalité de leurs vecteurs directeurs, et une égalité de normes de vecteurs (voir figure 1).

La partie « cours » (p. 221) fait la synthèse de ces travaux sous la forme d'une énumération de critères d'orthogonalité de deux vecteurs. L'expression analytique du produit scalaire en base orthonormée y apparaît pour la première fois. Elle est établie d'abord dans une « démonstration » et sera « interprét[ée] » dans l'exemple 3, donné page 222. On lit dans cet exemple (figure 2) que « lorsque l'expression $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ n'est pas nulle, elle s'interprète comme un *défaut d'orthogonalité* » (souligné dans le texte).

[6] Toutes les citations de cette section, sauf mention contraire, sont tirées de Hérault & Sotura (2019).

Exemple 2 **Comment exprimer la perpendicularité de deux droites ?**

On a représenté deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(7\,;\,2)$ et $\vec{v}(1\,;\,-4)$. Elles semblent perpendiculaires : le sont-elles vraiment ?



- On introduit trois points A, B et C comme sur la figure :
  • B est l'intersection des deux droites ;
  • $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
- Pour savoir si (AB) et (BC) sont perpendiculaires, on va utiliser les équivalences suivantes :
  (AB) et (BC) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ ABC est un triangle rectangle en B $\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$.
- On exprime AB, BC et AC à l'aide de normes des vecteurs :
  $AB = \|\vec{u}\|$; $BC = \|\vec{v}\|$ et, puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$, on a $AC = \|\vec{u} + \vec{v}\|$. Ainsi, les droites d et d', de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
  On a $\|\vec{u}\|^2 = (\sqrt{7^2+2^2})^2 = \sqrt{53}^2 = 53$ et $\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + (-4)^2 = 17$; d'où $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 53 + 17 = 70$.
  $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(7+1\,;\,2-4)$,
  soit $(8\,;\,-2)$. Alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 8^2 + (-2)^2 = 68$.
  On constate que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \neq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
  D'après l'équivalence ci-dessus, les droites d et d' ne sont pas perpendiculaires.

2 ***POUR CONSOLIDER*** Montrer que les vecteurs $\vec{u}(1{,}2\,;\,3)$ et $\vec{v}(5\,;\,-2)$ vérifient l'égalité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
Que peut-on en déduire pour les droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Figure 1. Du théorème de Pythagore au produit scalaire

On a vu l'équivalence : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$.
Et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas** orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \neq 0$.
Lorsque l'expression $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ n'est pas nulle, elle s'interprète comme un **défaut d'orthogonalité**.

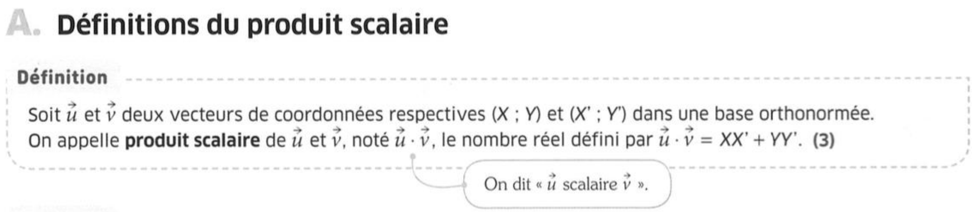
Figure 2. Le défaut d'orthogonalité

Cette remarque n'est pas approfondie, alors qu'elle pourrait donner lieu à des développements importants qui *rendraient intelligible* (une fonction du *logos*) le lien entre produit scalaire et cosinus de l'angle : en effet, deux vecteurs de normes fixées sont « d'autant moins » orthogonaux que leur produit scalaire est « moins nul ». On pourrait souligner que cette façon de quantifier le défaut d'orthogonalité présente l'inconvénient de dépendre de la longueur des vecteurs. On peut alors chercher à exprimer le défaut d'orthogonalité « proportionnellement » à leur longueur, ce qui conduit à étudier le rapport du produit scalaire par le produit des normes des vecteurs étudiés et à observer expérimentalement qu'il est compris entre –1 et 1, qu'il prend les mêmes valeurs que le cosinus pour des angles remarquables, etc. Rien de ce travail n'est fait et la production de la relation entre produit scalaire et cosinus, qui est faite dans l'exemple 6 (p. 224) est menée sur des vecteurs de norme unité, puis, dans le cadre du « cours » (p. 225) sur des vecteurs quelconques en faisant appel aux projections orthogonales déjà introduites à la même page.

L'expression « défaut d'orthogonalité » n'est reprise nulle part dans les pages de droite (de « cours ») et reste donc un élément de bilan d'exemple – sans que cet élément ait été dûment produit par un travail spécifique détaillé et varié dans l'exemple. Il restera d'ailleurs lettre morte puisque le manuel ne fait pas vivre le type de tâches « quantifier le défaut d'orthogonalité de deux vecteurs ».

2.1.2. À propos de la nécessité d'œuvrer en base orthonormée

Prenons un autre exemple tiré du même manuel. Dans la partie « cours » (p. 223, figure 3), il est indiqué que l'expression littérale du produit scalaire (qui est prise pour définition) n'est valable qu'en base orthonormée, mais la justification de ce fait n'est pas donnée dans la partie « cours ». On trouve, dans l'exemple 1, le commentaire suivant, à propos du calcul de l'expression analytique de la norme d'un vecteur en base orthonormée : « Ce calcul de norme n'est valable que dans une base orthonormée car il s'appuie sur le théorème de Pythagore ». Le lien entre les deux parties de cette assertion n'est nulle part explicité – on pourrait même craindre que certains élèves en viennent à penser que le théorème de Pythagore n'est valable qu'en base orthonormée. Il aurait fallu notamment préciser que le calcul des coordonnées fait appel à une projection parallèlement aux axes du repère, qui ne coïncide avec la projection perpendiculaire que dans le cas d'un repère orthonormé[7]. Notons également que l'introduction de la formule analytique du produit scalaire en base orthonormée n'est pas suffisamment motivée. Pourtant, l'étude d'un grand nombre de configurations planes pourrait inciter à développer une technique basée sur une telle formule analytique. Un tel travail pourrait s'appuyer sur le besoin de faciliter la technique en évitant d'employer le théorème de Pythagore systématiquement.



A. Définitions du produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(X\,;\,Y)$ et $(X'\,;\,Y')$ dans une base orthonormée.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le nombre réel défini par $\vec{u}\cdot\vec{v} = XX' + YY'$. **(3)**

On dit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».

Figure 3. Définition valable en base orthonormée

[7] Même si la pratique du calcul du produit scalaire ne se fait qu'en repère orthonormé, les élèves manipulent par ailleurs des repères plus quelconques et il paraît indispensable de justifier une telle restriction, pour le produit scalaire, au cas de repères orthonormés.

2.1.3. Bilan

De ces deux exemples tirés du même manuel, on peut tirer le bilan suivant : des éléments de *logos* peuvent être produits sans qu'une *praxis* leur soit associée. Par exemple, le « défaut d'orthogonalité » n'est associé à aucun type de tâche qui le mettrait au travail. Les moments de genèse praxéologique n'ont aucune raison d'être tous réalisés si l'on exploite les activités proposées telles quelles. De plus, ces éléments peuvent être introduits sans que l'exemple dans le bilan duquel ils apparaissent ne permette réellement leur émergence. Le « défaut d'orthogonalité » est présenté comme une simple « interprétation » du fait que le produit scalaire soit non nul. Cependant, aucun travail sur la quantification de ce défaut, qui est pourtant au cœur des raisons d'être du produit scalaire, n'est réalisé. Enfin, ils peuvent apparaître dans le bilan de l'exercice sans être repris dans la synthèse de « cours », et donc sans être « institutionnalisés ». Les élèves n'auront pas à connaître la notion de « défaut d'orthogonalité », comme le confirme l'examen des exercices proposés dans le manuel. Cela pourrait pourtant être travaillé au moyen de l'expression du produit scalaire faisant intervenir le cosinus.

D'autre part, certains éléments de *logos* (un élément de définition : « dans une base orthonormée ») peuvent être introduits dans le « cours » (et donc être institutionnalisés) sans avoir été produits en détail ni justifiés, ou alors incorrectement (par l'invocation du théorème de Pythagore qui n'est pas réellement pertinente), et sans que les justifications (même incomplètes ou incorrectes) ne soient reprises dans le « cours » (et donc institutionnalisées).

Dans les deux cas, il y a solution de continuité entre les « exemples » et le « cours » : certains éléments disparaissent entre le bilan des exemples et le cours, ce qui contribue à rendre arbitraire une grande partie du *logos* et de la *praxis* institutionnalisés ; le *logos* institutionnalisé est lacunaire.

2.2. Les notions de volume et de contenance en classe de sixième

Les ressources d'accompagnement des nouveaux programmes de cycle 2 (MENESR, 2016) donnent les indications suivantes sur le travail à mener autour des notions de volume et de contenance[8] (nous soulignons) :

> Au cycle 2, les mesures sont généralement déterminées à l'aide d'instruments et donc de "mesurages" (une règle pour des longueurs, une balance Roberval pour les masses, *un verre gradué cylindrique et de l'eau pour les contenances*, un chronomètre pour des durées permettent de mettre en évidence le principe de détermination de la mesure

[8] La citation suivante est tirée du document https://eduscol.education.fr/document/15406/download, disponible sur https://eduscol.education.fr/177/mathematiques-cycle-2.

> par report de l'unité), mais elles peuvent aussi être le résultat d'un calcul (durée entre deux horaires donnés, périmètre d'un polygone). Au cycle 3, les mesures peuvent encore être déterminées par un "mesurage", par exemple à l'aide du rapporteur pour les angles, mais plus souvent qu'au cycle 2 ce sont des calculs, s'appuyant sur des mesures et parfois aussi des formules, qui permettent de déterminer les mesures de grandeurs cherchées (longueur d'un cercle ; aire d'un triangle, d'un rectangle ou d'un disque ; *volume d'un pavé droit*). (p. 4)

La figure 4 donne à voir les attendus de fin d'année de sixième à propos de contenances et volumes : il s'agit pour les élèves de sixième d'apprendre à calculer le volume d'un pavé droit en utilisant une formule, et de savoir relier les unités de volume et de contenance.

MATHÉMATIQUES > Attendus de fin d'année de 6^e

Contenances et volumes

Ce que sait faire l'élève

- Il calcule le volume d'un cube ou d'un pavé droit en utilisant une formule.
- Il utilise les unités de volume : cm^3, dm^3 et m^3 et leurs relations.
- Il relie les unités de volume et de contenance (1 L = 1 dm^3 ; 1 000 L = 1 m^3).

Exemples de réussite

- Un pavé droit a pour longueur 30 cm, pour largeur 25 cm et pour hauteur 15 cm. Calcule son volume en cm^3 puis en dm^3. *(Réponse : il peut effectuer le calcul 30 cm × 25 cm × 15 cm qui donne 11 250 cm^3, soit 11,25 dm^3.)*
- Pierre plonge un premier cube fermé de 15 cm de côté dans une bassine remplie d'eau à ras bord.
  – Indique, en L, la quantité d'eau qui sera récupérée hors de la bassine.
  – Il remplit à nouveau la bassine à ras bord et plonge cette fois-ci un cube de 2,5 cm de côté. Indique, en mL, la quantité d'eau récupérée hors de la bassine.

Figure 4. Attendus de fin d'année de sixième (MENJ, 2019a)

En particulier, la classe de sixième est celle où il convient d'établir la formule du volume du pavé droit et de clarifier la relation entre contenance et volume. Le travail mené en cycle 2 et au début du cycle 3 porte pour l'essentiel sur la comparaison de volumes, sur la mesure de volumes de liquides, et sur la détermination du volume d'un solide par immersion dans un liquide (on détermine le volume en présence du solide et en son absence, le volume du solide est la différence des deux volumes déterminés). On observe que dans les attendus de sixième, les opérations d'immersion restent présentes.

La spécificité du travail mené en sixième peut être comprise comme consistant à passer d'une détermination par mesurage à une détermination au moyen de calculs, ce qui requiert que soit réalisée une mise en relation de propriétés *géométriques* et de propriétés *volumétriques*. Le cas du pavé droit est mis en avant comme particulièrement simple, mais il induit un fossé avec le cycle 2 où le volume du cylindre était privilégié dans les mesurages (éprouvettes, etc.). Surtout, il y a un écart entre la détermination du volume par un calcul et sa détermination par immersion dans l'eau.

On pourrait définir le volume en procédant en deux temps : on dirait que deux solides ont le même volume s'ils entraînent la même élévation du niveau d'eau dans un récipient lors de leur complète immersion dans le liquide. On dirait que le volume d'un solide est une grandeur dont la mesure est le nombre de cubes de même côté nécessaire pour obtenir, par juxtaposition, un solide de même volume, et l'unité est donnée par le cube de la longueur commune du côté de ces cubes. Ainsi, s'il faut 13 cubes de côté 2 cm pour obtenir une élévation du niveau d'eau égale à celle produite par immersion d'une boule, le volume de la boule est 13 fois le volume d'un cube d'arête de longueur 2 cm. Mais le volume d'un cube d'arête 2 cm est lui-même égale au volume de 8 cubes d'arête 1 cm. Finalement le volume de la boule est égal à 104 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm. En choisissant « 1 cm^3 » comme notation du volume d'un cube d'arête 1 cm, on aboutit à un volume de la boule égal à 104 cm^3.

On pourrait ensuite montrer que l'élévation est la même si on immerge un pavé droit ou le solide formé par juxtaposition de cubes qui est exactement superposable au pavé droit étudié. Le volume du pavé droit est alors donné, suivant la définition précédente, par le nombre de cubes multiplié par le cube de la longueur commune de leurs arêtes. Le comptage des cubes permet de parvenir à la formule habituelle pour le volume du pavé droit, pour autant que l'on puisse « remplir » le pavé d'un nombre entier de cubes… Ce qui est possible notamment lorsque les longueurs de ses arêtes sont des multiples entiers de la longueur de l'arête du cube unité choisi. Lorsqu'il n'est pas possible de choisir une telle unité, on procède par approximations successives pour faire admettre que la formule est tout à fait générale.

La contenance d'un récipient serait le volume d'un pavé droit dont l'immersion dans l'eau d'un bac produirait la même élévation de niveau que si on versait le contenu du récipient rempli à ras bord d'eau dans le même bac. Le volume d'un liquide serait défini de même : ce serait le volume du pavé droit qui produirait, par immersion dans un bac d'eau, la même élévation que si on versait le liquide dans le même bac.

Cette approche permettrait de donner une cohérence entre les définitions de volume et de contenance, tout en permettant de calculer le volume d'autres types d'objets que des solides. Un autre intérêt est le recours à l'immersion dans un bac de liquide, qui permet de ménager une transition entre les praxéologies établies dans les premières années du cycle 3 et la praxéologie calculatoire en cours d'élaboration, tout en respectant les attendus de fin d'année de sixième. On lit notamment, dans les attendus de fin d'année de CM2 (deuxième année du cycle 3) qu'une réussite attendue est que l'élève « estime la mesure d'un volume ou d'une contenance par différentes procédures (*transvasements*[9], appréciation de l'ordre de grandeur) » (MENJ, 2019b, p. 11).

2.2.1 Définitions du volume et de la contenance

Dans deux des trois manuels étudiés, on peut lire des définitions du volume et de la contenance, le troisième (*Transmath*, Malaval, 2022, p. 178) se contentant de définir le mètre cube comme « volume d'un cube d'arête 1 m ». Dans le manuel *Mission indigo* (Barnet, 2022, p. 272), la définition donnée est la suivante : « le volume d'un solide est la mesure de son espace intérieur ». La contenance n'y est pas définie, mais il est précisé que « le litre […] est une unité de contenance équivalente au dm^3 […] ». Le manuel de la collection *TAM* (Joly, 2022, p. 260) propose quant à lui une définition de chacune des deux notions. Ainsi, « le volume d'un solide est la quantité d'espace occupée par ce solide » et « la contenance d'un récipient est son volume intérieur ». L'exemple donné immédiatement après la définition fait plutôt appel à la définition de la contenance comme capacité à contenir : « en versant le contenu de l'aquarium A dans l'aquarium B, une partie de l'aquarium B n'est pas remplie : la contenance de l'aquarium A est donc inférieure à celle de l'aquarium B ». Par ailleurs, la définition de la contenance par le « volume intérieur » évoque la définition du *volume* du manuel *Mission Indigo* pour lequel le « volume d'un solide est la mesure de son espace intérieur ». On y trouve cependant une précision : le volume serait une mesure – ce qui bien sûr est faux : le volume est une grandeur, qui est susceptible d'être mesurée, mais ne coïncide pas avec ses mesures. Par ailleurs, les deux définitions de *volume* sont prises pour des « solides », bien que très rapidement on soit amené à déterminer des volumes de « liquides ». Ainsi, au détour d'un exemple, le manuel *TAM* précise-t-il que « le litre est utilisé par exemple pour mesurer le volume des liquides[10] ». Le problème se pose d'ailleurs déjà à propos des aquariums : on y compare des contenances, qui sont, selon la définition posée dans le même manuel, des « volumes intérieurs » de récipients, et donc des « quantités d'espace occupées par un solide ». La contenance vue comme volume est problématique puisque, s'agissant d'un récipient, on veut désigner le volume occupé par… du vide. Le manuel *Transmath* (Malaval, 2022, p. 177), quant à lui, se contente de préciser incidemment que « la contenance est la quantité que peut contenir un récipient ».

[9] Nous soulignons.

[10] On notera au passage que le litre est plutôt utilisé pour mesurer des contenances, et non des volumes de liquides…

2.2.2 Solutions de continuité

Au-delà de l'incorrection formelle des définitions examinées ci-devant, c'est leur caractère peu *fonctionnel* que nous souhaitons mettre en évidence : on ne peut produire à partir d'elles aucun des résultats qui sont pourtant mentionnés dans les mêmes manuels, et en particulier la formule donnant le volume du pavé droit.

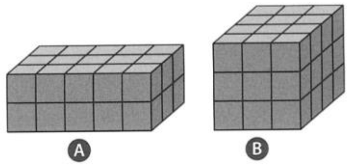
Le programme de sixième comporte pourtant comme point essentiel la détermination du volume du pavé droit au moyen d'une formule. On observe deux phénomènes essentiels : tout d'abord, le fait que le volume soit lié à la géométrie du solide étudié n'est pas pointé, alors que c'est essentiel pour rendre intelligible la possibilité même de déterminer un volume à partir de propriétés géométriques (le fait de pouvoir décomposer certains pavés droits en réunion quasi disjointe de cubes de même taille) ; par ailleurs, la formule donnant le volume du pavé droit n'est pas établie, mais donnée sans réelle explication. Au lieu de quoi, les activités ou exemples travaillés dans les manuels consistent à « remplir » un pavé droit de cubes et à conclure à l'égalité du volume du pavé droit et de la somme des volumes des cubes.

Comme nous l'avons indiqué, les manuels proposent souvent des « activités » avant le « cours ». C'est le cas des trois manuels utilisés ici. Les trois proposent des « activités » ou des « exemples » mettant en jeu le « remplissage » d'un cube ou d'un pavé par des cubes ou des pavés plus petits. Cette « démonstration » repose sur une propriété d'additivité des volumes qui pourrait être posée axiomatiquement à partir de son observation lors des manipulations (immersion de solides dans un liquide). Faute d'un réel travail expérimental, la propriété d'additivité n'est pas justifiée – et elle n'est d'ailleurs pas mentionnée dans les manuels. Pourtant, elle est au cœur de la « démonstration » de la formule. On retiendra par exemple l'activité 2 p. 117 du manuel *Transmath* (voir figure 5). On y demande « combien y a-t-il de cubes dans chaque pavé droit ? », comme s'il allait de soi que déterminer ce nombre permettrait de répondre à la question du calcul du volume du pavé droit. Cela ne découle pourtant pas de la définition du volume donnée dans les deux manuels *Mission indigo* ou *TAM*, et surtout pas de celle, absente, du manuel *Transmath*. L'exemple b p. 178 reproduit la même difficulté (figure 6) puisqu'on doit y passer du constat que « le pavé droit contient 60 cubes d'arête 1 cm » à la conclusion que « le volume de ce pavé droit est *donc* 60 cm^3 » (nous soulignons). Le fait que le volume soit additif est pourtant le point essentiel pour assurer un lien entre la détermination du volume et un calcul portant sur la *géométrie* du système étudié (équidécomposabilité du pavé en 60 cubes de côté 1 cm).

ACTIVITÉ

2 Calculer le volume d'un pavé droit Cours Paragraphes 1.b et c, p. 178

Silas joue avec un ensemble de petits cubes d'arête 1 cm.
Il a assemblé des petits cubes pour construire les deux pavés droits A et B ci-contre.



1 a. Combien y a-t-il de cubes dans chaque pavé droit ?
b. En déduire le volume, en cm^3, de chaque pavé droit.

2 Silas remarque : « Les dimensions du pavé droit A sont 5 cm, 3 cm, 2 cm. Quand je multiplie ces trois dimensions, je retrouve le volume du pavé droit obtenu à la question **1 b.** »
a. Vérifier l'affirmation de Silas.
b. Utiliser cette méthode pour retrouver le volume du pavé droit B.

Figure 5. Vers le volume du pavé droit (*Transmath*, p. 177)

b. Volume d'un pavé droit par dénombrement

Exemple

On remplit entièrement le pavé droit ci-contre de cubes d'arête 1 cm.
Au fond du pavé droit, on dispose une couche de 5 rangées de 4 petits cubes.
$5 \times 4 = 20$, donc il y a 20 petits cubes au fond du pavé droit.
Dans le pavé droit, 3 de ces couches sont superposées.
$3 \times 20 = 60$, donc le pavé droit contient 60 cubes d'arête 1 cm.
Le volume de ce pavé droit est donc 60 cm^3.

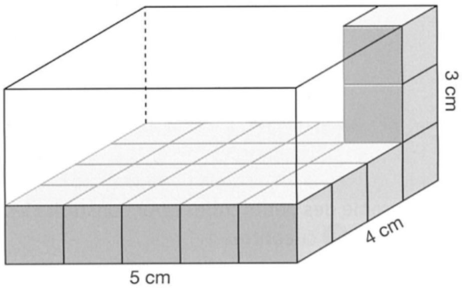


Figure 6. Compter des cubes, calculer un volume (*Transmath*, p. 178)

Prenons maintenant la page 260 du manuel *TAM* : suivant la définition problématique du volume (« le volume d'un solide est la quantité d'espace occupée par ce solide »), on trouve une autre définition : « Une unité de volume étant choisie, la mesure du volume d'un solide […] est le nombre d'unités nécessaire pour remplir l'intérieur de ce solide ». Il s'ensuit un exemple de remplissage d'un pavé droit par des pavés droits unité. Le fait même de présenter comme une *définition* cette assertion dit bien qu'elle n'est pas déductible de la « définition » donnée du volume.

2.2.3 Bilan

On peut, pour résumer, faire un constat et identifier deux situations. Le constat porte sur la *non-fonctionnalité* de certaines définitions, qui sont purement métaphoriques et ne permettent de produire ni *logos* ni *praxis*. Deux situations, disions-nous : soit la formule du pavé n'est justifiée que par le remplissage du pavé par des cubes sans plus d'explication, soit elle découle d'une définition de la *mesure* du volume d'un solide qui n'est pas déductible de la définition choisie pour le volume. Dans les deux cas, il y a une solution de continuité entre le *logos* donné au départ (la définition du volume) et le *logos* final (la formule donnant le volume d'un pavé droit). Une deuxième solution de continuité est à trouver entre le *logos* présenté dans ces manuels et les praxéologies étudiées au cycle 2 et dans les deux premières années du cycle 3 : dans ce dernier contexte, en effet, le volume est pressenti comme classe d'équivalence d'objets entraînant par immersion le même déplacement de liquide. Nulle part cette approche du volume n'est reprise dans les manuels. Le lien avec l'additivité des volumes, qui pourrait être établie expérimentalement par immersion, n'est pas interrogé et on assiste à une géométrisation de la grandeur volume, avec le défaut de perdre l'intelligibilité du lien entre la formule du volume du pavé droit et son utilité pratique (savoir si un objet peut être contenu dans un autre, par exemple).

3. Discussion

Dans cet article, nous avons fait l'hypothèse que les manuels scolaires fournissent une infrastructure sur laquelle les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire peuvent se fonder pour organiser l'étude des objets mathématiques au programme. Cette hypothèse nous semble étayée pour partie par le fait que les manuels sont organisés suivant une structure très commune : activités ou exemples, suivis du cours et d'exercices de niveaux de difficulté croissante. Par ailleurs, cette structure est proposée dans les programmes depuis au moins 2008 et fait également l'objet d'observations fréquentes dans les classes de collège et de lycée.

La problématique que nous soulevons se situe au nœud de l'institutionnalisation et de la production de l'environnement technologico-théorique des praxéologies mathématiques étudiées : comment *créer* un *logos* adéquat à une *praxis* donnée ? Comment institutionnaliser ce *logos* de façon à ce qu'il conserve ses fonctions relativement à la *praxis* qui lui est associée ? Ces questions se situent au niveau de l'*organisation de l'étude*. Quelles infrastructures les manuels fournissent-ils pour la réalisation des différents moments de l'étude et en particulier des moments technologico-théorique et d'institutionnalisation ?

Les manuels donnent à voir un scénario possible de production d'ingrédients technologico-théoriques, soit dans des activités, soit dans des exemples. D'autre part, le cours fournit des indications sur ce qui pourrait être institutionnalisé. La mise en regard des éléments de *logos* visibles dans les uns et les autres donne une idée de la déperdition gnosique[11] qui pourrait marquer un processus d'institutionnalisation

[11] C'est-à-dire relative au *logos*.

fondé sur les manuels. Nous avons observé deux configurations non exclusives dans les exemples que nous avons étudiés :

– Certains éléments de *logos* peuvent être *absents* de la partie « cours » tout en étant présents dans les « activités » ou les « exemples » (c'est le cas pour le produit scalaire) ;

– Il peut en outre y avoir une inadéquation du *logos*, tant dans les « activités » que dans le « cours », du fait d'une discontinuité entre le *logos* de l'année d'étude considérée et le *logos* portant sur le même thème dans les classes précédentes (cas du calcul du volume du pavé droit).

On retrouve dans l'organisation des manuels un phénomène déjà observé au détour d'une étude clinique du rapport de quelques professeurs à la fonction didactique d'institutionnalisation (Bourgade & Durringer, à paraître) : la production d'un rapport de référence à un objet (mathématique, par exemple) entre dans les tâches dévolues au professeur, et celui-ci peut se passer d'expliciter le lien entre « activité » et « cours » – ou plutôt ce lien est conçu comme allant de soi et ne nécessitant pas un travail sérieux, mais un simple échange oral avec les élèves à l'issue de l'« activité ». Dans le cas des manuels, on retrouve cette discontinuité : les « activités » peuvent être riches d'apports technologico-théoriques, mais le lien n'est pas explicité avec le « cours » qui les suit. Celui-ci n'est pas tant *produit* par celles-là qu'il n'est *illustré* par elles. Les activités sont confinées dans un rôle ancillaire, de faire-valoir du cours : ou plutôt, si leur importance est reconnue, un réel travail d'exploitation des œuvres produites au cours des activités n'est pas entrepris – et les manuels ne donnent pas de traces de ce que pourrait être un tel travail.

À ce stade, il convient de souligner en outre que les praxéologies institutionnalisées dépendent étroitement de l'organisation de l'étude qui a permis leur production. La fragilité des éléments de *logos* institutionnalisés dans les deux exemples que nous avons proposés découle pour une large part d'une organisation de l'étude inadéquate : pour faire émerger le produit scalaire comme outil permettant la mesure d'un défaut d'orthogonalité (ce qui constitue une de ses raisons d'être, et en particulier une raison d'être de sa formulation au moyen du cosinus), pour produire une définition satisfaisante du volume et de la contenance, il faut mener une étude plus approfondie que celles que suggèrent les manuels – et dont nous avons essayé de livrer une esquisse dans chaque cas. Reprenons par exemple le cas des volumes : au cycle 2, deux solides ont le même volume si, par immersion dans une cuvette d'eau, ils produisent la même élévation du niveau d'eau. L'étude des volumes au cycle 3 telle qu'elle est proposée dans les manuels étudiés ne prend pas appui sur ce *logos* préexistant et ne peut dès lors proposer de définition consistante du volume : le volume d'un solide est l'espace occupé par le solide ; comment comparer les espaces occupés ? Que signifie occuper un espace, et à quel type de manipulation des objets cela renvoie-t-il ? D'ailleurs, les manuels peinent à proposer des définitions de la contenance claires et distinguées de celles du volume : là encore, il manque dans l'organisation de l'étude tout un travail sur l'immersion et le remplissage par des liquides, qui aurait l'intérêt de distinguer entre volume et contenance en distinguant les *manipulations* opérées sur les objets dans chaque cas.

Le *volume* d'un *corps* (solide ou liquide) est le même que le volume d'un autre corps (solide ou liquide) si, après immersion dans deux bassines de même forme et contenant le même liquide, l'élévation du liquide est la même dans les deux bassines. La *contenance* d'un *solide* est la même que celle d'un autre solide si on peut remplir le premier, puis verser le contenu dans le second et le remplir exactement, sans manque ni débordement. L'articulation au problème de la mesure est alors facilitée : mesurer une grandeur, c'est la comparer multiplicativement à une autre grandeur prise pour unité. Il suffit alors de comparer l'élévation du liquide dans une bassine causée par l'immersion d'un corps à celle produite par l'immersion d'un certain nombre de cubes de côté 1 cm (par exemple) : le nombre de cubes produisant la même élévation est la mesure du volume du corps dans l'unité que constitue le cube de côté 1 cm. On peut aussi montrer expérimentalement que la contenance d'un solide est le volume de liquide qu'il peut contenir, ce qui justifie les « équivalences », souvent mystérieuses, qui sont avancées entre volume et contenance.

Le phénomène qu'on aura ainsi illustré est apparenté à ce qu'a indiqué Artaud (2019) à propos de la construction de l'algèbre à partir des programmes de calcul : plus que d'infrastructures mathématiques (ou tout autant), ce dont manque la profession c'est d'un *logos* relatif à l'organisation de l'étude. L'étude d'une œuvre mathématique pourrait passer par l'étude de son élaboration comme œuvre mathématique à partir d'autre chose, c'est-à-dire par l'étude d'un processus de théorisation mathématique (voir Artaud, 2019, en particulier à partir de la page 92). Le *logos* professionnel des professeurs de mathématiques ne comporte pas toujours l'idée que les mathématiques peuvent ou doivent être construites comme réponses à des questions de mathématisation : que serait une théorie mathématique de la perpendicularité ? du volume ?, etc. La conséquence en est une faible articulation entre des activités peu problématisées et un cours dont la rédaction n'est pas fondée sur l'exploitation d'un milieu constitué dans les activités. Une difficulté importante de la profession de professeur de mathématiques réside précisément dans la réalisation d'une articulation dialectique entre l'organisation de l'étude et l'organisation des mathématiques que cette étude permet de produire. En particulier, on notera l'importance de la mise en œuvre d'une expérimentation suffisamment riche pour l'élaboration de la notion de volume et de celle de contenance : c'est une difficulté importante pour la profession de concevoir et mettre en œuvre des protocoles expérimentaux en mathématiques même (Bourgade *et al.*, 2023). Il y a là un terrain à explorer.

Bibliographie

AGNEL, S., AMADEI GIUSEPPI, D., BLAZQUEZ, N., FLORIAN, F., GRECH, J.Y., & SIBARI, H. (2016). *Dimensions Maths 6e*. Hatier.

ARTAUD, M. (2011). Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion ? Dans M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, & M. Larguier (Éds.), *Un panorama de la TAD: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (p. 141–162). Centre de Recerca per a l'Educació Científica i Matemàtica.

ARTAUD, M. (2019). Praxéologies de formation, praxéologies pour la formation et leur écologie. La justification des pratiques comme condition et comme contrainte. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(5). https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45598

BARNET, C. (2022). *Mission indigo, Maths 6e*. Hachette Éducation.

BOURGADE, J.-P., & DURRINGER, C. (à paraitre). Les professeurs de mathématiques et l'institutionnalisation. *Recherches en didactique.*

BOURGADE, J.-P., CIRADE, G. & DURRINGER, C. (2023) Le « savoir » comme fonction. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, *13*(4), 18–38.

BROUSSEAU, G. (2004). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998).* http://pedagogie.lyon.iufm.fr/mathdelay/IMG/pdf/TSD_brousseau.pdf

CHEVALLARD Y. (2002a). Organiser l'étude. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Dir.), *Actes de la 11*e *école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3–22). La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002b). Organiser l'étude. Écologie et régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Dir.), *Actes de la 11*e *école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41–56). La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

CHEVALLARD, Y. (2009). *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER* [communication orale]. Journées Ampère, Lyon.

CHEVALLARD, Y. (2020). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic Quelques questions sensibles dans l'utilisation et le développement de la théorie anthropologique du didactique. *Educação*

Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, *22*(4), 13–53.

CHEVALLARD, Y. (2022). On the Genesis and Progress of the ATD. In Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Munzón (Éds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (p. 5-11). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_1

FONSECA, C., GASCÓN, J., & OLIVEIRA, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa RELIME*, *17*(3), 289–318. https://doi.org/10.12802/relime.13.1732

GASCÓN, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(2), 129–160.

GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés, *Éducation et didactique*, *2*(3), 7–33. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

HERAULT, F., & SOTURA, B. (2019). *Maths 1re métamaths*. Belin Éducation.

JOLY, V. (2022). *Manuel TAM Maths 6^e^*. Hatier.

KUZNIAK, A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères-IREM*, *61*, 19–35.

LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir. *Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*. https://hal.science/hal-00779656/

MALAVAL, J. (2022). *Transmath 6^e^*. Nathan.

MARGOLINAS, C. (2014). Connaissances et savoirs. Concepts didactiques et perspectives sociologiques. *Revue Française de Pédagogie*, *188*, 13–22.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2008). *Programme du collège*. Éduscol. https://www.education.gouv.fr/node/276998

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019a). *Attendus de fin d'année en 6^e^ en mathématiques*. Éduscol. https://eduscol.education.fr/document/14014/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019b). *Attendus de fin d'année en CM2 en mathématiques*. Éduscol. https://eduscol.education.fr/document/56037/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020). Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. *Programme du cycle 4 en vigueur à la rentrée 2020*. Éduscol.

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE (MENESR) (2016). *Mathématiques. Grandeurs et mesures au cycle 2.* https://eduscol.education.fr/document/15406/download

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, N., & GASCÓN, J. (2011), Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. Dans M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage et M. Larguier (Dir.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (p. 743–765). Centre de Recerca Matemàtica. https://portalrecerca.uab.cat/en/publications/un-modelo-epistemol%C3%B3gico-de-referencia-del-%C3%A1lgebra-como-instrumen

SENSEVY, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. In J.-M. Baudouin, J. Friedrich, (Dir.). *Théories de l'action et éducation.* De Boeck. 10.3917/dbu.baudo.2001.01

JEAN-PIERRE BOURGADE

INSPE Toulouse Occitanie-Pyrénées, EFTS, SFR-AEF

jean-pierre.bourgade@univ-tlse2.fr

CLEMENT DURRINGER

INSPE Toulouse Occitanie-Pyrénées, SFR-AEF

clement.durringer@univ-tlse2.fr