RAYMOND DUVAL

FRANÇOIS PLUVINAGE ET L'IREM DE STRASBOURG : UNE AVENTURE ET UNE HISTOIRE COMMUNES

Abstract. François Pluvinage and the IREM of Strasbourg: a shared adventure and history. Since the first IREM, research on the teaching of Mathematics and on Teacher Training has had to face previously unknown challenges, and to cope with changes in educational systems: reorganization of curricula, development of IT tools and software for calculation, algebra, geometry, diversification of professional pre-orientations, etc. Member of IREM of Strasbourg since its creation, Francois Pluvinage was for fifty years a major player in the Research and Training activities that were developed there. We distinguish seven periods in his commitments and papers: writing textbooks, national assessments, the development of algorithms to model school exercises and determine their complexity, the D.E.A. and the theses in didactics, the *Annales de didactique et de sciences cognitives*, and the dialogue between the teacher and the students.

Keywords. understand mathematics, automation, three-modality questionnaire, semio-cognitive analysis,

Résumé. Depuis les premiers IREM les recherches sur l'enseignement des Mathématiques et sur la Formation des enseignants ont eu à relever des défis auparavant inconnus, et à faire face aux mutations des systèmes éducatifs : réorganisation des curriculums, développement de l'outil informatique et de logiciels pour le calcul, l'algèbre, la géométrie, diversification des pré-orientations professionnelles… Présent à l'IREM de Strasbourg dès sa création, François Pluvinage a été durant cinquante ans un acteur majeur des activités de Recherche et de Formation qui y ont été développées. Nous distinguons sept périodes dans ses engagements et ses travaux : l'élaboration de manuels, les évaluations nationales, l'élaboration d'algorithmes pour modéliser les exercices scolaires et en déterminer la complexité, le D.E.A. et les thèses de didactique, les *Annales de didactique et de sciences cognitives*, et le dialogue de l'enseignant et des élèves.

Mots-clés. comprendre en mathématiques, automatisme, questionnaire à trois modalités, analyse sémio-cognitive, dialogue enseignant-élève

---

De 1969, l'année de la création de l'IREM de Strasbourg sous la direction de Jean Frenkel, jusqu'aux derniers mois de sa vie, François Pluvinage a été un acteur majeur dans les activités de recherche et de formation qui y ont été développées. À la suite de la réforme des *New Math* aux États-Unis, la commission Lichnerowicz, dont Jean Frenkel était membre, avait été mise en place pour conduire la réforme des « maths

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 239 – 278.

modernes ». Quatre missions avaient été assignées aux premiers IREM créés en mars 1969 :

> « 1. Contribution à la formation initiale des futurs enseignants du second et du premier degré.
>
> 2. Formation continue en mathématiques des professeurs en exercice.
>
> 3. Recherche et expérimentation pédagogique sur le contenu et les méthodes de l'enseignement des mathématiques.
>
> 4. Élaboration et diffusion de documents (ces quatre tâches étant intimement liées). » (IREM de Strasbourg, 1969)

Avant d'entrer dans la toute première équipe de l'IREM de Strasbourg, François avait publié un article *Espaces des Feuilles de certaines structures feuilletées planes*, en lien avec sa thèse de 3e Cycle en mathématiques (Pluvinage, 1967). Mais la véritable prise en compte des quatre missions assignées aux IREM a commencé en 1973, avec Georges Glaeser comme directeur de l'IREM de Strasbourg. Mathématicien reconnu, Georges Glaeser avait publié un ouvrage « pour l'élève professeur » dont les deux premiers chapitres portent sur « l'activité mathématique » et sur « le langage mathématique » (Glaeser, 1971). Il a alors donné une impulsion originale aux différentes équipes déjà existantes de l'IREM de Strasbourg. Analysant l'activité mathématique à partir de « problèmes », il l'associait à l'heuristique, et opposait la résolution de problèmes aux « exercices ». Il a d'ailleurs publié le premier fascicule du *Livre du problème*, sous le titre *Pédagogie de l'exercice et du problème* (Glaeser, 1973). Intégrant la visualisation mathématique dans le langage mathématique, il insistait sur son rôle heuristique et croyait que la *Gestalttheorie* permettrait de l'analyser (Glaeser, 1982). Et dans la foulée il opposait la maïeutique au cours magistral. Enfin, comme beaucoup d'autres, il reprenait de manière non critique la psychologie génétique de Piaget, dont Pierre Gréco avait tenté de défendre l'apport, dans la commission Lichnerowicz, pour l'apprentissage des mathématiques par de jeunes élèves. Georges Glaeser a été le Maître en didactique des mathématiques pour François, qui s'est alors engagé dans presque tous les champs qui s'ouvraient aux recherches sur l'enseignement des mathématiques.

Je vais en retenir sept qui se sont progressivement imposés au fil des réformes des programmes, des réorganisations des curriculums, et du développement de la didactique des mathématiques.

1. Les toutes premières enquêtes à l'échelle des collèges en Alsace

L'une des premières idées de recherche, qui n'était pas explicitement mentionnée dans les missions de l'IREM, a été de mener une enquête à l'échelle de l'Académie de Strasbourg. Une équipe de huit membres de l'IREM, dont Pierre Buisson, François et deux psychologues, s'est attelée à ce travail en 1972. Le but était de recueillir « des informations précises sur l'acquisition des connaissances en fin de cinquième, et non d'explorer les capacités intellectuelles des élèves » (IREM de Strasbourg, 1973d). La seconde enquête, faite en 1973 avec une équipe de quatre personnes, s'était restreinte « à la question [de savoir] jusqu'où va la compréhension des élèves relativement à certains aspects élémentaires des structures numériques enseignées en 4^{e} et en 3^{e} » (Scherpereel *et al.*, 1974). Les résultats de cette deuxième enquête gardent, aujourd'hui encore, un intérêt au regard des évaluations nationales récentes. Deux questions cruciales avaient alors animé nos débats dans la conduite de ces deux enquêtes**.**

La première question cruciale était celle de la compréhension en mathématiques et des critères d'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves de 11 à 15 ans. Il s'agissait donc d'une question relevant d'au moins trois points de vue différents : le point de vue mathématique, mais aussi le point de vue cognitif et le point de vue épistémologique. Et chacun de ces points de vue soulevait une question sur le choix d'une axiomatique, sur le fonctionnement cognitif de la pensée impliqué par toute activité mathématique — spécifique aux mathématiques ou commun à toute démarche scientifique — sur l'importance ou non du langage dans la pensée. La première question se subdivisait donc en au moins trois questions, et prend un sens différent selon celle sur laquelle on se focalise :

Q.1 Comprendre en mathématiques relève-t-il :

- De raisonnements qui sont spécifiques aux mathématiques, et lesquels ?
- Ou de pratiques et de procédures communes à toute démarche scientifique ?
- Ou, simplement, de la capacité rationnelle d'expliquer ce qu'on fait ou pourquoi ?

D'un côté, on affirmait que si « on expliquait bien », les difficultés de compréhension disparaîtraient – et sur ce point, les témoignages personnels de mathématiciens ne manquaient pas. Ce qui laissait penser que les démarches mathématiques étaient communes aux autres démarches scientifiques et que le choix d'une axiomatique était finalement secondaire. De l'autre côté, il y avait l'autorité incontestée de Piaget, dont il suffisait de prononcer le nom pour faire croire que la compréhension des mathématiques devait tout simplement suivre les étapes du développement de l'intelligence. Ce qui conduisait à rejeter l'importance et même le rôle du langage dans l'activité mathématique, celui-ci n'intervenant qu'ensuite quand on avait commencé à comprendre.

La deuxième question était directement liée à l'élaboration des questions qui devaient permettre d'évaluer les connaissances acquises par les élèves en fin d'année ou en fin de cycle. Elle se subdivise en deux questions : l'une sur le contenu des questions devant permettre l'évaluation des connaissances et l'autre sur le type de questions ou d'items permettant d'obtenir des réponses objectivement interprétables :

Q.2 L'évaluation des connaissances acquises doit-elle :

- Prendre en compte l'hétérogénéité des connaissances institutionnellement fixées comme objectifs dans les programmes au niveau d'une année ou au niveau d'un cycle, ou au contraire ne pas les prendre en compte ?
- S'appuyer sur un grand nombre d'items et de questions, ou se limiter à très peu, pour que les réponses des élèves puissent être considérées comme stables et fiables ?

François s'est essentiellement intéressé à cette deuxième question sur l'évaluation des connaissances, et non à la première sur la compréhension en mathématiques. Pour lui, l'évaluation devant porter sur l'acquisition des connaissances institutionnellement fixées comme des objectifs d'enseignement, la question importante était celle du nombre de questions et d'items à poser. Il l'a divisée en deux sous-questions, l'une prenant en compte la réaction des élèves, et l'autre le codage en vue du traitement des données recueillies.

Q.2.1 Peut-on échapper au dilemme entre le nombre important de questions nécessaires, vu le nombre de connaissances fixées comme objectifs, et le fait que trop de questions entraînent la fatigue ou l'ennui des élèves ?

Face à ce dilemme inhérent à toute enquête qui veut être la plus exhaustive possible, François a lancé l'idée d'un questionnaire à plusieurs modalités, dans lequel les élèves n'auraient pas tous à répondre aux mêmes questions. Cette idée a été ensuite mise en œuvre dans une enquête à trois modalités auprès d'élèves de cinquième en 1975, dans le but « d'étudier expérimentalement le rôle de l'ordre des questions et du contenu de leurs énoncés » (Duval & Pluvinage, 1977, p. 52). Elle est ensuite devenue la méthode d'organisation des items dans toutes les enquêtes que François a dirigées.

De l'autre côté, le codage des réponses ne doit pas seulement prendre en compte la réussite du point de vue mathématique, mais aussi la compréhension des élèves (Sherpereel *et al.*, 1974). Cela est essentiel pour les apprentissages ultérieurs et pour les capacités d'utilisation des connaissances acquises dans des contextes mathématiques ou non mathématiques très différents.

Q.2.2 Comment coder les réponses de manière à pouvoir distinguer les réponses pour lesquelles la « réussite » du point de vue mathématique est un indicateur de compréhension et celles pour lesquelles elle ne l'est pas.

Là, François, qui restait focalisé sur le point de vue mathématique, a précisé « quelles que soient les variations de formulation ou de présentation ». Nous reviendrons plus loin sur ce critère qui exclut toutes les variations sémio-cognitives dans l'élaboration de tâches ou de questions pour les élèves.

2. L'élaboration et la diffusion de documents : des fiches (1973) aux manuels (1977)

Parallèlement, trois équipes se sont investies dans la formation continue en mathématiques des enseignants en exercice et dans l'élaboration et la diffusion de documents, qui étaient deux des quatre missions assignées aux IREM. L'une, sous l'impulsion de Gilbert Hector[1], élaborait des fiches pour la formation des enseignants au langage ensembliste prônée par la Commission Lichnerowicz – les fiches sont conservées dans les archives. Une autre équipe, sous l'impulsion de Georges Glaeser travaillait à l'élaboration de problèmes de recherche centrés sur un thème mathématique comme par exemple la parité (IREM de Strasbourg, 1975) ou la géométrie d'incidence (IREM de Strasbourg, 1976). Et la troisième, sous la direction de François, élaborait des fiches pour les élèves. Celles-ci étaient ensuite discutées par un groupe d'enseignants qui les essayaient dans leurs classes. Ces premières fiches pour les classes de 6^e^ et de 5^e^ (Pluvinage, 1973a, 1974a) ont été publiées avec comme sous-titre *Feuilles d'instruction pour l'élève. Cours et exercices*. Elles comprennent respectivement 25 et 24 « chapitres », suivis par un complément intitulé « exercices et problèmes » selon le titre du premier des six fascicules du *Livre du problème*, publié la même année (IREM de Strasbourg, 1973a). Ces deux séries sont presque de petites encyclopédies à l'intention des juniors, car François était soucieux que leur contenu mathématique soit riche. Ces fiches étaient accompagnées d'une petite brochure *Livre du Professeur* (Pluvinage, 1973b, 1974b) dans lequel les réponses aux exercices étaient données après des explications sur l'utilisation de chaque exercice et des compléments sur leur arrière-plan mathématique. Dans la préface aux fiches de cinquième, Georges Glaeser en décrit le but et le mode d'emploi :

> La méthode adoptée tourne le dos à la pédagogie de l'exposition […]. Selon la pédagogie dynamique, au contraire, l'élève est confronté d'emblée à des situations sur lesquelles il peut agir. […]. Pour susciter l'engouement, il ne suffit pas que le contenu intellectuel des notions présentées soit riche. Il faut, de plus, provoquer des étonnements – voir des surprises – qui contribuent à marquer les esprits […]. Le maître évitera de fournir prématurément les réponses à des questions que les élèves n'auront pas comprises. (Glaeser, 1974, p. 2).

---

[1] Gilbert Hector, de l'Université Claude Bernard-Lyon 1, faisait alors sa thèse avec Georges Reeb.

Tout l'enjeu didactique de ces fiches tenait évidemment dans ces deux conseils pédagogiques. Je faisais des visites régulières dans une classe de cinquième du C.E.S. de la Robertsau où l'enseignant, qui avait participé aux réunions préparatoires à la rédaction des fiches en reprenait certains exercices. François n'y venait que sporadiquement. La distance était considérable entre ce que faisaient et me disaient les cinq ou six élèves que je suivais tout au long d'une séance et les objectifs des exercices proposés. Et surtout, au fil des semaines et des mois, rien ne changeait pour ces élèves.

Ce travail s'est poursuivi jusqu'à la publication en 1976 des fiches pour la classe de troisième, un an après l'adoption en juillet 1975 de la Réforme Haby portant sur le « Collège unique ». Le nouveau programme d'enseignement des mathématiques pour le collège réorientait les contenus sur le calcul numérique, les objets géométriques et physiques à observer ou à construire, et des notions trigonométriques. Les fiches ont été reprises et réadaptées en manuels en 1977, puis en 1978, suivant les nouveaux programmes, avec la collaboration importante de Jean Martinet, alors directeur de l'IREM**.**

3. La thèse de Doctorat d'État ès Sciences en Didactique des mathématiques

François a soutenu sa thèse en 1977 (Pluvinage, 1977). Trois expressions sont essentielles dans le titre de sa thèse. La première, « difficultés des exercices scolaires », s'inscrit dans le cadre de la distinction de Glaeser entre les problèmes qui donnent lieu à un travail de recherche et les exercices qui visent à obtenir des réponses automatiques, c'est-à-dire quasi réflexes[2]. La deuxième expression, « comportements de réponse », s'inscrit dans les débats qui avaient animé l'élaboration des enquêtes faites à l'IREM durant les années 1970-1975. La troisième, « enquêtes à plusieurs modalités », est l'apport méthodologique original de François pour les enquêtes d'évaluation des acquisitions des élèves par rapport aux objectifs visés par les programmes. Toute la recherche de François est commandée par les deux sous-questions méthodologiques (Q.2.1) et (Q.2.2). C'est ce qu'il explique dans l'introduction de sa thèse en opposant les tests aux enquêtes, et en reprenant la distinction de Glaeser entre problème et exercice scolaire :

[2] Dans le fascicule *Pédagogie de l'exercice et du problème*, les exercices répondent au besoin de « l'apprentissage de l'automatisme [c'est-à-dire] de l'acquisition de mécanismes de base […]. [Ils] doivent être spécialement composés pour s'entraîner. » (Glaeser, 1973, p. 29). Ces automatismes correspondent à des quasi-réflexes dans la mesure où un réflexe est « réaction automatique involontaire et immédiate précédant tout réflexion » d'un individu (*Petit Robert de la langue française*, 2008). Pour Glaeser, au contraire, les automatismes sont nécessaires lorsque, dans la recherche d'un problème, il faut effectuer des tâches routinières comme, par exemple, des calculs numériques simples (1971). Et il aimait parler des automatismes comme de « l'âne qui trotte ».

> Dans les tests on observe les variations individuelles sur des exercices donnés. Dans nos enquêtes, on observe, sur une population donnée, *les variations entraînées par des variations d'exercices*. (Pluvinage, 1977, p. 4)

L'intérêt de la thèse de François est qu'elle soulève la question de savoir si l'on peut aborder la question méthodologique, indépendamment de la question de la compréhension de la démarche mathématique, ou de celle des différences individuelles dans l'apprentissage des mathématiques (Q.1).

3.1. L'avers de la problématique : les algorithmes de réponse pour évaluer la fiabilité des exercices scolaires

Toute la recherche de François est commandée par le problème méthodologique sur les conditions que les questions posées doivent remplir pour que les réponses obtenues soient stables et fiables (Q.2). En effet, le plus souvent « les comportements de réponse » adoptés par les élèves varient selon les questions posées et, pour l'essentiel, s'expliquent par les questions posées. Pour résoudre ce problème, François reprend le terme "automatisme" (les démarches de réponse devenues des quasi-réflexes) pour retourner l'opposition glaeserienne entre les automatismes et l'heuristique. Ce coup de force sémantico-théorique conduit à assimiler les automatismes dans les comportements de réponse des élèves à des algorithmes de réponse :

- « Il m'a semblé que si l'on voulait préciser la notion de difficulté d'une question, une piste féconde pouvait être d'étudier *la structure des algorithmes de réponse* » (p. 9). Et dans un problème une procédure de résolution est une « classe d'algorithmes de résolution » (p. 177).
- Les automatismes sont des « processus de recherche fixés d'avance » (p. 12), que l'enseignement [veut] programmer chez les individus [pour répondre] à des questions (p. 11), qu'on peut aussi programmer sur un ordinateur digital courant (p. 13), [et qui] permettent d'obtenir des réponses aux « questions qui sont à la fois à la portée de la machine et de l'homme » (p. 13, repris p. 157)[3].

Autrement dit, il faut partir de « l'algorithme de résolution d'un exercice et plus précisément du déroulement temporel de l'algorithme » (p. 33) pour déterminer les critères de réponses stables à un exercice, et pouvoir conclure de manière fiable à

[3] François s'est contenté d'allusions à l'opposition entre les automatismes et l'heuristique sans l'expliquer ni citer Georges Glaeser dans son texte. Nous les avons regroupées en un énoncé complet de sa thèse. François utilise toutes les enquêtes qu'il cite pour montrer que les variations de questions entrainent des variations de réponses.

l'acquisition des connaissances mathématiques mobilisées par l'exercice, ou à leur non-acquisition. Cela conduit François à établir une hiérarchisation des déroulements des algorithmes sur quatre niveaux. Cette approche informatique amène François à définir « trois critères pour décider de compter ou non une question comme un automatisme à un niveau d'enseignement donné » (p. 13) :

> (Critère A1) […] Tous les éléments nécessaires à *la programmation d'une solution* : précision des pas élémentaires et prédétermination des choix possibles […] (Critère A2) L'énoncé de la question [doit] comporter les indications *d'appel du programme* de résolution. (Critère A3) *L'exécution du programme* de résolution doit pouvoir être accomplie "d'un seul jet" dans les conditions normales de travail » (p. 14).
>
> [Et là] ce qui est d'emblée important est la contrainte d'un déroulement temporel qui permet *d'orienter* la variété associée à un algorithme. (p. 36)

Le premier critère est celui des niveaux de complexité des algorithmes conduisant à la résolution d'une question. Il permet de déterminer les différents niveaux de complexité des questions posées dans les évaluations portant sur l'acquisition des connaissances mathématiques.

Le deuxième critère est plus délicat à utiliser. Il exige de prendre en compte le curriculum d'enseignement (c'est-à-dire le programme scolaire fixant les objectifs d'acquisition pour chaque année). Le programme scolaire change selon les niveaux de classe de la sixième au DEUG[4]. Ainsi une question peut être un automatisme en troisième et ne pas l'être en sixième ou cinquième, en DEUG ou au lycée. Ce sont les indications d'appel dans l'énoncé de la question sont le « signal » qui enclenchent le programme pertinent de résolution, aussi bien pour l'homme que pour la machine, et cela indépendamment des variations de la « difficulté cognitive » de la question ou de l'exercice. Ce deuxième critère correspond à la variable institutionnelle qui est didactiquement essentielle.

Le troisième critère a conduit à proposer une classification des déroutements temporels d'algorithmes en quatre types hiérarchisés. L'opposition entre les automatismes et l'heuristique se fait au niveau des algorithmes comportant un seul branchement. Ce critère implique une limitation du temps de réponse aussi bien pour l'homme que pour la machine. Cela n'est pas évident à déterminer, car il implique que le temps laissé pour répondre soit court pour filtrer les réponses venant spontanément à l'esprit, mais pas trop pour ne pas stresser les élèves.

La formulation des consignes ne doit pas être confondue avec la formulation d'un énoncé de problème, puisqu'elle ne répond pas aux trois critères que les questions

[4] Diplôme d'Études Universitaires Générales, deux années d'études supérieures après le baccalauréat.

posées doivent remplir pour obtenir des informations fiables sur l'acquisition de connaissances mathématiques.

3.2. L'envers de la problématique : la réduction des processus sémio-cognitifs impliqués par les activités mathématiques à la classification taxinomique des connaissances de la NLSMA[5]

Les exercices et les problèmes comportent aussi des « difficultés cognitives » qui sont indépendantes de la simplicité ou de la complexité des connaissances mathématiques à utiliser pour les résoudre. François a donc été obligé de les prendre en compte, en raison d'un phénomène que nous avions observé dans la lecture d'un énoncé de problème de BEPC[6], que nous avions appelé « les arrêts de lecture » (Duval & Pluvinage, 1975). Il l'a fait en adoptant la classification taxinomique des connaissances mathématiques de la NLSMA qui avait été présentée par James Wilson (1971). Or cette classification utilise, pour évaluer l'apprentissage des connaissances mathématiques, les premières classifications « cognitives »[7] des objectifs pédagogiques, faites par Bloom (1969). Cet ouvrage avait déjà été présenté dans plusieurs séminaires sous l'impulsion de Glaeser.

La classification taxinomique de Wilson porte sur les compétences requises pour répondre à des questions d'évaluation ou pour résoudre des problèmes. Elle distingue quatre manières possibles d'utiliser des connaissances mathématiques pour faire un exercice ou résoudre un problème. Elle les hiérarchise en quatre niveaux présumés correspondre à des niveaux de complexité cognitive au sens de Bloom. François reprend les deux définitions préliminaires de la classification de Wilson qu'il présente en annexe (1977, p. 161). La première porte sur le découpage des connaissances mathématiques en faits spécifiques : « Les faits spécifiques sont les *connaissances atomiques* » (p. 161). Et François précise « autrement dit les connaissances atomiques nécessaires à l'obtention des résultats » (p. 9). La deuxième définition porte sur la complexité des connaissances : « Un *concept* est un ensemble de faits spécifiques » (p. 161).

François a adopté sans la moindre discussion les deux premiers niveaux de la classification de Wilson, les troisième et quatrième niveaux (l'aptitude à résoudre des exercices au sens de Glaeser, et celle à résoudre des problèmes inhabituels) lui ayant paru inutiles pour répondre à la sous-question Q.2.1 qui commandait sa recherche. Sa hiérarchisation des déroulements des algorithmes sur quatre niveaux pouvait être mise en correspondance avec les deux niveaux de « complexité

[5] National Longitudinal Study of Mathematics Abilities.

[6] Brevet d'Études du Premier Cycle, 15 ans.

[7] Voir dans l'annexe de (Duval, 1996) : « L'approche développemental du cognitif » et « L'approche « Intelligence Artificielle » du cognitif » (pp. 381-382).

cognitive », même si cela impliquait la réduction de l'heuristique à « des démarches "erratiques" » (p. 12). Le point crucial pour François était de définir les critères que doit remplir toute question concernant les automatismes de réponse pour obtenir des réponses stables et donc fiables. Et là, les deux premiers niveaux de la classification de la NSLMA apportaient une justification cognitive aux choix des critères définis en fonction des algorithmes de résolution.

Le corpus des réponses des élèves recueillies dans sept enquêtes d'évaluation qui portaient sur des objectifs institutionnels d'acquisition a été utilisé pour tester la pertinence et la validité des trois critères définis pour les questions dont la résolution est automatique. François instaure ici une analyse régressive des questions, qui ne porte pas sur leur contenu mathématique, mais uniquement sur leur caractère quasi-réflexe ou non, c'est-à-dire selon la rapidité de réponse, qui est le seul indicateur d'acquisition de connaissances mathématiques de base. En effet, si les réponses ne sont pas quasi-immédiates, les acquisitions ultérieures de nouvelles connaissances ou leur utilisation dans des contextes très différents seront impossibles et cela entraînera un blocage ou un rejet des mathématiques.

3.3. L'analyse régressive des questions

La modélisation par des algorithmes des processus de réponse des questions posées dans les enquêtes d'évaluation a inévitablement conduit à ne s'intéresser qu'aux activités numériques et algébriques élémentaires, et à exclure des activités géométriques qui, elles, font appel à l'heuristique. François a donc choisi les sept champs de questions possibles qui lui paraissaient basiques :

– Le rangement du plus petit ou plus grand de sept à neuf entiers relatifs.

– Le rangement de nombres décimaux comportant trois ou quatre chiffres après la virgule, dont évidemment 1,1010 et 1,0101, et également les trois écritures 0,004 et 0,0038 et 0,00369.

– Additionner ou multiplier deux nombres décimaux, dont 3,14 ×(0,3), item qui s'est avéré significatif.

– Combiner ces opérations, certains items allant jusqu'à sept opérations à effectuer.

– Effectuer des divisions euclidiennes ou mettre sous la forme d'une fraction irréductible des opérations sur des nombres rationnels.

– Calculer des expressions littérales comportant trois « variables », trois valeurs différentes pour chacune des variables étant chaque fois données.

– La détermination du Sup de deux ou trois nombres, dans le cadre de questionnaires multiniveaux : Sup {–2 ; 0}, Sup {1,04 ; 1,07 : 1, 009}.

Ce sont les mêmes questions, choisies parmi ces différents types de tâche, qui se retrouvent dans les sept enquêtes sur lesquelles François a mené sa recherche, quatre enquêtes ayant été menées avec des membres de l'IREM. Elles sont directement formulées dans les expressions symboliques qui permettent d'effectuer un calcul, et non pas dans une phrase de la langue. Le recours à la langue se limite à quelques mots pour formuler une instruction.

L'analyse régressive porte sur les réponses recueillies dans ces sept enquêtes qui, dans la problématique de la thèse, sont considérées comme un corpus homogène de données. Il s'agit « d'observer sur une population donnée, les variations (des réponses) entraînées par *des variations d'exercices* » (p. 4). Et bien que les facteurs individuels soient importants, ainsi que la manière dont les informations sont présentées dans les questions, le codage des réponses est restreint aux trois critères qui caractérisent l'automatisme d'une réponse :

> « La difficulté d'un exercice a un caractère personnel : elle fait intervenir le thème de l'exercice, les informations données par l'énoncé, le matériel fourni par sa résolution, l'apprentissage préalable de l'élève, l'âge de l'élève… Ce qui est directement accessible à l'observateur est le déroulement du processus de résolution. C'est donc à cette procédure que nous pouvons espérer attribuer un profil de difficulté. »[8] (p. 10)

Autrement dit la modélisation du processus de résolution par un algorithme de résolution permet d'analyser le degré de difficulté d'une question, quels que soient la population et le cycle d'enseignement. Cela ne vaut bien évidemment que pour les questions d'évaluation de l'acquisition des connaissances mathématiques de base à l'échelle d'une population d'élèves, et non pour les élèves pris individuellement.

3.4. Le codage des réponses, l'interprétation et les résultats obtenus

Le codage des productions des élèves prédétermine l'interprétation qui pourra être faite de l'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves. Si l'on veut évaluer la compréhension et « la durabilité des acquisitions » et non pas seulement la fiabilité des réponses, il faut prendre en compte des séquences de questions ou d'items et non pas chaque question ou chaque item. La règle d'or, si je puis dire, est de ne jamais attribuer une signification à une réponse sans s'être d'abord demandé : « Quelles sont les variations d'énoncés de la question n'affectant pas cette réponse ? » (p. 58). C'est la cohérence des réponses pour chaque séquence qui va servir de repère pour mettre en évidence dans chaque séquence :

[8] Et donc le profil de difficulté n'est pas attribué à la question.

(1) les difficultés dans le déroulement d'une réponse automatique, et donc la structure de l'algorithme (sous-jacent) à mettre en œuvre qui constitue le paramètre permettant de situer la difficulté d'une question.

(2) « des perturbations, susceptibles de jouer sur la difficulté [d'une question] dans les deux sens [réussite ou échec] » (p. 44).

L'interprétation des productions codées a été faite en utilisant l'analyse factorielle des correspondances.

Les résultats auxquels François est parvenu tiennent en trois comportements de réponses stables pour « les questions dont les processus de résolution sont fixés d'avance » (p. 13). Les deux premiers (équilibrage et plongement, voir page 44 et 45) sont deux types de perturbations et le troisième est l'arrêt de lecture dans la compréhension des énoncés formulés dans une phrase de la langue :

– L'équilibrage résulte de la perception de la symétrie dans la succession linéaire de signes de nombres et de symboles d'opération formant une égalité numérique ou algébrique, ou dans la succession de chiffres formant un syntagme opératoire pour désigner des décimaux illimités. Mais il exclut les activités géométriques qui sont plus ou moins heuristiques ;

– « Le plongement se rapporte à l'insertion d'un nouvel apprentissage dans l'acquis antérieur » (p. 45), c'est-à-dire au traitement d'une nouvelle notion par analogie avec les notions déjà utilisées. Par exemple, avec l'item vedette $(0,3)^2$, « l'erreur prépondérante […] [de] l'obtention de 0,9 au lieu de 0,09 [est une] attraction due au plongement » (p. 138) ;

– L'arrêt de lecture est l'arrêt sur « la partie [d'un texte] qui précède le premier endroit où la compréhension est possible » (p. 173). Nous avions déjà repéré ce phénomène dans la compréhension d'énoncés de problèmes de géométrie élémentaire. Mais ici, étrangement, François l'extrapole pour les expressions purement symboliques qui ne comportent aucun mot.

3. 5. L'apport de la thèse : des exigences, des questions et des… contresens

Pour comprendre l'apport de cette thèse à la didactique des mathématiques, il faut regarder l'avers et l'envers de la problématique qui a commandé tout le travail de recherche.

3.5.1. L'avers de la problématique : la nécessité de questionnaires à trois modalités

La nécessité de questionnaires à trois modalités répond à la question du type de questions posées et surtout du nombre de questions que l'on peut poser pour que les réponses obtenues puissent être considérées comme stables et fiables (Q. 2). En effet, pour évaluer les acquisitions sur les différentes connaissances élémentaires à la fin d'une année scolaire ou au terme d'un cycle d'enseignement, il faut beaucoup de questions. Le dépouillement et l'interprétation des données recueillies dans ce type de questionnaire soulevaient une difficulté de taille, celle du croisement des réponses préalablement codées. Car il s'agissait de savoir combien d'élèves dans une sous-population ayant réussi à un item *a* avaient aussi réussi à un autre item *b.*

Dans les premières enquêtes, nous utilisions des cartes perforées pour effectuer ces croisements. Avec une aiguille à tricoter, on sortait les cartes correspondant aux réussites à l'item *a,* puis celles à l'item *b,* et on comptait. Fastidieux et étrange travail que je faisais avec François aux manettes, si je puis dire, dans l'unique salle alors réservée à l'informatique ! Cela restreignait le traitement des données à finalement très peu de croisements. C'est là que l'analyse des correspondances créée par Benzecri (1973) – qu'il appelait aussi « taxinomie », c'est-à-dire de classifications hiérarchisées – a été décisive aux yeux de François. Car elle était celle « qui correspondait le mieux à nos besoins » (p. 4) et qui « permettait d'effectuer tous les croisements sur une machine » (p. 60). Mais cela ne résolvait pas le problème de la question Q.2.1 concernant les réactions des élèves face à des questionnaires trop longs et trop répétitifs pour les élèves. L'invention de questionnaires à trois modalités a permis de contourner cet obstacle concernant la fiabilité des données et des informations recueillies. Dans ce type de questionnaire, les élèves n'ont à répondre qu'aux questions de deux modalités. Et dans une classe, toutes les questions d'une même modalité peuvent n'être pas présentées aux mêmes élèves. Ce qui réjouissait François dans ce type de construction de questionnaires était de pouvoir dire ce qu'un élève aurait répondu à une question qu'on ne lui avait pas posée, compte tenu de ses réponses aux questions dans les deux autres modalités !

Malheureusement, c'est l'utilisation de l'analyse factorielle des correspondances et des questionnaires à trois modalités qui a retenu l'attention, et qui a été reprise ultérieurement dans beaucoup de travaux. Elle a d'ailleurs donné lieu à de vives discussions, notamment avec Régis Gras – qui, lui, proposait l'alternative de l'analyse statistique implicative des réponses, et non pas des questions posées. Je dis « malheureusement » parce que le rôle de l'analyse factorielle des correspondances est marginal dans la thèse.

3.5.2. L'envers de la problématique : la question de la compréhension des connaissances enseignées

La question de la compréhension est la boîte noire de toute évaluation des connaissances enseignées. Car si les critères de compréhension sont d'abord la justesse ou la pertinence mathématique des productions des élèves, ils ne sont pas suffisants. Il faut aussi prendre deux critères « cognitifs » pour évaluer la production des élèves, ou de chaque élève dans une classe :

– La rapidité de réponse, c'est-à-dire la spontanéité de réaction à la question posée, comme François l'avait souligné pour caractériser les « automatismes » ;

– Le fait de « voir », ou non, quand et comment utiliser une connaissance mathématique, que le problème à résoudre soit mathématique, non mathématique, ou « concret ». Et cela sans que personne n'ait à venir vous le dire !

La classification hiérarchique des manières d'utiliser des connaissances mathématiques ne permettait pas d'expliquer les observations faites en classe, sur les difficultés de compréhension des énoncés, les « arrêts de lecture » n'étant qu'un indicateur. Aussi François l'a réinterprétée pour en faire un outil d'évaluation du niveau de « complexité cognitive » des questions et des problèmes, qui au moins colle avec ces observations. Sa réinterprétation se limite à une simple reprise des deux définitions préliminaires de la classification de la NLSMA (*supra*, 3.2) :

– D.1 : « Les faits spécifiques sont caractérisés par le fait d'être isolément mémorisés et formulés ».

– D.2 : « Un fait spécifique est exprimé par une phrase, française ou symbolique, simple (c'est-à-dire sans subordonnée) ».

Autrement dit, cette réinterprétation revient à considérer la classification NLSMA comme une réponse à la question des processus cognitifs prérequis pour comprendre les mathématiques enseignées (Q.1). Mais ces deux définitions sont alors prises pour deux réponses à au moins deux des trois questions que la comporte cette question générale sur la compréhension en mathématiques.

– C.1 : Dans la compréhension et l'apprentissage des mathématiques, tout commence par la mémorisation de connaissances mathématiques atomiques.

– C.2 **:** Il n'y a pas de différence cognitive profonde entre : une phrase française simple (tout nombre entier a un successeur), l'écriture d'une formule littérale ($v = d/t$), ou celle d'une équation simple ($x + 2 = 8$),

> puisque ce sont des énoncés complets. Le passage de l'une à l'autre devrait relever d'une réaction quasi-réflexe, pour les élèves de collège et de lycée.

Cela est évidemment aux antipodes de toutes les observations que l'on peut faire en classe, de l'école primaire au lycée. Cela exclut tout activité et toute question géométrique, comme François théoriquement l'exclut. Et cela exclut aussi la complexité opératoire des calculs à effectuer avec des équations, ou seulement des formules. Car cette complexité exige que l'on prenne en compte le statut des symboles et les propriétés justifiant les substitutions à effectuer.

Et en regardant l'intérêt des enquêtes d'évaluation du point de vue d'un système éducatif et non plus de la fiabilité des exercices posés, ces deux réponses cognitives occultent la question plus importante dont dépend toute évaluation. Comment choisit-on les connaissances mathématiques qui vont être fixées comme les objectifs d'acquisition pour l'École primaire et pour le Collège ? Il suffit de comparer les réformes successives des Programmes depuis 1970 pour l'école primaire et depuis 1973 pour les classes de quatrième et de troisième du collège jusqu'aux plus récentes pour voir que cette question reste toujours l'autre côté du miroir des programmes de l'enseignement des mathématiques jusqu'à 16 ans.

Finalement la seule conclusion à laquelle conduit l'étude des comportements de réponses des élèves est qu'ils dépendent « des acquisitions antérieures qui sont individuelles et qui peuvent varier considérablement d'un individu à un autre » (p. 47). On est donc renvoyé à la question cruciale Q.1 : quel est le fonctionnement cognitif propre à toute activité mathématique, qu'elle soit « concrète », pratique ou théorique ? Question qui est toujours écartée dès qu'il s'agit de fixer les objectifs d'enseignement pour l'école primaire et pour le collège, et qui pourtant avait été pourtant soulevée avec la réforme de 1902/1905 (Bkouche, 1991) par les questions épistémologiques concernant les mathématiques abordées par Borel (1904) et par Poincaré en 1902 et 1905 (1968 et 1970).

3.6. Qu'est-ce que François a retenu et utilisé des recherches faites pour sa thèse ?

Pour répondre à cette question, il faut regarder sa participation à l'élaboration des enquêtes d'évaluation nationales et à leur exploitation, vingt ans plus tard.

3.6.1. L'exploitation des enquêtes nationales : les niveaux de compétences

En 1989, à la suite, à la suite de la loi d'orientation sur l'éducation de 1989, François reprend du service pour élaborer et interpréter des questionnaires d'enquête, non plus à l'IREM, mais à la DEP au ministère de l'Éducation nationale (Troseille & Rocher 2015). Son apport au dépouillement et à l'interprétation des réponses des élèves s'inscrit dans la logique des choix qu'il avait faits pour répondre à la question cruciale de sa thèse « comment interpréter les réponses à chaque item pour déterminer l'acquisition des notions que l'on veut évaluer ? » (*Supra,* Q.2.1). François reprend la notion de « compétence » devenue familière en pédagogie depuis les premières taxinomies d'objectifs pédagogiques élaborées par Bloom (1969), qui était absente de sa thèse. Mais il garde la hiérarchisation de la NLSMA des différentes manières d'utiliser les connaissances mathématiques élémentaires. En les appliquant aux acquisitions numériques, il apporte deux modifications majeures dans l'exploitation des enquêtes faites à grande échelle.

Deux niveaux d'acquisition de compétences sont distingués, concernant les quatre opérations et l'utilisation de la numération de position pour effectuer ces opérations : un niveau de « compétences de base » et un niveau de « compétences de maitrise ». Et entre ces deux niveaux, François a introduit un niveau intermédiaire qu'il a appelé « acquisition en cours » ! Et pour pouvoir hiérarchiser ces trois niveaux, toutes les réponses sont d'abord codées en mathématiquement « juste », « faux », ou « non réponse » et les items sont ordonnés selon leur du taux de réussite. Et c'est là que François a fait un coup de force statistique. Il établit une tripartition des items et des exercices en fixant des seuils pour parler d'acquisition et non-acquisition des connaissances (DEP, 1992, 1997) :

– Les compétences de base sont acquises quand il y a 75 % de réussites sur une séquence de 16 items portant sur une seule connaissance atomique. Ainsi pour les enquêtes de 1992 et de 1996, entre 20 et 25 % des élèves n'avaient acquis les compétences de base (sur un échantillon national de 2 100 élèves prélevé sur les réponses fournies par 800 000 élèves).

– Les compétences approfondies sont acquises quand il y a 75 % de réussites sur une séquence de 28 items portant sur deux connaissances atomiques. Ainsi entre 20 et 25 % des élèves avaient acquis ces connaissances approfondies.

– Et entre les deux, on parle d'« acquisition en cours », sans aucune explication ou justification. Or cela concernait plus de la moitié des élèves.

3.6.2. Les équivoques et impasses de la hiérarchisation des acquisitions en niveaux de compétences

En 1993, François avait présenté au séminaire de didactique de l'IREM de Strasbourg sa classification de niveaux de compétences qu'il venait d'élaborer et qui était reprise institutionnellement. Un point crucial, à la fois méthodologique et théorique, avait donné lieu à de vives discussions. Comment regrouper les items en une séquence qui corresponde à une compétence identifiable et mathématiquement pertinente ? L'enquête de 1992 présentait 16 items portant sur l'identification verbale de la position des chiffres dans les nombres décimaux, dans les opérations additives concernant les entiers jusqu'à 20, et dans les opérations multiplicatives par un facteur 10. Tous ces items ne présupposaient que la compréhension du système sémiotique d'écriture en base 10. Ils relèvent donc de la même compétence. Car parler d'« acquisition en cours » pour une séquence dans laquelle les réponses 2 + 3 = 5 *oui*, 4 + 3 = 7 *non*, 14 – 12 = 2 *oui*, 20 – 2 = 18 *non*, etc., alterneraient n'a pas de sens d'un point de vue mathématique, comme du point de vue d'un apprentissage des mathématiques. Or, pour masquer la faiblesse des résultats sur la compréhension du système d'écriture des nombres en base 10, les 16 items ont été fragmentés en sous-groupes pour être ensuite associés à d'autres items relevant d'un autre type de tâche. Cette démarche allait contre ce que François avait lui-même pris comme principe dans sa thèse, et contre ce que nous avions essayé de mettre systématiquement en œuvre dans la dernière enquête faite à l'IREM (Duval & Pluvinage, 1977). Mais ce fut un débat pour rien. François s'était déjà investi dans l'élaboration et l'exploitation des enquêtes commandées par le ministère de l'Éducation nationale et conduites par la DEP dont il était devenu une éminence grise.

Depuis, cette tripartition est devenue la référence institutionnelle des connaissances, compétences et savoir-faire devant être acquis au terme d'un cycle d'enseignement commun (le primaire ou le collège). Et elle a plus ou moins servi d'étalon d'évaluation des enseignements à l'échelle d'une sous-population (classes ou établissements), et des apprentissages pour les élèves pris individuellement.

Mais le résultat le plus intéressant de cette contribution de François aux évaluations standardisées des enquêtes est d'avoir révélé que peu d'élèves avaient alors le niveau de maîtrise attendu institutionnellement et que la grande majorité en restait au « niveau d'acquisition en cours ». La situation a-t-elle changé trente ans plus tard ?

4. Le D.E.A. et les thèses de didactique des mathématiques (1977-1999)

Le D.E.A. et le Doctorat de didactique des mathématiques ont été créés en 1977, dans le cadre du D.E.A. et du Doctorat du Département de Mathématiques de Strasbourg. La question des processus de compréhension et d'apprentissage en mathématiques s'est alors imposée d'emblée avec le choix des thèmes de recherche, la prise en compte des intérêts des étudiants chercheurs et, avec l'accompagnement des étudiants dans leur travail. Là, il a fallu vraiment s'interroger sur les processus cognitifs mobilisés dans toutes les activités mathématiques. Nous ne pouvions plus considérer la question comme en partie résolue par la classification NLSMA des niveaux de complexité cognitive, ou par l'épistémologie génétique ou la psychologie génétique de Piaget. C'était une question totalement nouvelle dont il fallait explorer et confronter les différents aspects. À partir de quoi et comment pouvions-nous l'aborder ?

Trois approches ont alors été progressivement développées :

- L'approche didactique classique. On part des programmes d'enseignement pour un cycle ou pour seulement une année scolaire. L'objectif est d'élaborer et de tester des séquences d'activités pour faire acquérir spécifiquement une notion, un concept ou un algorithme de calcul dans le cadre du travail en classe en interaction avec les autres élèves et avec l'enseignant.
- La confrontation d'une épistémologie des mathématiques, fondée sur le développement historique des concepts mathématiques et de l'épistémologie générale de la connaissance scientifique qui s'est développée à la suite de Kant. Elle porte sur ce qui est commun à toutes les démarches scientifiques, tandis que l'épistémologie des mathématiques porte sur ce que « l'activité de la mathématique » a d'irréductible aux autres démarches scientifiques (Glaeser, 1971). Car la pensée mathématique et les activités mathématiques relèvent d'un mode de fonctionnement cognitif qui rompt totalement avec la manière spontanée de penser, de réfléchir et de travailler dans toutes les autres sciences. En mathématique, personne ne peut comprendre ni faire à votre place.
- Les observations suivies tout au long d'une année, dans des classes de collège, de la manière dont les élèves entrent, ou non, dans les activités proposées, et, parallèlement, les observations interactives avec deux ou trois élèves, suivis individuellement.

L'opposition des deux premières approches est apparue dans le rôle donné à la résolution de problème pour comprendre et apprendre. Du point de vue didactique, la résolution de problème s'est imposée comme la situation dans laquelle toutes les activités mathématiques devaient être organisées pour introduire de nouvelles notions. Car elle sollicite l'activité d'au moins certains élèves et stimule une recherche, c'est-à-dire des questions qui naissent des résultats d'essais (Glaeser, 1971, p. 17 ; 1973, p. 19). Mais du point de vue sémio-cognitif, la résolution de problème présuppose des activités spécifiques pour faire prendre conscience de la manière de travailler et de penser en mathématique. Et sans ces activités spécifiques préalables, aucune compréhension et, donc, aucun apprentissage, n'est possible pour les trois quarts des élèves. En revanche la troisième approche est purement méthodologique. Elle peut porter sur un ou plusieurs élèves, sur une classe, ou sur une population entière d'élèves à l'échelle d'un pays. Elle peut être génétique ou longitudinale.

On peut distinguer deux périodes dans l'aventure de recherche, à la fois didactique et cognitive, qui a alors commencé.

4.1. Oscillations entre psychologie, pédagogie et enseignement des mathématiques

De 1978 à 1985, huit thèses ont été soutenues. Elles reprenaient plus ou moins la méthode de questionnaire à trois modalités et d'analyse multifactorielle de correspondances que François avait utilisée dans sa thèse. Pour le reste, elles développaient l'analyse des manuels que nous avions amorcée (Duval & Pluvinage, 1975), ou reprenaient l'observation en classe de collège que nous faisions déjà de deux points de vue totalement différents :

- L'un, essentiellement didactique, centré sur les interactions des élèves entre eux et avec l'enseignant ;
- L'autre, essentiellement cognitif tel celui de l'épistémologie génétique ou de la psychologie génétique de Piaget, centré sur quelques élèves pour saisir leurs réactions orales devant les tâches proposées et recueillir des données précises sur les points récurrents d'incompréhension ou de blocage auxquels les élèves se heurtent dans les tâches proposées, quel qu'en soit le contenu mathématique.

La toute première thèse a repris l'analyse algorithmique des comportements de réponse que François avait développée dans sa thèse, et la méthode qu'il avait utilisée pour élaborer les questionnaires et interpréter les réponses (Hitt, 1978). Les thèses suivantes, recentrées sur la question de la compréhension dans l'apprentissage des mathématiques, ont été plus exploratoires.

Trois thèses se sont appuyées sur la psychologie génétique de Piaget pour comparer les différents types de raisonnements requis dans des problèmes mathématiques et les stades piagétiens du développement de l'intelligence chez l'enfant et l'adolescent. Elles ont porté sur les raisonnements du stade des « structures opératoires « formelles » (11-16 ans), les seuls qui soient pertinents et valides du point de vue mathématique. L'une a analysé la compréhension des situations probabilistes portant sur le résultat de plusieurs tirages avec remise des boules après chaque tirage, et non pas sur le cas d'un tirage (Alarcon, 1982). La seconde a analysé la compréhension des énoncés implicatifs et de leur réciproque, lorsqu'ils sont formulés en langue naturelle (Radford, 1985). La troisième, s'inspirant de l'ouvrage séminal de Piaget *Le langage et la pensée chez l'enfant* (1923), a porté sur la manière dont les élèves regardent une figure géométrique, en leur demandant de formuler des instructions pour faire construire cette figure par d'autres élèves (Kubler-Weber, 1982). Ces trois thèses ont mis en évidence l'inadéquation totale de l'épistémologie et de la psychologie génétiques pour éclairer les processus cognitifs d'apprentissage et d'acquisition de connaissances mathématiques.

La compréhension des énoncés mathématiques par les élèves a été abordée plus globalement à partir de la lecture de manuels ou de fiches, que les explications ou les consignes des enseignants reflètent. L'outil utilisé n'était plus un questionnaire, mais le test de closure[9] qui porte sur la lisibilité des textes et dont la tâche demandée consiste à restaurer des phrases qui étaient tronquées à intervalles réguliers (Gagatsis, 1982).

Une autre a été faite par une approche pédagogique sous la direction de Georges Glaeser et la codirection de François sur l'auto-évaluation (Régnier, 1983). Elle reprend la distinction sur les finalités opposées des tests qui avait été faite dans le *Livre du problème* : « Il convient donc d'exercer l'élève à contrôler lui-même ses connaissances et à prendre conscience du degré de leur assimilation » (Glaeser, 1973, p. 82). Pour cela chaque élève doit fabriquer des exemples numériques pour « vérifier un savoir-faire » et pour « apprendre à vérifier la justesse d'un résultat ».

Deux autres ont été faites en dehors de toute problématique et de toute théorie. L'une portait sur le lien entre l'oralité constitutive de la parole et la reconnaissance d'une phrase comme une expression complète de sens, dans une suite de mots écrits qui est plus courte qu'une ligne ou déborde sur la ligne suivante. Les phrases proposées étaient des phrases simples portant sur les nombres entiers (Abdelli, 1985). L'autre était une étude longitudinale du travail d'un élève en classe. Il s'agissait de recueillir les réactions d'un élève et ses productions écrites, pour ne les interpréter qu'au terme d'un ou plusieurs mois, puis d'une année (De Goes Cambas, 1985).

4.2. Un renversement d'approche de la question de la compréhension en mathématiques : l'analyse sémio-cognitive de l'activité mathématique

Des tests effectués dès 1970 sur le passage des énoncés en français à des expressions littérales sémantiquement équivalentes avaient montré la distance cognitive entre le langage naturel et l'écriture symbolique pour dire les opérations de calcul sur les entiers. Ils avaient également montré que les obstacles n'étaient pas les mêmes pour le passage direct et le passage inverse. Le suivi régulier d'élèves dans plusieurs collèges avait permis d'élargir ces premières observations au fil des années et des réformes. On se heurtait toujours au fait que les obstacles subsistaient récurrents,

[9] Inventé en 1953, le test de closure consiste à supprimer un mot sur cinq dans un texte. On peut aussi prendre d'autres règles de suppression des mots (Gagatsis, 1980). Cette thèse a donné lieu l'année suivante à une publication dans une revue internationale (Duval *et al.*, 1987).

indépendamment des connaissances enseignées, que ce soit pour calculer avec les entiers, les relatifs, les décimaux et les rationnels, ou pour calculer en utilisant des lettres à la place de chiffres, et plus encore pour écrire et résoudre des équations. Et c'était la même chose pour utiliser des figures de géométrie plane et dans l'espace, les fonctions et les représentations graphiques, les probabilités, etc.

Cinq des huit thèses précédentes ont mis en évidence le fait que les activités mathématiques relèvent d'un mode de fonctionnement cognitif qui rompt totalement avec la manière spontanée de penser, de réfléchir et de travailler dans toutes les autres sciences. De plus, elles convergeaient sur la nécessité d'une description systématique du fonctionnement cognitif qui est sous-jacent à toutes les formes d'activités mathématiques, que ces activités soient abusivement dites « concrètes » ou « abstraites ».

Ainsi l'idée de faire des tests analogues à ceux de 1970, pour la conversion des écritures symboliques d'équations du premier degré en des représentations cartésiennes de droites et de quarts de plans et sur la conversion inverse, s'est naturellement imposée. Les expériences que j'avais pu faire dans des classes avec la collaboration d'enseignantes et d'enseignants montraient la pertinence et la fécondité de cette approche pour les élèves. De 1986 à 1999, quinze thèses ont, pour la plupart, été faites dans cette approche. Elles ont permis d'explorer tous les couples de registres utilisés dans les activités mathématiques. Quant aux registres, il n'y avait pas à les inventer. François en avait déjà mentionné certains dans sa thèse (le langage usuel, les symboles), il avait aussi utilisé largement les schémas, mais avait exclu les figures dont l'utilisation relevait de l'heuristique. Mais cela n'avait été que pour marginaliser les difficultés cognitives liées aux conversions et aux traitements, qui pour lui restait sans rapport avec l'activité mathématique elle-même ni avec la compréhension des concepts (*supra*, 3.5.2).

Pour étudier les sauts d'un système sémiotique de représentation à un autre, qui sont spécifiques à la manière mathématique de travailler, il fallait une tout autre méthode que celles des enquêtes et de l'approche didactique classique. Les premiers tests sur ces sauts ont été des mini-questionnaires. Ils ont été repris et progressivement affinés. Ils présentent un double avantage. D'une part, l'interprétation des données recueillies y est dissociée de toute correction ou évaluation mathématique des réponses. Et, d'autre part, il devient possible de réaliser des comparaisons dans le temps, soit pour un même élève, soit pour une cohorte d'élèves, de manière objective. En effet, en mathématiques, la compréhension d'un élève et sa progression ne peuvent pas être évaluées par rapport aux performances d'autres élèves ni à la moyenne des performances d'une population. Les mini-questionnaires appropriés pour étudier le fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent à toute activité mathématique doivent satisfaire aux trois conditions suivantes :

- Pour les questions, on recourt à un type de tâche qui n'est ni un exercice ni un problème, mais une question à choix multiple. L'objectif est d'obtenir des réponses très rapides car il s'agit de savoir si la distance cognitive entre les représentations sémiotiques de deux registres est, ou non, un obstacle pour les élèves.
- La construction des mini-questionnaires doit se faire en respectant le principe fondamental de la méthode expérimentale, qui est de ne faire varier qu'un seul facteur à la fois en maintenant les autres constants. Pour cela, on prend comme variable cognitive dans l'un des deux registres toutes les variations de symboles pouvant correspondre à un tracé de ligne, ou à une zone, qui apparaît visuellement opposée à un autre. Selon le registre choisi comme registre de départ, on peut alors construire le mini-questionnaire et le mini-questionnaire inverse. Cette méthode est la condition nécessaire pour que les réponses obtenues soient objectivement interprétables.
- L'interprétation des données recueillies se fait sur une séquence de réponses à plusieurs items qui correspondent à l'une des variables cognitives respectivement propres à chacun des deux registres.

Cette méthode n'a bien évidemment pas exclu le recours à l'AFC, mais elle a accentué les divergences entre les deux approches.

Trois thèses marquent ce renversement d'approche de la question de la compréhension en mathématiques. La première juxtapose un mini-questionnaire, qui comporte encore trop d'items, avec une AFC pour interpréter les réponses obtenues (Radford, 1985). La seconde avait mis en évidence l'importance et les ramifications des décalages sémiotiques entre au moins trois registres (Koleza-Adam, 1987). La troisième analyse l'introduction de la notion de fonction dans les manuels et l'a corroborée par des observations sur l'obstacle des conversions implicitement admises comme évidentes (Guzman Retamal, 1990).

Parallèlement d'autres thèses ont mis en œuvre des mini-questionnaires construits selon le principe de la méthode expérimentale pour tester la spontanéité ou non de la conversion d'un registre à un autre (Hajri, 1986). Dans la même ligne que la thèse sur le plan repéré, deux autres thèses ont permis d'identifier les facteurs sémio-cognitifs dans les conversions entre visualisation cartésienne des tracés de forme 1D ou 2D et les écritures algébriques correspondant ou non à des fonctions (Pavlopoulou, 1994). L'enjeu était la reconnaissance ou la prise en compte des unités figurales 1D ou 2D, propres au quadrillage du plan par deux axes gradués orientés, le couple de registres (tracé d'unités figurales 1D ou 2D, écritures symboliques d'une relation). Ce sont ces unités figurales qui permettent de numériser les figures géométriques, de la même manière qu'elles permettent de visualiser les équations et les inéquations.

Cependant, dans les recherches sur les processus de compréhension et d'apprentissage qui sont spécifiques aux mathématiques (*supra*, 3.5.2), l'identification des variables sémio-cognitives n'est qu'une première étape. Leur objectif est de permettre d'organiser des tâches spécifiques pour faire reconnaître les unités de sens et les unités figurales mathématiques pertinentes dans chaque couple de registres. Cette reconnaissance, qui doit être très rapide, est la condition nécessaire pour pouvoir voir l'équivalence sémantique entre une expression soit verbale soit symbolique, et une visualisation soit cartésienne soit « euclidienne » de droites, de courbes, de surfaces ou de volumes dans l'espace. L'acquisition de cette reconnaissance rapide est la preuve du caractère primordial de cette approche pour que la majorité des élèves puissent comprendre et donc acquérir des connaissances mathématiques élémentaires. Trois thèses ont été faites dans ce but (Mesquita, 1989 ; Lémonidis, 1990 ; Damm Fleming, 1992).

Ces premiers travaux sur l'organisation de tâches spécifiques portant sur les conversions de représentations sémiotiques dans un couple de registres ont conduit à étudier le fonctionnement cognitif des substitutions que l'on peut faire en restant dans le même registre. Car chaque registre offre des possibilités de substitution qui non seulement se font indépendamment des autres registres, mais surtout qui ne peuvent pas être faites dans les autres registres. Ces substitutions, qui sont des « traitements », sont les seules qui soient pertinentes d'un point de vue mathématique, car elles permettent de démontrer ou de calculer. Deux thèses ont amorcé l'étude du fonctionnement cognitif sous-jacent aux traitements. Elles ont ainsi ouvert la troisième étape des recherches sur l'analyse sémio-cognitive dans le but de favoriser, chez les élèves, une prise de conscience de la manière de penser et de travailler en mathématiques (Padilla Sanchez, 1992 ; Rommevaux, 1997).

Une thèse a été faite sur la mise en équations des données concernant deux situations réelles de production pour résoudre des problèmes (Kourkoulos, 1991) et trois thèses ont essentiellement porté sur l'application de l'analyse factorielle avec des questions à deux ou trois modalités (Zaki, 1989 ; Faquih, 1991 ; Thadeu Moretti, 1992).

Une autre s'inscrit dans le cadre de la « pédagogie différenciée », en collaboration avec Louis Legrand (Rauscher, 1993). Elle a conduit à des travaux sur l'importance des productions écrites des élèves dans le développement des processus de compréhension en mathématiques.

La dernière thèse a été faite dans une période où François était devenu le directeur de la MAFPEN (Missions académiques pour la formation des personnels de l'Éducation nationale), et voulait cependant garder certains engagements à l'IREM. Dans sa nouvelle situation, François projetait d'organiser le travail en classe en utilisant l'outil informatique. Chaque élève aurait un moniteur comme bureau et l'enseignant pourrait suivre individuellement leur travail et intervenir. La thèse porte sur la compréhension des nombres rationnels en développant l'articulation du registre de l'écriture des nombres rationnels et de celui de la visualisation (Adjiage, 1999). Son apport a été la création de logiciels et l'expérimentation de logiciels pour faciliter la compréhension des nombres rationnels.

5. La création des *Annales de didactique et de sciences cognitives* en 1988

La revue *Annales de didactique et de sciences cognitives* a été créée en 1988 dans un double but. Il s'agissait tout d'abord de diffuser l'analyse sémio-cognitive de l'activité mathématique. La mention « sciences cognitives » dans le titre a été choisie en référence aux trois théories cognitives alors dominantes :

- Les recherches sur l'Intelligence Artificielle qui étaient déjà en plein développement depuis plus de deux décennies (Newell & Simon, 1972) ;
- Celles sur la mémoire sémantique et sur la compréhension de la langue naturelle (Schank, 1972) ;
- Celles sur la logique naturelle (Grize, 1983), et non plus sur la psychologie et l'épistémologie génétiques que Piaget (1924) a développées à la suite des deux ouvrages de Brunschvicg (1912, 1922).

En effet, l'analyse sémio-cognitive que l'on commençait à développer en divergeait radicalement. C'est pourquoi la première phrase du premier article du premier numéro, en 1988, présente l'idée directrice qui commande toute l'approche sémio-cognitive sous-jacente à l'activité mathématique, quels que soient les objets mathématiques étudiés, les propriétés qui les caractérisent, et les opérations qu'elles permettent d'effectuer :

> La distinction entre sens et référence « *Sinn* » et « *Bedeutung* » s'est révélée être une des plus fécondes pour tous les domaines dans lesquels le rapport à des concepts et à des idées s'effectue par la manipulation de signes, de symboles ou d'expressions. (Duval, 1988, p. 7)

Le logo est aussi essentiel que le titre inscrit dans deux hexagones, chacun contenant un hexagone plus petit dont les côtés sont parallèles à ceux des autres hexagones. Il montre comment le regard voit et reconnaît, dans une figure géométrique, des unités figurales 2D ou 3D, de préférence à des unités figurales 1D, indépendamment de toute connaissance géométrique. Quand l'un des deux petits hexagones apparaît comme un cube en relief, l'autre apparaît comme un cube en creux. Il y a ainsi deux manières possibles de voir le logo qui sont mutuellement exclusives, l'une des deux s'impose d'emblée comme évidente au premier coup d'œil. On touche ici à un phénomène cognitivement et didactiquement crucial : la quasi-impossibilité de faire basculer son regard dans l'autre manière de voir. Les hypothèses données dans les énoncés, ou les explications orales pour guider le regard sur ce qu'il faut voir n'aident en rien à voir ce qu'elles disent voir pour trouver la propriété à utiliser. Pour la très grande majorité des élèves, les hypothèses données restent des lunettes noires.

L'analyse sémio-cognitive est d'abord un outil d'analyse théorique et méthodologique. Les premiers points saillants qu'elle a permis de mettre en évidence sont les phénomènes de congruence et de non-congruence entre le langage usuel pour les énoncés ou les consignes, les symboles, les schémas, les figures, et les images. Et plus globalement, elle montre les impacts immédiats que les phénomènes de non-congruence ont sur les incompréhensions ou les blocages, systématiques et récurrents, et sur l'apprentissage des mathématiques.

Le deuxième but de la création des Annales était que les étudiants et les enseignants qui avaient fait leur thèse à Strasbourg, ou même seulement un D.E.A., puissent publier un article pour faire connaître leur recherche.

Lors des consultations faites préalablement à la création de la revue, l'installation d'un comité de rédaction avait été fortement suggérée. Mais cela a été délibérément écarté, vu le premier but qui motivait sa création. Tous les articles ont bien évidemment été attentivement relus, et parfois discutés, par deux personnes. Pour comprendre le mode de travail éditorial adopté, il faut rappeler l'ambiance d'échanges informels qui a régné à l'IREM de Strasbourg, de 1970 jusque vers les années 1990-1992. Les échanges informels y étaient aussi importants que les réunions d'équipe et les rencontres programmées en début d'année. L'IREM occupait tout le premier étage du bâtiment de l'IRMA. Tous les bureaux étaient presque toujours ouverts. Celui de François était la porte du fond, à gauche. Au centre du couloir, face à l'escalier qui montait aux autres étages de l'IRMA où travaillaient les mathématiciens, il y avait la machine à café, à côté de la porte du directeur de l'IREM. Cet espace élargissait donc les échanges informels aux mathématiciens qui s'arrêtaient, et nos discussions avec eux se poursuivaient parfois dans l'un des bureaux ouverts. Il en était de même pour les enseignants de l'enseignement secondaire qui venaient voir l'un des membres de l'IREM, ou qui venaient suivre le séminaire dans le cadre du D.E.A. et du Doctorat de didactique des mathématiques.

François est devenu le directeur de la publication en 1998, pour la sortie du numéro 6 des Annales. Dans la préface, il évoque le travail et la personnalité de Papini (surnom de J. Arlacon 1982), l'un des premiers doctorants dont la disparition a touché tous ceux qui l'avaient connu à l'IREM (Pluvinage, 1998). Il annonce la mise en place d'un comité de lecture pour la publication du numéro suivant en 2001. À partir du volume 10, en 2005, François a commencé à passer le relais à Alain Kuzniak.

6. L'abandon des questionnaires centrés sur l'acquisition des « automatismes », pour la maïeutique : rupture ou continuité ?

Toute la démarche des recherches de François sur l'enseignement des mathématiques s'inscrit dans l'opposition que Glaeser faisait entre les « automatismes » (les opérations effectuées de manière quasi-réflexe dans un calcul) et l'« heuristique ». Dans le chapitre 0 intitulé *L'activité mathématique*, de son ouvrage *Mathématiques pour l'élève professeur,* Glaeser mentionnait les trois approches de l'heuristique qui étaient, pour lui, indispensables de connaître. Les deux premières sont mathématiques (Glaeser, 1971) : celle de Descartes (2016) dans *les Règles pour la direction de l'esprit*, et celle de Polya (1965) centrée sur la résolution mathématique de problèmes spécifiquement mathématiques. La troisième est la maïeutique de Socrate qui, dans le *Ménon*, fait découvrir à un jeune esclave l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du carré. Glaeser avait analysé le dialogue à partir de la traduction de Robin (Platon, 1963). Pour lui la maïeutique socratique était le prototype du « dialogue maître-élève, préférable au monologue magistral » (Glaeser, 1971, p. 31).

François ayant assimilé les « automatismes » à des algorithmes qui seraient à la fois « à la portée de la machine et de l'homme », l'heuristique ne pouvait être qu'une notion vide puisque définie par l'absence des critères définissant les automatismes (*supra*, 3.5.1). Cette approche menait à une impasse, puisque, la géométrie s'appuie sur la construction de figures, et que la manière de regarder une figure pour trouver la solution d'un problème ou s'en convaincre échappe à tout automatisme. En effet pour regarder une figure, il faut décomposer la figure donnée en unités figurales 2D plus petites, les reconfigurer autrement, mais aussi déconstruire les unités figurales 2D en unités figurales 1D. François est donc revenu à la maïeutique socratique, telle que Glaeser (1971) l'avait expliquée, lorsqu'il a officiellement travaillé, en 2002, à la *Sección de Matemática Educativa del* CINESTAV-IPN à Mexico, créée sous la direction d'Eugenio Filloy.

6.1. Le dialogue d'une enseignante et d'une élève, Marina : de quoi parlent-elles ?

Pour cette dernière étape dans les travaux de François, je vais retenir l'article sur l'introduction de la notion de vitesse publié dans les *Annales*, dans une classe en sixième année de scolarité à Mexico (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008). François avait assisté à l'une des séances de la classe avec une enseignant en formation, et cette séance avait été enregistrée et transcrite. Nous sommes donc là aux antipodes, si j'ose dire, de la problématique et de la méthodologie des enquêtes faites à l'IREM de 1971 à 1978, puis reprises dans plusieurs thèses.

Tout le travail porte sur la notion centrale de proportionnalité, et non pas sur la notion de vitesse. On y accède par trois entrées différentes :

- Celle des nombres considérés indépendamment des grandeurs ;
- Celle des grandeurs mathématiques de distances entre deux points ;
- Celle des grandeurs physiques mesurables. Elle implique les rapports entre trois grandeurs physiques hétérogènes, chacune étant déterminée par des unités de grandeurs différentes : la vitesse et le temps pour une distance parcourue. Là, les nombres se confondent avec des unités de grandeurs différentes sont divisibles en unités plus petites pour prendre en compte les mesures faites.

Or, pour chacune de ces trois entrées, il y a un type de visualisation congruente, les deux autres ne l'étant pas, et créant donc une distance cognitive entre la visualisation et l'explication verbale ou écrite :

- Un tableau de deux colonnes juxtaposant deux suite de nombres fonctionnellement associées ;
- Un graphe cartésien pour représenter les variations par une droite ou par une courbe ;
- La visualisation géométrique pour des objets géométriques de dimensions différentes (droites, polygones ou cercles, cubes ou sphères).

L'objectif de la séance observée étant d'introduire la notion de vitesse, l'enseignante utilise « une table de valeurs supposée indiquer des temps de natation réalisés par des jeunes gens » (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008 p. 43) et une séquence de questions posées pour décomposer la tâche et guider les élèves. Elle suit la séquence des questions préalablement fixée pour dialoguer avec la classe. Cependant la table de valeurs présentée est un tableau à double entrée qui est d'une complexité surprenante, puisque la marge verticale de gauche présente les différents nageurs avec des distances différentes en m et la marge horizontale supérieure, pour le temps, qui comporte trois colonnes pour séparer les h, min et s.

L'interaction de l'enseignante avec les élèves est didactiquement révélatrice. L'enseignante commence avec la question « Comment pouvons-nous savoir qui a nagé le plus vite ? ». La présentation d'extraits du dialogue de l'enseignante avec la classe est faite de manière à pouvoir être mise en parallèle avec le dialogue du *Menon*. L'enseignante n'obtient bien entendu aucune réponse utilisable. Pourtant, après plusieurs échanges, Marina intervient pour répondre « par proportionnalité » et justifie sa réponse en allant au tableau pour réaliser un tableau de proportionnalité sans aucune marge, et donc sans unités de mesure.

C'est sur cette intervention de Marina, que l'enseignante ne comprend pas, que commence tout le travail d'analyse portant sur la réponse et les explications verbales correctes de Marina présenté par François dans cet article. Cependant, François omet la réalisation du tableau de proportionnalité réduit aux seuls nombres, fait au tableau par Marina. Projetant son analyse sur le texte de Platon, François distingue deux phases dans le dialogue de l'enseignante et de Marina comme le déroulement des questions de Socrate et des acquiescements de Socrate. L'une porte sur la nature des opérations cognitives permettant de comprendre la démarche à faire, et l'autre sur les choix des unités figurales pertinentes pour répondre mathématiquement.

La première phase consiste à lire les échanges de l'enseignante avec Marina, comme si c'était un échange entre Socrate et… Marina. Pour cette mise en correspondance, quelques échanges sont extraits du dialogue entre Socrate et l'esclave de Menon. Autrement dit, « si nous mettons, à la place de l'esclave, une élève, Marina », il faut réécrire ce passage du *Menon* en faisant l'hypothèse que Marina « a pensé à l'assemblage de triangles rectangles isocèles » (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008 p. 53). Mais que signifie ici le vocable « penser » ? Et Marina était-elle capable de le penser ? Car il ne suffit pas ici de voir des triangles rectangles isocèles, il faut aussi voir qu'il faut en assembler 8 et non pas 4.

Marina y a-t-elle vraiment pensé ? Car la véritable question est de savoir combien de triangles rectangles isocèles il faut assembler, 2, 4 ou 8 ? Et Marina pouvait-elle aussi penser qu'il en fallait 8 ? Le rapprochement fait entre le dialogue socratique et celui de l'enseignante avec Marina a conduit François à superposer et fusionner trois notions — proportionnalité, diagonale du carré et vitesse — pour pouvoir dire ce que Marina aurait vu sur la figure, mais qu'elle n'a pas dit.

6.2. De quel type de visualisation les explications de l'enseignante et de Marina sont-elles la description ?

La deuxième phase est l'explication de la démarche mathématique. Quelles connaissances mathématiques requiert-elle ? Aucune, car là aussi ce sont les opérations cognitives sous-jacentes à la manière mathématique de voir les figures qui sont importantes. Quatre opérations, purement « figurales » sont nécessaires pour voir les huit triangles isocèles à assembler comme le montre le dessin à main levée de la figure 1, et pour visualiser l'explication de Socrate :

(1) Décomposer le carré **2D** en traçant une diagonale **1D** pour obtenir deux triangles isocèles **2D** et 4+1=5 unités figurales **1D** (figure 1, en haut à gauche).

(2) Mais si on le décompose en traçant les médiatrices **1D** (figure 1, en bas), on obtient 4 unités figurales **2D** et 4+2=6 unités figurales **1D**.

(3) On peut reconfigurer un carré quatre fois plus grand que le carré de départ, celui en pointillés (figure 1, en haut à droite).

(4) Dans ce grand carré, on peut reconnaître un autre carré seulement deux fois plus grand que le carré de départ. La figure d'arrivée comporte notamment 4 unités figurales **1D** pour le carré en traits plein. On s'appuie ici sur un pavage du plan par des triangles rectangles isocèles.

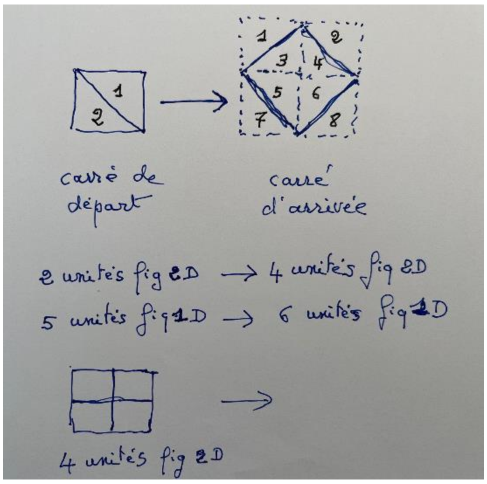

Figure 1. Traitement purement figural par reconfiguration d'unités figurales.

Socrate a dû recourir au mot « ligne » (*grammé*) pour dire ce qu'il faut tracer, mais c'est seulement à la fin du dialogue qu'il précise que cette ligne est la « diagonale », et non pas une médiatrice. On pourrait aussi tracer deux diagonales et décomposer le carré de départ en quatre triangles isocèles. On obtient ainsi la figure classique reproduite par Glaeser (1971) et aussi par François. Cette variante présente l'inconvénient de masquer l'irrationalité de la grandeur de la diagonale du carré par rapport à celle de l'un de ses côtés. Dans le pavage du plan par des rectangles isocèles, tous les segments 1D du pavage peuvent être vus comme côté d'un carré et comme diagonale d'un autre carré.

Il est impossible que Marina ait fait ces trois opérations car les opérations figurales (1) et (2) se heurtent à deux obstacles perceptifs bien connus. D'une part le contour d'un polygone convexe exclut l'idée d'en prolonger les côtés. Et, d'autre part, il faut reconnaître chacun de ses côtés comme une unité figurales 1D, alors qu'ils se fondent visuellement dans l'unité figurale 2D du polygone dessiné. Nous en avions parlé au téléphone lorsque François était au Mexique, et lorsque nous nous rencontrions à Aillon-le-Jeune lorsqu'il été en France. Mais François écarte, dans le cas de Marina, cette manière de voir purement figurale qui ne requiert aucun concept ni mathématique ni physique et aucun calcul. Alors pourquoi François réintroduit-il un tableau que des élèves de sixième doivent lire en croisant des marges pour relever des rapports et les convertir ensuite en des comparaisons de fractions (2008, p. 51), tâches analogues aux questions qui avaient été utilisées pour les enquêtes (*supra*, 3.3) ? Se référant alors à un article publié (Adjiage & Pluvinage, 2007), il ne prend pas en compte ce que Marina avait dit et expliqué.

Le recours à la maïeutique socratique pour analyser le déroulement de la classe impose d'inverser les rôles dans le dialogue du *Méno*n. C'est le jeune esclave qui expliquait à Socrate. C'est Marina qui explique à l'enseignante sa réponse et les opérations qu'elle a effectuées pour répondre « par proportionnalité » à la question que l'enseignante ne cesse de rappeler « Comment pouvons savoir qui a nagé le plus vite ? ». Et pour expliquer elle va au tableau et construit un tableau plus simple qui :

– juxtapose trois colonnes de nombres,

– exclut toute référence à des unités pour une même grandeur ou pour des grandeurs différentes, comme celles utilisées en physique.

Marina est parfaitement consciente de ce qu'elle fait, puisqu'elle doit répéter ensuite « C'est ce que j'avais déjà fait dans la table, mais vous ne m'avez pas comprise » (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008, p. 49). Autrement dit, par rapport au débat didactique sur l'introduction et le sens des opérations arithmétiques, Marina s'en tient d'elle-même et spontanément à l'indépendance des nombres par rapport à toute considération de grandeur. Entre trois types de visualisation possibles – une juxtaposition de colonnes de nombres, un graphe cartésien et une visualisation purement géométrique – elle privilégie le plus simple et le plus immédiatement vérifiable. Cela lui a permis de voir l'invariance d'une relation entre deux suites de nombres.

Autrement dit, dans son analyse du dialogue de l'enseignante et de Marina, François superpose et fusionne les trois notions qui sont impliquées dans le travail sur un exemple l'application de la formule $v = d/t$: proportionnalité, diagonale du carré et vitesse.

Qu'aurait dit Glaeser de cette analyse du dialogue entre l'enseignante et Marina, ou plutôt qu'a-t-il dit de la maïeutique socratique qu'il prônait ? Pour lui, les questions devaient venir de l'élève et non de l'enseignant, et il était absurde de définir avant une suite de questions pour conduire à la découverte ou l'acquisition d'un concept : « [La maïeutique] est un art difficile : on en trahit l'esprit si l'on fournit tour à tour les questions et les réponses. L'essentiel est d'encourager l'interlocuteur à exploiter chaque bribe d'idée qui lui vient » (Glaeser, 1971, p. 29), parce que dans les problèmes que l'on donne « l'important est de susciter la curiosité et de *déclencher un comportement de recherche* » (Glaeser, 1973, p. 19). Et « la résolution d'un problème est une aventure d'une telle intensité qu'elle fait date dans la mémoire de tous ceux qui l'ont vécue » (*ibidem*, p. 20). Et, en ce sens, « le contenu mathématique importe peu dans un problème » (*ibidem*, p. 19).

7. Le retour au point de vue mathématique : le récif de l'algèbre élémentaire et des écritures symboliques

Les écritures symboliques sont la ligne de fracture qui révèle la contradiction entre les deux principes d'analyse des exercices scolaires que François a adoptés dans sa thèse pour analyser les comportements de réponse des élèves. Le premier principe relève d'un point de vue informatique. Les difficultés des questions et des tâches sont analysées en fonction de l'algorithme de résolution programmable sur une machine. Le deuxième principe relève du point de vue dit « cognitif » de la NLSMA, qui hiérarchise des compétences indépendamment des notions mathématiques et de la question de leur compréhension par les élèves (*supra*, 3.5.2).

Pour François, il n'y avait pas de contradiction entre l'analyse des questions du point de vue informatique et l'analyse des comportements de réponse des élèves du point de vue « cognitif » de la NLSMA. Ce court-circuitage de la complexité sémio-cognitive de l'activité mathématique a conduit à réduire toute question concernant les connaissances acquises à la seule manipulation des écritures symboliques, numériques, décimales ou algébriques (*supra*, 3.3). Son retour à l'approche didactique classique s'est fait avec l'élaboration de problèmes à résoudre pour comprendre et pour apprendre (Glaeser, 1973). Mais une barrière sémio-cognitive insoupçonnée est apparue, celle des écritures symboliques dans l'introduction de l'algèbre élémentaire. François s'était heurté dans sa thèse à des erreurs pour le calcul avec les nombres décimaux, en particulier $0{,}3 \times 0{,}3$. Il l'avait alors réduite à une erreur non significative : « le placement, correct ou non, de la virgule décimale résulte […] d'influences fragiles et momentanées » (Pluvinage, 1977, p. 138). Mais là, la barrière des écritures symboliques était celle de la coordination synergique entre la langue naturelle, les écritures symboliques, et les deux registres de visualisation, géométrique et cartésien. On retrouvait donc l'opposition d'approche méthodologique et théorique qui s'était développée depuis 1978 avec l'encadrement des thèses. Les problèmes de compréhension et d'appropriation des écritures symboliques par les élèves au collège apparaissaient primordiaux.

7.1. Une double (con)fusion : proportionnalité et fonction linéaire, formule et équation

Le partage que François faisait de son temps, entre le CINVESTAVE-IPN à Mexico et l'IREM de Strasbourg, n'a pas interrompu la confrontation de ces deux approches sur ces problèmes de compréhension cruciaux pour l'enseignement des mathématiques. Nous nous retrouvions presque chaque année à Annecy et dans les Bauges à Aillon-le-Jeune pour discuter des observations que nous faisions chacun dans des classes, et des démarches des élèves en fonction des tâches proposées. Au cœur de nos échanges, il y avait la question des différences entre les écritures symboliques et les langues naturelles. Sont-elles plus importantes, ou non, que leurs similitudes ? Car dans ces deux registres discursifs, on retrouve la même opposition sémantique fondamentale entre expression incomplète, c'est-à-dire des mots ou des syntagmes, et expression complète c'est-à-dire des égalités et des équations. Les avancées de chacun sur cette question ont été publiées en 2016 (Duval & Pluvinage, 2016). Elles se sont faites sur deux fronts.

Le premier front, essentiel pour François, a été celui des questions portant sur l'acquisition de compétences en mathématiques dans le cadre des enquêtes PISA. Les questions portaient essentiellement sur l'utilisation de formules littérales dans des situations différentes. François y émet de sérieuses réserves sur la fiabilité des résultats et sur la pertinence mathématique des questions. L'une, typique, avait retenu son attention. Sur une image montrant des empreintes de pas, un segment est tracé entre les talons de deux empreintes successives pour déterminer la longueur d'un pas. On demande de calculer cette longueur à partir de la formule $n/L = 140$; dans laquelle n *e*st le nombre de pas, L la longueur d'un pas, et 140 la valeur numérique de ce rapport pour l'homme (Duval & Pluvinage, 2016). Ce qui est surprenant dans les remarques de François est que ses réserves sur la fiabilité des résultats sont celles qu'il avait écartées dans les discussions que nous avions eues dans un séminaire à l'IREM (*supra,* 3.6.1), étant donné que l'application d'une formule littérale pour calculer la valeur numérique d'une grandeur physique donnée, ou celle d'une grandeur mathématique, n'a rien à voir avec l'algèbre élémentaire. Et surtout l'utilisation de formules littérales ne peut d'aucune manière aider les élèves à comprendre comment mettre en équation les données d'un problème ni comment résoudre des équations.

7.2. Phrases et équations : deux fonctionnements discursifs différents. Comment en faire prendre conscience ?

Le second front a été l'assimilation de l'algèbre élémentaire au « langage mathématique » par excellence. À la différence des langues naturelles et de l'utilisation heuristique de la visualisation euclidienne de surfaces délimitées par un contour fermé, le traitement des écritures symboliques se fait par des algorithmes (Duval & Pluvinage, 2016). François s'est intéressé au moment où l'invention du plan cartésien a permis de visualiser par des unités figurales 1D et 2D toutes les opérations de calcul. Ce qui a ensuite permis de tracer des unités figurales 1D ou 2D non constructibles avec la règle et le compas. Or, il avait exclu une exploration heuristique purement visuelle des figures en géométrie, parce qu'elle relève de « démarches "erratiques". Parallèlement il a fait un herbier de formules où les lettres sont des variables ou une condensation sémiotique de listes ouvertes de nombres, selon les emplois possibles du symbole « = », mais non des inconnues. Par rapport au corpus des écritures symboliques utilisées dans les questionnaires (Pluvinage, 1977), cet herbier permet de mesurer l'écart entre l'approche informatique de sa thèse et son approche mathématique des écritures symboliques. Mais cet herbier n'était pour François qu'une toile de fond montrant le rôle didactique de l'introduction d'une formule portant sur les grandeurs physiques. Et l'observation de l'introduction de la formule : $v = d/t$, qu'il avait faite dans une classe à Mexico l'avait conforté dans cette conviction. Il indique que la formule $v = d/t$ est « équivalente » à deux autres écritures : $d = vt$ et $t = d/v$. Mais l'opération de transfert d'une lettre d'un membre à l'autre du symbole « = », dans le sens de *salva veritate*, est la première barrière infranchissable pour beaucoup d'élèves. Cependant nous n'avions pas assez d'observations et pas suffisamment précises pour aller plus loin. De même nous n'avons pas réussi à élaborer des types d'activités spécifiques pour permettre aux élèves de prendre conscience des opérations discursives qui permettent :

– D'un côté, d'énoncer des syntagmes, désignatifs ou descriptifs et des phrases simples ;

– Et de l'autre, d'écrire des syntagmes opératoires et des égalités ou des équations.

Pourquoi notre échec sur cette question cruciale ? C'était pourtant le but de la première partie du travail présenté dans l'article de 2016. Cette prise de conscience est la condition nécessaire primordiale pour que les élèves puissent passer spontanément d'un registre à l'autre, et utiliser des formules pour résoudre des problèmes ; sinon, les écritures symboliques sont et restent opaques pour la grande majorité des élèves. L'ambivalence didactique d'un enseignement mathématique de base pour tous les élèves d'une même classe d'âge vient de la méconnaissance de cette opacité.

Il suffit de feuilleter, si j'ose dire, l'article que François avait publié sur « certaines structures feuilletées planes » (Pluvinage, 1967), pour comprendre l'analyse qu'il a faite des explications de Marina, et plus encore pourquoi la confrontation de nos deux approches ne pouvait pas aboutir. Dans cet article, on remarque tout de suite une variété de figures géométriques, de schémas, et d'expressions symboliques, qui sont intégrés au texte avec des notations permettant d'articuler les unités figurales avec les syntagmes désignatifs ou descriptifs des phrases, qui rendent ainsi transparents les passages d'un registre à un autre. François ne s'est jamais départi de cette synergie cognitive entre différents registres qui caractérise la manière de penser et de travailler en mathématiques. Elle lui était tellement naturelle qu'il n'a jamais envisagé qu'il puisse en être autrement, même dans la rédaction des manuels de l'IREM, ou dans l'élaboration de problèmes didactiques de recherche.

> Or, il ne suffit pas de juxtaposer des représentations sémiotiques issues de deux ou trois registres différents, comme c'est le cas dans tous les manuels, pour créer leur coordination dans l'esprit des élèves. Il faut des activités spécifiques dont l'objectif est de leur faire reconnaître les unités de sens dans le registre de la langue naturelle et dans celui des écritures symboliques, et leur faire discriminer toutes les unités

figurales possibles dans une figure géométrique ou dans un graphe cartésien. Cela implique un certain recul par rapport aux programmes, et à par rapport la manière dont les élèves dans une classe réagissent l'activité reprise d'un manuel (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008).

Mais, pour François, les recherches didactiques devaient pouvoir être immédiatement mises en œuvre par les enseignants eux-mêmes dans leur classe, même s'ils n'avaient pas participé au travail d'élaboration des activités !

Cependant, jusqu'aux tout derniers mois de son existence, François n'a cessé de soutenir Jean-Claude Rauscher qui avait personnellement repris, là où nous l'avions abandonnée, la question de la compréhension des écritures symboliques dans l'introduction de l'algèbre élémentaire au collège (Rauscher, 2020). Le travail de recherche des activités spécifiques nécessaires pour que chaque élève puisse voir de lui-même le fonctionnement des écritures symboliques, et l'utiliser spontanément pour résoudre des problèmes, se poursuit maintenant avec une petite équipe d'enseignants dans le cadre de l'IREM.

8. Pour finir, le souvenir qui demeure

Lorsque François est parti travailler à la MAFPEN, nous nous retrouvions chez lui, un ou deux soirs chaque semaine. Et nous parlions des thèses encore en cours qu'il continuait de suivre, Geneviève Didierjean étant alors directrice de l'IREM. Nous parlions aussi un peu de ce qu'il faisait et voulait faire à la MAFPEN. Ce qui me frappait dans nos échanges, c'étaient les silences soudains de François, qui les ponctuaient. Ce sont tous ces silences que je continue d'entendre quand je regarde la photo prise dans les années 1980 à *Torre delle Stelle*, que Lucia Grunetti m'a envoyée à l'annonce du décès de François. Lorsque je l'ai eu, à peine une minute au téléphone, trois jours avant sa mort, sa voix n'avait pas changé. Elle avait la même tonalité optimiste et la même insistance patiente qui étaient familières à tous ceux qui l'ont connu. Aussi, pour finir, vais-je laisser à François le dernier mot sur cette aventure et histoire communes de l'IREM : « Mais non ! Raymond… »

Figure 2. François Pluvinage dans les années 1980 à *Torre delle Stelle*, Italie

Bibliographie

ADJIAGE, R., & PLUVINAGE, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 149–175.

BENZECRI, J. P. (1973). *L'analyse des données. vol. 1 : La taxinomie.* Dunod.

BKOUCHE, R. (1991). Variations autour de la Réforme de 1902/1905. *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, 34*, 181–213.

BLOOM, B. S. (1969). *Taxonomie des objectifs pédagogiques*. 1. D*omaine cognitif* (traduit par M. Lavallée). Éditions modernes. (Ouvrage original publié en 1959)

BOREL, E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, *9*, 11–20. https://fr.wikisource.org/wiki/Les_exercices_pratiques_de_math %C3 %A9matiques_dans_l %27enseignement_secondaire

BRUNSCHVICG, L. (1912). *Les étapes de la pensée mathématique*. Félix Alcan.

BRUNSCHVICG, L. (1922). *L'expérience humaine et la causalité physique.* Félix Alcan.

DESCARTES, R. (2016). *Œuvres complètes. 1. Règles pour la direction de l'esprit*. Gallimard.

DIRECTION DE L'EVALUATION ET DE LA PROSPECTIVE (DEP) (1992). *Evaluation CE2 – 6ème ; résultats nationaux ; septembre 1992*. Ministère de l'Éducation nationale.

DIRECTION DE L'EVALUATION ET DE LA PROSPECTIVE (DEP) (1997). *Profil et compétences en français et mathématiques des élèves à l'entrée en sixième ; évaluations de septembre 1996*. Ministère de l'Éducation nationale.

DUVAL, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. Introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *1,* 7–25.

DUVAL, R. (1996). Quel "cognitif" retenir en Didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16* (3), 349-382.

DUVAL, R., & PLUVINAGE F. (1975). Pas d'interprétation hâtive. *Bulletin A.P.M.E.P., 301*, 709–720.

DUVAL, R., & PLUVINAGE, F. (1977). Démarches individuelles de réponse en mathématique. *Educationnal Studies in Mathematics, 8*(1), 51–116.

DUVAL, R., & PLUVINAGE, F. (2016). Apprentissages algébriques. Première partie : points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, *21*, 117–152.

DUVAL, R., GAGATSIS, A., & PLUVINAGE, F. (1987). Évaluation multidimensionnelle de l'activité de lecture. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 24*(1), 34–67.

GAGATSIS, A. (1980). *Le test de closure et mesure de la compréhension de textes mathématiques.* [Mémoire de D.E.A., Université Louis Pasteur].

GLAESER, G. (1971). *Mathématiques pour l'élève professeur.* Paris : Hermann.

GLAESER, G. (1973). *Le Livre du Problème. Fascicule 1, Pédagogie de l'exercice et du problème*. CEDIC.

GLAESER, G. (1974). Préface. Dans F. Pluvinage (Resp.), *Mathématique, Classe de 5e, Feuilles d'Instructions pour l'Élève, Cours et Exercices.* (p. 3). Istra.

GLAESER, G. (1982). Aspects Gestaltistes de la résolution de problèmes. Dans *Colloque international de l'enseignement de la géométrie*, Mons, Belgique.

GRIZE, J. B. (1983). Schématisation et logique naturelle. Dans M-J. Borel, J-B.Grize, D. Miéville (Dir.), *Essai de Logique naturelle* (99-145). Peter Lang.

IREM DE STRASBOURG (1969). [Note du ministère adressée aux premiers IREM]. Archives de l'IREM. Strasbourg : Université de Strasbourg. France.

IREM DE STRASBOURG (1973a). *Le Livre du problème. Fascicule 1. Pédagogie de l'exercice et du problème.* CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1973b). *Le Livre du problème. Fascicule 2. Exercices élémentaires de géométrie affine.* CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1973c). *Le Livre du problème. Fascicule 3. A propos d'un thème mathématique : la parité*. CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1973d). Sur l'assimilation des Programme de 6ème-5ème, *Educational Studies in Mathematics, 5*(2), 207–242.

IREM DE STRASBOURG (1974a). *Le Livre du problème. Fascicule 4. La convexité.* CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1975). *Le Livre du problème. Fascicule 5. Calcul barycentrique*. CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1976). *Le Livre du problème. Fascicule 6. Géométrie d'incidence.* CEDIC.

NEWELL, A., & SIMON, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Prentice Hall.

PIAGET, J. (1924). Étude critique. « L'expérience humaine et la causalité physique » de L. Brunschvicg. *Journal de Psychologie normale et pathologique, 21,* 586–607.

PLATON (1963). *Ménon* (Traduit par A. Croiset). Les Belles Lettres.

PLUVINAGE, F. (1967). Espaces des Feuilles de certaines structures feuilletées planes. *Colloquium Mathematicum, 18,* 89–102.

PLUVINAGE, F. (1973a). *Mathématique, classe de 6*e. Istra.

PLUVINAGE, F. (1973b). *Mathématique, classe de 6*e*. Livre du professeur*. Istra.

PLUVINAGE, F. (1974a). *Mathématique, Classe de 5e*. Istra.

PLUVINAGE, F. (1974b). *Mathématique, Classe de 5e. Livre du professeur*. Istra.

PLUVINAGE, F. (1977). *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques : étude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

PLUVINAGE, F. (1998). Éditorial. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *6,* 4–5.

PLUVINAGE, F., & RIGO LEMINI, M. (2008). Mais non, Marina ! *Annales de didactique et de sciences cognitives, 24*, 41–61.

POINCARE, H. (1968). *La Science et l'Hypothèse.* Champs/ Flammarion.

POINCARE, H. (1970). *La valeur de la Science.* Champs/Flammarion.

POLYA, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème* (traduit par C. Mesnage). Dunod. (Ouvrage original publié en 1957).

RAUSCHER, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. Dans M. T. Moretti et C. Finck Brandt (Dir.), *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoriasemio-cognitiva de aprendizagemmatemática de Raymond Duval* (p. 456–485). GPEEM/UFSC.

SCHANK, R. C. (1972). Conceptual Dependency: a Theory of natural language understanding. *Cognitive Psychology, 3,* 552–631.

SCHERPEREEL, A., PLUVINAGE, F., BOCH, C., & DUVAL, R. (1974). Sur l'acquisition des structures numériques en fin de 3e. *Educationnal Studies in Mathematics, 4*(5), 441–459.

TROSEILLE, B., & ROCHER, T. (2015). Les évaluations standardisées des élèves. Perspectives historiques. É*ducation et Formation, 86-87,* 15–35.

WILSON JAMES, W. (1971). National Longitudinal Study of Mathematical Abilities. Dans B. S. Bloom, G. F. Madaus & J.T. Hasting (Dir.), *Handbook of formative and summative evaluation of Student learning.* Mc Graw Hill.

Thèses encadrées par François Pluvinage et soutenues dans le cadre du D.E.A. et le Doctorat de didactique des mathématiques de l'Université Louis Pasteur

ABDELLI, M. (1985). *Oralisation et apprentissage arithmétique par des élèves déficients auditifs.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

ADJIAGE, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

ALARCON, J. (1982). *L'appréhension des situations probabilistes, chez les élèves de 12-14 ans : résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4e et 5e*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

DAMM FLEMING, R. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

DE GOES CAMBAS, M.-C. (1985). *Une année d'apprentissage mathématique d'un élève de Collège (3e). Observation et analyse de son travail.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

FAQIH, EL M. (1991). *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du 1er cycle scientifique*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

GAGATSIS, A. (1982). *Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

GUZMAN RETAMAL, I. C. (1990). *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

HAJRI, H. (1986). *Perception de relations dans un plan repéré*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

HITT, F. (1978). *Comportement de « retour en arrière » après la découverte d'une contradiction (étude d'un questionnaire proposé à des élèves de 3e).* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

KOLEZA-ADAM, E. (1987). *Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité (Préalable à toute séquence didactique pour des élèves de 10-12 ans).* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

KOURKOULOS, M. (1991) *Modélisation mathématique des instructions aboutissant à des équations du 1er degré auprès des élèves de 15 à 16 ans.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

KUBLER-WEBER, J. (1982) *Traitement d'informations mathématiques dans une transmission orale chez des élèves de 12-14 ans.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

LEMONIDIS, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

MESQUITA, A. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie figuraux. Éléments pour une typologie.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

PADILLA SANCHEZ, V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

PAVLOPOULOU, K. (1994). *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

RADFORD, L. (1985). *Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

RAUSCHER, J.-C. 1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignant de la géométrie au début du Collège.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

REGNIER, J-C. (1983). *Étude didactique d'un test auto-correctif en trigonométrie.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

ROMMEVAUX, M.P. (1997). *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

THADEU MORETTI, M. (1992). *L'exploitation des analyses factorielles en didactique des mathématiques.*

ZAKI, M. (1989) *Traitements de problèmes de probabilités en situation de simulation.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

RAYMOND DUVAL

Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale

duval.ray@wanadoofr