

STÉPHANIE BRIDOUX

SPÉCIFICITÉS DE LA NOTION DE LIMITE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE BELGE : QUELLES POTENTIALITÉS POUR FAVORISER L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE À L'UNIVERSITÉ ?

Title. Specificity of limit notion in Belgium secondary school: which potentialities to foster Calculus teaching at university? Abstract. This study concerns the teaching of Calculus in secondary school, with a focus on the introduction of the limit notion (sequences and functions). Prior research has highlighted recurrent difficulties of first-year university students with this notion. We try to show that the secondary school curriculum in French-speaking Belgium offers many continuities between high school and university. However, the analysis of a textbook shows discrepancies with the potential identified in the curriculum.

Keywords. Secondary-tertiary transition, limits of sequences and functions, Calculus teaching, students' mathematical perceptions, discursive proximities

Résumé. Nous nous intéressons aux débuts de l'enseignement de l'Analyse au lycée en ciblant l'introduction de la notion de limite (suites et fonctions). Alors que les travaux menés sur la transition secondaire-université pointent des difficultés récurrentes chez les étudiants en première année d'université avec cette notion, nous montrons ici que les programmes du lycée en Belgique francophone permettent de nombreuses continuités entre le lycée et l'université. Cependant, l'analyse d'un manuel va révéler certains décalages avec le potentiel relevé dans les injonctions des programmes.

Mots-clés. Transition lycée-université, limites de suites et de fonctions, enseignement de l'Analyse, représentations mathématiques des étudiants, proximités discursives

L'étude des difficultés que pose la transition entre l'enseignement secondaire et l'université aux étudiants a fait l'objet de nombreux travaux dans le champ de la didactique des mathématiques. Déjà dans les années 1990, Moore (1994) souligne le manque d'attention que portent les étudiants aux définitions, leurs représentations souvent trop intuitives des notions enseignées à l'université ou encore leurs difficultés à rédiger des démonstrations avec la rigueur attendue. De nombreux facteurs peuvent contribuer à expliquer ces difficultés, mais, parmi ceux-ci, sont souvent évoquées de nouvelles attentes en termes de pratiques attendues chez les étudiants qui entrent à l'université par rapport au lycée, comme le fait que la rédaction des démonstrations nécessite d'articuler des arguments variés et de les mettre en relation ; le formalisme associé aux définitions est quant à lui souvent complexe et sa manipulation requiert de mobiliser des connaissances en logique (par

exemple des quantificateurs), etc. Ces difficultés ont été largement étudiées au fil des années (Robert, 1998 ; Gueudet, 2008 ; Gueudet et al., 2016 par exemple) et sont encore investiguées aujourd'hui (Di Martino et al., 2023).

Dans ce texte, nous nous intéressons à la transition secondaire-université en ciblant les débuts de l'enseignement de l'Analyse. Les notions visées sont principalement celles de limites de suites et de fonctions. Ces notions sont sources de difficultés récurrentes chez les étudiants universitaires (Oktaç et Vivier, 2016), comme la non-disponibilité des connaissances en logique chez les étudiants en première année de licence, nécessaires pour manipuler le formalisme contenu dans les définitions. Aussi, les élèves qui sortent du lycée ont souvent une représentation intuitive de la convergence, réduite à l'idée de « s'approcher de » ou au fait que la limite ne peut pas être dépassée, ce qui peut amener des conceptions erronées comme penser que les seules suites convergentes sont les suites monotones bornées (Robert, 1983). Concernant l'enseignement des limites de suites, celui-ci a fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple Chorlay (2019) pour une synthèse, y compris sur le plan international). Dans de nombreux pays, les limites de suites ne sont pas abordées de manière formelle dans le secondaire, ce qui en fait une notion dite « abstraite » au moment de son introduction à l'université (Gueudet et Vandebrouck, 2022). Plus précisément, il s'agit d'une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (notée notion FUG dans la suite du texte), au sens de Robert (1998). Une étude récente de la notion de limite de fonction nous a amenée à l'identifier, elle aussi, comme une notion FUG (Bridoux et Grenier-Boley, 2024). (Bridoux et Grenier-Boley, 2024). Pour ce type de notion, il est donc intéressant d'étudier comment le (nouveau) formalisme est introduit et quel sens les étudiants lui donnent.

Alors que les difficultés précédemment décrites dans la transition secondaire-université sont souvent associées à des ruptures sur les plans épistémologique et cognitif, notre démarche vise ici au contraire à montrer comment il est possible, dans le contexte de l'enseignement belge francophone, de trouver des continuités entre le lycée et l'université lors de l'introduction des premiers concepts de l'Analyse et lors des premières tâches qui la suivent. Dans cette perspective, notre objectif est de porter un regard didactique sur les programmes de mathématiques actuels et sur leur mise en œuvre dans des manuels pour étudier les opportunités qui pourraient favoriser l'entrée dans l'Analyse dans le supérieur et d'aménager ainsi des continuités entre les deux institutions. Nous présentons à la section suivante la problématique de recherche associée à ce projet et la méthodologie qui en découle.

1. Problématique de recherche et méthodologie

1.1. Positionnement théorique et problématique de recherche

L'inscription de nos travaux dans la Théorie de l'Activité, adaptée à la didactique des mathématiques (le lecteur pourra se référer à la présentation faite par Aline Robert dans Vandebrouck (2008)), nous amène à inférer des éléments sur les apprentissages réalisés par les élèves/étudiants par le biais de leurs activités mathématiques (ce qu'ils font, pensent, disent, ... ou pas). Ces activités sont parfois difficiles à observer mais nous faisons l'hypothèse que pour faire progresser les connaissances des apprenants, le texte du savoir délivré par un enseignant, un manuel, une capsule, ... doit rester aussi proche que possible du travail des élèves/étudiants et de leurs connaissances « déjà-là ». Or, dans le cas des limites de suites et de fonctions, leur définition formelle, introduite dans de nombreux cours d'Analyse à l'université, et ce qu'elle traduit sont éloignés des formulations données au lycée où la notion de limite est souvent associée à l'idée intuitive de « se rapprocher de ». La manipulation des définitions mobilise aussi des connaissances qui sont peu travaillées au lycée (connaissances en logique, sur les nombres réels, sur la valeur absolue, sur les inégalités, ...) et qui vont nécessiter d'articuler le registre algébrique avec le registre symbolique du calcul des prédicats (logique du 1^{er} ordre). Au lycée en France, les limites de suites sont d'abord introduites intuitivement en première sur base d'exemples. Elles sont ensuite définies en termes d'intervalles en terminale avec des formulations telles que « une suite (u_n) tend vers le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Toutefois, en ce qui concerne les suites, l'accent est souvent mis sur l'étude des suites arithmétiques et géométriques. Les limites de fonctions sont introduites en terminale et les programmes insistent sur le fait que la manipulation du formalisme n'est pas une capacité attendue au lycée. Les tâches proposées aux élèves consistent souvent en des calculs de limites. Les activités associées sont donc fréquemment ramenées à l'application de règles algébriques et le travail à réaliser est finalement très opératoire. Un premier enjeu de l'enseignement universitaire est donc de faire sentir aux étudiants le besoin d'une définition de la notion de limite puisqu'ils sont capables d'en calculer sans recourir à cette définition.

Dans ce contexte institutionnel, nous identifions les notions de limites de suites et de fonctions comme des notions FUG. Elles sont en effet porteuses d'un formalisme complexe qui va généraliser les exemples étudiés au lycée et unifier la notion de limite dans un cadre général (Bridoux et al., 2016). Les notions FUG sont éloignées des connaissances antérieures des étudiants. Il est donc difficile, lors de leur introduction, de trouver une situation d'introduction qui leur est accessible et où la notion apparaît comme l'outil optimal de résolution, leur permettant ainsi de construire en autonomie la nouvelle définition. Néanmoins, des ingénieries didactiques ont été élaborées pour introduire ces notions, en jouant sur des leviers

tels que l'articulation entre différents registres de représentations (Bloch, 2003 ; Bloch et Gibel, 2011 ; Robert, 1983 ; Przenioslo, 2005), dans lesquelles les interventions de l'enseignant sont importantes pour construire la définition ou encore des moments de débats dans la classe (Lecorre, 2016). On peut faire l'hypothèse qu'un temps long est nécessaire pour que celles-ci soient reproduites dans les classes, raison pour laquelle ces ingénieries sont peut-être peu utilisées par les enseignants, du moins à notre connaissance.

Les analyses que nous avons menées sur les notions de limites (par exemple Bridoux et al., 2016 et Bridoux et Grenier-Boley, 2024) révèlent que dans de nombreux cours magistraux et manuels universitaires, l'introduction de la définition formelle de limite est souvent suivie par des exemples. À ce titre, deux exemples emblématiques concernent l'étude de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$, pour laquelle il s'agit de montrer que la propriété « converger vers 0 » est satisfaite en utilisant la définition en $\varepsilon - N$, et le fait de montrer que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ en utilisant la définition en $\varepsilon - \delta$. Ces exemples sont alors suivis de théorèmes, tels que l'unicité de la limite ou les règles de calculs sur les limites, dont la démonstration nécessite cette fois d'utiliser la définition en tant qu'hypothèse. Compte tenu de la complexité logique de la définition, les activités mathématiques associées à ces premières tâches sont sans doute difficiles pour un nombre important d'étudiants. Aussi, beaucoup d'entre eux ne perçoivent pas le besoin de recourir à une définition pour réaliser ce type de tâches.

Les aspects épistémologiques, cognitifs et curriculaires que nous venons de décrire nous servent de référence pour l'étude que nous souhaitons réaliser. Ils constituent ce que nous appelons « le relief sur les notions » (Robert et al., 2012). Ce relief nous permet en effet à un moment précis d'apprentissage, d'étudier les spécificités des notions à enseigner, compte tenu des programmes, quand il y en a, tout en ayant conscience des difficultés répertoriées chez les élèves ou étudiants. Nous avons ainsi montré que malgré les difficultés repérées chez les étudiants avec la notion de limite, son introduction peut être associée à différents registres de représentations sémiotiques (graphique, algébrique, symbolique relevant du calcul des prédicats, langue naturelle), dont on sait que l'articulation peut participer à la prise de sens de la notion (Duval, 1993). Une autre spécificité de la notion concerne, selon nous, la manipulation des définitions qui engendre des activités variées pouvant elles aussi participer à la conceptualisation de la notion, en amenant notamment les étudiants à mobiliser des connaissances en logique et à manipuler des inégalités contenant une valeur absolue. Nous présentons à la section 4 l'outil des proximités discursives (Robert et Vandebrouck, 2014) pour apprécier comment la présentation du savoir par un enseignant ou dans un manuel peut donner à voir certaines spécificités aux élèves et aux étudiants.

Dans ce contexte, notre problématique de recherche consiste dans un premier temps à étudier quelles spécificités épistémologiques des limites de suites et de fonctions sont prises en compte dans les documents officiels du lycée en Belgique francophone (programmes et manuels) pour construire leur définition formelle. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux activités mathématiques qui sont susceptibles d'être réalisées par les élèves dans les premières tâches qui suivent l'introduction des notions.

1.2. Méthodologie

Nous abordons nos questions de recherche en analysant les programmes de mathématiques actuels de l'enseignement belge francophone (section 2). Pour cela, nous commençons par revenir sur la réforme des programmes qui s'est mise en place en 2016 en décrivant dans les grandes lignes les documents mis à la disposition des enseignants. À la section 3, nous revenons sur ces documents pour étudier quelles spécificités épistémologiques des notions de limites (suites et fonctions) semblent prises en compte. Nous analysons ensuite, à la section 4, un manuel pour étudier comment les injonctions institutionnelles précédentes sont mises en œuvre.

Pour inférer des éléments de réponse à nos questions de recherche, nous nous appuyons sur les éléments de relief mis en évidence dans la section précédente. Nous nous concentrons donc principalement dans nos analyses (programmes et manuel) sur les registres de représentation que l'introduction des définitions permet d'articuler et sur l'utilisation des définitions dans les premières tâches qui suivent leur introduction (exemples et démonstrations des premiers résultats), pour mettre en évidence des activités mathématiques que les élèves pourraient réaliser.

2. Les programmes du lycée dans l'enseignement belge francophone

Dans l'enseignement secondaire belge francophone, une réforme des programmes du lycée a vu le jour en 2014. Ces programmes sont encore d'application aujourd'hui. Cette réforme a fait suite à une réforme datant de 1999 centrée sur l'idée d'enseigner par compétences. L'approche par compétences a fait l'objet de nombreux travaux mais dans le contexte de l'enseignement belge, la compétence qui a rapidement guidé l'enseignement des mathématiques est la résolution de problèmes. Comme indiqué dans les programmes de l'époque, « plus larges sont les connaissances, plus grands sont les moyens disponibles pour en construire d'autres et pour résoudre des problèmes » (Ministère de la Communauté Française, 1999, p.3). En mettant l'accent sur le caractère transversal des compétences, cette approche semble aussi donner moins d'importance aux spécificités épistémologiques des disciplines. Or, comme l'explique Schneider (2010), « on peut viser quelque chose qui relève du transversal au prix d'une plongée dans l'épistémologie des disciplines, c'est-à-dire d'un travail éminemment disciplinaire ». Du côté des pratiques

enseignantes, les enseignants n'ont cessé de pointer le manque d'informations sur la manière d'amener les élèves à résoudre des problèmes, le caractère chronophage de l'approche par compétences et le fait que la résolution de problèmes réduit la place accordée aux tâches d'entraînement ainsi qu'à la partie « cours » (Bridoux et Deronne, 2012). Enfin, cette approche a souvent laissé penser aux enseignants qu'ils n'évaluaient plus des connaissances au sens strict, les amenant ainsi à ne plus donner à voir aux élèves ce qu'est l'activité mathématique, ce qui confirme les propos de Schneider (ibid.).

Les compétences seront d'ailleurs pointées du doigt dans les documents qui accompagnent la nouvelle réforme qui se met en place dans les classes en 2016, comme pour justifier le besoin de modifier la philosophie qui gravitait jusque-là autour de l'enseignement des mathématiques : « dans les décrets relatifs aux socles de compétences et aux compétences terminales, les « savoirs requis » en vue de l'exercice de ces compétences ont souvent été définis de façon trop vague » (Administration générale de l'enseignement, 2014¹, p.1). Ainsi, les nouveaux programmes semblent redonner de la place à la construction des savoirs, permettant aux élèves de leur donner davantage de sens, ainsi qu'aux savoirs plus opératoires et à des tâches plus complexes (par exemple des démonstrations).

Les programmes, qui ont été mis en application en 2016, se structurent autour d'Unités d'Acquis d'Apprentissage, notées UAA dans la suite du texte. Une UAA peut être vue comme un chapitre à enseigner. Par exemple, les nombres complexes sont une UAA au sein des programmes de terminale, les suites sont une UAA des programmes de première. Les programmes précisent que « chaque UAA liste les ressources mobilisées dans l'exercice des compétences visées et précise les processus mis en œuvre lors d'activités permettant de construire, d'entraîner ou d'évaluer les compétences concernées » (Administration générale de l'enseignement, 2014, p. 2). Les *ressources* sont les notions à enseigner et les *processus* à travailler avec les élèves sont au nombre de trois : *connaître*, *appliquer* et *transférer*. Cette description montre que les compétences n'ont pas complètement disparu dans l'enseignement des mathématiques mais une place est explicitement accordée à la construction des savoirs via le processus « connaître » ainsi qu'aux tâches d'entraînement avec le processus « Appliquer ». À titre d'exemple, l'UAA sur les suites est donnée en annexe.

En première et en terminale, les ressources et les processus à développer dépendent des choix d'option des élèves. Ainsi, les « mathématiques générales » sont destinées aux élèves qui ont 4 heures de mathématiques par semaine et les « mathématiques

¹ Les documents sont parus en 2014, les programmes ont été d'application en 2015 en seconde et en 2016 pour les deux dernières années du lycée.

pour scientifiques » concernent les élèves qui ont choisi 6 heures hebdomadaires. Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur cette dernière filière en première et en terminale en ciblant le domaine de l'Analyse. La majorité des élèves qui ont pris l'option « mathématiques pour scientifiques » démarrent ensuite des études scientifiques dans le supérieur.

3. Prise en compte des spécificités épistémologiques des notions dans les programmes

Dans l'introduction qui précède la présentation des UAA, les mathématiques sont décrites comme une discipline associée à des compétences de communication et de développement de l'esprit critique. Les programmes précisent en effet que les élèves devront être confrontés à des activités telles que justifier, démontrer, formuler des conjectures, articuler le langage mathématique avec le langage naturel, ... pour améliorer leur capacité à communiquer en mathématiques et pour développer leur esprit critique. Comme l'expliquent Gueudet et Vandebrouck (2022), ces activités relèvent de pratiques attendues dans le supérieur.

L'enseignement de l'Analyse qui nous occupe ici comporte cinq UAA : « Suites » ; « Asymptotes, limites et continuité », « Dérivée » sont les trois UAA du programme de première et « Intégrale » et « Fonctions exponentielles et logarithmiques » sont les UAA du programme de terminale. Les programmes contiennent également les fonctions trigonométriques, ainsi que les fonctions réciproques et cyclométriques mais nous choisissons de ne pas les intégrer dans notre étude car ce ne sont pas les contenus les plus fréquemment abordés aux débuts d'un cours d'Analyse à l'université, du moins dans le contexte institutionnel belge. Pour des raisons analogues, nous ne prendrons pas en compte les UAA traitant des intégrales et des fonctions exponentielles et logarithmes. Notre objectif est maintenant de pointer quelques endroits dans ces programmes qui montrent que les débuts de l'Analyse au lycée permettent d'articuler différents registres de représentations pour introduire les définitions et ensuite de manipuler le formalisme dans certaines tâches. Ce travail permettrait selon nous d'offrir des occasions de préparer les élèves du lycée à un enseignement de l'Analyse à l'université dans les filières scientifiques qui ne soit pas complètement en rupture avec le travail amorcé au lycée.

Tout d'abord, les programmes indiquent que la définition de limite pour les suites et les fonctions doit être donnée avec des quantificateurs, exprimée avec une phrase et illustrée graphiquement. Ces injonctions sont données dans le processus « connaître ». Ces définitions doivent aussi être manipulées pour vérifier la valeur de la limite d'une suite par exemple, comme indiqué dans le processus « appliquer ». Compte tenu des travaux évoqués précédemment, introduire ces définitions sera sans doute difficile pour un grand nombre d'élèves, mais ce travail préconisé dans les programmes belges permet une première rencontre entre les élèves du lycée et le

formalisme spécifique de l'Analyse. Le fait d'introduire la notion avec des caractérisations données avec des mots mais aussi avec des symboles et de les articuler avec la production d'un graphique permet également un travail de reformulation appuyé par des conversions de registres de représentations sémiotiques dont on sait qu'il peut participer à la prise de sens des notions (Duval, 1993). Il s'agit d'ailleurs d'un levier utilisé par les chercheurs qui ont élaboré des ingénieries didactiques pour introduire la notion de limite (voir section 1).

Comme nous l'avons souligné, l'élève sera aussi amené à manipuler la définition pour vérifier une conjecture formulée sur la valeur de la limite d'une suite. Cette tâche permet de mobiliser des connaissances en logique, sur les nombres réels, sur les inégalités, la valeur absolue, etc. Bien entendu, nous concevons que, sur le terrain, l'enseignant du lycée consacrerait sans doute moins de temps à ce travail sur la définition de limite que dans un cours universitaire mais cette première introduction pourrait avoir le mérite d'habituer les élèves à réaliser des activités liées à la manipulation des définitions « en epsilon », typiques de l'Analyse, et de rédiger des raisonnements qui les placeraient en position de « démonstrateur » (Durand-Guerrier et Mesnil, 2022), posture qu'ils devront acquérir dans le supérieur.

Dans l'UAA « Asymptotes, limites et continuité », le théorème des valeurs intermédiaires doit être enseigné mais non démontré. Cette injonction apparaît dans le processus « connaître ». L'importance de l'hypothèse de continuité de la fonction présente dans l'énoncé du théorème doit toutefois être montrée. Il y a donc ici un travail possible sur la production de contre-exemples et des justifications associées. Des injonctions semblables sont données dans l'UAA « Dérivée » pour les théorèmes de Rolle et des accroissements finis, celles-ci apparaissant également dans le processus « connaître ». La production d'exemples et de contre-exemples est une activité nécessaire dans les mathématiques du supérieur (Gueudet, 2008). Nous voyons donc ici une potentialité pour que les élèves enrichissent leur répertoire d'exemples de fonctions, notamment celui des fonctions définies sur un intervalle ou sur une union disjointe d'intervalles, les amenant ainsi à rencontrer d'autres fonctions que celles dont le domaine est \mathbb{R} ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pour les calculs de limites, les programmes précisent que ceux-ci doivent être justifiés en citant les résultats étudiés dans le cours et en détaillant les calculs. Ce travail devrait permettre aux élèves de rédiger rigoureusement des raisonnements, compétence elle aussi attendue dans l'enseignement supérieur (Gueudet et Vandebrouck, 2022).

Dans l'UAA « Dérivée », nous retenons également que les règles de calculs sur les dérivées doivent être démontrées. Dans cette UAA, le registre graphique est très présent dans les trois processus. Dans le processus « connaître », il est par exemple demandé d'interpréter graphiquement les énoncés des théorèmes de Rolle et des

accroissements finis. Apparié des graphiques de fonctions à ceux de leur dérivée première ou seconde est quant à elle une tâche qui relève du processus « appliquer ». Enfin, dans le processus « transférer », l'élève devra être capable d'esquisser localement l'allure d'une fonction à partir d'informations sur ses dérivées première et seconde. Les liens entre la croissance d'une fonction et le signe de sa dérivée première comme ceux entre la concavité et le signe de la dérivée seconde doivent être étudiés mais non démontrés. De nouveau, les tâches évoquées ici devraient selon nous permettre d'articuler différents registres et de confronter les élèves à des activités qui nécessitent de mettre en relation différentes notions pour justifier le travail réalisé dans le registre graphique.

Cette étude des documents officiels ne se veut pas exhaustive. Toutefois, elle met d'après nous en évidence de nombreuses occasions de développer chez les élèves des activités mathématiques variées telles que l'articulation entre différents registres de représentation sémiotique, la justification d'étapes dans la réalisation de calculs, la production d'exemples et de contre-exemples, se questionner sur les hypothèses présentes dans des résultats, mais aussi de manipuler des définitions en tant qu'objet et en tant qu'outil de démonstration. Bien entendu, il est fort possible que ces activités ne soient pas réalisées par les élèves du lycée en toute autonomie et que l'enseignant soit amené à prendre certains aspects à sa charge. Nous faisons également l'hypothèse que le répertoire d'objets sur lequel l'enseignant choisira de mettre l'accent, comme le choix des exemples, pourrait être moins varié que dans le supérieur. Il sera donc intéressant d'étudier les activités associées aux tâches proposées dans le manuel qui découlent de cette analyse des programmes. Enfin, notons que ces activités sont essentiellement associées au processus « connaître », donc dans le contexte de moments de cours, dont on sait que ce ne sont pas les moments où les élèves sont les plus actifs (Bridoux et al., 2016), ou au moment des premières tâches d'entraînement proposées aux élèves. Dans ce travail, nous allons nous restreindre à la partie « cours » du manuel, tout en étant bien consciente que le travail proposé dans cette partie peut être prolongé dans les exercices. Cependant, l'analyse de cette partie pourra au moins nous éclairer sur les choix de définitions et sur les éventuels premiers exemples qui les suivraient, tout en montrant ce qui reste à la charge du lecteur.

4. Le manuel CQFD

4.1. Les proximités discursives comme outil d'analyse

Comme nous l'avons expliqué à la section 1, nous faisons l'hypothèse que le fait d'être proche des connaissances « déjà-là » des élèves et de ce qu'ils font ou ont fait peut faciliter l'introduction des connaissances nouvelles. Ces rapprochements, appelés « proximités discursives » (Robert et Vandebrouck, 2014), peuvent par exemple consister, durant un moment de cours, en un appui sur des connaissances

anciennes pour en introduire de nouvelles ou lors d'une phase d'exercices en un rappel d'une propriété vue dans le cours qu'il faut alors contextualiser à la situation en question. Ainsi, les proximités consistent en des ajouts, dans le discours de l'enseignant, à propos des contenus mathématiques. Nous distinguons trois types de proximités. Les *proximités ascendantes* se situent entre ce que les étudiants ont déjà fait, par exemple dans une activité introductive, et l'introduction d'un nouvel objet ou une propriété qui suivrait l'activité en question. Il s'agit donc de passer du contextualisé au décontextualisé en généralisant le cas particulier. Les *proximités descendantes* se situent quant à elles entre ce qui a été exposé (la définition d'une nouvelle notion par exemple) et des exemples ou des exercices proposés par la suite. Il s'agit alors d'explicitier comment le cas particulier s'inscrit dans le cas général en passant ici du décontextualisé au contextualisé. Enfin, les *proximités horizontales* n'amènent pas de changement entre contextualisé et décontextualisé. Elles consistent en des reformulations, des explicitations des liens entre les notions, des commentaires sur la structure du cours, etc. Des exemples seront donnés par la suite.

Pour préparer l'étude des proximités qui peuvent être tentées dans le discours d'un enseignant ou dans un manuel comme c'est notre cas ici, nous nous appuyons sur le relief établi sur les notions à enseigner (voir section 1). Cette étude permet de dégager, *a priori*, des occasions de proximités dont il s'agira ensuite d'analyser si ces proximités sont tentées ou pas lors de la mise en œuvre dans les classes.

Néanmoins, au niveau du lycée, les éléments de relief relatifs à l'enseignement des limites que nous avons présentés concernent l'enseignement en France. Sur le plan curriculaire, notre analyse des programmes montre que la situation est différente au lycée dans le contexte belge qui nous intéresse ici. En effet, alors que les programmes français préconisent une caractérisation des limites en termes d'intervalles (voir section 1.1), la définition formelle, telle qu'elle est donnée en première année de licence, doit être introduite en classe de première en Belgique, en l'interprétant graphiquement ainsi que dans le langage naturel. De plus, les programmes préconisent dans l'étude des suites et des fonctions un travail sur les nombres réels (Figure 1) qui s'avère utile pour manipuler les définitions formelles qui suivront.

La ressource complétude de \mathbb{R} figure dans la 5SUA3
mais peut-être développée ici.

Il y est demandé de distinguer les rationnels des
irrationnels, de commenter les axiomes de l'ensemble
des réels, les propriétés des opérations, les propriétés
des relations entre les réels (égalité, inégalité).

Ce sera l'occasion de rappeler la notion de valeur
absolue et de la relier à celle de distance.

Figure 1. Connaissances sur les nombres réels dans les programmes belges

L'introduction de la définition quantifiée et l'articulation possible entre différents registres de représentation décrite dans notre analyse des programmes, peut être l'occasion de trouver des proximités horizontales dans le texte (manuel ou discours d'un enseignant) qui présente le savoir, par exemple pour amener l'idée graphique d'une bande autour du candidat limite, pour expliciter les inégalités contenant une valeur absolue en termes d'intervalles ou pour interpréter ces inégalités en termes de distance entre deux nombres réels. Cette articulation peut aider les élèves à donner du sens à la notion et à mieux comprendre ce que la définition traduit et ce dont on a besoin pour la manipuler (Roh, 2010). Ce travail prépare également à l'introduction des définitions à l'université qui sont elles aussi très souvent écrites avec des inégalités ainsi qu'à leur manipulation dans les premières tâches. Les programmes demandent justement de manipuler la définition, sans proposer d'exemples précis. Ce type de tâche offre des occasions de proximités descendantes, par exemple pour particulariser les notations présentes dans les définitions au cas particulier traité. Ce travail est aussi l'occasion de commenter la structure logique du raisonnement ou de montrer comment l'ordre des quantificateurs est pris en compte dans le raisonnement. Ces commentaires plus méthodologiques, au sens de Robert et Robinet (1996), et liés à la présence du registre symbolique du calcul des prédicats, seraient alors l'occasion de trouver des proximités horizontales. Compte tenu de la nature FUG des notions, il nous semble difficile, à ce niveau d'enseignement, de trouver des proximités ascendantes.

Les injonctions des programmes liées au besoin de justifier les calculs de limites peuvent, quant à elles, être l'occasion de trouver des proximités descendantes pour expliciter les résultats utilisés et pour montrer comment ils sont particularisés aux calculs. Ici aussi, les programmes ne donnent pas d'exemples précis, leur choix revient donc à l'enseignant ou au manuel.

L'enseignement belge au lycée offre donc des occasions de donner à voir aux élèves les spécificités des notions introduites au début de l'enseignement de l'Analyse et de contribuer à installer des continuités avec ce qui sera fait ensuite à l'université. Pour analyser comment ces spécificités sont prises en compte dans le manuel, nous choisissons de nous concentrer sur les injonctions des programmes liées à l'introduction des définitions de limites et sur les exemples proposés, sur la justification des calculs de limites et sur la démonstration de la propriété qui porte sur la dérivée de la somme de deux fonctions. Ce choix est lié au fait que ce sont des notions qui sont en général étudiées au début des cours d'Analyse à l'université. Nous ciblons également le processus « connaître » dans le cours car c'est le processus dans lequel se situent majoritairement les injonctions qui nous intéressent ici. Le choix de nous centrer sur le cours pour étudier les proximités tentées ou non dans le manuel est lié au fait que les moments de cours sont un premier moment de rencontre, pour les élèves, avec des nouveaux mots, des nouvelles formalisations et

des premières mises en fonctionnement des nouvelles notions dans les exemples. Ce moment permet donc une première appropriation des connaissances qui seront ensuite mobilisées dans les exercices. En ce sens, les moments de cours offrent des occasions de construire une première prise de sens chez les élèves, que les proximités soient à la charge de l'enseignant, par son discours, ou à celle de l'élève par le biais de ses activités.

4.2. Analyse du manuel

Nous regardons ici le manuel CQFD (Annoye et al., 2018) pour la première, qui est actuellement le seul manuel conforme aux programmes du lycée pour les « mathématiques pour les scientifiques » (6 heures de mathématiques hebdomadaires). Tous les chapitres du manuel sont organisés de la même façon. Ils commencent par une introduction qui donne un panorama général des notions abordées dans le chapitre, en les mettant en lien avec des éléments historiques et /ou des apports des différentes cultures dans le développement des mathématiques. Une exploration propose ensuite des activités permettant d'introduire les nouvelles notions. Le cours porte le nom de « Synthèse » qui, comme l'explique le manuel est « organisée en questions-réponses, fixe et structure les concepts, présente des théorèmes et leurs démonstrations ». Viennent enfin les exercices structurés selon les trois processus présents dans les programmes. Comme nous l'avons expliqué, nous nous appuyons sur les éléments de relief décrits à la section 1.1 pour étudier les occasions de proximités. Nous ne sommes bien entendu pas en mesure d'expliquer mot pour mot la formulation qu'elles pourraient prendre dans le discours d'un enseignant en classe par exemple, mais nous essaierons en revanche d'indiquer sur quels éléments, selon nous, ces proximités pourraient porter.

L'introduction de la définition formelle de la convergence d'une suite numérique est donnée à la Figure 2.

17 Quelle est la limite d'une suite ? Qu'est-ce qu'une suite convergente ?

Lorsque n tend vers l'infini, ce qu'on écrit $n \rightarrow +\infty$, la valeur des termes peut :

- soit devenir aussi proche que l'on veut d'une valeur réelle b , pour autant que n dépasse une certaine valeur ; on dit alors que la suite converge vers b et que le réel b est la limite de la suite ;
- soit devenir supérieure à n'importe quel réel positif, pour autant que n dépasse une certaine valeur ; on dit alors que la limite de la suite est $+\infty$;
- soit devenir inférieure à n'importe quel réel négatif, pour autant que n dépasse une certaine valeur ; on dit alors que la limite de la suite est $-\infty$;
- soit n'avoir aucun de ces comportements.

1.6 Limite d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ une suite numérique, et soit un réel b .

- On dit que b est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$, si et seulement si

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+) (\exists m \in \mathbb{N}_0) : n > m \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon$$

- On dit que $+\infty$ est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, si et seulement si

$$(\forall r \in \mathbb{R}_0^+) (\exists m \in \mathbb{N}_0) : n > m \Rightarrow u_n > r$$

Figure 2. CQFD 5^e, définition de la convergence d'une suite numérique, p. 26

Le manuel commence par des formulations en langue naturelle qui s'appuient sur l'idée d'être « aussi proche que l'on veut du candidat limite » avant de caractériser la convergence avec une proposition quantifiée. Le registre algébrique, le registre symbolique du calcul des prédicats et celui de la langue naturelle sont donc bien présents, comme mentionné dans les programmes. Le passage d'un registre à l'autre offre des occasions de proximités horizontales qui pourraient prendre la forme de reformulations intermédiaires entre les deux caractérisations, par exemple pour expliciter que la définition quantifiée traduit bien l'idée que la valeur des termes de la suite devient aussi proche que l'on veut de b pour autant que n dépasse une certaine valeur ou pour expliquer que l'inégalité présente dans la définition formelle dit bien quelque chose sur la distance entre u_n et b . Cette articulation entre les registres pourrait aussi être accompagnée d'un dessin qui illustre la définition. Bien que le registre graphique soit mentionné dans les programmes, il est absent dans le manuel. Il y a donc sur ce point une distance entre les injonctions de programmes qui préconisent un travail d'interprétation qui permet d'articuler les différents registres et celui proposé ici. Notons également que la définition quantifiée ne contient pas de quantificateur sur l'indice n .

Les programmes demandent également de manipuler la définition pour vérifier des conjectures formulées sur la valeur de la limite d'une suite. Après avoir défini la notion de convergence d'une suite, le manuel met l'accent sur les suites arithmétiques et géométriques. Les résultats sur la convergence de ces suites sont

donnés et suivis d'exemples. Nous avons repris ceux présentés pour les suites géométriques à la figure 3.

Limite d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de raison $q \neq 0$

- si $q \leq -1$; la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ n'a pas de limite ;
- si $0 < |q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;
- si $q = 1$, la suite est constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_1$;
- si $q > 1$, et $u_1 > 0$, la suite est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;
- si $q > 1$, et $u_1 < 0$, la suite est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemples

1) Dans l'exploration 15 (« Divisions successives d'un carré »), on observe que la suite des aires tend vers zéro. En effet, la suite des aires successives est $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$. Lorsque n tend vers l'infini, celles-ci deviennent tellement petites qu'elles tendent vers zéro.

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. La suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est convergente.

2) Dans l'exploration 16 (« Les vagues »), on constate que les longueurs C_1, C_2, C_3, \dots sont toutes égales à π . La suite des longueurs est constante, et on peut donc dire qu'elle tend vers π .

On observe sur la figure que les aires des surfaces comprises entre les courbes et le diamètre tendent vers 0. La suite des diamètres $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$; elle tend vers 0. La suite des aires $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \dots, \frac{\pi}{2^{n+1}}, \dots\right)$

est une suite géométrique de premier terme $\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$; elle tend vers 0.

3) La suite $(2,1; 2,01; 2,001; 2,0001; \dots)$ de terme général $u_n = 2 + \frac{1}{10^n}$ tend vers 2.

En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$. La suite $\left(2 + \frac{1}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est convergente.

4) La suite des puissances de 10 est une suite géométrique de raison 10 ; elle tend vers $+\infty$.

Figure 3. CQFD 5^e, suites géométriques, p. 27

Le manuel fait le choix de d'abord donner les résultats, puis de les illustrer sur des exemples. Le passage des résultats généraux aux cas particuliers offre des occasions de proximités. En effet, dans le premier exemple, le fait de dire que les valeurs de la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ deviennent tellement petites qu'elles tendent vers 0 est une idée qui peut être mise en relation avec la formulation précédente de la convergence donnée en langue naturelle, par exemple en évoquant l'idée de distance qui devient aussi proche que l'on veut de zéro. Ces liens seraient associés à des proximités horizontales. Le fait que cette suite soit un cas particulier du deuxième résultat énoncé (puisque la valeur de la raison est ici $\frac{1}{2}$) offre une occasion de proximité descendante. Les règles de calculs ne sont pas étudiées dans la partie dédiée au cours, mais l'étude de la suite $\left(2 + \frac{1}{10^n}\right)$ permet d'utiliser la règle sur la limite de la somme de deux suites. Bien entendu, ces exemples pourraient aussi être traités en utilisant la définition formelle. Ce travail pourrait alors amener des proximités descendantes pour expliquer comment se structure le raisonnement sur le plan logique. Aussi, pour les suites

géométriques, la manipulation de la définition nécessite de justifier des inégalités de la forme $|q^n| \leq \varepsilon$ et donc d'isoler n , ce qui est souvent fait en première année de licence en utilisant une fonction logarithmique mais ces fonctions sont étudiées en terminale et ne font donc pas partie des connaissances disponibles ici. Comme nous l'avons annoncé, nous nous concentrons sur la partie cours, mais notons tout de même que dans les exercices relevant du processus « connaître », un exercice demande de démontrer les résultats énoncés à la Figure 3 en utilisant la définition 1.6 (voir Figure 2). C'est donc dans la partie « Exercices » que les premières manipulations de la définition sont proposées. Cette manipulation est par contre restreinte aux deux familles de suites que sont les suites arithmétiques et géométriques mais d'autres exemples peuvent s'ajouter. Nous savons qu'à l'université, les étudiants seront confrontés à un plus large répertoire de suites, ils devront donc mobiliser d'autres connaissances, sur les nombres réels par exemple, pour traiter les inégalités. L'ajout d'exemples permettrait donc selon nous d'amorcer ce travail.

En ce qui concerne l'introduction de la définition quantifiée de limite de fonctions, un premier point de la synthèse s'attache à donner une formulation intuitive en langue naturelle : « dire qu'un réel b est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a , ou que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a signifie que $f(x)$ peut s'approcher aussi près que l'on veut de b pour autant que x soit suffisamment proche de a ». La définition formelle est donnée plus loin dans le manuel (Figure 4). Des liens avec la formulation intuitive précédente peuvent être établis, notamment pour passer de l'expression « s'approcher aussi près que l'on veut » aux inégalités présentes dans la définition et sur les quantificateurs qui y sont présents, offrant ainsi des occasions de proximités horizontales. Une interprétation graphique accompagne la définition et l'ordre des dessins semble suivre la structure logique de celle-ci. Ce choix offre tout d'abord une occasion de proximités horizontales pour commenter la structure logique de la définition et en particulier l'ordre des quantificateurs. Les inégalités avec valeur absolue présentes dans la définition sont interprétées en deux inégalités (une sur les x compris entre $a - \delta$ et $a + \delta$, l'autre sur les $f(x)$ compris entre $b - \varepsilon$ et $b + \varepsilon$), ce qui permet ici aussi de rappeler des propriétés sur la valeur absolue et de mettre en relation les inégalités avec la notion d'intervalle (d'autres proximités horizontales sont alors possibles). Ces commentaires explicatifs peuvent ainsi appuyer l'articulation entre le registre graphique, celui de la langue naturelle et le registre algébrique utilisé dans la définition. Ce dernier registre s'articule ici aussi avec le registre de la logique des prédicats, permettant ainsi des commentaires sur la structure logique de la définition, par exemple sur l'ordre des quantificateurs. Il n'y a pas d'exemple de manipulation de la définition ici mais le manuel en traite un peu plus loin lors de l'étude de la continuité d'une fonction (Figure 5). Le raisonnement suit la structure logique de la définition en considérant un réel strictement positif ε et en expliquant qu'on recherche un réel δ qui rendra vraie l'implication quantifiée

sur x . Lorsqu'un candidat est proposé pour celui-ci sans justifier qu'il est bien strictement positif, le reste de la définition est considéré comme un bloc. Cette manière de rédiger est différente de ce qui est fait à l'université, où il est en général attendu de l'étudiant de montrer que l'implication est vraie, c'est-à-dire que sous l'hypothèse que l'inégalité sur x est vérifiée, on peut montrer que l'inégalité sur $f(x)$ l'est également. Les exemples traités sont également beaucoup plus variés à ce niveau d'enseignement. Il y a toutefois des occasions de proximités horizontales, par exemple pour revenir sur l'ordre des quantificateurs ou pour justifier les inégalités.

10 Comment définir les limites ?

Les définitions de limites présentées ici correspondent à différents cas déjà rencontrés. Les définitions correspondant aux autres cas seront construites dans le cadre des exercices.

4.11 Limite réelle en un réel

Soit une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et soient deux réels a et b .

b est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a si et seulement si

1) a adhère à $\text{dom } f$

2) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+)(\forall x \in \text{dom } f) : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Les fig. 38 à 40 illustrent la définition¹.

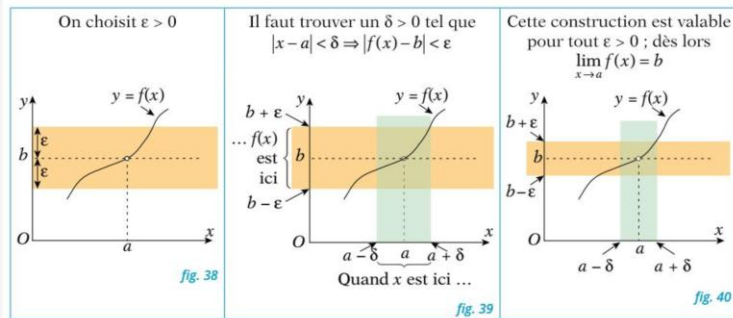


Figure 4. CQFD 5^e, définition de la limite d'une fonction, p. 134

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. On doit trouver une valeur de δ telle que

$$\text{ou encore } (\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow |2x - 8| < \varepsilon$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow 2|x - 4| < \varepsilon .$$

Si on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow 2|x - 4| < 2 \cdot \delta = \varepsilon .$$

En pratique, on détermine une valeur δ , qui dépend généralement de ε . Cette valeur de δ permet de conclure.

Figure 5. CQFD 5^e, manipulation de la définition en $\varepsilon - \delta$, p. 185

Les programmes demandent ensuite de justifier les étapes d'un calcul de limites. Des tableaux tels que ceux présentés à la Figure 6 sont donnés pour chaque opération (somme, produit, quotient de deux fonctions). Des exemples pourraient être intégrés juste après les tableaux et un lien avec la (les) règle(s) utilisée(s) pourrait être fait directement (il y aurait alors des tentatives de proximités descendantes) pour leur donner du sens ou même pour en avoir une vision intuitive (par exemple, commenter le fait de mettre en évidence le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur pour calculer la limite d'un quotient de polynômes lorsque x tend vers $+\infty$).

$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \cdot g(x))$		$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$				
		$-\infty$	$m < 0$	0	$m > 0$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
	$p < 0$	$+\infty$	$m \cdot p$	0	$m \cdot p$	$+\infty$
	0	FI	0	0	0	FI
	$p > 0$	$-\infty$	$m \cdot p$	0	$m \cdot p$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

tab. 11

Figure 6. CQFD 5^e, limite du produit de deux fonctions, p. 141

Les calculs de limites sur lesquels porte ensuite la synthèse sont étudiés au travers de questions posées dans le titre de chaque point étudié : « Comment calculer les limites d'une fonction polynôme ? », « Comment calculer la limite d'une fonction rationnelle en un réel a ? », « Comment calculer la limite d'une fonction rationnelle en plus ou en moins l'infini ? », « Comment utiliser la règle du binôme conjugué pour lever une indétermination ? ». Peu d'exemples sont donnés. La Figure 7 montre également que les justifications doivent être apportées, donnant ainsi des occasions de proximités descendantes pour citer les résultats utilisés par exemple.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty. \\
 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.
 \end{aligned}$$

Figure 7. CQFD 5^e, calculs de limites, p. 147

Dans le chapitre qui traite des dérivées, nous nous sommes concentrée sur la démonstration des règles de calculs en ciblant celle sur la dérivée de la somme de deux fonctions (Figure 8). En ce qui concerne la structure de la démonstration, les calculs permettant de développer la dérivée de $f + g$ sont d'abord présentés et les justifications sont ensuite données « en un bloc » sans expliciter à quel endroit précis de la démonstration elles sont utilisées. Articuler le développement des calculs avec les justifications à produire à chaque étape mène à tenter des proximités horizontales, comme par exemple pour justifier l'existence des limites et mettre cet argument en lien avec l'application de la règle de calcul utilisée.

Démonstration

Le taux d'accroissement de $f + g$ entre x et $x + h$ (où h est un réel non nul tel que $x + h \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$) est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} &= \frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \frac{f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

D'où la dérivée de $f + g$:

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus sont justifiées par la définition de la dérivée et par le théorème de la limite d'une somme. Les hypothèses du [théorème 6.7](#) garantissent que les hypothèses du théorème de la limite d'une somme sont remplies.

Figure 8. CQFD 5°, dérivée de la somme de deux fonctions, p. 215

4.3. Quelles répercussions dans la transition secondaire-université ?

Cette analyse du manuel révèle de nombreuses occasions de proximités que nous avons anticipées dans le relief au niveau de l'articulation possible entre différents registres de représentation (langue naturelle, algébrique, logique des prédicats, graphique) et des tâches de manipulation des définitions dans les exemples et les premières démonstrations. Toutefois, la majorité des rapprochements possibles qu'offre l'introduction des définitions formelles avec d'une part les registres qui leur sont associés et d'autre part les activités qu'il est possible de développer dans les premières tâches de manipulation restent à la charge du lecteur, que celui-ci soit un élève ou un enseignant. Le lecteur qui serait confronté à une première rencontre avec les limites doit donc ici tisser les liens entre le vocabulaire utilisé dans les premières

formulations intuitives et les définitions formelles et il lui revient aussi de mettre en relation les inégalités présentes dans les définitions avec la notion d'intervalle mobilisée dans les interprétations graphiques. Le répertoire d'exemples proposé dans le manuel repose principalement sur les suites arithmétiques et géométriques. La démonstration des premières propriétés apparaît comme un exercice et le manuel ne propose qu'une seule tâche de manipulation des définitions dans la partie « cours ». Enfin, le travail de justification dans les calculs de limites préconisé dans les programmes est lui aussi à la charge du lecteur.

Ainsi, même si ce manuel présente les contenus à enseigner décrits dans les programmes, les choix de présentation montrent que les continuités mises en évidence dans notre analyse des programmes qui pourraient favoriser l'enseignement de l'Analyse dans le passage du lycée vers l'université restent souvent opaques. Les spécificités épistémologiques des notions sont selon nous minorées au vu des choix de présentation du manuel. Nous concevons cependant que le rôle d'un manuel de lycée n'est pas d'aller à un niveau de détail et de rigueur tel que nous l'envisageons à l'université mais nous pensons que si les élèves sont confrontés à une présentation du savoir semblable à celle proposée par le manuel, ils risquent de manquer un certain nombre d'occasions de proximités que nous avons relevées et ainsi se priver du sens associé aux nouvelles notions.

Plus globalement, le risque d'une présentation synthétique, telle que celle proposée par le manuel, est selon nous de développer chez un grand nombre d'élèves du lycée une vision opératoire des mathématiques, centrée sur l'acquisition de techniques à appliquer et de ne pas leur donner à voir certaines spécificités épistémologiques des mathématiques telles que la capacité à manipuler le formalisme des définitions, à développer une certaine intuition ou encore à démontrer des résultats. Notre intuition à propos des représentations des mathématiques qu'ont les élèves est confirmée par les résultats obtenus par Brion (2023) dans le cadre d'un mémoire de fin d'études consacré au goût des élèves du secondaire pour les mathématiques. Un questionnaire en ligne a été proposé à 4113 élèves du secondaire, répartis entre différentes régions de la Belgique francophone. L'échantillon se compose de 70% de répondants du lycée et 30% du collège. Pour 94% des élèves, faire des mathématiques consiste à faire des calculs, 87% d'entre eux pensent que cela consiste à appliquer des méthodes et pour 64%, cela revient à apprendre des formules par cœur. Ces réponses témoignent bien de la vision opératoire que nous anticipions. L'activité mathématique, telle que décrite par les élèves, est en effet très déconnectée des spécificités épistémologiques évoquées dans ce paragraphe.

De plus, parallèlement au travail que nous présentons ici, nous nous sommes intéressée aux stratégies liées au travail personnel de nos étudiants de première année de licence, filières mathématiques et informatique. Ce questionnement est motivé par le fait que nous avons essayé de mieux comprendre les difficultés de nos

étudiants dans un cours que nous leur donnons à l'entrée à l'université dont le principal objectif est de « revoir » des mathématiques du lycée avec les exigences attendues en première année. Ce cours contient donc peu de notions qui n'ont pas déjà été abordées au lycée. Néanmoins, l'accent est mis sur la rédaction des raisonnements, en citant les définitions et les résultats utilisés, en détaillant les calculs et en utilisant à bon escient les connaissances en logique pour articuler les arguments. Notre expérience personnelle d'enseignante nous amène à constater, au fil des années, des difficultés chez nos étudiants semblables à celles évoquées par Moore (1994) dans l'introduction : les étudiants donnent peu d'importance à la compréhension des définitions et des propriétés étudiées, ce qui induit des difficultés dans la manipulation de celles-ci dans les exercices. Le répertoire d'exemples de nos étudiants à la sortie du lycée est également pauvre, de notre point de vue d'enseignante. Une analyse didactique précise de ces phénomènes a été menée il y a plusieurs années (Bridoux, 2014). Nous avons en particulier montré une dégradation chez nos étudiants des compétences liées à la rédaction des raisonnements en analysant leurs productions dans deux évaluations identiques proposées à cinq années d'intervalle. Nous avons aussi proposé un questionnaire en 2023 à nos 99 étudiants pour avoir leur ressenti global sur le travail mené au lycée sur l'utilisation des définitions et des résultats rencontrés au lycée et plus globalement, sur leur travail personnel à l'université. Même si ce questionnaire n'a pas été élaboré dans le cadre strict de ce travail sur les débuts de l'enseignement de l'Analyse, nous pensons que certaines réponses peuvent être mises en lien avec la mise en garde qui découle de notre analyse du manuel à propos de la vision des mathématiques qui peut être développée par les élèves du lycée. Nous en donnons un exemple ici.

À la question « Cite deux ou trois choses qui te semblent différentes entre l'enseignement secondaire et l'université », 63% des étudiants soulignent que la différence principale entre le lycée et l'université est la nécessité de devoir comprendre les mathématiques enseignées pour réussir et le fait de devoir travailler beaucoup plus pour y arriver. Cela rejoint en partie nos interrogations sur la compréhension qu'un élève peut développer si les proximités permettant de donner du sens aux notions ne leur sont pas accessibles.

5. Conclusion

Nous nous sommes intéressée aux spécificités épistémologiques, mises en évidence par le relief, des notions de limites (suites et fonctions) qui sont prises en compte au début de l'enseignement de l'Analyse au lycée en Belgique francophone. Une analyse des programmes a tout d'abord révélé une prise en compte importante de ces spécificités dans l'enseignement visé. Le travail préconisé dans ces documents rejoint aussi sur de nombreux aspects ce qui est attendu en première année universitaire : la manipulation des définitions et l'articulation des registres de

représentation associés, l'exemplification, la prise en compte de la structure logique des propositions quantifiées ou encore la place laissée aux démonstrations.

L'analyse du manuel menée par la suite vient cependant minorer ce premier constat positif, car, même si nous avons montré que la présentation du texte du savoir dans le manuel offre de nombreuses occasions de donner à voir aux élèves les spécificités des notions, celui-ci explicite peu les proximités qui pourraient être tentées. Celles-ci sont donc à la charge du lecteur, donc de l'enseignant qui utiliserait ce manuel en classe, et peut en ce sens apporter de la variabilité dans les activités effectives de celui-ci, avec le risque de réduire la portée de ces activités sur les apprentissages réalisés. Cette analyse montre donc l'intérêt, pour l'enseignant du lycée, de développer dans son discours des proximités et créer ainsi des ponts entre le travail réalisé au lycée et celui qui sera amorcé à l'université.

Nous sommes évidemment consciente qu'une étude des pratiques enseignantes en classe doit maintenant être menée pour compléter ce travail. Il s'agit là d'une perspective pour approfondir cette première étude exploratoire. Tout d'abord, l'étude du discours des enseignants dans les phases d'institutionnalisation avec l'outil des proximités permettrait d'apprécier les rapprochements possibles avec les connaissances des élèves et comment l'enseignant met en évidence les spécificités des notions. Un autre élément qui motive l'étude des pratiques des enseignants est que ceux-ci consultent très certainement d'autres ressources que celle étudiée ici pour élaborer leur cours, ce qui nous amènerait à étudier d'autres présentations du savoir visé et d'en apprécier l'impact sur les activités mathématiques des élèves. Les interactions avec les élèves viennent elles aussi influencer le discours de l'enseignant et des commentaires oraux et/ou écrits accompagnent sans doute la production de graphiques et la construction des définitions. Le choix des exemples est peut-être encore un autre élément de différenciation entre les enseignants. Enfin, les représentations mathématiques des élèves du secondaire mises en évidence par Brion (2023) à la section 4 montrent selon nous elles aussi l'importance d'étudier comment les injonctions des programmes sont mises en œuvre sur le terrain.

L'étude des déroulements en classe que nous envisageons de mener permettra donc de questionner certains phénomènes de transposition didactique, notamment en confrontant les choix de scénarios des enseignants (choix d'introduction et de tâches proposées aux élèves par exemple) à leur mise en œuvre en classe pour inférer des éléments sur les activités effectives des élèves. Ce travail serait également l'occasion de comparer le rapport au savoir des enseignants du lycée et des enseignants universitaires, par exemple leur rapport aux définitions et au formalisme associé. Enfin, ce type de travail offre aussi des perspectives pour questionner la formation des futurs enseignants, rejoignant ainsi la problématique actuelle de la double discontinuité de Klein (Winsløw et Grønbaek, 2014).

Bibliographie

ADMINISTRATION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT (2014). Enseignement secondaire ordinaire, Humanités générales et technologiques, 3e degré. Fédération Wallonie-Bruxelles Enseignement (Belgique).

ANNOYE, M., VAN EERDENBRUGGHE, A. & VAN DIEREN, F. (2018). CQFD 5^e Maths. Éd. de Boeck.

BLOCH, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 3-28, <https://doi.org/10.1023/A:1023696731950>

BLOCH, I. & GIBEL P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.

BRIDOUX, S. (2014). La transition secondaire-université : une expérience en Belgique. *Repères-IREM*, 95, 91-102.

BRIDOUX, S., & GRENIER-BOLEY, N. (2024). What teaching practices should be used to introduce the limits of functions in the first year of university? A case study. *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2024, 10-14 June 2024)* (pp. 791-800). *Escola Universitària de Sarrià. Univ. Autònoma de Barcelona and INDRUM*.

BRIDOUX, S., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C. & ROBERT, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances : analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 21, 187-233, <http://dx.doi.org/10.4000/adsc.813>

BRIDOUX, S. & DERONNE, M. (2012). Compétences : la parole aux enseignants. *Losanges*, 19, 18-24.

BRION, L. (2023). *Pourquoi les élèves du secondaire aiment-ils ou pas les mathématiques ? Une étude didactique*. Mémoire de fin d'études, UMONS (Belgique).

CHORLAY R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5, 267-314, <https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-019-00094-5>

DI MARTINO, P., GREGORIO, F., & IANNONE, P. (2023). The transition from school to university in mathematics education research: New trends and ideas from a systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 113, 7-34, <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10194-w>

- DURAND-GUERRIER, V. & MESNIL Z. (2022). Quelques pistes pour améliorer les usages de l'implication mathématique en début d'université. *ÉpiDEMES*, <https://doi.org/10.46298/epidemes-7550>
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5-1, 37-65.
- GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237–254, <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6>
- GUEUDET, G. & VANDEBROUCK, F. (2022). Transition secondaire-supérieur : ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *ÉpiDEMES*, <https://doi.org/10.46298/epidemes-7486>
- GUEUDET, G., BOSCH, M., DI SESSA, A., KWON, O. N., & VERSCHAFFEL, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. Springer, 2016, ICME 13 Topical Surveys, Gabriele Kaiser.
- LECORRE, T. (2016). Rationality and concept of limit. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2 April 2016)* (pp. 83-92). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.
- MINISTERE DE LA COMMUNAUTE FRANÇAISE (1999). Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques (Humanités générales et technologiques). Enseignement de la Communauté française (Belgique).
- MOORE, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266, <https://doi.org/10.1007/BF01273731>
- OKTAÇ, A., & VIVIER, L. (2016). Conversion, Change, Transition... in Research about Analysis. In B. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 87-121). Springer.
- PRZENIOSLO, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 71-93, <https://doi.org/10.1007/s10649-005-5325-4>
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyses des contenus à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- ROBERT, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*, 340, 431-449.
- ROBERT, A., PENNINGCKX, J. & LATTUATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos*, Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

ROBERT, A. & ROBINET, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 145-176.

ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 239-285.

ROH, K.H. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε -strip activity, *Educational Studies in Mathematics*, 73, 263-279, <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9210-4>

SCHNEIDER, M. (2010). Contextualiser les compétences dans l'enseignement des mathématiques. Difficultés et propositions. *Petit x*, 84, 51-68.

VANDEBROUCK, F. (DIR.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Octarès Éditions.

WINSLOW C., & GRØNBÆK N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: Contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34/1, 59-86.

STEPHANIE BRIDOUX

Université de Mons (Belgique), LDAR (Université Paris-Cité)

stephanie.bridoux@umons.ac.be

Annexe : UAA « Suites »

32796

BELGISCH STAATSBLAD — 17.04.2014 — MONITEUR BELGE

55 UAA2		Mathématiques pour scientifiques : 3 ^e degré de transition (5 ^e année)		Suites			
MOBILISER LES PROPRIÉTÉS DES SUITES DANS DES SITUATIONS VARIÉES							
Compétences à développer							
UNITÉ D'ACQUIS D'APPRENTISSAGE							
Processus							
Appliquer		<ul style="list-style-type: none"> Représenter graphiquement une suite Trouver le terme général d'une suite Rechercher un terme d'une suite Conjecturer la limite d'une suite à l'aide d'un outil informatique Vérifier la valeur de la limite d'une suite à l'aide de la définition Déterminer la limite d'une suite arithmétique, géométrique Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, géométrique Calculer une somme infinie de termes consécutifs d'une suite géométrique Trouver le taux, l'intérêt ou la durée d'un placement à intérêt simple ou à intérêt composé Réaliser un tableau d'amortissement d'un prêt à l'aide de l'outil informatique 		<ul style="list-style-type: none"> Résoudre un problème faisant intervenir des suites issues de différents contextes. 		Suites Définition en fonction du rang Définition par récurrence Limite d'une suite Suites arithmétiques, suites géométriques Terme général Somme des n premiers termes Type de croissance Convergence Intérêts simples, intérêts composés Tableau d'amortissement Somme infinie de termes d'une suite géométrique	
Connaître		<ul style="list-style-type: none"> Caractériser une suite de nombres : type de suite, type de croissance Donner des exemples de suite convergente ou non convergente Démontrer la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique Générer une suite vérifiant certaines conditions Définir la limite d'une suite et expliciter cette définition à l'aide d'un schéma 					
Stratégies transversales							
Situer les apports mathématiques dans l'histoire et dans les différentes cultures Utiliser l'outil informatique Faire appel au raisonnement mathématique pour dépasser l'intuition Rédiger, argumenter, structurer, démontrer							

page 46/60

Annexe 1 : Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques

Tableau 1. Administration générale de l'enseignement, UAA « Suites », p. 46