

VIVIANE DURAND-GUERRIER, GAËTAN PLANCHON, NICOLAS SABY

**SUR LE RÔLE DE L'ORDRE EN ANALYSE À LA TRANSITION
SECONDAIRE - SUPÉRIEUR**

Title. On the role of order in Calculus at the secondary-tertiary transition. Abstract. In France, current curricular choices tend to make the role of order in analysis invisible. They implicitly favour a topological point of view related to metric spaces, which we find in the notion of absolute value, generalised to that of distance. These choices lead us to leave aside a complementary perspective that emphasises ordered sets, in which the connected parts of \mathbb{R} , which are intervals, play a central role. In our epistemological study and using two examples from the secondary-tertiary transition, we show that considering the relationship between connectedness and completeness in the set of real numbers encourages an explicit consideration of the role of order in analysis, especially in proofs. Finally, we suggest some avenues of research opened up by this work to help take into account the dual nature of this transition.

Keywords. Calculus, order, topology, completeness, connectedness

Résumé. En France, les choix curriculaires actuels tendent à invisibiliser le rôle de l'ordre en analyse. Ils privilégient implicitement un point de vue topologique renvoyant aux espaces métriques, que l'on retrouve dans la notion de valeur absolue, se généralisant à celle de distance. Ces choix conduisent à laisser de côté une perspective complémentaire mettant en avant les ensembles ordonnés, où les parties connexes de \mathbb{R} que sont les intervalles jouent un rôle central. Nous montrons dans notre étude épistémologique et sur deux exemples à la transition secondaire-supérieur que considérer les relations entre connexité et complétude dans l'ensemble des nombres réels favorise une prise en compte explicite du rôle de l'ordre en analyse, notamment dans les preuves. Nous proposons enfin des pistes de recherches ouvertes par ce travail pour contribuer à la prise en compte de la nature duale de cette transition.

Mots-clés. Analyse, ordre, topologie, complétude, connexité

Le rôle de l'ordre en analyse bien qu'essentiel est souvent peu travaillé dans le cursus secondaire en France. En début d'université, il apparaît explicitement dans la définition axiomatique du corps ordonné complet des nombres réels, que ce soit via l'axiome de la borne supérieure, celui de la convergence des suites adjacentes, et dans une moindre mesure celui de la convergence des suites de Cauchy. Néanmoins les étudiants ont peu d'occasion en général de mobiliser les propriétés explicites des ensembles ordonnés et d'identifier les spécificités en analyse des ensembles de

nombres ordonnés denses et complets comme l'ensemble des nombres réels versus les ensembles ordonnés denses et incomplets tels que l'ensemble des nombres rationnels ou celui des nombres décimaux munis de l'ordre standard (Durand-Guerrier, 2016 ; Branchetti et Durand-Guerrier, 2023).

En conclusion d'un texte intitulé : La Construction Algébrique du Continu : Calcul, Ordre, Continuité, H. Sinaceur écrit :

A priori ou par nature, la notion d'ordre en mathématiques n'est intrinsèquement ni géométrique bien qu'elle se représente aisément par la relation « être située entre... », ni algébrique bien qu'elle se traduise par la relation d'inégalité, ni analytique bien qu'elle intervienne dans les notions de limites et de convergence [...] Ainsi apparaît-elle dans la mathématique contemporaine comme une notion transversale, présente sur bien des chemins qui joignent une discipline à l'autre. (Sinaceur, 1992, p.115).

Nous faisons l'hypothèse que cette dimension transversale de l'ordre est une des raisons de sa très faible présence en tant qu'objet d'étude dans les programmes français de lycée, en raison notamment de l'organisation des programmes en chapitres dédiés aux grands sous domaines. Pour autant, comme nous le montrons dans cet article, cette dimension transversale est porteuse a priori de potentialités pour l'appropriation des concepts clés de l'analyse, tels que la continuité, la complétude, la connexité, la convergence ou l'intégration, notamment parce qu'elle favorise les changements de cadres (Douady, 1986). En ce qui concerne l'université, nous faisons l'hypothèse que ceci relève de choix épistémologiques assumés, ces choix ayant un impact sur les contenus des programmes de lycée.

Dans cet article, nous avons choisi comme fil conducteur les relations entre complétude et connexité en analyse réelle, considérées sous l'angle du rôle de l'ordre. En effet, dans l'ensemble des réels, la connexité et la complétude coïncident, dans la mesure où le choix de construction des réels est celui des coupures de Dedekind. Ce résultat a émergé de la pratique experte de l'un des auteurs en tant que mathématicien et enseignant à l'université, dans le cadre d'une réflexion approfondie sur les structures d'ordre. Ceci est en accord avec le point de vue de Revuz et Revuz (1966) dans le tome 3 de leur cours de l'APMEP. Dans une première partie, nous présentons les principaux éléments d'une étude épistémologique sur le rôle de l'ordre en analyse suivant ce fil conducteur. Dans une deuxième partie, nous montrons sur l'exemple du théorème des valeurs intermédiaires comment notre étude épistémologique sur les relations entre connexité et complétude dans l'ensemble des nombres réels permet d'éclairer les choix de transposition didactique. Dans la troisième partie, nous étudions les opportunités de rendre visible l'ordre dans l'étude de l'intégrale à la transition lycée-université. Nous proposons enfin des pistes de recherches ouvertes par ce travail pour contribuer à la prise en compte de la nature duale de cette transition.

1. Aspects épistémologiques : Relation d'ordre et complétude/connexité

Dans cette partie, nous nous attachons à mettre en lumière les raisons d'être d'un travail sur le rôle de l'ordre en analyse. Après un bref rappel de l'émergence des relations d'ordre et de préordre comme objet d'étude à la fin du XIX^{ème} siècle et au début du XX^{ème} siècle, nous montrons la pertinence sur le plan épistémologique de prendre en considération, parmi les constructions des nombres réels, celle de Dedekind qui permet de mettre en lien l'incomplétude de l'ensemble des nombres rationnels avec sa non-connexité et la complétude de l'ensemble des nombres réels avec sa connexité. Nous mettrons ceci en perspective avec les relations mutuelles qu'entretiennent définitions et preuves dans la pratique mathématique (Durand-Guerrier, 2022a).

1.1 Relation d'ordre et de préordre

La structure d'ordre a été formalisée tardivement, de manière essentiellement concomitante au développement de la topologie. Russell (1903) pose la question de l'ordre dans *The Principles of mathematics* :

What is order? This is a difficult question, and one upon which, so far as I know, nothing at all has been written. All the authors with whom I am acquainted are content to exhibit the genesis of order (...). (*op. cit.*, p.207)

Au moins dans le contexte francophone, on doit probablement à Bourbaki d'avoir fixé les propriétés des relations d'ordre. Les définitions ont été choisies et formulées dans la perspective d'un traité de mathématiques pouvant servir d'ouvrage de référence. On définit aujourd'hui classiquement une relation d'ordre de la manière suivante :

Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation d'ordre si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- Réflexivité : Pour tout x dans X , xOx ;
- Antisymétrie : Pour tous x, y dans X , si $(xOy$ et $yOx)$, alors $x=y$;
- Transitivité : Pour tous x, y, z dans X , si $(xOy$ et $yOz)$, alors xOz .

Ceci définit la relation classique d'ordre large sur les nombres. Ce choix a probablement été guidé par l'usage de l'ordre en analyse. Néanmoins, même en analyse, on rencontre des relations de préordre et des relations d'ordre strict.

Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation d'ordre strict si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Asymétrie : Pour tous x, y dans X , si xOy , alors non yOx ;
- Transitivité : Pour tous x, y, z dans X , si $(xOy$ et $yOz)$, alors xOz .

Mais on peut aussi donner comme définition de l'ordre strict :

Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation d'ordre strict si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Irréflexivité : Pour tout x dans X , non xOx ;
- Transitivité : Pour tous x, y, z dans X , si $(xOy \text{ et } yOz)$, alors xOz .

Tarski (1994, pp. 155-159) quant à lui, lorsqu'il définit les lois de l'ordre pour les nombres, choisit de définir l'ordre strict et dans les axiomes qu'il choisit, la relation est irréflexive ; il essaye ainsi de capturer notre notion intuitive d'ordre. Comme nous le montrons dans Durand-Guerrier et Saby (2023), contrairement à la transitivité, la réflexivité a peu de chance de se développer comme invariant opératoire au sens de Vergnaud (1990) dans les premières années du primaire et du secondaire. Le choix de l'ordre large est un choix théorique dont on sait qu'il peut poser problèmes aux élèves lorsqu'on travaille dans les ensembles de nombres avec des valeurs numériques (voir par exemple Mounier, 2018).

Lorsque l'on compare des objets autres que des nombres (e.g. collections, ensembles, fonctions, grandeurs), les relations de comparaisons dans les domaines d'applications ou dans le monde réel montrent presque toujours une relation de préordre avant une relation d'ordre¹.

Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation de préordre si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Réflexivité : Pour tout x dans X , xOx ;
- Transitivité : Pour tous x, y, z dans X , si $(xOy \text{ et } yOz)$, alors xOz .

En général, même en mathématiques, dès que l'on ne travaille plus dans les ensembles de nombres, on est amené à prendre en compte les objets équivalents.

1.2. La construction des nombres réels par Dedekind - complétude et connexité

En 1872, Dedekind publie un essai intitulé « Stetigkeit und irrationale Zahlen ». Bien que Dedekind n'utilise pas le terme connexité, mais les termes de complétude et de continuité dans son essai sur la construction des nombres irrationnels, du point de vue de la connexité, sa construction revient à compléter l'ensemble non connexe des rationnels pour obtenir un ensemble connexe, ce que Sinaceur (1992) exprime en écrivant qu'il a réduit la continuité à l'ordre. En effet, Dedekind (1872) part de l'ensemble ordonné des nombres rationnels muni de l'ordre standard, définit ce qu'il

¹ Pour l'exemple de la comparaison des collections finies à l'école primaire et des ensembles infinis à l'université, voir Durand-Guerrier et Saby (2023).

appelle des coupures, à savoir des partitions à deux éléments de l'ensemble \mathbb{Q} pour lesquelles tout élément de la première partie est inférieur ou égal à tout élément de la seconde partie, autrement dit une coupure est une paire (A, B) où A et B sont des sous-ensembles de \mathbb{Q} tels que :

$$(A \cup B = \mathbb{Q}) \wedge (A \cap B = \emptyset) \wedge (\forall x \in A \forall y \in B, x < y).$$

Dedekind montre qu'une infinité de ces coupures ne sont pas opérées par des nombres rationnels. Considérant que la continuité de la droite réside dans le fait que chaque fois que l'on considère deux demi-droites, il y a un point qui opère la coupure, il en fait l'essence de la continuité. Ce qui précède montre que l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels n'est pas continu ; il est *lacunaire*. Pour obtenir un ensemble continu au sens de la continuité de la droite, il faut donc le *compléter*. Pour cela, à chaque fois qu'une coupure n'est pas opérée par un rationnel, Dedekind crée un nouveau nombre qui opère cette coupure et qu'il nomme *nombre irrationnel*. Il montre ensuite que dans l'ensemble composé des nombres rationnels et des nombres irrationnels, autrement dit l'ensemble des nombres réels, pour toute coupure, il existe un et un seul nombre réel opérant la coupure. Ceci montre que l'ensemble est *complet du point de vue du processus des coupures*. Cette complétion a été obtenue en une seule étape. Le réel opérant cette coupure est la borne supérieure de l'ensemble A et la borne inférieure de l'ensemble B . Par analogie avec la continuité de la droite, cet ensemble est dit *continu*.

Cette construction de Dedekind peut également être interprétée du point de vue de la *connexité*. En effet, d'un point de vue intuitif, on dit qu'un ensemble E est *connexe* s'il est d'un seul morceau (Revuz & Revuz, 1966, p.11 ; Choquet, 1984, p. 45), ce qui se traduit, en topologie, par la définition ci-dessous :

Définition 1 : Un Ensemble E est connexe si et seulement si E ne s'écrit pas comme réunion de deux fermés disjoints non vides, ou de manière équivalente si E ne s'écrit pas comme réunion de deux ouverts disjoints non vides.

Le fait que certaines coupures de \mathbb{Q} ne soient pas opérées par un élément de \mathbb{Q} montre que \mathbb{Q} peut s'écrire comme réunion de deux ouverts disjoints non vides, autrement dit l'ensemble des nombres rationnels n'est pas « d'un seul morceau », ce n'est pas un ensemble connexe. Plus précisément, chaque coupure non opérée par un rationnel constitue une partition de \mathbb{Q} en deux ouverts non vides, tandis que lorsqu'une coupure est opérée par un rationnel, l'un des deux sous-ensembles constituant la partition est un intervalle semi ouvert contenant le rationnel opérant la coupure. Étant donné que dans l'ensemble ordonné \mathbb{R} des nombres réels toute coupure est opérée par un réel, il n'existe pas de partition de \mathbb{R} en deux intervalles ouverts disjoints non vides. En effet, l'un des deux ensembles formant la coupure contient le nombre réel qui opère cette coupure, ce dernier étant soit sa borne supérieure, soit sa borne

inférieure selon le choix fait. Plus généralement, étant donné un ouvert E de \mathbb{R} , non vide et différent de \mathbb{R} , le complémentaire de cet ouvert n'est pas un ouvert.

Il faut noter que si l'on représente graphiquement la droite numérique rationnelle, on peut avoir l'impression qu'elle est d'un seul tenant. En effet, en raison de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il n'est pas possible de distinguer sur une droite tracée dans un repère du plan, les points d'abscisse rationnelle des points d'abscisse irrationnelle. Notons que de la même manière, on ne peut pas distinguer les points d'abscisse décimale des points d'abscisse idécimale². Cette réinterprétation de la construction de l'ensemble des nombres réels par Dedekind en termes de *connexité* montre que pour ce qui concerne l'ensemble ordonné des nombres réels muni de l'ordre standard, les deux notions de *complétude* et de *connexité* coïncident, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans d'autres espaces topologiques.

1.3. Connexité : espaces topologiques et espaces métriques dans le cours de Choquet

En 1969, Gustave Choquet publie son cours de Topologie, qui a été et est resté une référence pour les cours universitaires. Nous utilisons dans ce qui suit la deuxième édition parue en 1984.

Dans l'avertissement liminaire, il écrit :

Ce livre couvre les besoins de la licence et de la maîtrise³ en ce qui concerne la topologie générale et les espaces fonctionnels. (...)

Il ([ce cours]) est destiné aux étudiants qui disposent déjà d'un bagage de connaissances équivalent à celui acquis après le premier cycle de mathématiques⁴. Toutefois l'exposé ne suppose presque aucune connaissance préalable.

Son but est de faire connaître, dans un cadre aussi simple que possible, quelques-uns des outils puissants de l'Analyse moderne et leurs applications. (Choquet, 1984, Avertissement, p. VI).

En entrée de l'ouvrage, il donne un extrait du *Livret européen de l'étudiant* destiné à « l'harmonisation de l'enseignement des mathématiques en Europe » (Choquet, 1984, p.V). La partie A est consacrée à la Topologie générale. Nous nous intéressons ici au chapitre 1 intitulé : *Espaces topologiques et espaces métriques*. Il se divise en trois sous parties : Topologie de la droite \mathbb{R} , Espaces topologiques, Espaces métriques, suivi d'Exercices, d'un Index terminologique, d'une Bibliographie, de

² Un nombre idécimal est un nombre qui ne peut pas s'écrire avec un nombre fini de décimales non nulles. Ce néologisme a été introduit par Bronner (1997) par analogie avec le terme irrationnel.

³ Correspondant aux 3^{ème} année de licence et 1^{ère} année de master aujourd'hui.

⁴ Correspondant aux deux premières années de licence aujourd'hui.

Définitions et axiomes et d'un rappel de notations classiques. Nous nous intéressons ici aux paragraphes concernant la connexité et à la complétude dans ce chapitre : § 13. *Connexité* dans la section *Espaces topologiques* ; § 19. *Espaces métriques connexes* ; § 20. *Suites de Cauchy et espaces complets*, dans la section *Espaces métriques*, et nous nous intéresserons plus particulièrement aux exemples renvoyant aux ensembles de nombres.

Choquet (1984) ne rappelle pas ici la définition qu'il a donnée du corps ordonné des nombres réels en renvoyant au tome 1 de son cours, lequel n'a pas été publié. On trouve cette définition dans l'ouvrage publié en 2002 aux éditions Ellipses⁵ :

Théorème 2 (théorème d'existence)

L'ensemble des sections commençantes ouvertes de \mathbb{R} muni de l'ordre et de l'addition définie ci-dessus est un groupe commutatif totalement ordonné continu et il contient un sous-groupe ordonné partout dense isomorphe à \mathbb{Q} . (Choquet, 2002, p. 90).

Le corps ordonné des nombres réels est obtenu en munissant le groupe ordonné continu, dont l'existence a été établie par le théorème ci-dessus, de la multiplication associée à cette structure. (Choquet, 2002, p. 92).

1.3.1 Définition de la connexité dans un espace topologique

Choquet (1984, p. 45) se propose de préciser l'idée intuitive qui nous fait dire que la réunion de deux intervalles fermés disjoints est faite de deux morceaux, alors qu'un seul intervalle fermé est fait d'un seul morceau. Il ajoute que : « il est assez naturel de considérer que deux parties A et B sont séparées lorsqu'elles sont contenues dans deux fermés disjoints de E », ce qui le conduit à donner la définition suivante :

Définition 13.1 On dit qu'un espace topologique E est connexe s'il n'existe aucune partition de E en deux parties fermées non vides.

Il indique ensuite les définitions équivalentes obtenues en remplaçant la propriété de la définition 13.1 par l'une des deux propriétés

13.2 Il n'existe aucune partition de E en deux parties ouvertes non vides.

13.3 Les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et \emptyset .

Dans la section 2.1 nous avons retenu la définition 13.2 qui peut être mise en lien directement avec le processus des coupures de Dedekind. Notons que dans la section *Définitions et Axiomes*, la définition retenue par Choquet (1984) pour la connexité (p.121) est 13.3 ; définition que l'on trouve classiquement dans les cours de topologie. On peut faire l'hypothèse que cette définition est moins intuitive que les

⁵ Cet ouvrage, présenté par Marc Rogalski, rassemble les notes de cours de la fin des années cinquante à la Sorbonne et à l'école Polytechnique. Choquet indique dans l'avant-propos qu'il rédigeait son cours peu après son cours oral.

deux précédentes dans la mesure où c'est une propriété globale, qui "absorbe" la dimension locale présente dans les deux premières définitions. Elle est souvent utilisée pour faire des preuves.

1.3.2 Exemples dans le cas de l'ensemble des nombres réels

A la suite des trois définitions, Choquet donne les deux exemples ci-dessous :

EXEMPLES – 1° Nous démontrerons plus tard, lors de l'étude des espaces métriques, que \mathbb{R} (ainsi que tout intervalle de \mathbb{R}) est connexe ; nous l'admettrons temporairement.

2° Par contre l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels n'est pas connexe : plus généralement montrons que si une partie A de \mathbb{R} n'est pas un intervalle, alors elle n'est pas connexe ; en effet il existe alors deux points distincts x et y de A tels que $[x,y] \not\subset A$; donc il existe un point $a \in [x,y]$ tel que $a \notin A$. Les ensembles non vides $A \cap]-\infty, a[$ et $A \cap]a, +\infty[$ sont ouverts dans A et en constitue une partition ; donc A n'est pas connexe.

En résumé les seules parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles (ibid., p.45).

Ces deux exemples appellent deux remarques :

Le renvoi au chapitre sur les espaces métriques pour le cas de l'ensemble des nombres réels peut paraître surprenant dans la mesure où la preuve peut être faite dans le cadre de la topologie de l'ordre. Nous considérons que cela correspond au phénomène que nous souhaitons mettre en valeur, à savoir le primat de la distance sur les intervalles lorsque l'on travaille avec l'ensemble des nombres réels, ceci contribuant au phénomène d'invisibilité de l'ordre.

La deuxième remarque est que la spécificité de la non-connexité de \mathbb{Q} , qui n'a pas le caractère intuitif mentionné par Choquet en amont de la définition, n'est pas prise en compte, ceci contrairement à Revuz et Revuz (1966) qui la mentionnent explicitement. On aurait au moins pu s'attendre à ce que soit mentionné que quel que soit le nombre irrationnel α considéré, les ensembles non vides $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \alpha[$ et $\mathbb{Q} \cap]\alpha, +\infty[$ sont ouverts dans \mathbb{Q} et en constitue une partition en deux ouverts disjoints non vides, cela étant directement en lien avec le point de vue des coupures de Dedekind en ce qui concerne l'incomplétude de \mathbb{Q} .

1.3.3 Connexité dans les espaces métriques

Un peu plus loin, Choquet donne la définition suivante du continu, suivie d'un commentaire qui renvoie sur les espaces métriques.

Définition 13-8 : On appelle *continu* tout espace compact et connexe.

D'après les théorèmes 11.16⁶ et 13.7⁷, tout espace séparé qui est image continue d'un continu E est un continu.

Lors de l'étude des espaces métriques, nous démontrerons une propriété des continus métriques qui rend plus intuitive la notion de connexité (ibid., p.47)

Il fait ceci dans la section 19 - *Espaces métriques connexes*.

Il commence par indiquer qu'il va préciser pour les espaces métriques la notion intuitive de connexité et donne la définition suivante :

Définition 19-1 – Un espace métrique E est dit bien enchaîné si pour tout couple (a,b) de point de E et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite finie de points de E : a_1, \dots, a_n avec $a_1 = a$ et $a_n = b$, telle que $d(a_i, a_{i+1}) \leq \varepsilon$ pour tout $i < n$. Autrement dit si on peut relier a et b par une chaîne de pas au plus égal à ε (ibid., p. 76).

De cette définition donnée par Choquet, il ressort que tout espace métrique connexe est bien enchaîné (Proposition 19-1). Il prouve ce résultat en établissant qu'étant donné un point a et $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points de E que l'on peut relier à a par une chaîne de pas au plus égal à ε est égal à E tout entier, en utilisant la définition 11-3 d'un espace topologique connexe (ibid., p.76-77). Il attire ensuite l'attention sur le fait qu'il est faux qu'un espace bien enchaîné soit nécessairement connexe, en donnant comme exemple « l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels [qui] est bien enchaîné, mais non connexe » (ibid., p.77) ; si on ajoute la compacité, on a alors le résultat suivant :

Proposition 19-3. Dire qu'un espace métrique compact est connexe équivaut à dire qu'il est bien enchaîné (ibid., p.77)

On sait déjà qu'un espace métrique connexe est bien enchaîné. Choquet prouve par un raisonnement par contraposition mobilisant des questions de distance que si un espace métrique compact est bien enchaîné, alors il est connexe. Il en déduit un corollaire que nous donnons ci-dessous ainsi que les commentaires associés, une nouvelle proposition et un nouveau corollaire :

Corollaire 19-4. *Tout intervalle compact de \mathbb{R} est connexe.*

En effet, tout intervalle $[a,b]$ est compact et il est évidemment bien enchaîné (utiliser des points $a + n\varepsilon$).

⁶ Théorème 11-16. *Pour toute application continue f d'un espace compact E dans un espace séparé F , le sous espace $f(E)$ de F est compact.*

⁷ Théorème 13-7. *Tout image continue d'un espace connexe est connexe.*

Plus généralement, soit E un intervalle quelconque de \mathbb{R} , et $x_0 \in E$; pour tout $x \in E$, on a $[x_0, x] \subset E$ donc E est réunion des intervalles compacts $[x_0, x]$; E est donc connexe⁸.

Inversement, nous avons vu lors de l'étude des espaces topologiques connexes qu'une partie de \mathbb{R} qui n'est pas un intervalle n'est pas connexe.

En résumé

Proposition 19-5. Les seuls ensembles connexes de \mathbb{R} sont les intervalles (ouverts, semi-ouverts, ou fermés).

Corollaire – Pour toute fonction numérique continue sur un espace topologique connexe E , l'ensemble $f(E)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Donc si f prend sur E des valeurs positives et des valeurs négatives, elle s'annule en au moins un point de E (ibid., p.77)

La proposition 19-5 est celle annoncée dans la section *Connexité* des espaces topologiques. Le dernier corollaire est une formulation du *théorème des valeurs intermédiaires*. C'est une conséquence du théorème plus général ci-dessous :

Théorème. L'image d'un ensemble connexe par une application continue est un sous-ensemble connexe de l'espace image de cette application.

Dans la section suivante, intitulée *Suites de Cauchy et espace complets*, Choquet note que la notion de suite de Cauchy n'est pas une notion topologique, autrement dit on ne peut pas définir ce qu'est une suite de Cauchy dans un espace topologique ; mais on peut le faire dans un espace métrique, et ensuite définir la notion d'espace métrique complet par la convergence des suites de Cauchy (ibid., p. 78-80).

1.4. Preuves de deux résultats liés à la connexité - rôle de l'ordre

Nous avons vu que pour prouver la partie directe de la proposition 19.3 (Tout intervalle connexe de \mathbb{R} est connexe), Choquet choisit de se placer dans les espaces métriques, en s'appuyant sur la notion d'ensemble bien enchainé. Ce choix tend à reléguer à l'arrière-plan le rôle des intervalles, et donc de l'ordre dans cette partie de la preuve.

Dans cette section, nous nous montrons qu'il est possible de proposer des preuves de résultats liées à la connexité, accessibles à la transition secondaire-supérieur, ne faisant pas appel à la notion de distance. Nous avons retenu les deux résultats suivants : a) Les sous-ensembles connexes de \mathbb{R} sont les intervalles b) Tout image continue d'un espace connexe est connexe.

⁸ Il utilise sans le dire le théorème 13.5 (ibid. p. 46) : *Si l'intersection d'une famille de connexes est non vide, alors sa réunion est connexe.*

1.4.1 Preuve que les sous-ensembles connexes de \mathbb{R} sont les intervalles

Théorème 1 : Les sous-ensembles connexes de l'ensemble ordonné des nombres réels sont les intervalles.

Preuve :

Partie directe : Choquet a établi dans la partie du cours *Espace Topologique* que si un sous ensemble non vide de \mathbb{R} n'est pas un intervalle, alors ce sous ensemble peut s'écrire comme réunion de deux ouverts disjoints non vides (voir la preuve de Choquet plus haut), et par suite, ce n'est pas un ensemble connexe. Ceci prouve (par contraposition) que tout sous ensemble connexe de \mathbb{R} est un intervalle.

Partie réciproque : Pour établir que tout intervalle de \mathbb{R} est un ensemble connexe, Choquet s'est placé dans les espaces métriques. Nous proposons ci-dessous une preuve topologique utilisant la définition par les fermés pour les intervalles fermés.

Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} . Nous allons montrer que quels que soient les sous-ensembles fermés non vides X et Y de \mathbb{R} , si $I = X \cup Y$, alors $X \cap Y \neq \emptyset$.

Preuve - Soient A et B deux sous-ensembles fermés non vides de \mathbb{R} tels que $I = A \cup B$, soit a un élément de A et b un élément de B . On suppose, sans perte de généralité que $a < b$ (sinon, on échange les rôles de a et b).

On considère l'ensemble $[a, b] \cap A$; cet ensemble est non vide (il contient a) et majoré par b ; il admet donc une borne supérieure, notée γ .

Par ailleurs, $[a, b] \cap A$ est un ensemble fermé comme intersection de deux ensembles fermés ; par suite $\gamma \in [a, b] \cap A$ et donc $\gamma \in A$ (1).

Nous allons montrer que γ est aussi un élément de B .

Par définition de γ , on a $\gamma \leq b$.

1^{er} cas - $\gamma = b$; par suite $\gamma \in B$ (2). De (1) et (2), on déduit $\gamma \in A \cap B$.

2^{ème} cas - $\gamma < b$

Par définition de γ

$$\forall x \in I, \gamma < x \leq b \Rightarrow x \notin A.$$

Comme $I = A \cup B$, on en déduit

$$\forall x \in I, \gamma < x \leq b \Rightarrow x \in B.$$

Comme I est un intervalle de \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \gamma < x \leq b \Rightarrow x \in I.$$

Par suite, $]\gamma, b] \subset I$, et comme $I = A \cup B$ et $]\gamma, b] \cap A = \emptyset$, on en déduit $]\gamma, b] \subset B$. Comme B est un sous ensemble fermé de \mathbb{R} , on en déduit que l'adhérence de $]\gamma, b]$ est dans B ; par suite $\gamma \in B$ (3). De (1) et (3), on déduit que $\gamma \in A \cap B$.

A et B étant des sous-ensembles fermés génériques de \mathbb{R} , on a donc prouvé le résultat annoncé.

Cette preuve mobilise des notions topologiques : intervalles, borne supérieure où l'ordre joue un rôle essentiel, et sous-ensembles fermés. On termine la preuve comme Choquet.

N.B. Cette preuve peut aussi être instanciée sur \mathbb{R} pour prouver que \mathbb{R} est connexe.

1.4.2 Image d'un ensemble connexe par une application continue

On trouve dans Choquet (2002, p. 278) l'énoncé et la preuve ci-dessous.

Proposition 1 - Tout image continue d'un espace connexe est connexe.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une partition de l'espace d'arrivée en deux ouverts non vides, dont les images réciproques constitueraient également une partition de l'ensemble de départ en deux ouverts non vides, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

Ceci revient à prouver que si l'espace image par une application continue n'est pas connexe, alors l'ensemble de départ n'est pas connexe (raisonnement par contraposition).

Conséquence – L'image d'un intervalle de \mathbb{R} par une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un intervalle.

En effet, un intervalle est une partie connexe de \mathbb{R} ; par suite l'image d'un intervalle de \mathbb{R} est une partie connexe de \mathbb{R} . Les seules parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles. D'où le résultat.

1.5. Conclusion de l'étude épistémologique

Comme nous l'avons écrit dans l'introduction, dans l'ensemble des réels, la connexité et la complétude coïncident, dans la mesure où le choix de construction des réels est celui des coupures de Dedekind. Nous nous sommes référés au cours de Topologie de Choquet pour les définitions topologiques de la connexité et nous avons produit une preuve topologique du théorème « *Tout intervalle de \mathbb{R} est un intervalle connexe* », mettant en lumière plusieurs propriétés essentielles de l'ordre sur \mathbb{R} . Nous faisons l'hypothèse que ce type de travail, qui vise à améliorer la visibilité du rôle de l'ordre en analyse réelle, peut contribuer au processus de conceptualisation en analyse réelle à la transition secondaire-supérieur, en rendant possible des changements de cadres (algèbre, géométrie, topologie) au sens de

Douady (1986). Compte tenu de ce que les parties connexes de \mathbb{R} sont exactement les intervalles, ces derniers jouent dans ce cadre un rôle théorique, qui pourrait être préparé dans le secondaire en leur donnant un rôle plus important qu'aujourd'hui, en complémentarité avec le point de vue valeur absolue actuellement dominant dans les programmes du secondaire. En retour, un travail dans \mathbb{R} sur la connexité d'un point de vue topologique, proche de l'intuition, en début d'université pourrait permettre de fournir un modèle élémentaire aux structures topologiques développées aux niveaux plus avancés de l'enseignement universitaire, incluant la formation des enseignants du secondaire en mathématiques. Un tel travail peut être conduit en appui sur les preuves du type de celles données dans les paragraphes précédents et plus loin dans la section 3.2, notamment dans le cadre d'activité multi-preuves⁹.

2. Complétude et connexité – l'exemple du théorème des valeurs intermédiaires

Dans cette section, nous montrons, sur l'exemple du théorème des valeurs intermédiaires, le rôle de notre étude épistémologique pour éclairer notre questionnement didactique, dans la perspective de la transposition didactique. Comme le souligne Chevallard,

« (...) dès lors que l'on assigne au savoir savant sa juste place dans le processus de transposition, loin que l'analyse de la transposition didactique se substitue indûment à l'analyse épistémologique stricto sensu, il apparaît que c'est bien le concept de transposition didactique qui vient permettre l'articulation de l'analyse épistémologique sur l'analyse didactique, et se fait alors le guide du bon usage de l'épistémologie en didactique. » (Chevallard & Joshua, 1991, p.20)

Le plus souvent, les preuves du théorème des valeurs intermédiaires dans le secondaire en France font appel implicitement à la complétude, en assumant l'existence de limite. Il est cependant possible de donner une preuve mobilisant la connexité, et la définition topologique de la continuité des fonctions, sans appel à la limite, comme application du théorème selon lequel l'image d'un connexe par une application continue est connexe (Revuz et Revuz, 1966).

Dans ce qui suit, nous présentons et analysons 1/ un exemple de preuve du théorème des valeurs intermédiaires classiquement proposée dans le secondaire en France ; 2/ une preuve de ce théorème ne faisant pas appel à la notion de limite ; 3/ une discussion sur les enjeux d'un travail explicite sur les propriétés de l'ensemble de départ des fonctions considérées en analyse.

⁹ Dans une activité multi-preuves, on propose aux élèves ou aux étudiants plusieurs preuves d'un même résultat mathématique avec des objectifs d'apprentissages liés à la preuve comme objet (Battie, 2022) ou liés à un concept, par exemple le concept de complétude pour les ensembles de nombres (Durand-Guerrier, 2024).

2.1. Un exemple de preuve du théorème des valeurs intermédiaires dans un manuel du secondaire

Le manuel que nous avons retenu est le manuel en ligne Sésamath Mathématique Terminale Spécialité (2020), qui est largement utilisé en France.

On trouve dans la partie cours l'énoncé du théorème et les grandes lignes de la démonstration.

Théorème – Valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration – l'idée de la démonstration est d'encadrer k dans des intervalles de plus en plus petits par un procédé de dichotomie et de montrer l'existence de c par la continuité de la fonction f par passage à la limite. (*op. cit.* p. 116)

Dans le paragraphe « idée de la démonstration », le résultat utilisé implicitement est la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction :

Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est continue en un point a si et seulement si pour toute suite convergente vers a , l'image de cette suite par f converge vers $f(a)$.

La démonstration est suivie de quelques remarques, dont l'une fait appel à l'idée intuitive de connexité pour la courbe (« l'existence d'une solution peut s'expliquer par l'absence de saut de la courbe C . »), mais il n'est pas fait mention de la nécessaire connexité de l'ensemble de départ. Le fait que le théorème des valeurs intermédiaires nécessite que le domaine de la fonction soit connexe (autrement dit complet au sens de Dedekind) est ainsi occulté, ceci n'étant pas visible sur la représentation graphique, puisque comme on l'a déjà dit, on ne peut pas distinguer visuellement la représentation graphique d'une fonction définie sur \mathbb{R} de la représentation graphique de sa restriction à \mathbb{Q} . Pour aller plus loin, les élèves sont invités à prouver le théorème à l'exercice 81, page 132.

La méthode proposée (dichotomie) est proche de la méthode de Bolzano (1817) dans son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires. L'axiome de complétude mobilisé est la convergence des suites adjacentes (utilisé par Cauchy (1821) dans sa deuxième preuve du théorème des valeurs intermédiaires)¹⁰.

Dans ce qui suit, nous proposons une preuve du théorème des valeurs intermédiaires utilisant la connexité des intervalles de \mathbb{R} .

¹⁰ Pour une discussion sur les preuves respectives de Bolzano et Cauchy, voir Durand-Guerrier (2022b).

2.2. Une preuve du théorème des valeurs intermédiaires utilisant la connexité des intervalles de \mathbb{R}

L'énoncé est le même que celui de Sésamath cité dans la section 3.1.

Soit c un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

On considère l'ensemble A défini par $A = \{x \in [a,b], f(a) \leq f(x) \leq c\}$ et l'ensemble B défini par $B = \{x \in [a,b], c \leq f(x) \leq f(b)\}$; autrement dit, A est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[f(a),c]$, et B est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[c,f(b)]$.

Notons C l'image réciproque de l'intervalle fermé $[f(a),f(b)]$; comme

$[f(a),f(b)] = [f(a),c] \cup [c,f(b)]$, on a $C = A \cup B$ (l'image réciproque d'une réunion est égale la réunion des images réciproques).

Comme f est continue, l'image réciproque d'un intervalle fermé est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R} ; donc A, B et C sont des sous-ensembles fermés de \mathbb{R} ; comme ils sont inclus dans l'intervalle fermé $[a,b]$, ce sont aussi des fermés de $[a,b]$. Dans ce qui suit, nous utilisons le fait que C est un sous-ensemble fermé de $[a,b]$.

1er cas – C est un intervalle fermé. On a vu que C est la réunion de deux fermés; comme C est un intervalle de \mathbb{R} , il est connexe, et donc ces deux fermés ne sont pas disjoints; soit r un élément de l'intersection.

$$r \in A, \text{ donc } f(a) \leq f(r) \leq c$$

$$r \in B, \text{ donc } c \leq f(r) \leq f(b)$$

On en déduit $c \leq f(r) \leq c$, et donc $f(r) = c$.

2^{ème} cas – C n'est pas un intervalle.

Comme C est un sous-ensemble fermé de $[a,b]$, il est fermé dans \mathbb{R} , et donc son complémentaire est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} ; c'est donc une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints¹¹, notés $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$ que l'on peut ordonner de la manière suivante :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in I_i, \forall y \in I_{i+1}, x < y$$

On a $I_1 =]a, a[$. En effet, a est dans C , il n'est donc pas dans I_1 et aucun élément strictement inférieur à a n'est dans C , car C inclus dans $[a,b]$.

Soit c la borne inférieure de I_2 . Comme I_2 est ouvert, c n'appartient pas à I_2 .

¹¹ Il s'agit d'un résultat classique. Voir par exemple Pommellet (1994)

Par suite, l'intervalle fermé $[a,c]$ est inclus dans C .

On a donc $[a,c] = (A \cap [a,c]) \cup (B \cap [a,c])$

Comme A , B et $[a,c]$ sont des sous-ensembles fermés de l'ensemble \mathbb{R} , l'intervalle $[a,c]$ est la réunion de deux fermés. On termine la preuve en utilisant le résultat du premier cas.

La preuve ci-dessus est une preuve par disjonction des cas – on traite d'abord le cas le plus simple, puis on s'y ramène dans le cas général. Dans le cas simple, on identifie un élément candidat dont on démontre qu'il répond à la question. Dans cette preuve, outre les définitions topologiques de la connexité et de la continuité d'une fonction, l'ordre joue un rôle essentiel pour : 1/ ordonner les intervalles ouverts qui composent le complémentaire de C , 2/ déterminer l'intervalle I_1 , 3/ considérer la borne inférieure de I_2 et 4/ pour conclure en utilisant l'antisymétrie de la relation d'ordre standard de \mathbb{R} .

2.3. Les enjeux d'un travail explicite sur les propriétés de l'ensemble de départ des fonctions considérées en analyse

La preuve proposée au paragraphe 2.2 montre que le théorème des valeurs intermédiaires peut être prouvé sans faire référence à la notion de limite, et que ceci met en jeu de manière explicite des propriétés importantes liées à l'ordre. On pourrait se demander dans quelle mesure un tel travail avec les étudiants est pertinent. Pourtant, les difficultés liées à ces propriétés structurelles de l'ordre sont bien présentes chez les étudiants et se manifestent notamment dans les programmes de préparation à l'enseignement (Durand-Guerrier, 2016 ; Branchetti & Durand-Guerrier, 2023). Trouver des opportunités pour permettre aux étudiants de travailler ces aspects structurels est de ce fait un enjeu important. Comme on l'a vu, le théorème des valeurs intermédiaires est bien adapté pour cela, à condition de s'intéresser explicitement au domaine de définition des fonctions en jeu. Cependant, dans la littérature internationale de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse à la transition lycée-université¹², bien que l'on trouve de nombreux articles mettant en jeu le théorème des valeurs intermédiaires, comme emblématique de cette transition et des difficultés afférentes (e.g. David *et al.*, 2019 ; Lagrange et Laval, 2023), les propriétés structurelles de l'ordre sont rarement évoquées, y compris dans des articles posant explicitement la question de la complétude, comme

¹² Désigné par « Calculus » dans la littérature internationale.

Bergé (2008, 2010)¹³ ou Larsen *et al.* (2022)¹⁴. Nous y voyons des opportunités manquées dans la perspective d'une conceptualisation adéquate des propriétés des corps ordonnés de nombres qui sont au cœur de l'analyse, ainsi que d'un renforcement des compétences liées à la preuve.

Dans la section suivante, nous présentons ces enjeux dans le cas de l'intégrale en appui sur les travaux de thèse de Gaëtan Planchon (Planchon, 2022). Nous mettons notamment en lumière comment le choix de définition favorise ou non l'explicitation des propriétés de l'ordre.

3. Les opportunités de rendre visible l'ordre dans l'étude de l'intégrale à la transition lycée-université

Comme nous l'avons montré dans les sections précédentes, les choix curriculaires tendent à masquer pour les élèves et les étudiants le rôle de l'ordre en analyse à la transition secondaire-supérieur. Dans cette section, nous nous proposons de montrer 1/ que ceci vaut aussi pour l'enseignement de l'intégrale ; 2/ qu'il est possible de travailler l'intégrale en mettant en avant l'ordre et que ceci est pertinent pour une appropriation adéquate de ce concept à la transition secondaire-supérieur.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'enseignement de l'intégrale des deux côtés de la transition lycée université. En effet, l'intégrale est enseignée à la fin du lycée en France (en spécialité mathématique et en mathématique complémentaire) et dans la plupart des filières scientifiques à l'université.

Dans les programmes actuels de la classe de terminale spécialité mathématiques, l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est définie comme aire sous la courbe :

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par *les primitives*. (Annexe du Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019)

Nous verrons que le choix de la définition de l'intégrale au lycée, le choix des tâches proposées, des techniques attendues peut cacher des propriétés relatives à l'ordre et à la complétude.

De l'autre côté de la transition, nous nous intéresserons à l'intégrale de Riemann enseignée à l'université. L'analyse épistémologique menée par Planchon (2022)

¹³ Il faut noter cependant que la preuve de l'équivalence entre la connexité de K et l'axiome de la borne supérieure pour un corps ordonné K se trouve dans l'annexe 3.1 de sa thèse (Bergé, 2004, p. 200).

¹⁴ Voir Durand-Guerrier (2024) pour une analyse de ces travaux.

explicite le fondement de cette intégrale sur la construction de l'ensemble des nombres réels et la complétude. Plusieurs définitions équivalentes de l'intégrale de Riemann sont possibles, et nous montrerons par des exemples que les choix des définitions de l'intégrale peuvent masquer ou mettre en avant les propriétés liées à l'ordre dans les preuves.

3.1. L'intégrale dans le manuel Sésamath

L'intégrale au lycée, pour une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ est définie comme aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Les programme de la spécialité mathématique en terminale le précise : il s'agit de s'appuyer sur la notion intuitive d'aire. Cette notion est développée depuis l'école élémentaire (avec des procédures de comptage de carré) et tout au long du collège (avec l'application des formules d'aire). La mesure de Jordan (Lebesgue, 1975) des surfaces quarrables du plan apparaît comme une formalisation possible de la notion d'aire (Planchon, 2022) qui fonde l'intégrale du lycée. Cette mesure possède des propriétés fondamentales, liées à l'ordre : l'invariance par isométrie, et la croissance. Du fait de la définition de l'intégrale, plusieurs relations d'ordre sont en jeu : d'une part l'ordre sur les ensembles quarrables du plan et d'autre part sur les nombres réels. Dans cette partie, nous analysons certains choix de transposition didactique (en particulier l'usage de certains ostensifs liés à l'ordre) à partir de l'étude d'un manuel scolaire de la classe de terminale mathématique spécialité : le manuel Sésamath. Dans ce manuel, le *calcul intégral* est le dernier des huit chapitres de la partie *analyse*. Nous limitons notre analyse à la preuve du *théorème fondamental de l'analyse* faisant le lien entre intégrale et primitive, puis à des tâches dont la réalisation mobilise la *méthode des rectangles*. L'énoncé du théorème fondamental de l'analyse est le suivant : si f est une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$, alors la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, on a $F'(x) = f(x)$. D'après le programme officiel, la preuve de ce théorème est exigible de la part des élèves. La preuve de ce théorème est détaillée dans le manuel Sésamath (Figure 1).

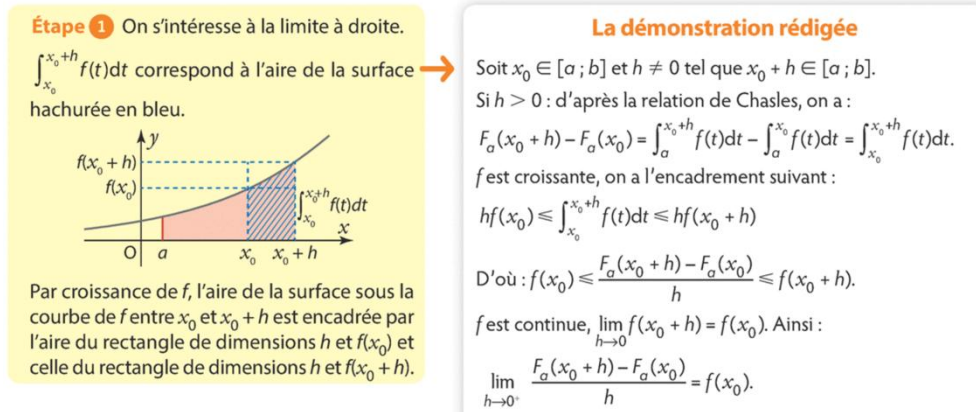


Figure 1. Preuve du théorème fondamental de l'analyse (Sésamath, 2020, p. 252)

Plusieurs ostensifs liés à l'ordre apparaissent dans la preuve : on trouve les mots « croissance », « encadrée par », « encadrement » et le symbole \leq . Précisons que la croissance de f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ se traduit par :

$$\forall a, b \in [x_0, x_0 + h], a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Et on peut en déduire seulement que

$$\forall x \in [x_0, x_0 + h], f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$$

Cette inégalité ne permet pas d'obtenir l'inégalité attendue car la positivité de l'intégrale (en fait, la croissance de l'application qui à toute fonction intégrable sur $[a, b]$ associe son intégrale) n'est pas disponible à ce niveau-là du cours, puisque la positivité utilise la linéarité de l'intégrale (qui elle-même utilise le lien entre intégrale et primitive). Compte tenu du recours au registre graphique, nous pouvons faire l'hypothèse que c'est la notion intuitive d'aire qui est mobilisée ici, autrement dit une relation d'ordre sur les ensembles mais pas sur les nombres. En effet, la croissance de la fonction f permet en fait de justifier que la surface sous la courbe (en tant que sous ensemble du plan), hachurée en bleu sur le graphique, est comprise (au sens de l'inclusion) entre deux rectangles. La croissance de la mesure des aires, qui se démontre à partir des axiomes de mesure, permet de justifier que l'on obtient alors l'encadrement souhaité. Le recours à l'intuition géométrique masque donc cette articulation entre deux ordres *via* la croissance de la mesure d'aire : l'ordre relatif à la notion d'inclusion et l'ordre sur les nombres. Le théorème fondamental de l'analyse est un outil technologique qui justifie les différentes techniques de calculs que l'on retrouve plus tard dans le développement du chapitre (calculs d'intégrale

avec les primitives), mais également les propriétés de l'intégrale. Les notions spécifiques à l'ordre apparaissent donc ici à un niveau théorique, qui n'est pas explicite dans le manuel.

Par ailleurs, le programme officiel¹⁵ indique : « on mettra en regard les écritures $\int_a^b f(t)dt$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$. Cette mise en regard semble se réaliser à partir de la réalisation d'un type de tâche « estimer une intégrale par la méthode des rectangles ». Dans le manuel Sésamath, la technique pour réaliser ce type de tâche est décrite grâce à la propriété de la Figure 2.

Propriété Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude et on construit des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ».

On note \mathcal{A}_i , resp. \mathcal{A}_s , l'aire des rectangles inférieurs (resp. supérieurs).

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_s = \int_a^b f(x)dx$.

De plus, si la fonction est monotone : $\mathcal{A}_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathcal{A}_s$.

Exemple Pour $n = 4$

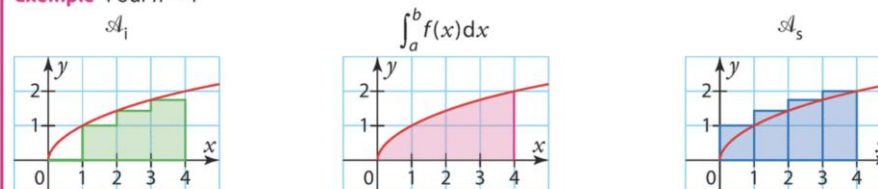


Figure 2. Méthode des rectangles cas rationnel (Sésamath, 2020, p. 242)

Dans cette propriété, les ostensifs liés à l'ordre sont « amplitude », « inférieurs », « supérieurs », « monotone » et le symbole \leq . On peut remarquer que le choix de ne pas donner précisément des définitions des différents objets en jeu implique ici des confusions possibles (lorsque les fonctions considérées ne sont pas croissantes) : les rectangles « inférieurs » peuvent correspondre aux rectangles sur $[x_i, x_{i+1}]$ de hauteur $f(x_i)$ alors que les rectangles « supérieurs » correspondent aux rectangles de hauteur $f(x_{i+1})$. Une autre interprétation possible est que le rectangle « inférieur » sur $[x_i, x_{i+1}]$ correspond au rectangle de hauteur $\min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ alors que le rectangle « supérieur » sur $[x_i, x_{i+1}]$ correspond au rectangle de hauteur $\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$. La somme des aires des rectangles considérés correspond alors aux sommes de

¹⁵ Annexe 1 du Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019, page 15.

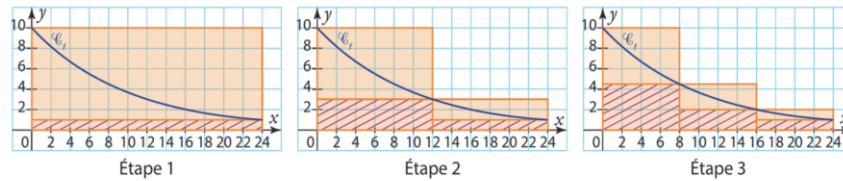
Darboux. L'encadrement de l'intégrale par deux nombres articule aussi ici, en fait, l'inclusion pour les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 et l'ordre sur les nombres via la croissance de l'aire. La mise en œuvre de la technique pour réaliser le type de tâche « estimer une intégrale par la méthode des rectangles » consiste donc à s'appuyer sur le dessin et à sommer les aires des rectangles. L'articulation entre les différents ordres est encore au niveau de la théorie, non explicite.

Par ailleurs, la notion de limite apparaît ici. Le caractère complet de \mathbb{R} est nécessaire pour pouvoir justifier l'existence de la limite, mais l'usage du formalisme de la limite masque ce lien. Par ailleurs, on peut remarquer que, dans le manuel Sésamath, deux tâches isolées sont proposées : la première consiste à encadrer $\int_0^1 x^2 dx$ par la méthode des rectangles, ce qui donne un encadrement par les suites (explicites) $u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et $v_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. Ces suites (u_n) et (v_n) convergent vers $1/3$ donc, par le théorème des gendarmes, on trouve que l'intégrale vaut bien $1/3$. Le choix de calculer explicitement les suites de rationnels (u_n) et (v_n) , bien qu'il permette le calcul de l'intégrale, masque le fait de travailler dans l'espace complet des nombres réels. Une deuxième tâche isolée est proposée (voir Figure 3).

B ► Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

On considère la fonction f sur $[0 ; 24]$ définie par $f(x) = e^{-x \ln(\frac{9}{24}) + \ln(10)}$ représentée en bleu ci-dessous.

Pour estimer l'aire \mathcal{A} sous la courbe de f entre 0 et 24, on découpe l'aire de deux manières différentes.



1. Proposer un schéma de l'étape 4 puis décrire la construction des rectangles.
2. On note U_n la somme des aires des rectangles hachurés et V_n la somme des aires des rectangles colorés à l'étape n . On a donc $U_1 = 24 \times f(24)$ et $V_1 = 24 \times f(0)$. Exprimer U_2 et V_2 en fonction de f , puis U_3 et V_3 .
3. L'intervalle $[0 ; 24]$ est maintenant découpé en 12. Comment pensez-vous que les deux suites (U_n) et (V_n) évoluent ? Et si le découpage augmente, que se passe-t-il ?
4. Proposer un programme Python permettant de déterminer U_n et V_n . Que peut-on dire de $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$?

Remarque Ce nombre, correspondant à l'aire \mathcal{A} , se note $\int_0^{24} f(x) dx$.

Figure 3. Méthode des rectangles (Sésamath, 2020, p. 240)

Il s'agit d'approcher, à l'aide d'un programme en Python, l'intégrale $\int_0^{24} e^{-x \ln(\frac{9}{24}) + \ln(10)} dx$.

La réalisation de la tâche de la question 4 permet d'obtenir des approximations décimales de u_n et v_n pour différentes valeurs de n . On peut faire l'hypothèse que la

réponse attendue est que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Mais la valeur de l'intégrale (non attendue) est $\frac{10}{\ln\left(\frac{9}{24}\right)}$, qui est un nombre irrationnel.

A priori, l'outil informatique donnera des valeurs décimales approchées de la limite. Nous faisons l'hypothèse qu'il n'est pas attendu des élèves une justification de l'existence de la limite de (u_n) et (v_n) , ni du fait que ces limites sont égales. Ce qui permet de le justifier est la propriété de complétude de \mathbb{R} , qui n'est pas la justification attendue et reste donc dans le topos de l'enseignant. Le choix de mobiliser l'outil informatique, bien que pertinent, pourrait s'accompagner d'un travail sur la convergence des suites (u_n) et (v_n) , par exemple en prouvant que ces suites sont adjacentes reliant ainsi l'intégrale à la propriété de la borne supérieure.

3.2. L'intégrale de Riemann à l'université

Nous allons montrer dans cette partie deux choix possibles concernant la définition de l'intégrale de Riemann dans le premier cycle à l'université, où l'intégrale de Riemann est enseignée pour les fonctions d'un segment de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Nous nous appuyons sur le modèle praxéologique de référence pour l'enseignement de l'intégrale de Riemann à l'université construit par Planchon (2022) : cet enseignement commence par l'étude de l'intégrale des fonctions en escalier, puis des fonctions intégrables. L'intégrale de Riemann est alors définie à partir de l'intégrale des fonctions en escalier, puis le lien avec le calcul de primitives pour le cas des fonctions continues est établi.

Le premier choix de définition de l'intégrale (Organisation 1), que l'on retrouve par exemple dans Briane-Pagès (2012), consiste à définir l'intégrale comme la limite d'une suite de Cauchy dans \mathbb{R} donc convergente. Nous verrons que ce choix (qui peut être relié à un choix de construction du corps des réels comme ensemble des limites des suites de Cauchy) conduit à produire des preuves, efficaces, mais qui cache différentes propriétés liées à l'ordre. Le deuxième choix (Organisation 2), que l'on trouve par exemple dans l'ouvrage Analyse : Cours de mathématiques - Première année (Exo7, 2016), définit l'intégrale comme une coupure de \mathbb{R} . Dès lors, les preuves mobilisent plus explicitement les propriétés liées à l'ordre.

3.2.1 Organisation 1

Dans l'ouvrage de Briane-Pagès (2012, théorie de l'intégration), la condition d'intégralité est énoncée comme suit :

Une fonction f définie sur un segment $[a,b]$ de \mathbb{R} est dite *Riemann-intégrable* lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\int_a^b \psi \leq \varepsilon$.

Pour construire l'intégrale, les auteurs introduisent des suites de fonctions :

si f est Riemann-intégrable, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n telles que $|f - \varphi_n| \leq \psi_n$ et $\int \psi_n \leq 1/n$.

L'introduction de ces deux suites de fonctions en escalier (φ_n) et (ψ_n) va conduire à la mobilisation de la notion de limite et du formalisme lié à cette notion. Ainsi, lorsque qu'une fonction f est Riemann-intégrable, on montre que la suite $(\int_a^b \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} qui est donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix de la suite (φ_n) et est alors notée $\int_a^b f$. Le caractère complet de \mathbb{R} est nécessaire ici (mais non souligné dans le manuel). Le fait de définir l'intégrale de Riemann comme la limite de suites de Cauchy a des conséquences dans la rédaction des preuves.

Prenons par exemple la preuve de la linéarité. La propriété de linéarité de l'intégrale s'énonce comme suit :

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables et $\lambda \neq 0$ un réel. Alors $f + \lambda g$ est Riemann-intégrable et $\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g$.

Le fait que $f + \lambda g$ est Riemann-intégrable provient de l'inégalité triangulaire, qui est une propriété de la relation d'ordre. Pour montrer la linéarité de l'intégrale, Briane-Pagès utilisent la notion de limite : en notant (φ_n) et (ϕ_n) les suites de fonctions en escalier associées à f (respectivement à g), on peut écrire $\int f + \lambda g = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi_n + \lambda \phi_n$. Par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier, on a donc $\int f + \lambda g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi_n + \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n = \int f + \lambda \int g$.

La technique mise en œuvre ici, efficace au demeurant, s'appuie sur le formalisme de la limite, et sur les propriétés de la limite (et de la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier). La notion d'ordre, et la complétude de \mathbb{R} ne sont pas visibles dans cette procédure, aucun ostensif lié à la notion d'ordre n'apparaît dans cette preuve.

3.2.2 Organisation 2

Un autre choix d'organisation est possible, et nous faisons l'hypothèse qu'elle rend plus visible les propriétés de l'ordre et de complétude, en particulier le caractère connexe de \mathbb{R} . On peut énoncer la condition d'intégralité de la façon suivante :

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . f est dite Riemann-intégrable lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \int \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Une fonction intégrable sur $[a, b]$ est donc nécessairement bornée, ce qui permet de considérer les ensembles non vides :

$$m_f = \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \text{ en escalier sur } [a, b], \varphi \leq f \right\}$$

et

$$M_f = \left\{ \int_a^b \psi, \psi \text{ en escalier sur } [a, b], \psi \geq f \right\}$$

Ces ensembles vérifient :

$$\forall x \in m_f, \forall y \in M_f, x \leq y$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in m_f, \exists y \in M_f, y - x \leq \varepsilon$$

L'intégrale de f , noté $\int_a^b f$, est donc l'unique réel qui réalise la coupure (voir section sur l'étude épistémologique), c'est-à-dire $\int_a^b f$ est la borne supérieure de m_f et la borne inférieure de M_f .

Une preuve possible de la propriété $\int (f + g) = \int f + \int g$ est alors :

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables, et soit $\varepsilon > 0$. On considère les fonctions en escalier $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ telles que

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \text{ et } \int \psi_1 - \varphi_1 \leq \varepsilon/2$$

$$\varphi_2 \leq g \leq \psi_2 \text{ et } \int \psi_2 - \varphi_2 \leq \varepsilon/2$$

Il est clair que $\varphi_1 + \varphi_2$ et $\psi_1 + \psi_2$ sont en escalier sur $[a, b]$ et que

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2 \text{ et } \int \psi_1 + \psi_2 - (\varphi_1 + \varphi_2) \leq \varepsilon$$

Ainsi, $f + g$ est Riemann-intégrable.

On a

$$\int \varphi_1 + \varphi_2 \leq \int f + g \leq \int \psi_1 + \psi_2 \quad (*)$$

car $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$.

De plus,

$$\int \varphi_1 \leq \int f \leq \int \psi_1 \text{ et } \int \varphi_2 \leq \int g \leq \int \psi_2$$

donc

$$\int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2 = \int_a^b \varphi_1 + \varphi_2 \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b \psi_1 + \psi_2 = \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 \quad (**)$$

D'après (*) et (**), on a donc :

$$|\int f + g - (\int f + \int g)| \leq \int \psi_1 + \psi_2 - (\int \varphi_1 + \varphi_2)$$

Soit

$$|\int f + g - (\int f + \int g)| \leq \int \psi_1 - \varphi_1 + \int \psi_2 - \varphi_2 \leq \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

Cette dernière inégalité, vraie pour tout $\varepsilon > 0$, donne donc l'égalité

$$\int f + g = \int f + \int g.$$

Dans cette preuve, plusieurs propriétés relatives à l'ordre sont mobilisées et peuvent être explicitées :

- Une caractérisation de la borne supérieure/inférieure
- La compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition dans \mathbb{R}
- La caractérisation de l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$
- $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}, (a \leq x \leq y \leq b) \Rightarrow |x - y| \leq |b - a|$

4. Conclusion générale

Nous avons montré que les choix de transposition didactique faits dans le curriculum français de privilégier un point de vue métrique en analyse contribue à invisibiliser le rôle de l'ordre. Ces choix de transposition didactique ont fait la preuve de leur efficacité ; cependant, ils ont leurs limites. Nous faisons l'hypothèse que cette invisibilité de l'ordre est problématique lorsqu'on a besoin de l'ordre dans les études avancées, notamment parce que le corps ordonné continu des nombres réels ne peut pas jouer le rôle de modèle pour la topologie de l'ordre.

Nous avons montré que d'autres choix théoriques complémentaires sont possibles. En particulier, choisir la connexité, c'est-à-dire le point de vue de Dedekind en appui sur la droite réelle, comme caractérisation de la complétude de \mathbb{R} permet de rendre plus visible le rôle de l'ordre, notamment dans les preuves.

Nous ne disons pas qu'il faut substituer un point de vue à l'autre, mais suivant en cela Durand-Guerrier et Tanguay (2018), nous soutenons qu'il est important de faire vivre plusieurs points de vue théoriques pour une conceptualisation adéquate des nombres réels, et par suite de l'analyse.

Dans l'enseignement secondaire et en début d'université, les relations d'ordre autre que l'ordre standard sur les nombres ne sont pas travaillées, alors qu'elles sont rencontrées très tôt dans le parcours scolaire (Durand-Guerrier & Saby, 2023) ; les relations de comparaison qui ne sont pas des relations d'ordre (notamment les préordres) ne sont pas des objets d'étude : elles sont travaillées au niveau des techniques, les justifications technologiques ne sont pas discutées avec les étudiants.

Dans cet article, nous avons proposé des choix théoriques permettant de travailler avec les étudiants et les enseignants les propriétés de l'ordre, notamment en ce qui concerne les choix de définitions et leur impact sur les preuves associées. Cela

s'inscrit dans un travail toujours en cours sur la place et le rôle de l'ordre à la transition lycée université. Nous poursuivons actuellement l'étude de la transposition didactique et nous commençons à mettre en place des expérimentations de type laboratoire pour tester la faisabilité et la pertinence des pistes envisagées, auprès de publics étudiants et enseignants, avant de penser à une implémentation en classe ordinaire à la transition lycée-université, ceci s'inscrivant dans la méthodologie de l'ingénierie didactique (González-Martín *et al.*, 2014). Parmi les pistes envisagées pour des activités permettant de faire travailler l'ordre, nous retenons les problèmes de points fixes (Durand-Guerrier, 2016), la résolution des équations fonctionnelles dans les ensembles de nombres, sans faire d'hypothèse sur la continuité ou la dérivabilité de la fonction (Durand-Guerrier *et al.* 2019, Durand-Guerrier & Planchon, 2024).

Ce qui est en jeu dans ce que nous avons présenté s'inscrit concrètement dans la dimension duale de la transition secondaire supérieur. Nous faisons l'hypothèse que les choix de transposition didactique faits à l'université en France, avec un primat accordé aux espaces métriques et au rôle des limites en analyse, au détriment des espaces topologiques ordonnés et au rôle de la borne supérieure, a un impact sur les choix faits dans le secondaire. Cette hypothèse s'appuie notamment sur le fait que le conseil supérieur des programmes, en France, réunit des universitaires, des chercheurs, des spécialistes du système éducatif et des représentants élus de la Nation et de la société¹⁶.

Dans le secondaire, l'ordre ne fait pas l'objet d'un travail explicite ; en analyse, le recours à la distance est le plus souvent privilégié par rapport au recours aux intervalles et aux encadrements, invisibilisant de fait le rôle de l'ordre. En retour, les étudiants arrivant à l'université ne disposent pas des connaissances sur l'ordre dont ils vont avoir besoin dans leurs parcours (Robert & Vandebrouck, 2023), lesquelles sont par ailleurs peu travaillées à l'université du fait précisément des choix de transposition didactique. L'insuffisance des connaissances sur l'ordre en fin de licence se retrouve au niveau master dans le cadre de la formation des enseignants du second degré en mathématiques (Branchetti & Durand-Guerrier 2023). En outre, comme nous l'avons illustré dans cet article, redonner une place à l'ordre permet d'enrichir le répertoire de preuves à dispositions des élèves et des étudiants à la transition secondaire-supérieur, ce qui est un enjeu crucial de cette transition (Selden, 2012).

Bibliographie

¹⁶ <https://www.education.gouv.fr/le-conseil-superieur-des-programmes-41570>

BATTIE, V. (2022). Pouvoir générique d'une preuve. *Actes du colloque CORFEM 2021* (p.4-15). Commission Inter-IREM-CORFEM.

<https://bibnum.publimath.fr/IWF/IWF22002.pdf>

BERGÉ, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria*. Thèse de l'université de Buenos Aires (Argentine).

BERGÉ, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 217–235. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5>

BERGÉ, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227. <https://doi.org/10.1080/00207390903399638>

BOLZANO, B. (1817). *Rein Analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegen gesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Abhandlung. der Kôn. Bôhm. Gesell. der Wiss., Prag, 1817traduction française par J. Sebestik, in *Revue d'Histoire des Sciences*, t. XVII, 1964, p. 129-164).

BRANCHETTI, L., & DURAND-GUERRIER, V. (2023). Secondary prospective teachers grappling with ordered dense or discrete denumerable number sets: a pilot study. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 43 (1), 47-86.

BRIANE, M., & PAGES, G. (2012). *Théorie de l'intégration*. Vuibert.

BRONNER, A. (1997) Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée. Thèse de l'Université de Grenoble (France).

CAUCHY, A.L. (1821). *Cours d'analyse de L'École Royale Polytechnique, Part 1 : Analyse algébrique*. Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi.

CHEVALLARD, Y., & JOSHUA, M.A. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné (nouv. éd. revue et augmentée) suivi de Un exemple d'analyse de la transposition didactique*. La Pensée Sauvage éditions.

CHOQUET, G. (1984). *Cours de Topologie* (2ème édition). Masson.

CHOQUET, G. (2002). *Cours de Gustave Choquet. Les cours à la Sorbonne. Les cours à l'école Polytechnique*. Ellipses.

DAVID, E.J., ROH, K.H., & SELLERS, M.E. (2019). Teaching the representations of concepts in calculus: The case of the intermediate value theorem. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 30(2), 191–210. <https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1540023>

- DEDEKIND, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Vieweg, Braunschweig.
- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5–31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- DURAND-GUERRIER, V. (2016). Conceptualization of the continuum an educational challenge for undergraduate students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2 (3), 338-361. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0033-2>
- DURAND-GUERRIER, V. (2022a). Proving and defining in mathematics. Two intertwined mathematical practices. R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen, C. Winsløw (Eds.) *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education*, Springer International Publishing, pp.225-241, *Advances in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_11
- DURAND-GUERRIER, V. (2022b). On the dialectical relationship between truth and proof: Bolzano, Cauchy and the intermediate value theorem. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy. <https://hal.science/hal-03746871>
- DURAND-GUERRIER, V. (2024). Contribution to didactic research on the completeness/incompleteness of ordered fields of numbers. *ZDM Mathematics Education*, 56(7), 1503 - 1515. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01635-2>
- DURAND-GUERRIER, V. & TANGUAY, D. (2018). Working on proof as contribution to conceptualisation – The case of R-completeness. A. J. Stylianides, G. Harel (Eds), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An international perspective*, Springer International Publishing, pp.19-34, ICME-13 Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_2
- DURAND-GUERRIER, V., MONTOYA, E., & VIVIER, L. (2019) Real exponential in discreteness-density-completeness contexts. J. Monaghan, E. Nardi, T. Dreyfus (Eds). *Calculus in upper secondary and beginning university mathematic, proceedings of Calculus conference* (pp. 87-90), University of Agder, Kristiansand, Norway, August 6-9, 2019.
- DURAND-GUERRIER, V., & SABY, N. (2023). Usages de la théorie des champs conceptuels en didactique des mathématiques. L'exemple de la transitivité. *Caminhos_da_educacao_matematica em revista* (Online). https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/1607
- DURAND-GUERRIER, V., & PLANCHON, G. The study of functional equations to highlight the role of order in proof and proving at the interface between algebra and

analysis. In A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa, & N. Lombard (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM2024) (pp. 95-104). Universitat Autònoma de Barcelona and INDRUM.

EXO7. (2016). *Analyse : cours de mathématiques – Première année.*

<http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S., BLOCH, I., DURAND-GUERRIER, V., & MASCHIETTO, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: Cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117–134. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918347>

LAGRANGE, J.B., & LAVAL, D. (2023). Connecting algorithmics to mathematics learning: a design study of the intermediate value theorem and the bisection algorithm. *Educational Studies in Mathematics*, 112, 225–245. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10192-y>

LARSEN, S., ALZAGA ELIZONDO, T., & BROWN, D. (2022). Following in Cauchy's Footsteps: Student Inquiry in Real Analysis. In: Biehler, R., Liebendörfer, M., Gueudet, G., Rasmussen, C., Winsløw, C. (eds) *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education*. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_21

LEBESGUE, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard.

MOUNIER, G. (2018). 3 est-il inférieur ou égal à 4 ? In *APMEP Au fil des maths*. N° 528. 4 juillet 2018. <https://bibnum.publimath.fr/AAB/AAB18015.pdf>

PLANCHON, G. (2022). *Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale* (Thèse de doctorat, Université de Montpellier). <https://theses.hal.science/tel-04103500/>

POMMELLET, A. (1994). *Cours d'analyse*. Ellipses.

REVUZ, A., & REVUZ, G. (1966). *Le Cours de l'A.P.M., tome 3 - Éléments de Topologie*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. <https://publimath.apmep.fr/numerisation/AAP/AAP66001/AAP66001.pdf>

ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2023). Proximités discursives entre le discours de l'enseignant et les activités des élèves pendant les cours : l'exemple de l'introduction de la définition formalisée du sens de variation des fonctions. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 106-143.

- RUSSELL, B. (1903). *Principles of Mathematics*, v. 1, University of Michigan Library.
- SELDEN, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In: Hanna, G., de Villiers, M. (eds) *Proof and Proving in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 15. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_17
- SESAMATH Terminale Spécialité (2020). Magnard.
https://manuel.sesamath.net/numerique/?ouvrage=mstsspe_2020
- SINACEUR, H. (1992) La Construction Algébrique du Continu : Calcul, Ordre, Continuité. J.M. Salanksis & H. Sinaceur (Eds). *Le labyrinthe du continu, Colloque de Cerisy*, 104-116. Springer.
- TARSKI A. (1994). *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*. 4th edition by Jan Tarski. Oxford University Press.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.

VIVIANE DURAND-GUERRIER

Université de Montpellier (France), IMAG, CNRS, UM
viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

GAËTAN PLANCHON

Université de Montpellier (France), IMAG, CNRS, UM
gaetan.planchon@umontpellier.fr

NICOLAS SABY

Université de Montpellier (France), IMAG, CNRS, UM
nicolas.saby@umontpellier.fr