I.R.E.M. de STRASBOURG

GROUPE MATH-PHYSIQUE de MULHOUSE

COMPTE-RENDU DE TRAVAUX EFFECTUES EN 1978

FORCES

PHENOMENES PERIODIQUES

QUADRIPOLES

Le groupe "liaison des enseignements de sciences physiques et de mathématiques" travaillant à Mulhouse dans le cadre de l'IREM de Strasbourg vous propose ici des compte-rendus d'une partie de ses activités de l'année scolaire 1977/78. Il fonctionne depuis 1976/77, composé uniquement de physiciens et de chimistes, à l'exception de l'animateur mathématicien. Dès la rentrée 78 il s'ouvrira aux professeurs de mathématiques afin de parvenir à une meilleure coordination des deux enseignements. Aucun des documents qui suit ne résulte (encore) d'une expérimentation en classe. Ont participé à ce travail :

Mme AALBERG (Mulhouse)	Mme ARNOLD (Mulhouse)
Mr BOISSIERE (Altkirch)	Mme COSTANTINI (Mulhouse)
Mr COSTANTINI (Mulhouse)	Mr HAUMESSER (Guebwiller)
Mme HERMANN (Thann)	Mr HEZELY (Ville)
Mr KOENIG (Mulhouse)	Mr LAENG (Altkirch)
Mme LEIBER (Mulhouse)	Mr LOUVAT (Mulhouse)
Mr MECKER (Mulhouse)	Mr MEYER (Guebwiller)
Mr MOINE (Mulhouse)	Mme PERRIN (Thann)
Mr PIED (Guebwiller)	Mme SCHNEBEL (Mulhouse)
Mr SCHWIEBEL (Mulhouse)	Mlle SERVIGNE (Mulhouse)
Mr SORGIUS (Mulhouse)	Mme STEINMETZ (Mulhouse)
Mr STENGER (Guebwiller)	Mme RITZENTHALER (Mulhouse)

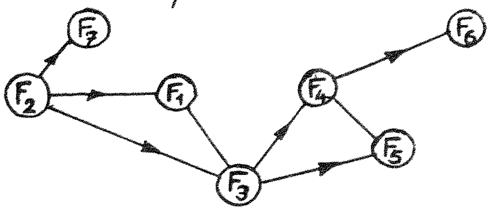
Toutes remarques, critiques, suggestions ou demande d'informations seront accueillies favorablement et sont à adresser à :

Mr MEYER Etienne IREM de STRASBOURG
10 rue du Général Zimmer
67 084 STRASBOURG CEDEX

SOMMAIRE

Documents F comme ... FORCE

Ces sept documents sur les vecteurs et les forces peuvent être lus indépendamment les uns des autres, mais c'est la même conception de la liaison entre vecteurs et forces qui s'y trouve.
Le document F_1 résulte directement d'un groupe de stagiaires.
Les documents F_2, F_4, F_6, F_3 sont des documents de présentation de certaines notions, de travail, ou de synthèses de nombreuses discussions.
Les documents F_5 et F_7 résultent d'un travail personnel de l'animateur du groupe et n'engagent que leur auteur.
Voici un ordre possible de lecture de l'ensemble de ces textes:



F_1 Notion de forces - classe de seconde - (p.6)

tour d'horizon sur l'ensemble de la question et résolution d'exercices. L'accent est mis sur la présentation et l'utilisation des vecteurs. L'introduction des nouveaux programmes en seconde en 78/79 nous a amené à raccourcir considérablement la présentation de ce document qu'il faudra reprendre en fonction des recherches actuellement menées et de notre première année d'expérience en classe.

F_2 Vecteurs (p.11)

on y trouve les vecteurs géométriques tels qu'ils sont définis en quatrième. On y fait le lien avec la définition souvent plus commode: direction, sens, intensité. On essaye d'y préciser le vocabulaire et de donner les résultats essentiels sur le produit scalaire et le produit vectoriel. On y fait aussi le lien, non indispensable, avec vecteur-lié, vecteur-glissant, et vecteur-libre.

F_3 Représentation et structure de l'ensemble des vecteurs-forces

On représente généralement un vecteur-force par un vecteur géométrique. Ce document distingue ces deux notions et tente de montrer qu'il est légitime de les identifier, et en guise de conclusion, un appel aux professeurs de mathématiques... p. 23

F_4 Torseur p. 26

C'est l'outil mathématique permettant de résoudre les problèmes de corps soumis à plusieurs forces (action) ; il montre en particulier que toute action n'est pas équivalente à une force et justifie qu'on représente l'action de la pesanteur sur un corps par une force "appliquée" au centre de gravité.

F_5 Grandeur vectorielle de l'espace physique p. 34

C'est un approfondissement du document F_3 et qui "démontre" la règle du parallélogramme

F_6 Potence p. 49

Avertissement au professeur de physique pour qu'il garde contact avec le professeur de mécanique ... ou application du document F_4.

F_7 Mécanique - statique - géométrie : p. 51

Quelques théorèmes de géométrie nés de la méthode du funiculaire employée en statique par nos collègues de mécanique.

Documents P comme ... Périodiques et ... Phénomènes

Il s'agit de trois documents sur l'utilisation des complexes et des vecteurs géométriques pour des phénomènes "sinusoïdaux" de même fréquence.

(P1) Structure de l'ensemble des fonctions sinusoïdales de même fréquence : C'est un document essentiellement mathématique (p. 65) dont il serait aisé de tirer un cours ou un problème pour une terminale scientifique par exemple

(P2) Somme de deux courants sinusoïdaux - Fresnel - (p. 79)
Présentation très simplifiée mais fidèle du document P1, utilisable en terminale scientifique non poussée en mathématiques.

(P3) Utilisation des complexes pour le courant alternatif sinusoïdal (p. 88)
Production d'une tension sinusoïdale et recherche de l'impédance d'une portion de circuit.

Documents Q comme ... Quadripôles

L'effort a été essentiellement porté sur des questions d'ordre général quant à l'utilisation, la reconnaissance et la classification des quadripôles et des matrices qui y sont attachées. Ces questions n'ont souvent été perçues clairement qu'après une première familiarisation (Q_1). On y utilise essentiellement les matrices de chaîne.
Q_2 est un texte de problème posé en mathématique en 1ère E. (à améliorer !) Les quadripôles et les problèmes qu'ils soulèvent constituent une motion très riche d'activités mathématiques.

(Q1) Quadripôles (p. 91)

(Q2) Texte de problème de mathématiques (p. 99)

« Mais de même que certains mets délicats ne s'accommodent pas d'autre chose que d'un bon cru, de même dans le domaine scientifique, il est des circonstances où l'ordre est préférable au chaos. »

M. Bunge

Philosophie de la physique

(Coll. Science Ouverte, Seuil)

« Il est possible de définir en termes algébriques l'espace euclidien à trois dimensions comme un ensemble de triplets ordonnés de nombres réels qui remplissent certaines conditions. Mais tout ceci n'a rien à voir avec la nature du monde extérieur. On ne saurait concevoir d'univers dans lequel les lois de la théorie des ensembles et de la géométrie abstraite de l'espace euclidien à trois dimensions ne fussent point valables, car ces lois ne reposent que sur la signification des termes employés, et non pas sur la structure du monde réel dans lequel nous nous trouvons. »

R. Carnap

les fondements philosophiques de la physique

(Coll. U, Armand Colin)

NOTION DE FORCE

I) Description de quelques forces. Leurs effets

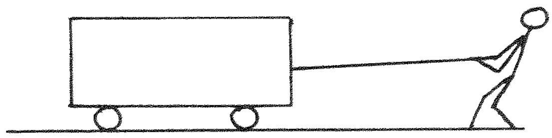
Classement → effet dynamique, effet statique

poids
force musculaire
forces des fluides en mouvement
forces électriques
forces magnétiques
forces élastiques ...

Une force peut se manifester par ses effets dynamiques et/ou statiques. Dans le cas où les notions de vitesse et de quantité de mouvement ont déjà été étudiées, on reliera la notion de force à celle de variation de quantité de mouvement.

II) Caractéristiques d'une force

Exemple : une force exercée par un enfant sur un chariot



L'essentiel est d'isoler le système auquel s'applique la force à étudier et, si possible, de réduire le système à un point.

1°) point d'application : . crochet ou point d'attache pour une force de traction
. centre de gravité pour le poids (voir doc. F_4)

2°) direction : . simple à trouver dans le cas où la force s'exerce par l'intermédiaire d'un fil
. si non, une étude particulière s'impose dans chaque cas.

attention : . la direction du mouvement n'indique pas forcément la direction de la force qui le produit (cf BUP 587 p.49)
exemples : la lune ..., chariot sur des rails.
. si un corps ponctuel A agit sur un corps ponctuel B, la direction de la force exercée par A sur B sera celle de la droite (AB)

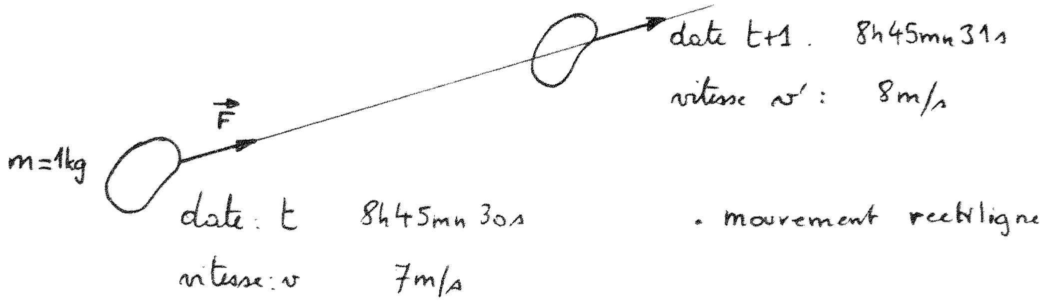
3°) <u>sens</u>. • notion à distinguer de celle de direction
• notion intuitive à trouver dans certains cas
• dans d'autres cas, trouver le sens par le calcul ou une détermination graphique.

4°) <u>intensité</u>. • notion liée à celle d'effort musculaire plus ou moins intense
• elle se mesure avec des dynamomètres étalonnés.

unité ; le Newton (N)

. définition provisoire : une masse de 1 kg est attirée, à Paris, vers la terre, par une force d'intensité égale à 9,81 N

. on peut aussi donner cette autre définition : intensité de la force nécessaire pour faire varier la vitesse d'un corps de masse 1 kg de 1 m/s en une seconde.



remarque : l'intensité de cette force ne dépend pas de la vitesse initiale.

III) Représentation des forces

• définition mathématiques des vecteurs géométriques : classes d'équivalences ...
on peut aussi définir un vecteur par une direction, un sens et une norme
on peut représenter un vecteur $\vec{V}$ en un point par le bipoint (A,B) tel que $\vec{V} = \vec{AB}$

• en physique : une force a quatre caractéristiques dont trois (direction, sens, intensité) définissent ce qu'on appelle un <u>vecteur-force</u> auquel peut être associé un vecteur géométrique, moyennant un choix d'unités.

remarque : le support de la force est une droite dont la direction est celle du vecteur-force, et passant par le point d'application.

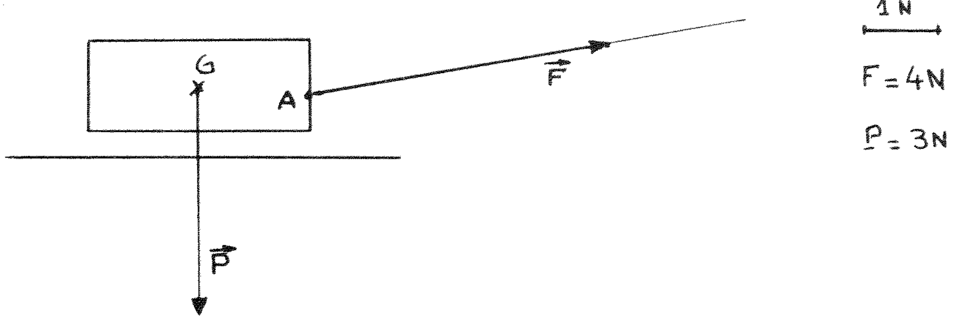
Une force est donc caractérisée par son point d'application et son vecteur - force

On représente une force par :

a) un point A : point d'application

b) un vecteur $\vec{F}$, celui qui est associé au vecteur - force

Cela peut se dessiner par le bipoint (A, B) (une flèche de A vers B) tel que $\vec{AB} = \vec{F}$



IV) Équilibre d'un solide soumis à des forces non parallèles (T.P.)

1°) <u>deux forces</u> : a) même support

b) $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

de telles forces sont dites opposées : même support, sens opposés, même intensité

2°) <u>trois forces</u> : . analyse physique des forces

. représentation de chaque vecteur - force par un vecteur géométrique

équilibre : a) les supports des forces sont concourants

b) $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$

V) Exercice

Soit une sphère de masse m suspendue par l'intermédiaire d'un ressort R à un point fixe. On tire sur la sphère à l'aide d'un fil tendu horizontalement. A l'équilibre, l'axe du ressort fait un angle α avec la verticale. Le ressort a une longueur à vide l_0 et une constante de raideur k. Déterminer la longueur l de R à l'équilibre et l'intensité de la tension du fil.

a) système considéré : la sphère de masse m, supposée ponctuelle.

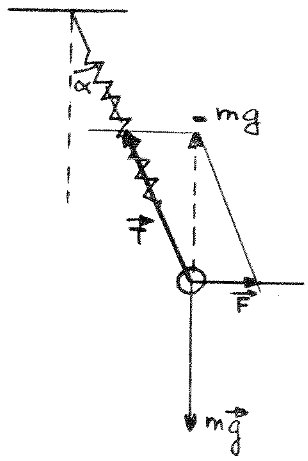
b) forces appliquées à la sphère :

- la tension du ressort, représenté par $\vec{T}$
- le poids de la sphère : $m\vec{g}$
- la tension du fil : $\vec{F}$

c) condition d'équilibre : $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$

(la condition des supports est vérifiée)

1°) première méthode



On doit avoir $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$, donc $\vec{T} + \vec{F} = -m\vec{g}$

$-m\vec{g}$: . vecteur opposé à $m\vec{g}$ (représenté en pointillé : ce n'est pas un vecteur-force supplémentaire)

. décomposé suivant :

l'axe du ressort : $\longrightarrow \vec{T}$

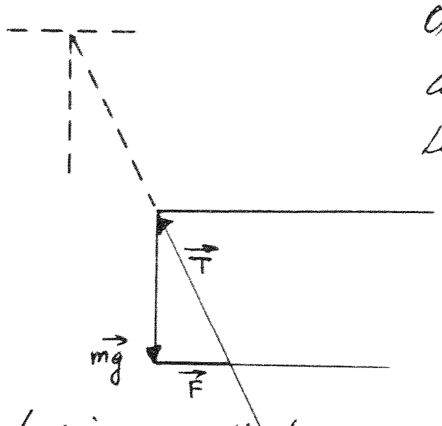
la direction du fil. $\longrightarrow \vec{F}$

On a : $mg = T\cos\alpha$ et $\dfrac{F}{mg} = \operatorname{tg}\alpha$

Or $T = k(l - l_0)$ donc $k(l - l_0) = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

d'où $\boxed{l = l_0 + \dfrac{mg}{k\cos\alpha} \quad \text{et} \quad T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}}$

2°) deuxième méthode

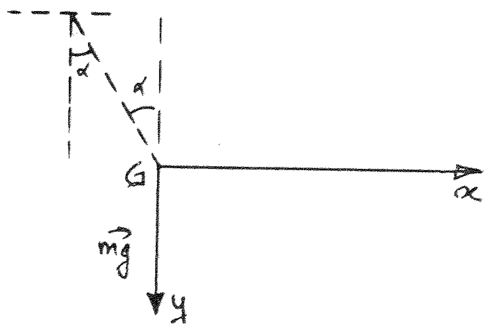


On représente la somme vectorielle $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$, connaissant $m\vec{g}$ et les directions de $\vec{T}$ et $\vec{F}$.

Le polygone des vecteurs-forces doit être fermé.

Puis, voir première méthode

3°) troisième méthode



Projetons la condition $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$ sur :

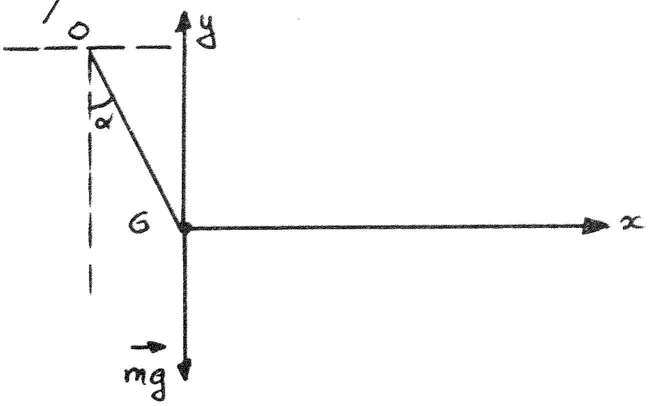
- Gx : $\overline{F_x} + \overline{T_x} = 0$. D'où le sens de $\vec{T}$.

  donc $F - T\sin\alpha = 0$ (1)

- Gy : $-T\cos\alpha + mg = 0$: $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

etc...

4°) quatrième méthode



. choix du repère : (Gx, Gy)

. On a : $(\vec{Gx}, \vec{GO}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$

. Posons : $\overline{T}$ = mesure algébrique de $\vec{T}$ sur $(\vec{GO})$

On a : $\vec{T} \left/ \begin{array}{l} \overline{T}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\overline{T}\sin\alpha \\ \overline{T}\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \overline{T}\cos\alpha \end{array} \right.$ $\quad \vec{mg} \left/ \begin{array}{l} 0 \\ -mg \end{array} \right.$ $\quad \vec{F} \left/ \begin{array}{l} F \\ 0 \end{array} \right.$

La condition d'équilibre s'écrit donc

$$-\overline{T}\sin\alpha + 0 + F = 0$$

et $\overline{T}\cos\alpha + (-mg) + 0 = 0$ Or $\overline{T} = k(l - l_0)$ d'où...

VECTEURS GEOMETRIQUES ET VECTEURS

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 (représentant l'espace physique)

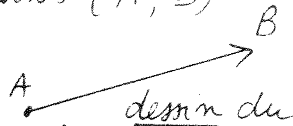
I) BIPOINT

① Définitions

données : deux points de $\mathcal{E}$, A et B, supposés distincts pour certaines des définitions

- le bipoint (A, B) est le couple de points (A, B)

  A est l'origine du bipoint (A, B).
  B est l'extrémité du bipoint (A, B).



dessin du bipoint (A, B)

- la droite (AB) est le support du bipoint (A, B)

- la direction du bipoint (A, B) est la direction de la droite (AB). Deux bipoints ont même direction si leurs supports sont parallèles

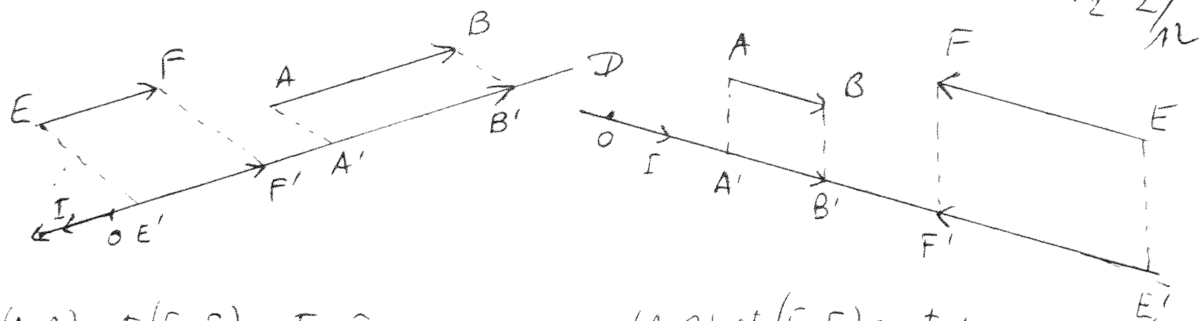
- la distance de A à B (ou encore la longueur du segment $[A, B]$) notée $d(A, B)$ ou encore AB sera une notion importante dans la suite : c'est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (voir définition plus loin)

- Soient (A, B) et (E, F) deux bipoints de même direction. Soit D une droite parallèle à leurs supports. Soient (A', B') et (E', F') leurs images dans une projection sur D. Munissons D d'un repère. Alors D est orientée par ce repère et tout point M de D a une abscisse par rapport à ce repère (x_M).

rappel : Soient (M, N) un bipoint de D
mesure algébrique de (M, N) : $\overline{MN} = x_N - x_M$

distance de M à N : $d(M,N) = MN = |\overline{MN}|$
$= |x_N - x_M|$.

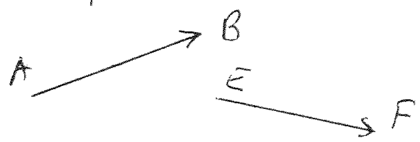
→ si $\overline{A'B'}$ et $\overline{E'F'}$ ont même signe alors on dit que les bipoints (A, B) et (E, F) ont même sens. (Sinon, on dit qu'ils sont de sens opposés).



(A,B) et (E,F) ont même sens (A,B) et (E,F) sont de sens opposés.

~~remarque~~ (O,I) correspond au choix d'une unité de mesure pour le dessin par exemple. [O,I] a une longueur-dessin de 1,5 cm et représente 1 km (ou 2 Newton, ou ...)
Pour trouver alors ce que représente la longueur de [A,B], il suffit de faire le rapport $\frac{AB}{OI}$ où AB et OI sont mesurés dans n'importe quelle unité (cm, mm, ...)

② remarques
. on ne compare pas le sens de deux bipoints de directions différents.
. pourrait-on définir le sens d'un bipoint sans le comparer à un autre de même direction?
. si A = B, on ne parle plus de support, de direction ni de sens. (par contre, on parle encore d'origine, d'extrémité, de longueur).
. on ne définit pas l'addition de deux bipoints (ce n'est pas la peine, la notion d'addition des vecteurs suffira).



$(A,B) \cancel{+ (E,F)} = \ldots$

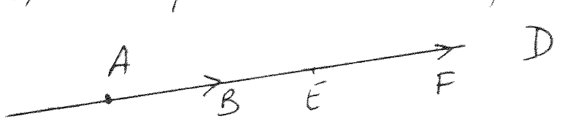
. la notion de bipoint est très proche de celle de "vecteur lié": voir plus loin.

II) Vecteurs glissants.

(On peut très bien se passer de cette notion. Cependant, je montre ici comment elle pourrait être définie et comment elle s'utilise. Une fois que la notion de vecteur sera acquise, la notion de vecteur glissant sera avantageusement remplacée, me semble-t-il, par droite et vecteur de mêmes directions)

① Définitions

Soit (A,B) un bipoint (non nul). Soit D le support de (A,B).



Soit (E,F) un bipoint de même support, de même sens, et de même longueur que (A,B). On dit alors que (A,B) et (E,F) définissent le même vecteur glissant. Le vecteur glissant défini par (A,B) est l'ensemble des bipoints qui ont même support, même sens, et même longueur que (A,B).

② Remarques

. on ne définit toujours pas la somme de deux vecteurs glissants.

. on ne parle pas du vecteur glissant associé au bipoint (A,A)

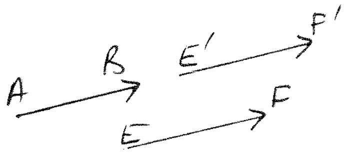
. Si D est muni d'un repère, on a les notions d'abscisse et de mesure algébrique

Si (A,B) et (E,F) définissent le même vecteur glissant, alors $\overline{AB} = \overline{EF}$. On parle donc de la mesure algébrique d'un vecteur glissant sur son support orienté : c'est la mesure algébrique de n'importe quel bipoint qui le définit.

II) VECTEURS GEOMETRIQUES.

① Définition

. Soit (A,B) un bipoint (avec $A \neq B$).



Soit (E,F) un bipoint de même direction même sens et même longueur que (A,B). On dit que (A,B) et (E,F) définissent le même vecteur géométrique, noté $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{EF}$, ...)

Le vecteur défini par (A,B) est l'ensemble des bipoints qui ont même direction, même sens et même longueur que (A,B).

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et si (A,B) et (E,F) ont des supports distincts, alors le quadrilatère $(ABFE)$ est un parallélogramme (et "réciproquement").

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et si (A,B) et (E,F) ont le même support, alors (A,B) et (E,F) définissent le même vecteur glissant.

. Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est l'ensemble des bipoints dont l'extrémité est confondue avec l'origine.

. Voici une définition simple et valable dans tous les cas :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \iff [A,F]$ et $[B,E]$ ont même milieu

(démontrez le par exemple pour deux bipoints de même support).

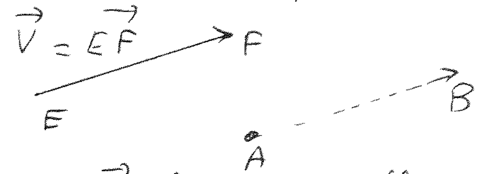
② remarques

. Soit $\vec{V}$ un vecteur géométrique (par exemple $\vec{V} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$).

On dit que les bipoints (A,B) et (E,F) sont des représentants de $\vec{V}$, et ce sont eux qui servent à "dessiner" $\vec{V}$: on ne dessine pas un vecteur géométrique, on dessine l'un (ou plusieurs) de ses représentants.

F_2 4/12

• Etant donné un vecteur $\vec{V}$ et un point A, il existe un et un seul point B tel que $\vec{V} = \vec{AB}$.



• Soit $\vec{V}$ le vecteur défini par (A, B) : $\vec{AB} = \vec{V}$.

On parle de :
- sa direction : c'est celle de n'importe quel représentant de $\vec{V}$.
- sa norme : c'est la longueur de n'importe quel représentant de $\vec{V}$.
- son sens par rapport à un autre vecteur de même direction.
- sa mesure algébrique sur une droite orientée de même direction que $\vec{V}$ (notation : norme de $\vec{V}$: $\|\vec{V}\|$)

• Soit $\vec{V} = \vec{AB}$.

On ne parle pas de :
- son support (car il change avec le représentant de $\vec{V}$)
- son origine (")
- son extrémité (")

③ quelques façons de se donner un vecteur $\vec{V}$

• A l'aide de deux points, en précisant lequel est l'origine et lequel est l'extrémité ...

$\vec{V} = \vec{BA}$

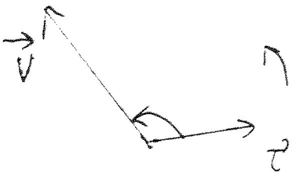
B origine du bipoint définissant $\vec{V}$

A

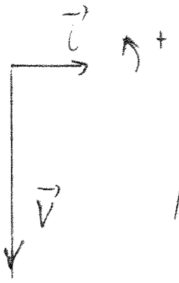
• Une direction, un "sens", une norme } à l'aide d'un vecteur unitaire $\vec{i}$ par exemple
↳ un réel positif (3 par exemple)

$\vec{V} = 3.\vec{i}$
(voir définition ④)

• à partir d'un vecteur $\vec{i}$, en donnant l'angle $(\vec{i}, \vec{V})$ (dans le plan orienté, à l'aide de la mesure de cet angle) et de la norme.



$(\vec{\imath}, \vec{V}) = 100°$ $\|\vec{V}\| = 1,5$



$(\vec{\imath}, \vec{V}) = -\frac{\pi}{2}$ rd

$\|\vec{V}\| = 2$

...

④ Multiplication d'un vecteur (géométrique) par un réel.

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs géométriques définis à partir des bipoints de $\mathcal{E}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\vec{V} \in \mathcal{V}$ (supposons $\vec{V} \neq \vec{0}$)

On définit le vecteur $\vec{W} = \lambda \vec{V}$ de la manière suivante :

(ici $\lambda > 0$)

- la direction de $\vec{W}$ est celle de $\vec{V}$.
- le sens de $\vec{W}$ est le même que celui de $\vec{V}$ si $\lambda > 0$.

$\vec{W} = \vec{0}$ si $\lambda = 0$. $\vec{W}$ et $\vec{V}$ sont de sens opposés si $\lambda < 0$

- $\|\vec{W}\| = |\lambda| \times \|\vec{V}\|$.

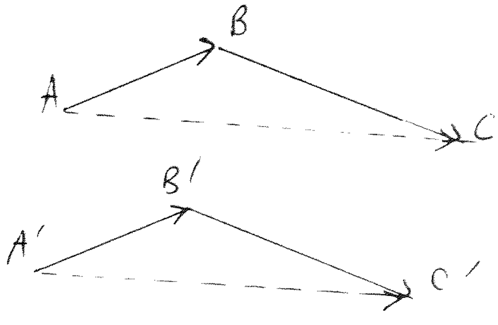
On pose $\lambda . \vec{0} = \vec{0}$.

Si $\vec{W} = \lambda \vec{V}$, on dit que $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont liés (ou encore linéairement dépendants).

Si $\vec{\imath}$ est un vecteur unitaire ($\|\vec{\imath}\| = 1$) et si $\vec{V} = \lambda \vec{\imath}$, alors λ est la mesure algébrique de $\vec{V}$ sur une droite orientée par $\vec{\imath}$. (Si $\vec{V} = \vec{AB}$, alors $\lambda = \overline{AB}$)

⑤ Somme de deux vecteurs (géométriques)

- propriété fondamentale



si $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ et si $\vec{BC} = \vec{B'C'}$ alors $\vec{AC} = \vec{A'C'}$.

On définit alors la somme de deux vecteurs comme suit :

$\vec{U} + \vec{V}$

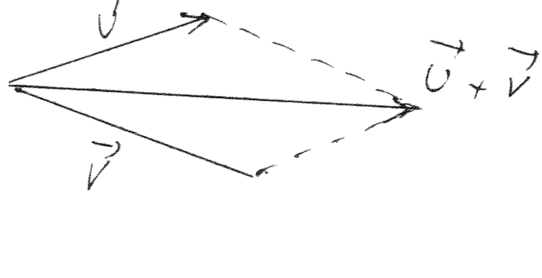
↳ soit (B, C) tel que $\vec{BC} = \vec{V}$

↳ soit (A, B) tel que $\vec{AB} = \vec{U}$

on pose $\vec{U} + \vec{V} = \vec{AC}$.

La construction de la somme de deux vecteurs peut donc se faire à partir de n'importe quel point en mettant bout à bout les représentants.

On peut également utiliser la règle du parallélogramme –



(6) Structure de l'ensemble des vecteurs géométriques munis de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un réel

On démontre que $(\mathcal{V}, +, .)$ possède les propriétés suivantes

* $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe commutatif
* Pour tout réel λ, tout réel μ, tout vecteur $\vec{U}$, tout vecteur $\vec{V}$:

$$\lambda.(\mu.\vec{U}) = (\lambda\mu).\vec{U} \quad ; \quad (\lambda+\mu).\vec{U} = \lambda.\vec{U} + \mu.\vec{U}$$

$$1.\vec{U} = \vec{U} \quad , \quad \lambda.(\vec{U}+\vec{V}) = \lambda.\vec{U} + \lambda.\vec{V}$$

Tout ensemble pour lequel on a défini une loi de composition interne et une multiplication par les réels qui possèdent les propriétés ci-dessus s'appelle un espace vectoriel et ses éléments s'appellent des vecteurs. De tels ensembles sont très nombreux et très utilisés.

Exemples * $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$; $n = 4$ par exemple) où on définit les opérations suivantes

$$\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda t \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \\ t+t' \end{bmatrix}$$

($\mathbb{R}^n$ est de dimension n)

* $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions numériques définies sur l'intervalle I. Soient f et g deux fonctions. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λf par $(\lambda f)(x) = \lambda \times [f(x)]$

et $f+g$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

On démontre que dans tout espace vectoriel on a les règles de calcul suivantes

* $0.u = 0$ → vecteur nul (nous mettons des flèches : $\vec{V}$, pour les vecteurs géométriques)
  ↳ réel nul

* $\lambda.0 = 0$
* $(-1).u$ s'écrit $-u$. On a $u - u = 0$
* Soient a et b des réels, u et v des vecteurs

$$(3a+2b)(-2u+3v) = (3a+2b).(-2u) + (3a+2b)(3v)$$

$$= (-2)(3a+2b).u + 3(3a+2b).v$$

$$= (-6a-4b).u + (9a+6b).v$$

$$= -6au - 4bu + 9av + 6bv$$

$$= 3a(-2u+3v) + 2b(-2u+3v)$$

$$= (3a+2b)(-2u+3v) \quad !$$

Dans les espaces vectoriels, on définit des notions importantes comme combinaison linéaire, système générateur, système libre, système lié, base, dimension, ..., application linéaire, ...

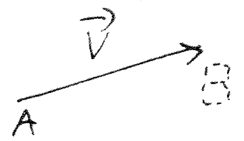
Exemples particuliers d'espaces vectoriels

l'ensemble des vecteurs-forces peut se représenter par un espace vectoriel, de même pour les vecteurs vitesses et vecteurs accélérations. On montre que, moyennant des choix d'unité de mesure, on peut prendre comme modèle pour ces espaces vectoriels, l'espace vectoriel des vecteurs géométriques de $\mathcal{E}$

IV Lien avec vecteurs liés, vecteurs glissants, vecteurs libres

① vecteurs liés

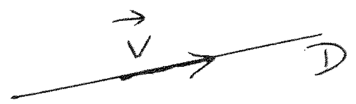
Soit $A \in \mathcal{E}$. Soit E un espace vectoriel. Soit $V \in E$.
Le couple (A, V) s'appelle un pointeur.
Si $E = \mathcal{V}$ et si $\vec{V}$ est un vecteur géométrique, on dit aussi que $(A, \vec{V})$ est un vecteur lié. (le vecteur $\vec{V}$ est lié au point A)



Se donner un point et un vecteur revient à se donner un bipoint et réciproquement. Au lieu de parler de vecteur lié, on peut donc parler de bipoint. Mais si le vecteur n'est pas nécessairement un vecteur géométrique, la notion $(A, \vec{V})$ reste intéressante (pour parler par exemple de la force appliquée en un point).

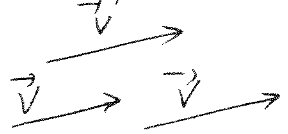
② vecteurs glissants

se donner un vecteur glissant revient à se donner une droite et un vecteur géométrique de même direction.



③ vecteurs libres

l'ensemble des vecteurs liés $(A, \vec{V})$ où $\vec{V}$ est fixe et A quelconque correspond à l'ensemble des bipoints (E, F) tel que $\vec{EF} = \vec{V}$.

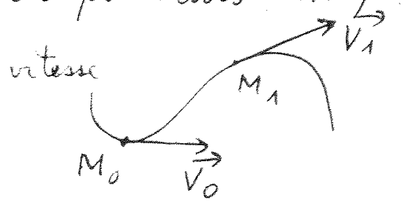


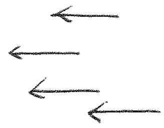
On peut donner à cette notion le nom de vecteur libre.
il s'agit en fait de la notion de vecteur (géométrique)

④ Champ de vecteur

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathcal{E}$. Soit E un espace vectoriel.
Une application de $\mathcal{D}$ vers E s'appelle un champ de vecteurs de E défini sur $\mathcal{D}$.
Dans le cas où $E = \mathcal{V}$ = l'ensemble des vecteurs géométriques de $\mathcal{E}$, il est intéressant de dessiner le champ de vecteurs en dessinant en chaque point M de $\mathcal{D}$, le représentant d'origine M du vecteur image de M par le champ
(on est ainsi amené à dessiner des bipoints, ou vecteurs

liés, ou pointeurs ...) ex :



, 

champ uniforme

V COORDONNEES D'UN VECTEUR DANS UNE BASE

① Définition

Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ n vecteurs de E.

Si, pour tout vecteur V de E, il existe un et un seul système de n réels $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ tel que

$V = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \dots + \lambda_n u_n$ on dit que :

- $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une base de E (et n est la dimension de E).
- V se décompose dans la base $(u_1, u_2 \dots u_n)$,
- $(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$ sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $(u_1, u_2 \dots u_n)$
- λ_i est la coordonnée (ou composante) de V sur u_i dans la base.
- $\lambda_1 u_1$ est la projection de V sur u_1 parallèlement à $(u_2, u_3 \dots u_n)$
- $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_p u_p$ est la projection de V sur $(u_1, u_2 \dots u_p)$ parallèlement à $(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots u_n)$

Cas de $\mathcal{V}$, ensemble des vecteurs géométriques

Tout système de 3 vecteurs non coplanaires est une base de $\mathcal{V}$.
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{V}$. Soit $\vec{V} \in \mathcal{V}$. Il existe donc 3 réels α, β, γ tels que

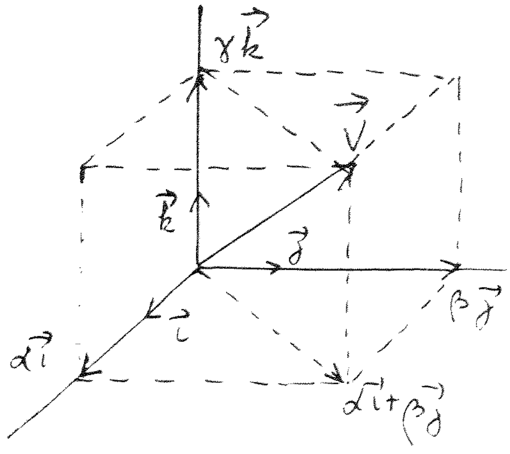
$$\vec{V} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

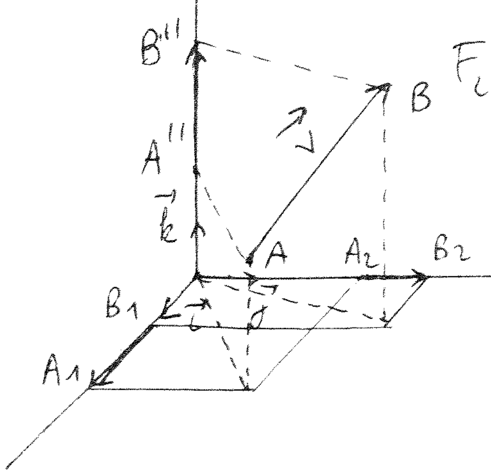
α : coordonnée de $\vec{V}$ sur $\vec{i}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\alpha\vec{i}$: projection de $\vec{V}$ sur $\vec{i}$ (parallèlement à $\vec{j}, \vec{k}$)

$\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$: projection de $\vec{V}$ sur $(\vec{i}, \vec{j})$ parallèlement à $\vec{k}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\vec{i} \text{ est un vecteur lié à } \vec{i} \\ \beta\vec{j} \quad " \qquad " \quad \vec{j} \\ \gamma\vec{k} \quad " \qquad " \quad \vec{k} \end{array}\right\}$$ et $\vec{V}$ est la somme de ces 3 vecteurs.





une des flèches est mal mise sur le dessin. Cherchez la !

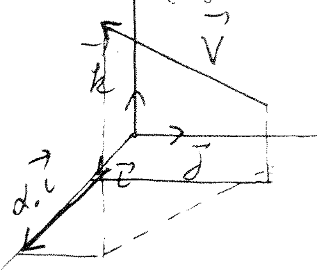
$$\vec{AB} = \vec{A'B'} + \vec{A''B''} = \underbrace{\vec{A_1B_1}} + \underbrace{\vec{A_2B_2}} + \underbrace{\vec{A''B''}}$$

$$\vec{AB} = \vec{V} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

$\vec{A'B'}$ = projection de $\vec{AB}$ sur $(\vec{i},\vec{j})$ parallèlement à $\vec{k}$ $\quad$ $\vec{A''B''}$ = projection de $\vec{AB}$ sur $\vec{k}$ parallèlement à $(\vec{i},\vec{j})$

Pour décomposer un vecteur dans une base, il suffit de le projeter sur chaque vecteur de la base et de chercher la mesure algébrique de chacune des projections.

$\vec{V} = \alpha.\vec{i} + \beta.\vec{j} + \gamma.\vec{k}$: α = mesure algébrique sur $\vec{i}$ de la projection sur $\vec{i}$ de $\vec{V}$ parallèlement à $(\vec{j},\vec{k})$



remarque : pour projeter sur $\vec{i}$, on peut d'abord projeter sur $(\vec{i},\vec{j})$, puis sur $\vec{i}$.

Quelques Théorèmes formulés rapidement :

- la projection d'une somme de vecteurs est égale à la somme des projections. (mieux : Toute application projection est linéaire)
- Pour qu'un vecteur soit nul il faut et il suffit que chacune de ses projections sur les vecteurs d'une base soit nulle
  ($\vec{0} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + 0.\vec{k}$; $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 = \beta = \gamma$)

Lorsqu'une base est choisie, une notation commode est la suivante.

$\vec{V}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$ cela signifie :
- α, β, γ sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base
- $\vec{V} = \alpha.\vec{i} + \beta.\vec{j} + \gamma.\vec{k}$

(lorsque la base choisie s'appelle $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$)

On a alors les propriétés importantes suivantes :

- $\vec{V}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right.$ et $\vec{V}'\left|\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{matrix}\right. \Longrightarrow \lambda.\vec{V}\left|\begin{matrix}\lambda\alpha\\ \lambda\beta\\ \lambda\gamma\end{matrix}\right.$ et $\vec{V}+\vec{V}'\left|\begin{matrix}\alpha+\alpha'\\ \beta+\beta'\\ \gamma+\gamma'\end{matrix}\right.$
- $\vec{V}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right.$ et $\vec{V}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$
- cas du plan $\vec{U}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ et $\vec{U}'\left|\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right.$ $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ liés $\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix}\alpha & \alpha'\\ \beta & \beta'\end{vmatrix}}_{\alpha\beta'-\alpha'\beta}=0$
- Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. Si $A\left|\begin{matrix}x_A\\ y_A\\ z_A\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}x_B\\ y_B\\ z_B\end{matrix}\right.$ alors $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{matrix}\right.$

VI PRODUIT SCALAIRE (de deux vecteurs géométriques)

① Définition Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée.
Soit $\vec{V}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right.$ et $\vec{V}'\left|\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{matrix}\right.$ On pose $\vec{V}.\vec{V}'=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$

se lit : V scalaire V′
ou produit scalaire $\vec{V}.\vec{V}'$

② théorèmes

1) le produit scalaire $\vec{V}.\vec{V}'$ est un nombre réel qui ne dépend pas de la base orthonormée choisie pour le calculer à l'aide de la formule $\vec{V}.\vec{V}'=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$

2) le p.s est symétrique : $\vec{U}.\vec{V}=\vec{V}.\vec{U}$

3) le p.s. est bilinéaire : $(\vec{U}+\vec{U}').\vec{V}=\vec{U}.\vec{V}+\vec{U}'.\vec{V}$

$(\lambda\vec{U}).\vec{V}=\lambda\times(\vec{U}.\vec{V})$

$\vec{U}.(\vec{V}+\vec{V}')=\vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{V}'$

$\vec{U}.(\lambda\vec{V})=\lambda\times(\vec{U}.\vec{V})$

4) $\vec{U}\perp\vec{V}\Longleftrightarrow\vec{U}.\vec{V}=0$

remarque : $\vec{U}.\vec{U}$ est noté $\vec{U}^2$. On a $\vec{U}^2=\|\vec{U}\|^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

5) Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée. Soit $\vec{V}\in\mathcal{V}$

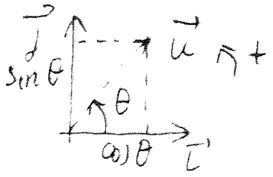
$\vec{V}.\vec{i}$ = coordonnée de $\vec{V}$ sur $\vec{i}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

en effet, posons $\vec{V}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$
alors

$\vec{V}.\vec{i}=(\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}).\vec{i}=\alpha\,\vec{i}.\vec{i}+\beta\,\vec{j}.\vec{i}+\gamma\,\vec{k}.\vec{i}$
$=\alpha\times1+\beta\times0+\gamma\times0$, car $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée
$=\alpha=$ coordonnée de $\vec{V}$ sur $\vec{i}$.

③ Produit scalaire et angle, dans un plan

Pour mesurer des angles de vecteurs, il faut définir une unité de mesure et une orientation (d°, rd ; un plan a deux orientations possibles)

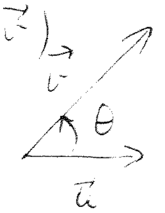


Soit θ la mesure en rd de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$ avec $\vec{i}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs unitaires.
On a $\cos\theta = \vec{i}\cdot\vec{u}$ = coordonnée de $\vec{u}$ sur $\vec{i}$ (dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$)

et $\sin\theta = \vec{j}\cdot\vec{u}$ = coordonnée de $\vec{u}$ sur $\vec{j}$.

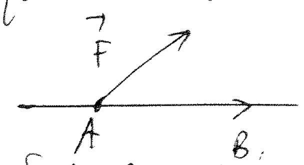
théorème : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

remarque : $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ ne dépend pas de l'orientation du plan



④ Travail d'une force

Moyennant le choix d'unités de mesure un vecteur-force peut se représenter par un vecteur géométrique. On définit alors pour une force $\mathcal{F}$ dont le vecteur-force $\vec{F}$ est constant lorsque le point d'application se déplace de A à B, le travail de $\mathcal{F}$ par la formule $W = \vec{F}\cdot\vec{AB}$



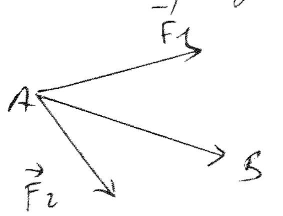
$$W = \vec{F}\cdot\vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{F})$$

↳ intensité de la force $\mathcal{F}$

Supposons qu'un point matériel P soit soumis à l'action de deux forces $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ dont les vecteurs-forces $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ durant le déplacement de P de A vers B sont constants.
On a :

$$W = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\cdot\vec{AB} = \vec{F}_1\cdot\vec{AB} + \vec{F}_2\cdot\vec{AB} = W_1 + W_2$$

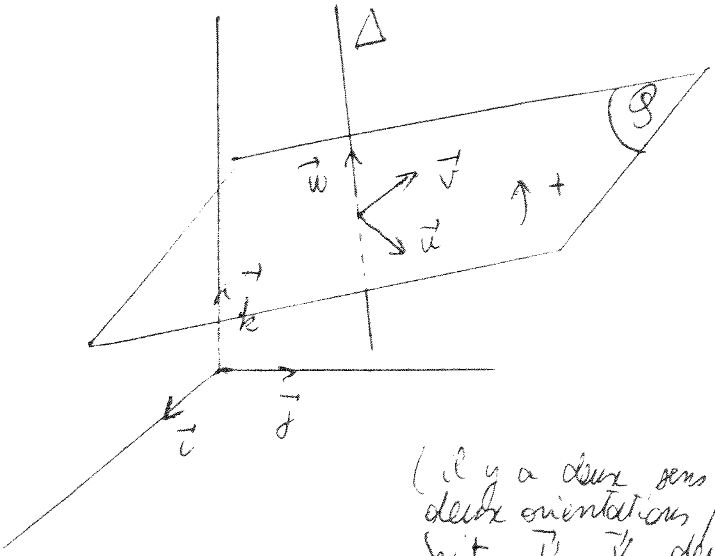
autrement dit : le travail de l'action simultanée des deux forces $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est égal à la somme des travaux de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.



Si $\vec{F}_1$ est orthogonal à $\vec{AB}$, alors le travail de $\mathcal{F}_1$ est nul
$(W_1 = \vec{F}_1\cdot\vec{AB} = 0$ car $\vec{F} \perp \vec{AB})$

VII PRODUIT VECTORIEL

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, orientant $\mathcal{E}$.



Soit $\mathcal{P}$ un plan et Δ une droite orthogonale à $\mathcal{P}$. Soit $\vec{w}$ un vecteur unitaire de Δ. $\vec{w}$ peut servir à orienter Δ. $\vec{w}$ sert également à orienter $\mathcal{P}$: on oriente $\mathcal{P}$ par une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v})$ telle que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit de même sens que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(il y a deux sens possibles pour $\vec{w}$, il y a deux orientations possibles pour $\mathcal{P}$)

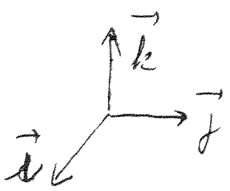
Soit $\vec{U}$, $\vec{V}$ deux vecteurs de directions parallèles à $\mathcal{P}$ (supposons $(\vec{U},\vec{V})$ libre) le sinus de l'angle $(\vec{U},\vec{V})$ dépend de l'orientation choisie dans $\mathcal{P}$.

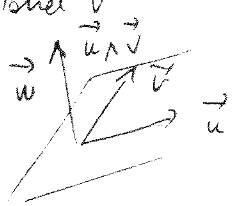
$\vec{U}\wedge\vec{V}$ est le vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ dont la mesure algébrique sur ~~$\vec{k}$~~ $\vec{w}$ servant à orienter $\mathcal{P}$ est :

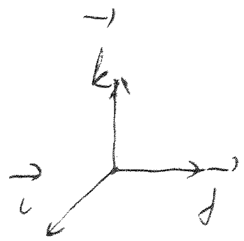
$$\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|\times\sin(\vec{U},\vec{V}).$$

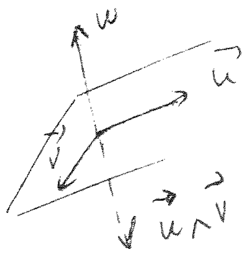
$$\vec{U}\wedge\vec{V} = \|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|\times\sin(\vec{U},\vec{V})\,\vec{w}$$

se lit $\vec{U}$ vectoriel $\vec{V}$









<u>Quelques propriétés.</u>

- Soient $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe

  Posons $\vec{V}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$ et $\vec{V}'\begin{vmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{vmatrix}$ Posons également $\vec{U}=\vec{V}\wedge\vec{V}'=\begin{vmatrix}X\\ Y\\ Z\end{vmatrix}$

  On a $X=\det\begin{vmatrix}\beta & \beta'\\ \gamma & \gamma'\end{vmatrix}$ $Y=-\det\begin{vmatrix}\alpha & \alpha'\\ \gamma & \gamma'\end{vmatrix}$ $Z=\det\begin{vmatrix}\alpha & \alpha'\\ \beta & \beta'\end{vmatrix}$

- $\vec{U}\wedge\vec{V}=-\vec{V}\wedge\vec{U}$
- $(\vec{U}+\vec{U}')\wedge\vec{V}=\vec{U}\wedge\vec{V}+\vec{U}'\wedge\vec{V}$; $\vec{U}\wedge(\vec{V}+\vec{V}')=\vec{U}\wedge\vec{V}+\vec{U}\wedge\vec{V}'$
- $(\vec{U},\vec{V})$ liés $\Leftrightarrow$ $(\vec{U},\vec{V})=0$
- $(\lambda\vec{U})\wedge\vec{V}=\lambda(\vec{U}\wedge\vec{V})$
- $(\vec{U},\vec{V},\vec{U}\times\vec{V})$ est de même sens que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ qui définit l'orientation de $\mathcal{E}$.

REPRESENTATION ET STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES VECTEURS-FORCES

I. L'ensemble des vecteurs-forces

Atoute force est associée, entre autres choses, sa direction orientée et son intensité (ou: direction, sens, et intensité). Ces caractéristiques, qui ne définissent pas complètement la force, définissent ce qu'on appelle le vecteur-force. La direction orientée peut être donnée par un vecteur géométrique unitaite (moyennant le choix d'une unité de mesure des longueurs). L'intensité peut être donnée par un réel réel positif: sa mesure (moyennant le choix d'une unité de mesure de l'intensité des forces).

Soit Φ l'ensemble des vecteurs-forces. Soit φ l'application de Φ dans $\mathcal{V}_3$ qui au vecteur-force $\vec{\mathcal{F}}$ caractérisé par $\vec{u}$ (vecteur géométrique unitaire) et par F (mesure de l'intensité), associe le vecteur géométrique $F.\vec{u} = \vec{F}$.

(on introduit également le vecteur-force nul à qui on associe par φ le vecteur géométrique nul : $\vec{o}$)

Résultat important: φ est une bijection

On transporte, grâce à φ, la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{V}_3$ sur Φ, en posant:

- soient $\vec{\mathcal{F}_1}$ et $\vec{\mathcal{F}_2}$ deux vecteurs-forces. Posons $\vec{F_1} = \varphi(\vec{\mathcal{F}_1})$ et $\vec{F_2} = \varphi(\vec{\mathcal{F}_2})$
  Par définition, $\vec{\mathcal{F}_1} + \vec{\mathcal{F}_2}$ est le vecteur-force associé à $\vec{F_1} + \vec{F_2}$
- soit $\vec{\mathcal{F}} \in \Phi$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda\vec{\mathcal{F}}$ est par définition le vecteur-force associé à $\lambda.\vec{F}$

Muni de ces deux opérations, Φ est un espace vectoriel: l'espace vectoriel des vecteurs-forces

Remarque: Que se passe-t-il lorsqu'on change les unités de mesure des longueurs
des intensités des forces ?

II. Un principe fondamental de la mécanique (voir aussi document F_4 et F_5)

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux forces appliquées à un point matériel P. Toute force $\mathcal{F}$, appliquée à P, dont le vecteur-force $\vec{\mathcal{F}}$ est égal à $\vec{\mathcal{F}_1} + \vec{\mathcal{F}_2}$, produit le même effet (est équivalent à ...) que l'action simultanée des deux forces $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Autrement dit: la somme géométrique des vecteurs géométriques associés à un système donné de forces qui s'appliquent en un point, détermine le vecteur-force d'une force unique équivalente au système des forces données.

Remarque: Dans la pratique, on identifie Φ et $\mathcal{V}_3$, ensemble des vecteurs géométriques: on dira que $\vec{F}$ est égal à $\vec{\mathcal{F}}$, que $\vec{F}$ est le vecteur-force de la force en question.(On identifie $\vec{F}$ et $\vec{\mathcal{F}}$)
Du point de vue notation, une force est donc, en général, donnée par son point d'application (A par exemple) et son vecteur-force ($\vec{F}$ par exemple; $\vec{F}$: vecteur géométrique; $F = \|\vec{F}\|$: intensité de la force) Ceci est l'idée fondamentale de ceux qui parlent de pointeur: (A, $\vec{F}$), mais le vocabulaire (pointeur) est peut-être inutile. Notons également que ceci est conforme aux commentaires sur les programmes de seconde rentrée 78. D'un point de vue mathématique (et du point de vue du dessin, représentation des forces), la donnée de A et de $\vec{F}$ équivaut à la donnée d'un bipoint (A, B) (tel que $\vec{AB} = \vec{F}$)
Mais il serait maladroit (pédagogiquement!) d'en conclure qu'une force se représente par un bipoint, car le point B n'a pas de signification physique.(il est d'ailleurs lié aux différents choix d'unités:

unité de mesure des longueurs
unité de mesure de l'intensité des forces
choix de l'échelle du dessin)

Dire qu'une force se représente par un vecteur lié (ce qui est pourtant effectivement fait ici: (A, $\vec{F}$)) parait également maladroit (pédagogiquement), car en fait, le vecteur-force n'est pas un vecteur géométrique: on les identifie pour des tas de raisons valables, mais cela reste une identification.

D'ailleurs cette identification n'est pas canonique: elle dépend du choix des unités de mesure.

III. Principe fondamental de l'équilibre du point matériel.

La somme des vecteurs-forces appliquées au point matériel doit être nulle.

Remarque: - il en est de même pour un corps solide indéformable soumis à un système de forces concourantes.

dans le cas général: voir document F_4

- l'esentiel du point de vue mathématique, pour résoudre les problèmes de statique en seconde est donc de savoir traiter le problème $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{o}$ où certaines caractéristiques des vecteurs $\overrightarrow{F_i}$ sont inconnues. Les professeurs de mathématiques peuvent donc utilement préparer leurs élèves à la statique, à condition de poser des questions du genre $\sum_i \overrightarrow{F_i} = 0$ où les vecteurs $\overrightarrow{F_i}$ sont définis, non seulement par leurs coordonnées dans une base (rarement décrite) , mais par des notions du genre: horizontale, verticale, angle, direction, sens, intensité .....

TORSEURS

I Champ de vecteurs

Soit $\mathcal{E}_3$ un espace affine euclidien, attaché à E_3.
$\mathcal{E}_3$ représente l'espace physique. Ses éléments sont appelés points.

E_3 est l'ensemble des vecteurs géométriques de l'espace.

① définition

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_3$ ($\mathcal{A}$ est une partie de l'espace)

Une application de $\mathcal{A}$ dans E_3 est appelée un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{A}$.

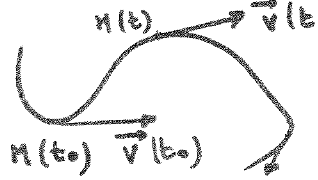
② exemples

1°) Champ des vecteurs-vitesse d'une particule en mouvement :

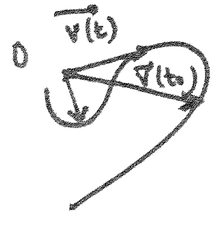
Soit $\mathcal{C}$ la trajectoire du mouvement d'une particule $\mathcal{P}$ qui n'est jamais au même endroit à deux instants différents.

L'application qui, à chaque position de la particule $\mathcal{P}$, associe son vecteur vitesse à l'instant où elle occupe cette position, est un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{C}$.

représentation de ce champ :



a) le vecteur vitesse à l'instant t est dessiné à l'aide de son représentant dont l'origine est la position à l'instant t de la particule.



b) tous les vecteurs-vitesse sont dessinés à l'aide de leurs représentants d'origine O, O point fixé.
On obtient l'hodographe.

2°/ Champ de pesanteur

A chaque point P de l'espace (ou d'une région de l'espace) on associe le vecteur $\vec{g}(P)$ de la pesanteur en ce point. Si la région considérée est suffisamment "petite", on peut considérer que ce champ est constant (on dit aussi : uniforme)

dans ce cas, on peut parler de $\vec{g}$ sans préciser P.

3°/ Champ des vecteurs-vitesses à l'instant t, d'un solide en mouvement.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points occupé à l'instant t par un solide en mouvement.

Soit v : $\mathcal{S} \longrightarrow E_3$

$M \longmapsto v(M)$ = vecteur-vitesse à l'instant t de la particule du solide en mouvement qui se trouve dans la position M à l'instant t.

Comme nous le verrons plus loin, dans le cas d'un solide indéformable, ce champ des vecteurs-vitesse est d'un type particulier.

II Produit vectoriel.

① définition : elle nécessite que l'on oriente l'espace $\mathcal{E}_3$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs liés, on pose $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas liés, ils définissent un plan vectoriel.

Soit $\vec{k}$ un vecteur unitaire orthogonal à ce plan et qui oriente ce plan en accord avec l'orientation choisie de $\mathcal{E}_3$.

on pose donc : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left[\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right] \vec{k}$

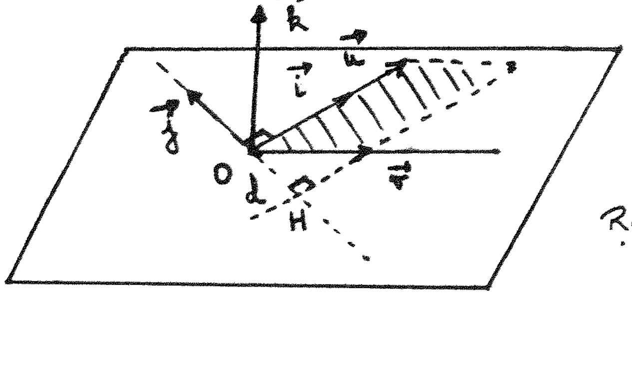
On a en particulier :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times d$ (voir dessin)

  = aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est direct.

On a également :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left[\|\vec{u}\| \, \overline{v_2}\right] \vec{k}$ où $\overline{v_2}$ est la mesure algébrique sur l'axe défini par $\vec{j}$ de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{j}$; $\vec{j}$ étant défini de la façon suivante : on pose $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \vec{i}$ et $\vec{j}$ est tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe.



$d = OH$

$\overline{V_2} = \overline{OH}$

Remarque : si $\vec{w}$ est un troisième vecteur, alors $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) . \vec{w}|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

② expression dans une base orthonormée directe.

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe.

Posons $\vec{u}\begin{vmatrix} x\\ y\\ z\end{vmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{vmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{vmatrix}$. Alors les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{u}'$ sont,

dans l'ordre : $\begin{vmatrix} y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} = yz'-y'z$; $-\begin{vmatrix} x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$

Ce sont les cofacteurs de la troisième colonne de la matrice :

$$\begin{bmatrix} x & x' & \cdot\\ y & y' & \cdot\\ z & z' & \cdot\end{bmatrix}$$

③ règles de calcul.

- $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{v}') = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{v}'$
- $\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}')\wedge(\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}') = \lambda\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})+\lambda\beta\,\vec{u}\wedge\vec{v}'+\mu\alpha\,\vec{u}'\wedge\vec{v}+\mu\beta\,\vec{u}'\wedge\vec{v}'$

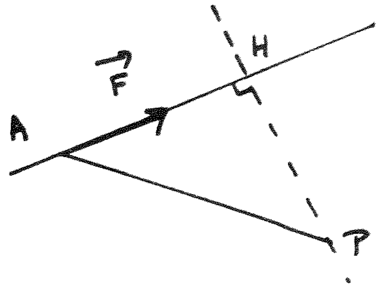
ce sont les règles de calcul habituelles, mais attention à l'ordre car $\vec{u}\wedge\vec{v}$ n'est pas, en général, égal à $\vec{v}\wedge\vec{u}$.

- formule du double produit vectoriel (le p.v. n'est pas associatif !) : $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$

III Champ des moments d'une action.

① Cas d'une force.

Soit $\mathcal{F}=(A,\vec{F})$ une force appliquée en A, de vecteur-force $\vec{F}$.



Le moment de $\mathcal{F}$ au point P est le vecteur $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(P) = \vec{PA}\wedge\vec{F} = \vec{F}\wedge\vec{AP}$

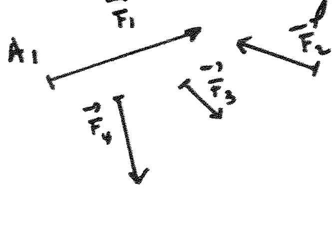
c'est un vecteur orthogonal au plan $(P,A,\vec{F})$ et dont la norme est $F.d$ en posant $F=\|\vec{F}\|$ et $d=PH$

Le champ des moments de $\mathcal{F}$ est l'application : $\mathcal{E}_3 \longrightarrow E_3$

$P \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(P) = \vec{F}\wedge\vec{AP}$

② Cas d'un système de plusieurs forces.

Soit $\mathcal{S}$ un système de n forces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \ldots\ldots \mathcal{F}_n$.



Le moment de $\mathcal{S}$ en P est le vecteur :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{\mathcal{F}_i}(P)$$

③ Lien entre les moments en deux points

1°) cas d'une force. Soit $\mathcal{F} = (A, \vec{F})$. Soient P et Q deux points.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(Q) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{AQ} = \vec{F} \wedge (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{F} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

d'où :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(Q) = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(P) + \vec{F} \wedge \overrightarrow{PQ}}$$

2°) cas d'un système de forces : $\mathcal{S} = (\mathcal{F}_i)_{i \text{ de } 1 \text{ à } n}$, $\mathcal{F}_i = (A_i, \vec{F}_i)$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(Q) = \sum_i \mathcal{M}_{\mathcal{F}_i}(Q) = \sum_i \left(\mathcal{M}_{\mathcal{F}_i}(P) + \vec{F}_i \wedge \overrightarrow{PQ} \right)$$

$$= \sum_i \mathcal{M}_{\mathcal{F}_i}(Q) + \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Posons $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

on obtient :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(Q) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}}$$

on obtient une formule analogue à celle du cas d'une force unique.

④ Torseurs : définition

Les champs de vecteurs $\mathcal{C} : \mathcal{E}_3 \longrightarrow E_3$ pour lesquels il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que : $\forall P, Q \in \mathcal{E}_3$, $\mathcal{C}(Q) = \mathcal{C}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$, s'appellent torseurs.

$\vec{R}$ s'appelle la résultante générale du torseur ou le vecteur du torseur.

$(\vec{R}, \mathcal{C}(P))$ s'appellent les éléments de réduction du torseur $\mathcal{C}$ au point P.

IV Etude des torseurs

① Somme de deux torseurs : c'est encore un torseur (dont la résultante générale est la somme des résultantes générales).

démonstration : ...

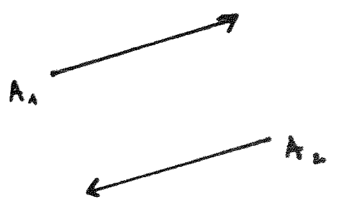
② Torseur nul : (c'est le champ de vecteurs qui à tout point associe $\vec{0}$)

- $\mathcal{C} = 0 \iff \vec{R} = 0$ et $\exists P$ tel que $\mathcal{C}(P) = 0$
- deux torseurs sont égaux dès qu'ils ont les mêmes éléments de réduction en un point.

③ Torseur constant (champ uniforme) : s'appelle également couple.

$$[\forall P, Q, \ \mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(Q)] \iff [\mathcal{C} \text{ est constant}] \iff [\vec{R} = \vec{0}]$$

exemple : Soit $\mathcal{F}_1 = (A_1, \vec{F})$ et soit $\mathcal{F}_2 = (A_2, -\vec{F})$. Posons $\mathcal{S} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$



$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P) = \mathcal{M}_{\mathcal{F}_1}(P) + \mathcal{M}_{\mathcal{F}_2}(P) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{A_1P} - \vec{F} \wedge \overrightarrow{A_2P}$$

$$= \vec{F} \wedge (\overrightarrow{A_1P} - \overrightarrow{A_2P}) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{A_1A_2}$$

donc $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ est constant (tournevis)

④ Axe central d'un torseur non constant :

Th. Soit $\mathcal{C}$ un torseur non constant (son vecteur $\vec R$ est donc non nul). L'ensemble des points P de $\mathcal{E}_3$ où $\mathcal{C}(P)$ et $\vec R$ sont liés (colinéaires) est une droite de vecteur directeur $\vec R$, appelée axe central du torseur $\mathcal{C}$.

démonstration : montrons tout d'abord (a)) qu'il existe un tel point, P_0, qui vérifie : $\mathcal{C}(P_0)$ et $\vec R$ colinéaires. Puis, montrons (b)) que tout point P qui vérifie également cette propriété est caractérisé par : $\overrightarrow{PP_0}$ et $\vec R$ sont colinéaires. Ceci prouvera bien que l'ensemble cherché est une droite, la droite passant par P_0 admettant $\vec R$ comme vecteur directeur.

Nous utiliserons largement le théorème suivant : $(\vec u, \vec v)$ lié $\iff \vec u \wedge \vec v = \vec 0$

a) Soit A un point de $\mathcal{E}_3$. Prenons P_0 défini par $\overrightarrow{AP_0} = \dfrac{\vec R}{\|\vec R\|^2} \wedge \mathcal{C}(A)$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(P_0) \wedge \vec R &= \left(\mathcal{C}(A) + \vec R \wedge \overrightarrow{AP_0}\right) \wedge \vec R \\
&= \mathcal{C}(A) \wedge \vec R + (\vec R \wedge \overrightarrow{AP_0}) \wedge \vec R = \mathcal{C}(A) \wedge \vec R - \vec R \wedge (\vec R \wedge \overrightarrow{AP_0}) \\
&= \mathcal{C}(A) \wedge \vec R + (\vec R \cdot \vec R)\, \overrightarrow{AP_0} - (\vec R \cdot \overrightarrow{AP_0})\, \vec R \\
&= \mathcal{C}(A) \wedge \vec R + \vec R \wedge \mathcal{C}(A) - \vec 0 \quad (\text{par déf de } \overrightarrow{AP_0}) \\
&= \vec 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(P) \wedge \vec R = \vec 0 &\iff \mathcal{C}(P) \wedge \vec R = \mathcal{C}(P_0) \wedge \vec R \quad (\text{d'après a)}) \\
&\iff [\mathcal{C}(P) - \mathcal{C}(P_0)] \wedge \vec R = \vec 0 \\
&\iff (\vec R \wedge \overrightarrow{P_0P}) \wedge \vec R = \vec 0 \quad (\mathcal{C} \text{ est un torseur}) \\
&\iff \vec R^2\, \overrightarrow{P_0P} - (\vec R \cdot \overrightarrow{P_0P})\, \vec R = \vec 0 \\
&\iff \overrightarrow{P_0P} \text{ et } \vec R \text{ sont colinéaires.}
\end{aligned}$$

⑤ glisseur :

Définition : c'est un torseur qui est le champ des moments associé à un vecteur lié.

Théorème : Un torseur est un glisseur si et seulement si : "il existe un point où il est nul". ($\mathcal{C}$ glisseur $\iff \exists A$ tel que $\mathcal{C}(A) = \vec 0$)

(démonstration très facile)

Remarques :

a) Un glisseur est nul si et seulement si sa résultante générale est nulle.

b) Soit g un glisseur non nul. D'après ④, g possède donc un axe central : c'est l'ensemble des points où le glisseur est nul. (l'axe central du champ des moments d'une force est l'ensemble des points où le moment de la force est nul : c'est une droite).

V Système de forces.

① Systèmes équivalents.

Deux systèmes de forces sont dits équivalents s'ils ont même champ des moments.

exemple : $(A_1, \vec{F}) \simeq (A_2, \vec{F}) \iff (\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{F})$ liés.

■ **Principe fondamental de la statique :**

Pour qu'un solide indéformable S soumis à un système de forces $\mathcal{S}$, soit en équilibre, il faut que le champ des moments de $\mathcal{S}$ soit nul (ce qui est le cas dès que les éléments de réduction en un point sont nuls).

■ **Principe fondamental de la dynamique :**

② Réduction d'un système de forces.

Soit $\mathcal{S}$ un système de forces de champ de moments $\mathcal{M}$ dont les éléments de réduction au point A sont $(\vec{R}, \mathcal{M}(A))$.

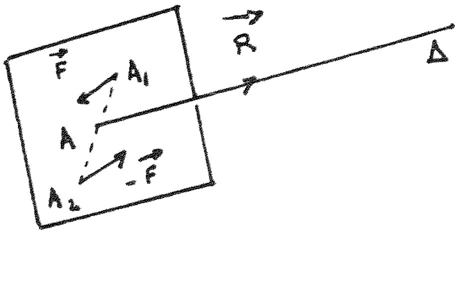
Traduisons l'étude des torseurs :

1°) $\vec{R} = \vec{0}$: $\mathcal{M}$ est un couple

- $\mathcal{M}(A) = \vec{0}$: $\mathcal{M}$ est le torseur nul. S est en équilibre.
- $\mathcal{M}(A) \neq \vec{0}$: $\mathcal{M}$ est bien un couple non nul. S est soumis à un couple.

2°) $\vec{R} \neq \vec{0}$ alors $\mathcal{M}$ admet un axe central Δ. Supposons $A \in \Delta$

- $\mathcal{M}(A) = \vec{0}$: $\mathcal{M}$ est un glisseur. $\mathcal{S}$ est équivalent à une force unique $(A, \vec{R})$.
- $\mathcal{M}(A) \neq \vec{0}$: $\mathcal{S}$ est équivalent à l'action simultanée d'un couple $\mathcal{C}$ et d'une force $(A, \vec{R})$, le couple $\mathcal{C}$ pouvant être représenté par deux forces $(A_1, \vec{F})$ et $(A_2, -\vec{F})$ contenues dans un plan orthogonal à Δ et symétriques par rapport à A car :



$\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$ et $A \in \Delta$

③ Cas particuliers.

1°/ système de forces parallèles : cas particulier important du poids d'un corps

2°/ système de 2 forces, 3 forces, coplanaires

3°/ lames encastrées : réduction à ... un torseur

VI Champ des vecteurs-vitesses à l'instant t d'un solide.

Mise en forme :

Soit $\mathcal{S}$ un solide indéformable. Soit P une particule de $\mathcal{S}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $M : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$

$t \longmapsto M(t)$: position de la particule à l'instant t

Supposons M dérivable. Alors la vitesse à l'instant t de la particule P est donnée par $\overrightarrow{V}(t) = \frac{dM}{dt}(t)$ (vitesse par rapport à $\mathcal{E}_3$!)

Comme tout ce que nous allons faire se passe à l'instant t, nous adoptons la notation suivante : $M(t) = M$ et $\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{V(M)}$; et $\mathcal{S}$: ensemble des positions occupées à l'instant t par le solide.

Alors, l'application $\overrightarrow{V} : \mathcal{S} \longrightarrow E_3$ est le champ des vecteurs-vitesse à

$M \longmapsto \overrightarrow{V}(M)$ l'instant t.

Théorème 1 : $\boxed{\forall M, N \in \mathcal{S}, \quad [\overrightarrow{V}(M) - \overrightarrow{V}(N)] . \overrightarrow{MN} = 0}$

autrement dit $\overrightarrow{V(M)} . \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V(N)} . \overrightarrow{MN}$: on dit que le champ est équiprojectif.

Démonstration : le solide étant indéformable, $\frac{d\,\overrightarrow{MN}^2}{dt} = 0$

or $\frac{dMN^2}{dt} = 2 \frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} . \overrightarrow{MN} = 2 (\overrightarrow{V(N)} - \overrightarrow{V}(M)) . \overrightarrow{MN}$ d'où le résultat.

Théorème 2 : (c'est un grand théorème de la théorie des torseurs ; nous l'admettrons).

$\boxed{\text{Tout champ équiprojectif est un torseur}}$

autrement dit, si un champ de vecteurs $\mathcal{C}$ vérifie :

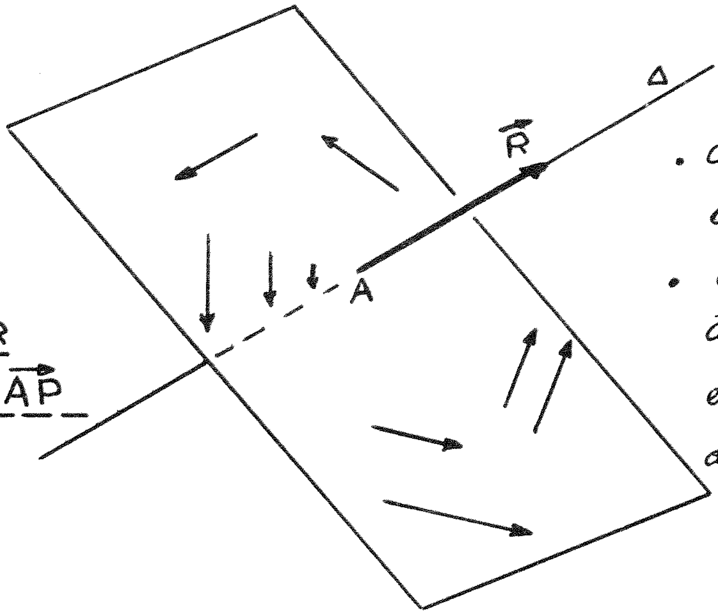
$$\forall P, Q \in \mathcal{E}_3, \quad [\mathcal{C}(P) - \mathcal{C}(Q)] . \overrightarrow{PQ} = 0$$

alors il existe un vecteur $\overrightarrow{R}$ tel que :

$$\forall P, Q \in \mathcal{E}_3, \quad \mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(Q) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

Le champ des vecteurs-vitesse à l'instant t d'un solide indéformable en mouvement est donc un torseur. La résultante générale de ce torseur ($\overrightarrow{R}$) est appelé le vecteur rotation instantané. Si $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$, ce torseur admet un axe central Δ appelé axe hélicoïdal. Le mouvement du solide est "assimilable" à l'instant t à un mouvement hélicoïdal d'axe Δ.

Remarque : le champ des vecteurs-accélération à l'instant t, n'est pas, en général, un torseur.

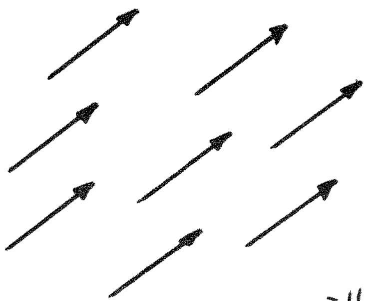


GLISSEUR

$\underline{g(P) = \vec{R} \wedge \vec{AP}}$

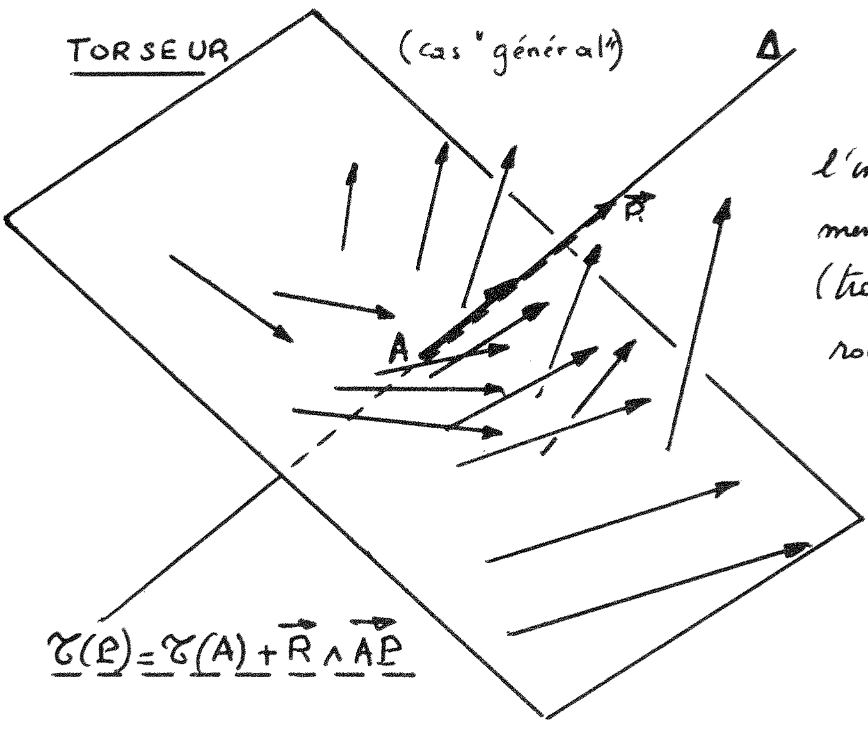
- champ des moments d'une force
- champ des vecteurs-vitesse à l'instant t d'un solide en mouvement de rotation autour de l'axe Δ

CHAMP UNIFORME (ou constant, ou couple)



- champ des moments de deux forces de même direction, de même intensité, de sens opposés.
- champ des vecteurs-vitesse à l'instant t d'un solide en mouvement de translation

TORSEUR (cas "général")



- champ des moments d'une action
- champ des vecteurs-vitesse à l'instant t d'un solide en mouvement hélicoïdal autour de l'axe Δ (translation de direction Δ et rotation autour de Δ.)

$\underline{\mathcal{T}(P) = \mathcal{T}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AP}}$

Grandeur vectorielle de l'espace physique

I - Introduction

(A)

Les modèles mathématiques utilisés dans tel domaine de la physique sont bien assis depuis longtemps, ainsi, par exemple, je n'étonnerai ni le physicien, ni le mathématicien, en proposant l'espace vectoriel euclidien E de dimension 3 (celui bien connu des vecteurs de l'espace physique) comme modèle pour l'ensemble des forces appliquées à un point matériel donné. Toute force (dans le cadre de la mécanique du point matériel) se représente par un vecteur de E et on compose deux forces en additionnant les vecteurs associés (règle du parallélogramme) Réfléchissons un peu à tout ça ...

1°) l'aspect vectoriel de la force ne semble pas poser trop de questions : une force appliquée à un point donné est définie par sa direction, son sens, son intensité ; un vecteur de E aussi.

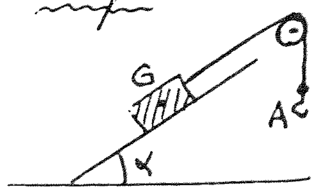
2°) mais pourquoi, pour composer deux forces, suffit-il d'ajouter les vecteurs correspondants ? On sent bien que la direction de la résultante est à peu près par là, que le sens est celui-ci, et que l'intensité de la résultante n'est pas la somme des intensités des deux forces composées ! Mais pourquoi exactement la règle du parallélogramme ? La première réponse, et qui est loin d'être idiote, est que ça marche. L'article qui suit se propose de montrer que cette règle du parallélogramme est plus simplement une conséquence unique (ou presque) du fait bien évident que la composition des forces est une propriété isotrope. (la même dans toutes les directions)

Le résultat sera démontré pour toute grandeur appelée ici "grandeur vectorielle de l'espace physique", c'est à dire qui peut se représenter par un vecteur de E, dans un sens qui va se préciser au fur et à mesure.

(A) Cette première partie de l'introduction, mélange parfois, distingue parfois, les notions mathématiques et les notions physiques. Voici la distinction entre les différents niveaux de réflexion ou de travail sur laquelle repose l'article.

1°) premier niveau : la situation physique, l'expérience

exemple



Quelle masse faut-il accrocher au crochet A pour que le corps C reste en équilibre ... ? (il reste évidemment à préciser des tas de choses ...)

2°) deuxième niveau : l'abstraction physique

Les différentes expériences déjà réalisées ont permis de dégager des notions de forces. Ainsi, dans l'exemple précédent, on dira que le corps C est soumis à l'action de trois forces extérieures ... Toujours au niveau de l'abstraction physique, on a défini la résultante d'un système de plusieurs forces appliquées en un point G ... (c'est une force appliquée en G qui, à elle seule, produit le même effet que le système ...)

3°) troisième niveau : les modèles mathématiques choisis pour représenter les notions et découvertes faites au niveau de l'abstraction physique. Les paragraphes suivants se proposent de justifier le choix de E comme modèle pour les forces appliquées en un point donné. J'essaierai également de montrer l'influence des différents choix d'unités de mesure

4°) quatrième niveau la schématisation des modèles

C'est en fait un retour à une "situation physique" très particulière, celle du papier-crayon ou du tableau-craie ... Par exemple, on dessine une force à l'aide d'un bipoint de la feuille (une flèche)

Ici se pose également un choix d'unité de mesure que j'appelle " unité de mesure des longueurs-dessin

C'est ainsi qu'au niveau du dessin, un bipoint se voudra être une force par exemple, ou encore deux points particuliers d'un système matériel, ou encore une vitesse, ... Quels mélanges en perspective (cavalière !)... On se permet même de choisir des unités de longueur-dessin différentes : l'une pour les forces, l'une pour les distances de deux points, une autre pour les vitesses, ... Quoi de plus naturel ? Pourquoi parler de tout ça ? Je crois que c'est important d'un point de vue pédagogique : tous les points d'un dessin n'ont pas le même statut ; ils ne représentent pas tous des points de l'espace physique. Certains collègues physiciens, fort astucieusement d'ailleurs, font le dessin des forces à côté de celui du système matériel.

Remarque, dans l'étude de la géométrie, les niveaux 1 et 4 sont confondus (les niveaux 2 et 3 l'ont été longtemps) : c'est peut-être là que se cache le secret de l'importance de la géométrie...

© Je voudrais enfin préciser que les questions dont je me préoccupe ici (quel modèle pour telle notion ?) doivent être posées, disons... au moins une fois dans sa vie..., et que l'essentiel reste évidemment l'utilisation correcte de l'outil mathématique accepté de tous pour une meilleure compréhension des phénomènes physiques.

II - Grandeur vectorielle de l'espace physique

Nous dirons qu'une grandeur physique est une grandeur vectorielle de l'espace physique lorsqu'elle se définie par la donnée d'une direction orientée et d'une intensité. Nous supposerons de plus que l'intensité est repérable par un réel positif et que l'ensemble des grandeurs de cette nature est muni d'une structure d'espace vectoriel. Nous allons préciser

au paragraphe III : ce que signifie "l'intensité est repérable par un réel positif" et dire pour quel type de grandeur ceci est vérifié, grâce au théorème classique dit "de la mesure des intensités des grandeurs",

au paragraphe IV : ce que signifie "muni d'une structure d'espace vectoriel" et dire pour quel type de grandeur ceci est vérifié, et au paragraphe V : nous démontions que, en supposant l'isotropie de la loi de composition interne, que cette structure d'espace vectoriel est précisément celle de l'espace physique.

A partir de maintenant, le discours se situe au niveau 3, avec, de temps en temps la traduction au niveau 2, surtout à propos des axiomes, pour montrer comment ceux-ci se justifient pleinement.

III Etude de l'ensemble des intensités :

① Définition

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble et $m_0 : \mathcal{I} \longrightarrow R^+$ bijective

Soit $\mathcal{M} = \{\lambda m_0 / \lambda \in R^{*+}\}$

$(\mathcal{I}, \mathcal{M})$ s'appelle un ensemble d'intensités $(\mathcal{I})$ repérables par un réel positif, muni d'une famille $(\mathcal{M})$ de mesure des intensités.

application : nous prendrons ce modèle-là pour les intensités de certaines grandeurs physiques, par exemple : l'intensité d'une force, la longueur d'un segment, la masse d'un corps, ... (Pour le temps, on prendra un autre modèle : droite affine réelle orientée ; pour les quantités d'électricité : droite vectorielle réelle orientée) Le choix d'une application $m \in \mathcal{M}$ correspond au choix d'une unité de mesure de l'intensité. En effet, soit $i_1 \in \mathcal{I}$, une intensité prise comme étalon. Il existe une et une seule mesure m telle que $m(i_1) = 1$ et alors toute intensité i a une valeur : $m(i)$. Changeons d'unité de mesure et soit i'_1 le nouvel étalon et m' la nouvelle mesure. (on a : $m' = \lambda m$; en particulier $m'(i_1) = \lambda m(i_1) = \lambda$) Donc $\underline{m'(i) = m'(i_1)\, m(i)}$

Le choix de ce modèle $(\mathcal{I}, \mathcal{M})$ peut être fait de deux manières extrêmes :

1°) en le posant comme principe

2°) en s'appuyant sur le théorème 1 énoncé ci-dessous, et en posant en principe les hypothèses du théorème.

② théorème 1 : théorème de la mesure des intensités d'une grandeur physique

énoncé du théorème 1 :

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble (contenant plus de deux points), muni d'une loi de composition interne notée + et d'une relation d'ordre totale notée $\leq$, telles que :

- + est commutative, associative, et possède un élément neutre i_0
- i_0 est un minimum pour $\leq$
- $(\mathcal{I}, +)$ est archimédien $(\forall x, y \in \mathcal{I},\ i_0 < x \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tq $nx > y)$
- $\forall x, y \in \mathcal{I},\ x < y \Longrightarrow (\exists z \in \mathcal{I}$ tel que $x + z = y)$
- $(\mathcal{I}, \leq)$ possède la propriété de la borne supérieure (toute partie de $\mathcal{I}$, non vide et majorée, possède un plus petit majorant)
- $\forall x, y \in \mathcal{I},\ x < y \Longrightarrow (\exists z \in \mathcal{I}$ tel que $x < z < y)$

Alors $(\mathcal{I}, +, \leq)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^+, +, \leq)$ et pour tout $i \neq i_0$, il existe un unique isomorphisme φ de $(\mathcal{I}, +, \leq)$ sur $(\mathbb{R}^+, +, \leq)$ tel que $\varphi(i) = 1$.

remarque : φ isomorphisme de $(\mathcal{I}, +, \leq)$ sur $(\mathbb{R}^+, +, \leq)$ signifie :

- φ est une bijection de $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{R}^+$
- $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $x \leq y \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$

démonstration du théorème : elle est assez difficile ; mais le théorème est "classique", aussi, je n'en donne pas ici de démonstration.

application à la physique : cas des forces par exemple

Définissons la somme des intensités en prenant deux forces de même direction orientée, et la comparaison des intensités en prenant deux forces de directions opposées. Il s'agit maintenant de traduire chacune des hypothèses du théorème dans le domaine de l'abstraction physique et se demander si chacune des hypothèses est justifiée. C'est plus fastidieux que difficile....

remarque : il est facile de voir que $\mathcal{I}$, muni de l'ensemble des isomorphismes φ, vérifie la définition ①. Un isomorphisme φ est une mesure des intensités.

IV Aspect vectoriel

① direction orientée

Nous supposons réglé le choix du modèle pour représenter l'espace physique $\mathcal{E}$, espace affine attaché à E, espace vectoriel euclidien de dimension 3. Rappelons qu'en faisant ceci, on a choisi une unité de mesure des longueurs, tout changement d'unité se traduisant par le remplacement de la norme $\|\cdot\|$ de E par la norme $k\|\ \|$ où $k \in \mathbb{R}^{*+}$.

Soit $\vec{u} \in E^*$, un vecteur non nul

Posons $D(\vec{u}) = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}^{*+}\}$ et appelons ceci la direction orientée par $\vec{u}$

Dans la suite nous identifierons $D(\vec{u})$ et $\vec{u}$ pour les vecteurs $\vec{u}$ unitaires. Nous faisons ceci pour alléger les notations, mais il est bien évident que la notion de direction orientée est indépendante du choix de l'unité de longueur. Posons $\mathcal{D} = \{\vec{u} \in E \mid \|\vec{u}\| = 1\}$; nous considérons $\mathcal{D}$ comme l'ensemble des directions orientées de $\mathcal{E}$.

② Grandeur vectorielle de l'espace physique

Soit $(\mathcal{I}, \mathcal{M})$ un ensemble d'intensités repérables par un réel positif ($\mathcal{I}$ vérifie les hypothèses du théorème 1) Soit i_0 l'intensité nulle.

Posons $\mathcal{I}^* = \mathcal{I} - \{i_0\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{D} \times \mathcal{I}^* \cup \{F_0\}$ où F_0 est un élément appelé grandeur nulle.

$\mathcal{F}$ s'appelle un ensemble de grandeurs vectorielles de l'espace physique

$\mathcal{F}$ est un modèle pour l'ensemble des forces agissant sur un point matériel donné. F_0 représente la force nulle

Soit $F = (\vec{u}, i) \in \mathcal{F}^* = \mathcal{D} \times \mathcal{I}^*$

$\vec{u}$ représente la direction orientée de la force

i représente l'intensité de la force

$F = (\vec{u}, i)$ représente la force

Représentation par un vecteur de E et dessin d'une grandeur vectorielle

Soit m une mesure de $\mathcal{I}$

Soit $\varphi :$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow E \\ (\vec{u}, i) &\longmapsto m(i)\vec{u} \\ F_0 &\longmapsto \vec{0} \end{aligned}$$

a) théorème : φ est une bijection de $\mathcal{F}$ sur E

conséquence : tout élément de $\mathcal{F}$ se représente donc par un vecteur de E, et, moyennant le choix d'une unité de longueur-dessin, tout élément de $\mathcal{F}$ se dessine par un bipoint (une flèche). Cependant, cette application φ n'est pas "canonique" dans la mesure où elle fait intervenir

- le choix de l'unité de mesure des longueurs ($\|\cdot\|$ de E)
- le choix de l'unité de mesure des intensités (m de $\mathcal{I}$)

‖ Si l'on multiplie les longueurs par k, les intensités par k', le représentant-vecteur d'une grandeur F est multiplié par $\frac{k'}{k}$

(en effet $\varphi'(\vec{u}, i) = m'(i)\vec{u}'$ tel que $m'(i) = k'm(i)$
et $k\|\vec{u}'\| = 1$

donc $\varphi'(\vec{u}, i) = \frac{k'}{k} m(i)\vec{u}$ avec $\|\vec{u}\| = 1$
$= \frac{k'}{k}\varphi(\vec{u}, i)$)

démonstration du théorème.

φ est une bijection car m est une bijection.

illustration : dessin d'une grandeur vectorielle F de direction verticale, dirigée vers le bas, dont la mesure de l'intensité dans l'unité choisie est 12,5.

unité de longueur-dessin : 2mm
verticale descendante ↓ } dessin de F

③ définition de la loi externe sur $\mathcal{F}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F \in \mathcal{F}$

- si $\lambda = 0$ ou si $F = F_0$, posons $\lambda . F = F_0$
- si $\lambda \neq 0$ et si $F \neq F_0$, posons $F = (\vec{u}, i)$ avec $i \neq i_0$
  - si $\lambda > 0$ posons $\lambda . F = (\vec{u}, \lambda i)$
  - si $\lambda < 0$ posons $\lambda . F = (-\vec{u}, -\lambda i)$

remarque : Que signifie λi ?

m étant une bijection, elle possède une application réciproque m^{-1}.
Posons $\lambda i = m^{-1}(\lambda m(i))$ Ceci ne dépend pas de la mesure m choisie. En effet, posons $m' = km(i)$ $(k \in \mathbb{R}^{*+})$

alors $\quad m^{-1}(\lambda m'(i)) = m'^{-1}(\lambda k m(i))$

et $\quad m(m'^{-1}(\lambda k m(i))) = \frac{1}{k}\, m'(m'^{-1}(\lambda k m(i))) = \frac{1}{k} \lambda k m(i) = \lambda m(i)$

donc $\quad m'^{-1}(\lambda m'(i)) = m^{-1}(\lambda m(i))$.

On pourrait également, quitte à choisir une fois pour toute une mesure m, identifier $\mathcal{I}$ et $\mathbb{R}^+$ (i et $m(i)$) ; alors λi est tout simplement la multiplication de deux réels. Mais il me semble préférable, à chaque fois qu'on peut le faire sans trop alourdir, de ne pas faire intervenir de choix d'unité de mesure quand cela n'est pas nécessaire.

④ Théorème 2

Soit $\oplus$ une loi de composition interne sur $\mathcal{F}$ telle que
A_1 : $\oplus$ est commutative et associative
A_2 : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall F \in \mathcal{F}$: $(\lambda+\mu).F = \lambda.F \oplus \mu.F$
A_3 : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall F, F' \in \mathcal{F}$: $\lambda.(F \oplus F') = \lambda F \oplus \lambda.F'$
Alors $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

application du théorème : Supposons donc, au niveau de l'abstraction physique, que l'on sache ce que signifie composer deux grandeurs de même nature (par exemple des forces agissant en G) et que cette composition vérifie la traduction des hypothèses A_1, A_2, A_3 du théorème 2. On en conclut que ces grandeurs sont munies d'une structure d'espace vectoriel.

Par exemple, pour les forces, on définit la résultante d'un système de plusieurs forces appliquées en G (c'est la force, appliquée en G, qui produit le même effet que le système ...) L'hypothèse A_1 est donc bien naturelle ; l'hypothèse A_2 a déjà été faite (il s'agit, à peu près, de : pour ajouter deux forces de même direction orientée, il suffit d'ajouter les intensités) La troisième hypothèse, A_3, est bien naturelle également : ~~par~~ si on multiplie deux forces par λ, la résultante est multipliée par λ également.

Dans le cas des forces, nous prendrions donc comme modèle $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$, vérifiant A_1, A_2, A_3 : $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

démonstration du théorème

1°) F_0 est l'élément neutre de $(\mathcal{F}, \oplus)$.

lemme 1 : $1.F = F$ par définition de la loi externe.

Soit $F \in \mathcal{F}$.
$$\begin{aligned} F \oplus F_0 &= 1.F \oplus 0.F && \text{car } 0.F = F_0 \\ &= (1+0).F && \text{car } A_2 \\ &= 1.F \\ &= F && \text{d'après le lemme 1} \end{aligned}$$

2°) $(-1).F$ est le symétrique de F :
$$\begin{aligned} (-1).F \oplus F &= (-1).F \oplus 1.F && \text{(lemme 1)} \\ &= (-1+1).F && (A_2) \\ &= 0.F \\ &= F_0 \end{aligned}$$

donc $(\mathcal{F}, \oplus)$ est un groupe commutatif.

3°) $\lambda.(\mu.F) = (\lambda\mu).F$

La démonstration de cette propriété est également simple : il suffit de distinguer les cas λ, μ positifs, nuls, négatifs. Démontrons-la dans le cas $\lambda > 0$ et $\mu < 0$ et $F \neq F_0$.

Posons $F = (\vec{u}, i)$ avec $i \neq i_0$

alors
$$\begin{aligned} \mu F &= (-\vec{u}, -\mu i) && \text{car } \mu < 0 \\ \lambda.(\mu F) &= (-\vec{u}, -\lambda\mu i) && \text{car } \lambda > 0 \\ (\lambda\mu)F &= (-\vec{u}, -\lambda\mu i) && \text{car } \lambda\mu < 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda(\mu.F) = (\lambda\mu).F$

4°) $(\lambda+\mu)F = \lambda F \oplus \mu F$ c'est A_2

$\lambda(F \oplus F') = \lambda F \oplus \lambda F'$ c'est A_3

$1.F = F$ c'est le lemme 1

donc $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Essayons de résumer.

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de grandeurs vectorielles de l'espace physique (c'est-à-dire, définies par leurs directions orientées et leurs intensités, repérables par des réels positifs) On définit la multiplication d'une grandeur par un réel en multipliant son intensité par ce réel (dans le cas positif) On suppose que $\mathcal{F}$ est muni d'une loi de composition interne vérifiant les axiomes A_1, A_2 et A_3

Alors $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

V La règle du parallélogramme

① théorème 3

Soit $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$ un espace vectoriel de grandeur vectorielle de l'espace physique

Soit $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow E$

$$(\vec{u}, i) \longmapsto m(i)\,\vec{u} \quad \text{où } m \text{ est une mesure de } \mathcal{I}$$

$$F_0 \longmapsto \vec{0}$$

• Supposons que $\oplus$ vérifie les deux axiomes suivants :

A_4 (isotropie de $\oplus$)

Si $(\vec{u}, i) \oplus (\vec{u}', i') = (\vec{u}'', i'')$

alors, $\forall\, l$, isométrie de E : $(l(\vec{u}), i) \oplus (l(\vec{u}'), i') = (l(\vec{u}''), i'')$

A_5 (continuité de $\oplus$)

Soit $(\vec{u}_n)$ une suite de vecteurs unitaires convergeant vers $\vec{u}$

Soit v un vecteur unitaire. Posons $\begin{cases} (\vec{w}_n, i_n) = (\vec{u}_n, i) \oplus (\vec{v}, i) \\ (\vec{w}, j) = (\vec{u}, i) \oplus (\vec{v}, i) \end{cases}$

alors $\begin{cases} \vec{w}_n \text{ cvg vers } \vec{w} \\ \text{et } \lim\limits_{n \to +\infty} m(i_n) = m(j) \end{cases}$ où m est une mesure de $\mathcal{I}$.

• Alors φ est un isomorphisme d'espace vectoriel

en particulier : $\varphi(F \oplus F') = \varphi(F) + \varphi(F')$: c'est la règle du parallélogramme

remarque : les axiomes A_4 et A_5 s'interprètent et s'acceptent facilement au niveau de l'abstraction physique.

② transformation de ce théorème

φ étant une bijection, transportons la structure de $\mathcal{F}$ sur E en posant $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$, $\quad \vec{u} \oplus \vec{v} = \varphi\left(\varphi^{-1}(\vec{u}) \oplus \varphi^{-1}(v)\right)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E \quad \lambda * \vec{u} = \varphi(\lambda\, \varphi^{-1}(\vec{u})) = \lambda\, \vec{u}$

Le théorème 3 se ramène alors au théorème 4 suivant

théorème 4 : Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3

Soit $\oplus$ une loi de composition interne sur E telle que $(E, \oplus, \cdot)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Si 1°) les + isométries sont $\oplus$ linéaires

et 2°) $\left.\begin{array}{l} \forall n,\ \|u_n\| = \|v\| \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - u\| = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \|(u_n \oplus v) - (u \oplus v)\| = 0$ ~~$\|u_n \oplus v\| = \|u \oplus v\|$~~

Alors $\oplus = +$

(On pourrait dire il n'y a, sur $(E, +, \cdot)$, qu'une structure vectorielle homogène, isotrope et continue)

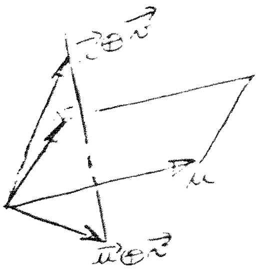
③ démonstration du théorème 4

1°) Si $(\vec{u},\vec{v})$ est lié, alors $\vec{u}\oplus\vec{v} = \vec{u}+\vec{v}$

en effet, soit $\vec{w}, \lambda, \mu$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{w}$ et $\vec{v} = \mu\vec{w}$

alors $\vec{u}\oplus\vec{v} = \lambda\vec{w}\oplus\mu\vec{w} = (\lambda+\mu).\vec{w} = \lambda\vec{w}+\mu\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$

2°) Si $(\vec{u},\vec{v})$ est libre alors $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\oplus\vec{v})$ est lié.



Soit l la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\vec{u},\vec{v})$

$l(\vec{u}\oplus\vec{v}) = l(\vec{u})\oplus l(\vec{v})$ car l est $\oplus$ linéaire.

$= \vec{u}\oplus\vec{v}$ car $l(\vec{u})=\vec{u}$ et $l(\vec{v})=\vec{v}$

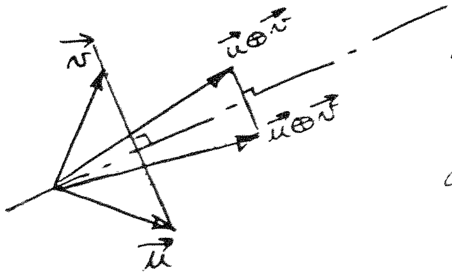
donc $\vec{u}\oplus\vec{v} \in \mathrm{Ker}(l - id) = \text{plan }(\vec{u},\vec{v})$

Conséquence de 1°) et 2°) : il suffit de démontrer le théorème pour E de dimension 2. Nous supposons désormais $\dim E = 2$

3°) Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ alors $(\vec{u}\oplus\vec{v}, \vec{u}+\vec{v})$ est lié.

Supposons $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \neq 0$ et soit s la symétrie orthogonale telle $s(\vec{u}) = \vec{v}$; alors $s(\vec{u}\oplus\vec{v}) = s(\vec{u})\oplus s(\vec{v})$ car s est $\oplus$ lin.

$= \vec{v}\oplus\vec{u} = \vec{u}\oplus\vec{v}$



donc $\vec{u}\oplus\vec{v} \in \mathrm{Ker}(s - id)$, de dimension 1

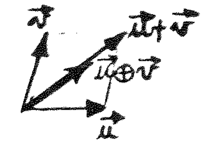
or $\vec{u}+\vec{v} \in \mathrm{Ker}(s - id)$

donc $(\vec{u}\oplus\vec{v}, \vec{u}+\vec{v})$ est lié.

4°) **Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, alors $\vec{u}\oplus\vec{v} = \vec{u}+\vec{v}$**

C'est la partie non "triviale" de cette démonstration.

~~Orientons E.~~



Soit $\theta \in [0,\pi]$.

Soit $(\vec{u},\vec{v})$ tels que $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \\ \text{angle géométrique}(\vec{u},\vec{v}) \text{ de mesure } \theta \end{cases}$

Soit $(\vec{u}',\vec{v}')$ tel que $\begin{cases} \|\vec{u}'\| = \|\vec{v}'\| = 1 \\ \text{angle géométrique}(\vec{u}',\vec{v}') \text{ de mesure } \theta \end{cases}$

Alors il existe une isométrie l telle que $l(\vec{u}) = \vec{u}'$ et $l(\vec{v}) = \vec{v}'$.

et $\vec{u}'\oplus\vec{v}' = l(\vec{u})\oplus l(\vec{v}) = l(\vec{u}\oplus\vec{v})$

donc $\|\vec{u}'\oplus\vec{v}'\| = \|\vec{u}\oplus\vec{v}\|$

Soit donc $\alpha : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle $\alpha(\theta) = \|\vec{u}\oplus\vec{v}\|$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \\ \text{mesure de l'angle géom.}(\vec{u},\vec{v}) = \theta \end{cases}$

Soient $\theta, \theta' \in [0,\pi]$ tels que $\begin{cases} \theta+\theta' \in [0,\pi] \\ \text{et } \theta-\theta' \in [0,\pi] \end{cases}$

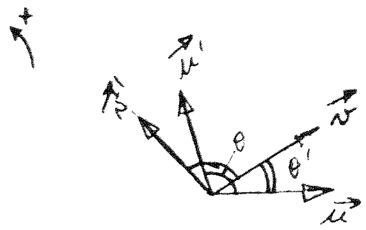
Soit r la rotation d'angle θ

Soit r' la rotation d'angle θ' (on oriente E)

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire

Posons $\vec{v} = r'(\vec{u})$, $\vec{u}' = r(\vec{u})$, $\vec{v}' = r(\vec{v})$

on a donc aussi $\vec{v}' = r'(\vec{u}')$



$\vec{u}' \oplus \vec{v}' = r(\vec{u}) \oplus r(\vec{v}) = r(\vec{u} \oplus \vec{v})$

donc $(\vec{u} \oplus \vec{v}, \vec{u}' \oplus \vec{v}') = \theta$

or $\|\vec{u} \oplus \vec{v}\| = \alpha(\theta') = \|\vec{u}' \oplus \vec{v}'\|$ ($\neq 0$ car $\theta' \neq \pi$)

donc $\left\| \dfrac{\vec{u} \oplus \vec{v}}{\|\vec{u} \oplus \vec{v}\|} \oplus \dfrac{\vec{u}' \oplus \vec{v}'}{\|\vec{u}' \oplus \vec{v}'\|} \right\| = \alpha(\theta)$

donc $\underline{\|(\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus (\vec{u}' \oplus \vec{v}')\| = \alpha(\theta)\alpha(\theta')}$

Par ailleurs $\|\vec{u} \oplus \vec{v}'\| = \alpha(\theta+\theta')$

et $\|\vec{u}' \oplus \vec{v}\| = \alpha(\theta-\theta')$

Or $\vec{u} \oplus \vec{v}'$ et $\vec{u}' \oplus \vec{v}$ ont même direction orientée

(ce point est un peu délicat, et je le démontre "mal" :

- même direction : celle de la bissectrice intérieure commune à $(\vec{u}, \vec{v}')$ et $(\vec{v}, \vec{u}')$.
- même sens car si non, et par continuité de $\oplus$, on voit que, en faisant tendre θ' vers 0, on aurait un certain angle θ' pour lequel $\vec{u} \oplus \vec{v}'$ serait nul, c'est à dire $\vec{v}' = -\vec{u}$ (unicité du symétrique) ce qui est impossible pour $\theta+\theta' < \pi$)

Donc $\underline{\|(\vec{u} \oplus \vec{v}') \oplus (\vec{u}' \oplus \vec{v})\| = \alpha(\theta+\theta') + \alpha(\theta-\theta')}$

Donc $\alpha(\theta+\theta') + \alpha(\theta-\theta') = \alpha(\theta)\alpha(\theta')$

<u>Lemme</u> : Soit α une fonction numérique, continue, non identiquement nulle, de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\begin{cases} \alpha(\pi) = 0 \\ \theta, \theta', \theta+\theta', \theta-\theta' \in [0,\pi] \Longrightarrow \alpha(\theta+\theta') + \alpha(\theta-\theta') = \alpha(\theta)\alpha(\theta') \end{cases}$$

Alors $\forall \theta \in [0,\pi]$, $\alpha(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}$

voir démonstration du lemme au paragraphe $\underline{VI}$

appliquons ce lemme :

on a bien α continue (d'après A_5)

non identiquement nulle (car $\alpha(0) = 2$)

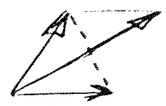
positive

$\alpha(\pi) = 0$

et $\alpha(\theta+\theta') + \alpha(\theta-\theta') = \alpha(\theta)\alpha(\theta')$

donc $\begin{cases} \|\vec u\| = \|\vec v\| = 1 \\ \text{angle géom. } (\vec u, \vec v) = \theta \end{cases} \Longrightarrow \|\vec u \oplus \vec v\| = 2\cos\frac{\theta}{2}$

or on a $\|\vec u + \vec v\| = 2\cos\frac{\theta}{2}$



donc $\|\vec u\| = \|\vec v\| = 1 \Longrightarrow (\vec u \oplus \vec v = \vec u + \vec v$ ou $\vec u \oplus \vec v = -(\vec u + \vec v))$

or $\oplus$ est continue et $\vec u \oplus \vec u = \vec u + \vec u$

donc $\|\vec u\| = \|\vec v\| = 1 \Longrightarrow \vec u \oplus \vec v = \vec u + \vec v$

5°) $\|\vec u\| = \|\vec v\| \Longrightarrow \vec u \oplus \vec v = \vec u + \vec v$

en effet, supposons $\|\vec u\| = \|\vec v\| \neq 0$, alors

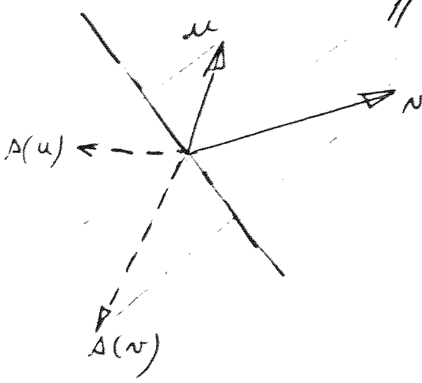
$$\vec u \oplus \vec v = \|\vec u\| \frac{\vec u}{\|\vec u\|} \oplus \|\vec u\| \frac{\vec v}{\|\vec v\|} = \|\vec u\| \left(\frac{\vec u}{\|\vec u\|} \oplus \frac{\vec v}{\|\vec v\|} \right)$$

$$= \|\vec u\| \left(\frac{\vec u}{\|\vec u\|} + \frac{\vec v}{\|\vec v\|} \right) \quad \text{d'après 4°}$$

$$= \vec u + \vec v$$

6°) Soient $\vec u$ et $\vec v$ deux vecteurs non liés. Alors $(\vec u \oplus \vec v, \vec u + \vec v)$ est lié.

Supposons $(\vec u, \vec v)$ libre. Alors $\vec u + \vec v \neq 0$



Soit s la symétrie orthogonale de direction $\vec u + \vec v$

$\vec u \oplus s(\vec u) = \vec u + s(\vec u)$ car $\|\vec u\| = \|s(\vec u)\|$

$\vec v \oplus s(\vec v) = \vec v + s(\vec v)$

donc $\vec u \oplus s(\vec u) \oplus \vec v \oplus s(\vec v) = [\vec u + s(\vec u)] \oplus [\vec v + s(\vec v)]$

$= \vec u + s(\vec u) + \vec v + s(\vec v)$ (car même direction)

$= \vec u + \vec v + s(\vec u + \vec v)$

$= \vec 0$ car s = symétrie de direction $\vec u + \vec v$

Or $\vec{u} + s(\vec{u}) \oplus \vec{v} \oplus s(\vec{v}) = \vec{u} \oplus \vec{v} \oplus s(\vec{u} \oplus \vec{v})$

car s est $\oplus$ linéaire.

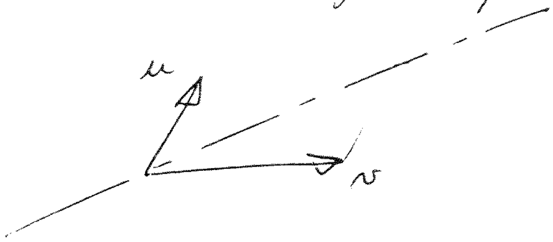
$= (\vec{u}\oplus\vec{v}) + s(\vec{u}\oplus\vec{v})$

donc $\vec{u} \oplus \vec{v}$ appartient à la direction de s.

7°) $(\vec{u}, \vec{v})$ libre $\Longrightarrow \vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ libre. D'après 6°) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} \oplus \vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$.

Soit s la symétrie par rapport à $\vec{u}+\vec{v}$



$$\begin{aligned}
\vec{u} \oplus \vec{v} \oplus s(\vec{u}) \oplus s(\vec{v}) &= \vec{u} \oplus \vec{v} \oplus s(\vec{u} \oplus \vec{v}) \\
&= \lambda(\vec{u} + \vec{v}) \oplus s(\lambda(\vec{u} + \vec{v})) \\
&= 2\lambda\left[\vec{u} + \vec{v}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \oplus \vec{v} \oplus s(\vec{u}) \oplus s(\vec{v}) &= [\vec{u} \oplus s(\vec{u})] \oplus [\vec{v} \oplus s(\vec{v})] \\
&= [\vec{u} + s(\vec{u})] \oplus [\vec{v} + s(\vec{v})] \quad \text{car } \|u\| = \|s(u)\| \ldots \\
&= \vec{u} + s(\vec{u}) + \vec{v} + s(\vec{v}) \quad \text{car même direction} \\
&= \vec{u} + \vec{v} + s(\vec{u} + \vec{v}) \\
&= 2(\vec{u} + \vec{v})
\end{aligned}$$

donc $\lambda = 1$. C'est fini, ou presque.

Démonstration du lemme

Voir énoncé en V 5°)

Pour démontrer que $\forall \theta \in [0, \pi]$, $\alpha(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}$, il suffit de le démontrer pour une partie dense de $[0, \pi]$, puisque α est continue.

1°) en posant $\theta' = 0$, on a $\forall \theta \in [0, \pi]$ $\alpha(\theta) + \alpha(\theta) = \alpha(\theta)\alpha(0)$

α est non identiquement nulle, donc $\alpha(0) = 2$.

2°) en posant $\theta' = \theta$, on a $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\alpha(2\theta) + 2 = [\alpha(\theta)]^2$

Démontrons par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha(\frac{\pi}{2^n}) = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

* c'est vrai pour $n = 0$ puisque $\alpha(\pi) = 0$
* supposons que ce soit vrai $\forall k \leq n$

alors $\alpha^2(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2 + \alpha(\frac{\pi}{2^n}) = 2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}$

or α est positif, donc $\alpha\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

3°) démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : \frac{p\pi}{2^n} \leq \pi \Longrightarrow \alpha\left(\frac{p\pi}{2^n}\right) = 2\cos\frac{p\pi}{2^{n+1}}$

* c'est vrai pour $p=1$ car $\alpha\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

* supposons que ce soit vrai $\forall k \leq p$
alors, en posant $\theta = \frac{p\pi}{2^n}$ et $\theta' = \frac{\pi}{2^n}$, on obtient
(pour $\frac{(p+1)\pi}{2^n} \leq \pi$) :

$$\alpha\left(\frac{p+1}{2^n}\pi\right) + \alpha\left(\frac{p-1}{2^n}\pi\right) = \alpha\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\alpha\left(\frac{p\pi}{2^n}\right)$$

donc $\alpha\left(\frac{p+1}{2^n}\pi\right) = 2\left[2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{p\pi}{2^{n+1}} - \cos\left(\frac{p-1}{2^{n+1}}\pi\right)\right]$

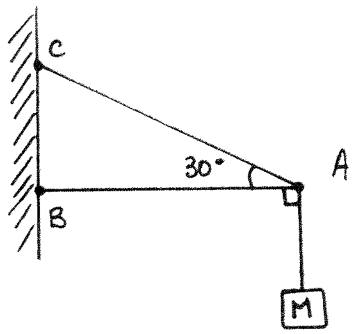
$$= 2\cos\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}\pi\right)$$

Or l'ensemble des nombres $\frac{p\pi}{2^n}$ est dense dans $[0,\pi]$
donc

$$\boxed{\forall \theta \in [0,\pi], \quad \alpha(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}}$$

Potence

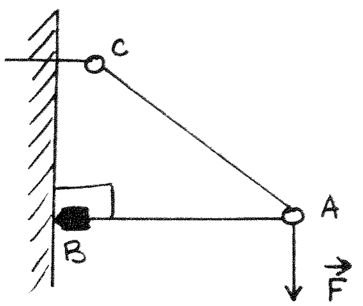
Voici tout d'abord un problème mal posé, qui fait se dresser sur la tête les cheveux du collègue de mécanique et qui laissera perplexe consciemment ou inconsciemment, les élèves qui affrontent l'art des liaisons.



Une charge M de 100 kgf est soutenue comme l'indique la figure, AB et AC sont deux poutrelles rigides assemblées en A et fixées respectivement en B et C.
Rechercher les caractéristiques des trois forces qui se font équilibre au point A.
(J. Cessac G. Tréherne 2^e C)

Il est absolument nécessaire de préciser quels types de fixation et d'articulation sont utilisées en A, B et C pour résoudre un tel problème. En effet comme le montre le document F_4, une action est généralement équivalente à un couple et une force. Elle n'est équivalente à une force que dans certains cas particuliers: cas d'articulation simple (rotoïde ou sphérique) ou d'appui simple. Dans le cas d'un encastrement par exemple, ce n'est plus le cas. Le problème de la potence cache donc plusieurs problèmes distincts:

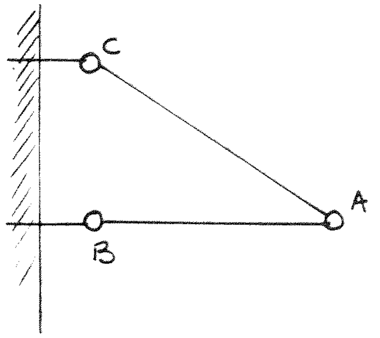
I Cas simple : peut être posé en classe de seconde



Articulation en A et C
Appui simple en B sans frottement
Alors l'action du "mur" sur la barre (AB) est une force, de même sur la barre (AC)
Les actions sur les barres (AB) et (AC) en A sont également des forces.

Le système (ABC) est soumis à trois forces extérieures dont deux sont concourantes en A (hypothèse : sans frottement). Donc l'action du "mur" sur (AC) en C a la direction de AC etc...
Le problème se résoud facilement : (c'est un système isostatique extérieur)

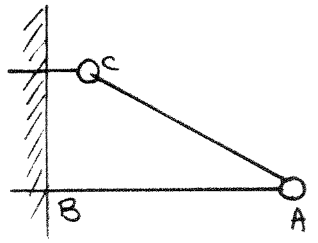
II Cas simple également



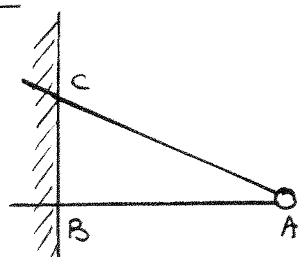
Articulations en A, B et C
Les actions qui interviennent sur les barres en A, B et C sont donc des forces
Isolons la barre (AB) par exemple. Elle est en équilibre et soumis à l'action de deux forces
- une en A (résultant de la masse M et de "l'action de la barre (AC)")
- une en B (action du mur sur (AB))

Ces deux forces ont donc pour direction (AB)
En isolant la barre (AC) on démontre de même que les forces auxquelles elle est soumise ont pour direction (AC)
En écrivant maintenant la condition d'équilibre du système (ABC), le problème se résoud facilement : (c'est un système isostatique intérieur)

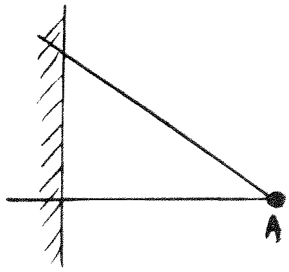
III Cas plus compliqués



Articulations en A et C
Encastrement en B



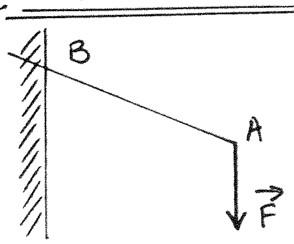
Articulation en A
Encastrement en B et C



Liaison rigide en A

On ne peut sans faire d'hypothèses supplémentaires, connaître les actions qui s'exercent aux encastrements (L'existence de couples est tout à fait légitime)
(Ce sont des systèmes hyperstatiques)

IV Etude d'un encastrement



Soient $(\vec{A}, \vec{C})$ les éléments de réduction en B de l'action du mur sur la barre (AB).
La barre (AB) étant en équilibre :

$$\vec{R} = -\vec{F}$$

$$\text{et } \vec{C} = -M_B(A, \vec{F}) = -\overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

et si la barre (AB) n'est pas rigide .....

ou : La méthode du funiculaire et les théorèmes de géométrie qu'elle m'a fait découvrir

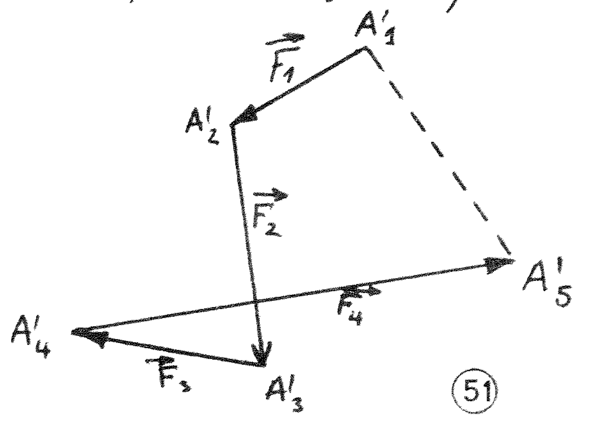
I] Présentation rapide de la méthode du funiculaire

funiculaire : du latin funiculus, petite corde.

① Soit un système de $(n-1)$ forces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots \mathcal{F}_{n-1}$, de droites d'action $a_1, a_2, \dots a_n$, de vecteurs-force $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots \vec{F_{n-1}}$ ($\vec{F_i}$ et a_i ont donc même direction) On suppose que $\sum_{i=1}^{n-1} \vec{F_i} \neq \vec{0}$ et on se propose de chercher une force $\mathcal{F}_n$, de droite d'action a_n, de vecteur-force $\vec{F_n}$, telle que le système des (n- forces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots \mathcal{F}_{n-1} \mathcal{F}_n$ soit en équilibre

Voici une méthode qui consiste à chercher "une petite corde" qui, soumise aux n forces $\mathcal{F}_i$ en des points $A_i \in a_i$, serait en équilibre, c'est-à-dire chacun des noeuds A_i et chacun des brins $[A_i, A_{i+1}]$ est en équilibre (on pose $n+1=1$). (En fait de petite corde, il vaudrait mieux imaginer un ensemble de barres articulées en A_i, chaque barre étant soumise soit à une extension, soit à une compression, sous l'action de deux forces opposées)

② On construit n points $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ tels que $\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}} = \vec{F_i}$: c'est ce qu'on appelle le dynamique des forces.



données : $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$

construction de : A'_2, A'_3, A'_4, A'_5

choix de : A'_1

On a alors $\vec{F_n} = \overrightarrow{A'_n A'_1}$ puisque nécessairement $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{0}$

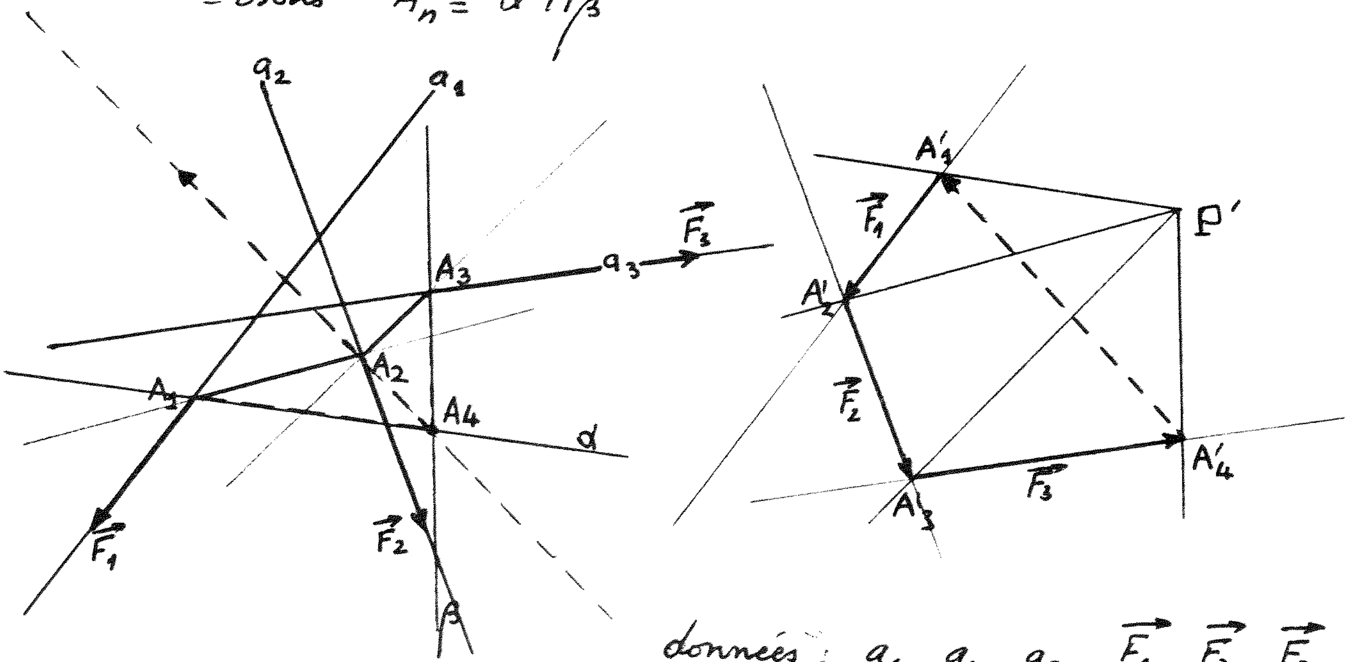
Soit P' un point (appelé pôle). On construit les droites $(P'A'_i)$, appelées les rayons polaires.

Soit A_1 un point de a_1. Soit $A_2 \in a_2$ tel que $(A_1 A_2) // (P'A'_2)$ et soit α la droite passant par A_1 et parallèle à $(P'A'_1)$.

Soit $A_3 \in a_3$ tel que $(A_2 A_3) // (P'A'_3)$ ... On construit ainsi de proche en proche : $A_1, A_2, A_3, \dots A_{n-1}$.

Soit β la droite passant par A_{n-1} et parallèle à $(P'A'_n)$

Posons $A_n = \alpha \cap \beta$



données : $a_1, a_2, a_3, \vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$

puis construction du dynamique $A'_1 .. A'_4$

choix de : P' et $A_1 \in a_1$

construction de : A_2 A_3 et A_4

Résultat : Le système des barres articulées $[A_i ; A_{i+1}]$ soumis aux forces $(A_i, \vec{F_i})$ est en équilibre.

③ En effet, chaque nœud A_i est soumis à l'action de trois forces concourantes : $\overrightarrow{P'A'_i}$, $\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}$, $\overrightarrow{A'_{i+1}P'}$ dont la somme est nulle, et chaque barre $[A_i, A_{i+1}]$ est soumise à l'action de deux forces opposées : $(A_i, \overrightarrow{P'A_{i+1}})$ et $(A_{i+1}, \overrightarrow{A_{i+1}P'})$

> Nous dirons que $(A_1, A_2, \dots A_n)$ est un <u>funiculaire</u>, construit sur $(a_1, a_2, \dots a_{n-1})$, de dynamique $(A'_1, A'_2, \dots A'_n)$ et que c'est le funiculaire associé au pôle P' et au point d'action A_1.

④ Et si je change de pôle P' ? et si je change de premier point d'action A_1 ? Eh bien ! je trouverai à la place de $(A_n, \vec{F_n})$ une nouvelle force $(B_n, \vec{F'_n})$ avec, évidemment, $\vec{F'_n} = \vec{F_n}$ et ... $(A_n B_n)$ de même direction que $\vec{F_n}$ (unicité de l'action équivalente au système des $(n-1)$ forces données !)
Les données et la construction d'un funiculaire se traduisent en langage géométrique ; la remarque qui vient d'être faite se traduit donc en un théorème de géométrie dont l'énoncé me surprend et dont la démonstration me laisse perplexe ... Mes surprises ne sont pas terminées. Je continue ma lecture du cours de mécanique :
<u>théorème</u> : les cotés homologues de deux funiculaires qui ont mêmes droites d'action et même dynamique, se coupent sur une droite, parallèle à la droite des pôles, appelée droite des pivots.
Voici encore un théorème de géométrie (celui-là me fait penser à Desargues)

Faites la figure correspondant à ces résultats, pour 5 points $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$ par exemple, en se donnant quatre droites a_1, a_2, a_3, a_4 dont les directions sont $\overrightarrow{A'_1A'_2}$, $\overrightarrow{A'_2A'_3}$, $\overrightarrow{A'_3A'_4}$, $\overrightarrow{A'_4A'_5}$.
Le résultat est surprenant.

On choisit P' et $A_1 \in a_1$. Il est commode de poser $b_i = (A'_i, A'_{i+1})$. On construit les points A_i de sorte que la barre qui <u>arrive</u> en A_i soit parallèle au rayon polaire $(\underline{P'}\underbrace{A'_i}_{\text{origine de } b_i})$ et que la barre qui <u>parte</u> de A_i soit parallèle au rayon polaire $(\underline{P'}\underbrace{A'_{i+1}}_{\text{extrémité de } b_i})$

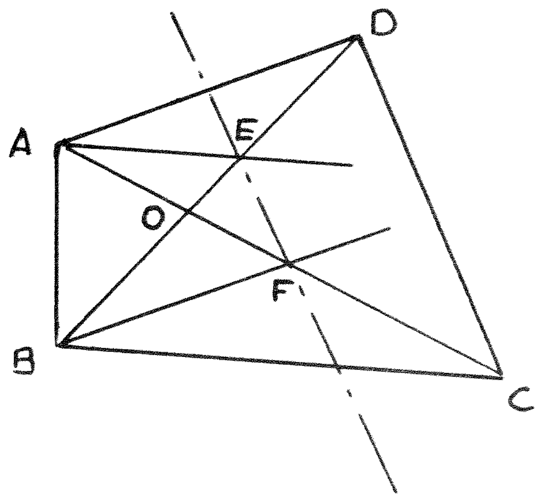
Et puis, le point A_n est l'intersection des droites qui n'ont encore servi à rien! Les différents points A_n que l'on peut ainsi construire en changeant $\underline{P'}$ et A_1 sont alignés, sur une parallèle à $(A'_5A'_1)$, et deux funiculaires associés à deux pôles $\underline{P'}$ et P'_1 ont les intersections de leurs cotés homologues alignés, sur une droite parallèle à $(P'P'_1)$.

Beau théorème ! Mais la démonstration ? Evident mécaniquement. Tout de même, il doit y avoir une solution plus ... géométrique. Je vous fais grâce de la démarche suivie et c'est dommage car nous aurions pu voir comment plusieurs seuils importants ont été franchis par le recours à l'interprétation mécanique. Voici donc quelques théorèmes qui ont jalonné ma recherche.

II) Lemme fondamental

(découvert à H32, démontré à H37, H39 et H40,2, et reconnu fondamental à H47)

① Enoncé



Soit (ABCD) un quadrilatère.
Soit E le point d'intersection de la diagonale (BD) avec la parallèle au coté (BC) passant par A.
Soit F = . . .
Résultat : (EF) // (CD)

② Démonstration

Soit $O = (AC) \cap (BD)$

Soit h_1 l'homothétie de centre O tel que $h_1(C) = A$

On a donc $h_1(B) = E$

Soit h_2 l'homothétie de centre O tel que $h_2(D) = B$

On a donc $h_2(A) = F$

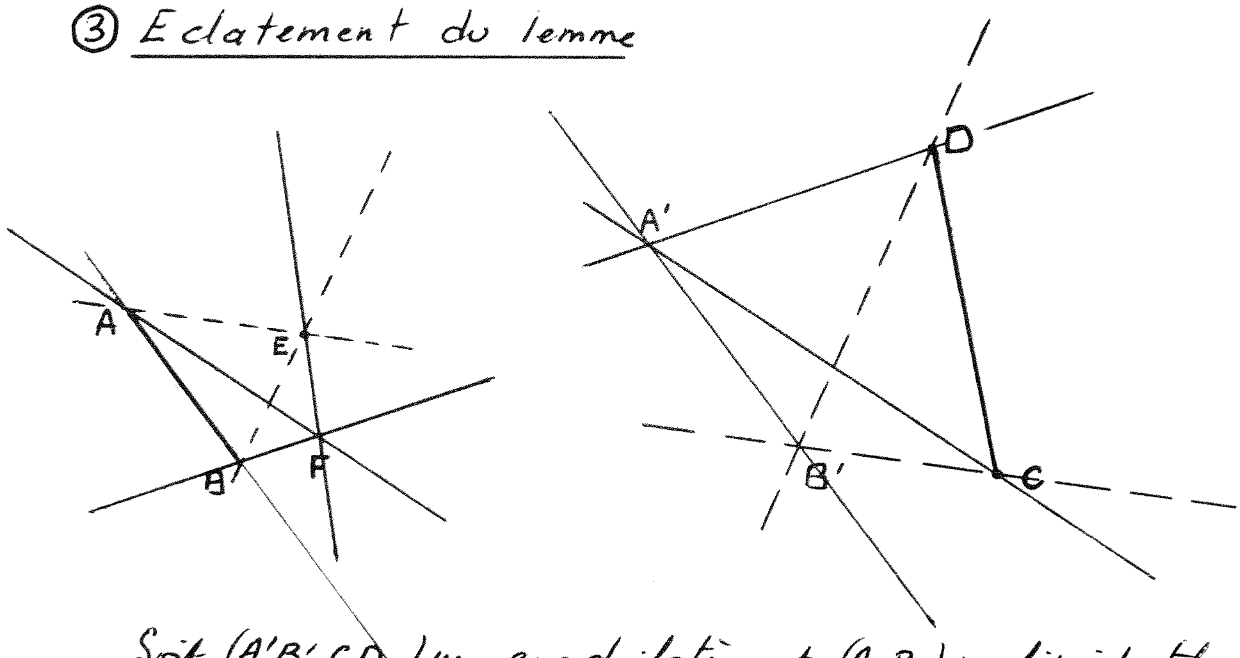
Posons $h = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. On a donc $h(C) = F$ et $h(D) = E$

Donc : $(CD) \mathbin{//} (EF)$

remarque : . si (BD) // (AC), prenez des translations

. si (BD) // (BC), ce n'est pas très grave ...

③ Eclatement du lemme



Soit (A'B'CD) un quadrilatère et (A, B) un bipoint tel que (AB) // (A'B'). Soit E le point d'intersection de la parallèle à (B'D) passant par B et de la parallèle à (B'C) passant par A. Soit F = . . .   Résultat : (EF) // (CD).

Moyen visuel de reconnaissance de forme ... : Si on regarde le segment [A,B] à partir des points E et F sous les mêmes angles que l'on voit le segment [D, C] à partir des points A' et B' et si (AB) // (A'B') alors : (EF) // (DC)

La démonstration de ce lemme éclaté se fait facilement en considérant la dilatation qui transforme (A, B) en (A', B').

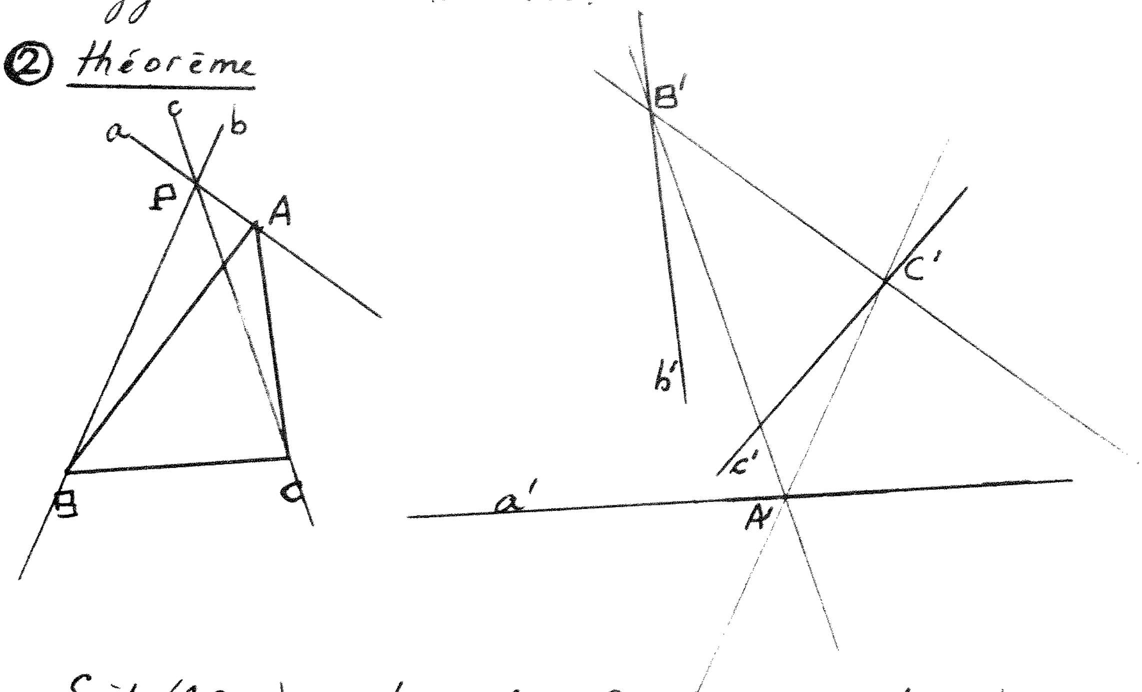
III Cas des trois barres

① Introduction mécanique :

un solide soumis à trois forces ne peut être en équilibre que si les droites d'action sont concourantes (ou parallèles, mais la différence est minime !)

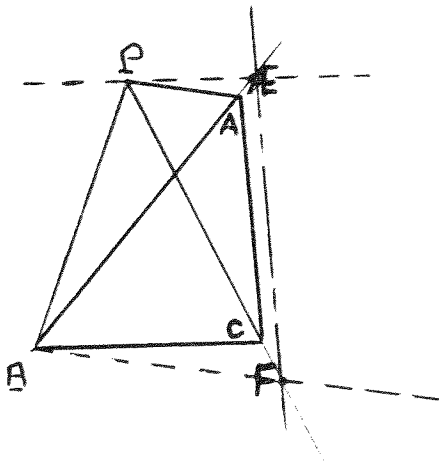
La méthode du funiculaire reste valable dans ce cas. Ceci m'a suggéré le théorème suivant :

② théorème



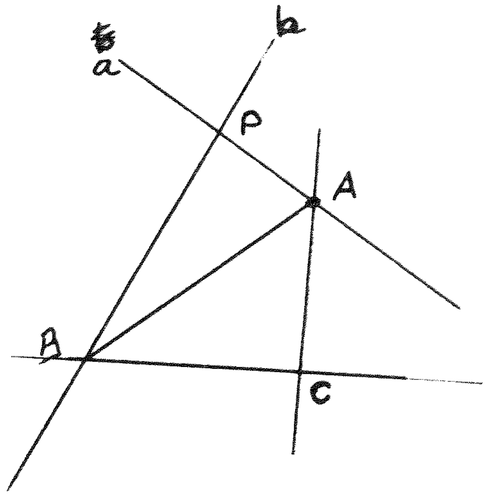
Soit (ABC) un triangle. Soient a, b, c trois droites concourantes en P telles que a (resp b, c) passe par A (resp. B, C)
Soit (A'B'C') un triangle tel que (A'B') (resp. (B'C'), (C'A')) soit parallèle à c (resp. a, b)
Soit a' (resp. b', c') la parallèle à (BC) (resp. (CA), (AB)) passant par A' (resp. B', C')
Résultat : les trois droites a', b', c' sont concourantes

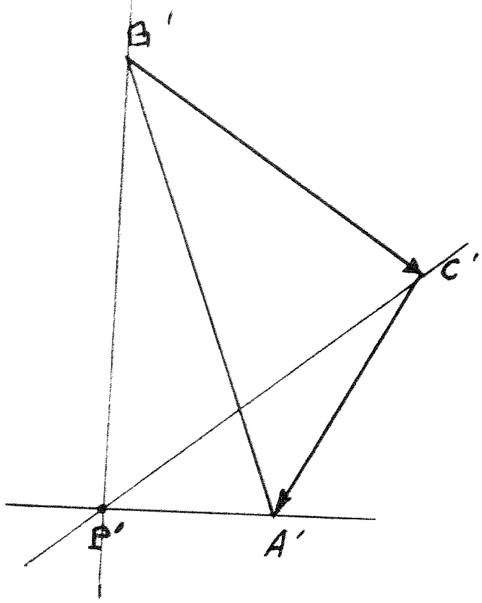
③ démonstration (la démonstration que je propose ne me plait pas. si vous en trouvez une autre ...)



Considérons le quadrilatère (PBCA)
Construisons les points E et F comme dans le lemme. On obtient : (EF)//(AC)
Or le triangle (PBF) est homothétique à (A'B'C') et les droites (PE), (BE), (FE) se transforment en a'b'c' qui sont donc concourantes.

④ Théorème du funiculaire à trois barres





Soit $A'B'C'$ un triangle. Soient a et b deux droites telles que $a \parallel (B'C')$ et $b \parallel (C'A')$. Soit P' un point et soit A un point de a.
On construit les points B et C de la manière suivante :

$B = b \cap$ (parallèle à $(P'C')$ passant par A)

$C =$ (parallèle à $(P'B')$ passant par A) $\cap$ (parallèle à $(P'A')$ passant par B)

Résultat : l'ensemble des points C obtenu en changeant P' et A est une droite c, la droite parallèle à $(A'B')$ et passant par le point d'intersection P des droites a et b.

démonstration : c'est le théorème III ② (mettre à droite ce qui est à gauche et à gauche ce qui est à droite)

⑤ Théorème de Desargues

1°) premier énoncé : (avec les mêmes données et notation qu'en ④)

Soit (ABC) le triangle associé à (P', A)

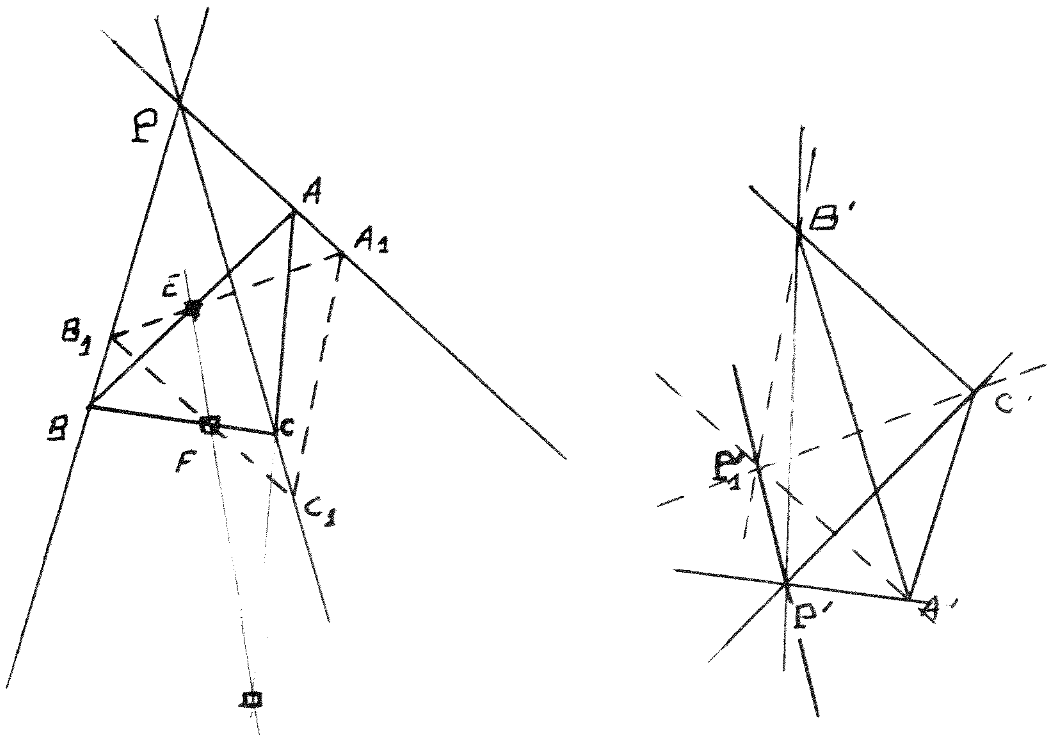
Soit (A_1, B_1, C_1) le triangle associé à (P'_1, A_1)

Les cotés homologues des deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ se coupent ~~sur~~ sur une droite parallèle à $(P'P'_1)$.
(C'est la droite des pivots)

2°) deuxième énoncé :

Soient ABC et $A_1B_1C_1$ deux triangles tels que (AA_1), (BB_1) et (CC_1) soient concourantes. Alors les cotés homologues des deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ se coupent en trois points alignés.

3°) démonstration (du deuxième énoncé)



Soit $(A'B'C')$ un triangle tel que $(A'B')//(PC)$, $(B'C')//(PA)$ et $(C'A')//(PB)$ Soit P' (resp. P'_1) le point d'intersection des parallèles au coté de ABC passant par $A'B'C'$ (resp. $(A_1B_1C_1)$) (K. III ②)

Soit $E = (B_1A_1) \cap (BA)$ et $F = (B_1C_1) \cap (BC)$
Le segment $[P; P'_1]$ est vu de A' et C' de la même manière que

le segment $[BB_1]$ est vu de F et E. Or $(A'C') // (BB_1)$
Donc (th II ③ : lemme éclaté) $(EF) // (P'P'_1)$.
En posant $G = (AC) \cap (A_1C_1)$, on obtient également
$(FG) // (P'P'_1)$. D'où la démonstration du théorème énoncé

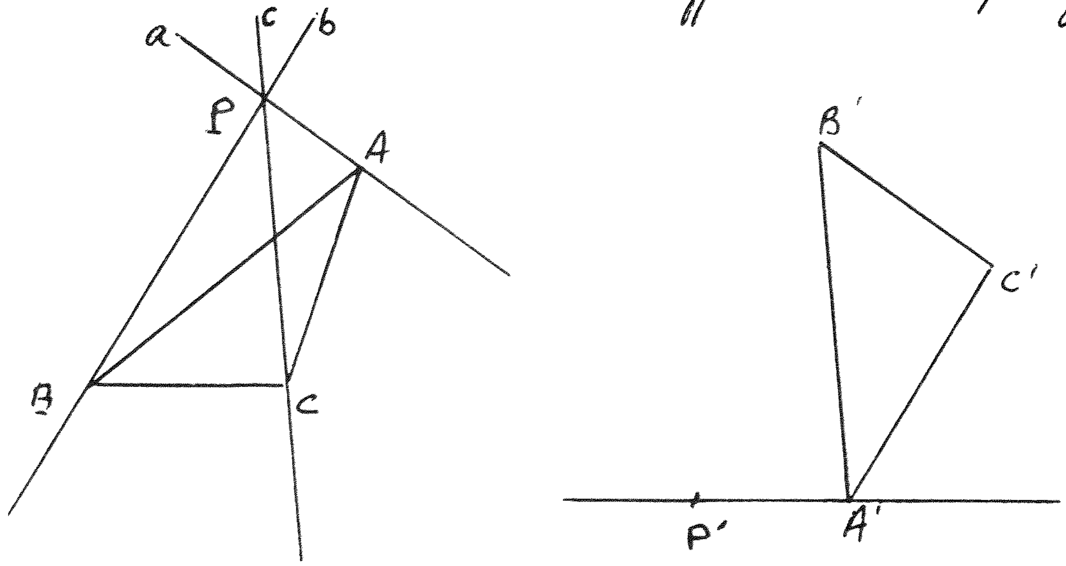
⑥ Généralisation du théorème III ② (racine carrée d'une homothétie !)

1°) énoncé :

Soit (ABC) et $(A'B'C')$ deux triangles tels que les droites a, b, c passant par A, B, C, parallèles à $(B'C')$, $(C'A')$ et $(A'B')$ soient concourantes en P.

Alors les droites a', b', c', passant par A', B', C', et parallèles à (BC), (CA), (AB) sont concourantes en P' (c'est le th. III ②) et l'application affine g qui transforme A, B, C en A', B', C', transforme P en P' (voilà qui est neuf)

Pour démontrer ce théorème il suffit de démontrer que $g(a) = a'$.



2°) démonstration

Soient ABC et $A'B'C'$ deux "bons" triangles.

Soit g l'application affine qui transforme ABC en $A'B'C'$

Soit $P' = g(P)$. Montrons que $(P'A')$ est parallèle à (BC).

(ABC) et $(A'B'C')$ sont "bons" signifie qu'il existe trois réels α, β et γ tels que

$$\alpha \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{B'C'}$$
$$\beta \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{C'A'}$$
$$\gamma \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{A'B'}$$

donc $\qquad \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

P est donc barycentre des points (A, B, C) affectés des coefficients (α, β, γ)

(tiens ! voila une méthode pour trouver les coordonnées barycentriques)

Donc $\qquad (\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$

Donc $\qquad \overrightarrow{B'C'} = \alpha\overrightarrow{PA} = \alpha\left[\beta\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{CA}\right]\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (1)$

Posons $B'' = g(B')$ et $C'' = g(C')$. Et soit f l'application linéaire associée à g.

On a : $\qquad \overrightarrow{B''C''} = f(\overrightarrow{B'C'}) = \left[\alpha\beta f(\overrightarrow{BA}) + \alpha\gamma f(\overrightarrow{CA})\right]\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$

$$= \left[\alpha\beta\,\overrightarrow{B'A'} + \alpha\gamma\,\overrightarrow{C'A'}\right]\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$= \left[\frac{1}{\gamma}\overrightarrow{B'A'} + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{C'A'}\right]\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (2)$$

Par permutation circulaire, la relation (1) donne :

$$\overrightarrow{C'A'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\left[\gamma\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{AB}\right]$$

et $\qquad \overrightarrow{A'B'} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left[\alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{BC}\right]$

La relation (2) devient alors

$\cancel{\overrightarrow{B''C''} = \frac{1}{\gamma}\left[-\alpha\gamma\right.}$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\ \overrightarrow{B''C''} = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left[\frac{1}{\gamma}\left[(-\alpha\gamma)\overrightarrow{AC}+(-\beta\gamma)\overrightarrow{BC}\right]+\frac{1}{\beta}\left[\beta\gamma\,\overrightarrow{CB}+\beta\alpha\,\overrightarrow{AB}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left[-\alpha\overrightarrow{AC}-\beta\overrightarrow{BC}+\gamma\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{AB}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left[\alpha+\beta+\gamma\right]\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$$

Donc $\overrightarrow{B''C''} = -\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$

(à partir de là, on obtiendrait facilement le résultat suivant, qui me paraît fort intéressant : f^2 est l'homothétie vectorielle de rapport $-\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$)

Or $\overrightarrow{A'P'} = f(\overrightarrow{AP}) = f\left(\frac{-1}{\alpha}\overrightarrow{B'C'}\right) = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{B''C''} = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$.

Donc $(A'P')$ est la parallèle à (BC) passant par A. c.q.f.d.

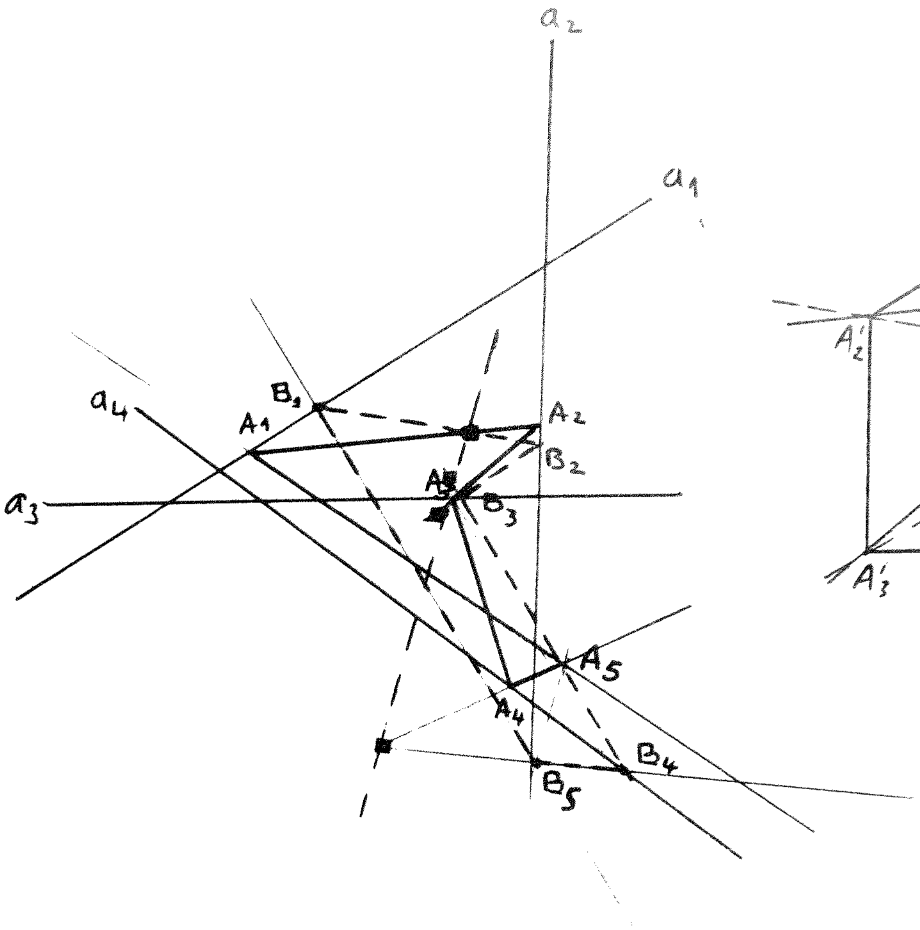
IV) Cas de n barres

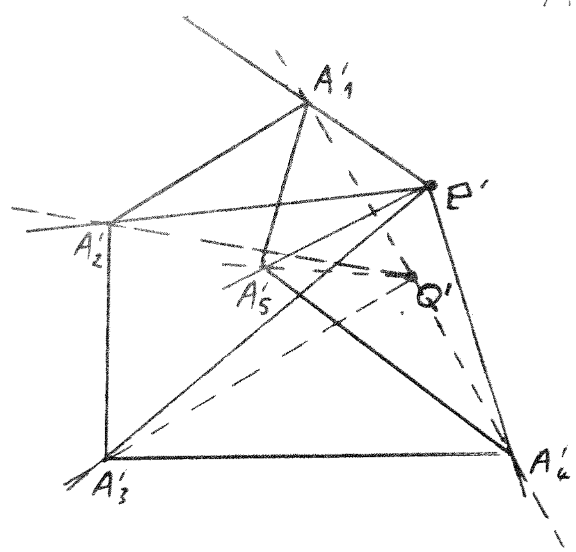
① théorème de Desargues généralisé - droite des pivots

Deux funiculaires construits sur $(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ de dynamique $(A'_1\ A'_2, \ldots A'_n)$ associés, l'un à (P', A_1), l'autre à (Q', B_1) ont leurs côtés homologues qui se coupent sur une droite parallèle à $(P'Q')$.

(pour la construction d'un funiculaire, voir I))

② **démonstration** : en prenant les points d'intersection α et β de côtés homologues consécutifs, on reconnaît, comme pour III ⑤ 3°, la forme de l'éclatement du lemme fondamental. D'où : $(\alpha\beta) \parallel P'Q'$.





③ Théorème du funiculaire à n barres

~~En prenant les notations de ① et ②~~ :

Les points A_n des funiculaires construits sur $(a_1, a_2 \dots a_{n-1})$ de dynamique $(A'_1, A'_2, \dots A'_n)$ sont alignés, sur une droite a_n, de direction $\overrightarrow{A'_{n-1} A'_n}$.

<u>démonstration</u> : voir la figure de IV ②.

Comme on sait que la droite des pivots est parallèle à la droite des pôles, on reconnait dans cette figure la forme du lemme éclaté : A_5 et B_5 regardent le segment qui joint deux pivots (à bien choisir) comme P' et Q' regarde le segment $[A'_1, A'_5]$

Donc $(A_5 B_5) \,//\, (A'_1 A'_5)$

V Questions ouvertes

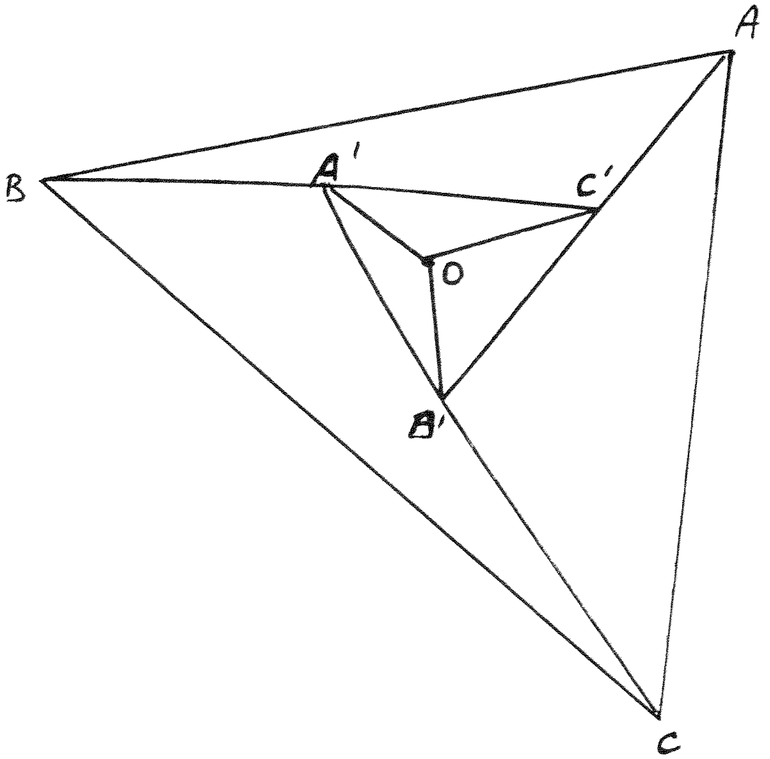
① * à quelles conditions deux triangles peuvent-ils se compléter en un funiculaire et son dynamique ?

* quatre points peuvent-ils être les articulations d'un funiculaire ?

* quatre droites peuvent-elles être les droites d'action d'un funiculaire ?

② Peut-on toujours "inscrire" un triangle $A'B'C'$ dans un triangle ABC (c'est-à-dire construire un triangle $A''B''C''$ homothétique à $A'B'C'$ tel que $A'' \in BC$, $B'' \in CA$, $C'' \in AB$)

③ Voici une figure impossible :



$(OC') // (AB)$
$(OA') // (BC)$
et $(OB') // (AC)$

DOCUMENT P_1

FONCTIONS SINUSOÏDALES DE MÊME FRÉQUENCE

Certains phénomènes périodiques font intervenir les fonctions sinusoïdales ; par exemple courant alternatif, propagation, oscillations mécaniques, ...

Nous appelons fonctions sinusoïdales les fonctions du type $f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$, les fonctions du type $t \longrightarrow a \cos(\omega t + \varphi)$ sont également des fonctions sinusoïdales Comme $\sin(\pi + x) = -\sin x$, nous pouvons supposer $a \geqslant 0$

Nous avons pris t comme notation pour la variable car celle-ci représente souvent le temps,

φ peut s'interpréter comme un angle (phase initiale)
ω peut s'interpréter comme une vitesse angulaire (pulsation)
a peut s'interpréter comme une amplitude.

Le document qui suit est une étude mathématique de l'ensemble des fonctions sinusoïdales, utilisant les connaissances acquises par les élèves des classes scientifiques et qui justifie la construction de Fresnel et l'utilisation des nombres complexes : cette étude, pour être utilisée en classe, doit être adaptée en fonction des connaissances et du niveau des élèves ; une illustration de cette adaptation à une classe terminale figure dans le document élaboré par le groupe " somme de courants alternatifs " des définitions et les théorèmes utilisés ici sont rappelés au chapitre V, et le texte y renvoie à chaque occasion.

I STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL DE $\mathcal{S}$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions sinusoïdales f définies par :

$$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

où ω est un réel non nul donné

a est un paramètre réel positif ou nul

φ est un paramètre réel

$$\mathcal{S} = \left\{ f_{a,\varphi} : t \longmapsto a \sin(\omega t + \varphi) \Big/ \begin{matrix} a \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

Posons $s : t \longmapsto \sin \omega t$

et $c : t \longmapsto \cos \omega t$ $\quad (s = f_{1,0} \; ; \; c = f_{1,\frac{\pi}{2}})$

Posons $\mathcal{S}' = \{\alpha s + \beta c \; / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Notons $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ (voir déf 1)

$\mathcal{S}'$ est la partie engendrée par (s, c) : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ (déf 3)

① (s, c) est un système libre (déf 2)

démonstration.

Soient α et β des réels tels que

$$\forall t, \quad \alpha s(t) + \beta c(t) = 0$$

On a donc en particulier, en donnant à t la valeur 0, puis $\frac{\pi}{2\omega}$:

$$\begin{cases} \alpha \times 0 + \beta \times 1 = 0 \\ \alpha \times 1 + \beta \times 0 = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } \alpha = \beta = 0$$

c.q.f.d

② donc (s, c) est une base de $\mathcal{S}'$ (déf 3, déf 4)

③ $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$

En effet

$$a \sin(\omega t + \varphi) = (a \cos\varphi) \sin \omega t + (a \sin\varphi) \cos \omega t$$

donc

$$f_{a,\varphi} = (a \cos\varphi)s + (a \sin\varphi)c$$

④ $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$

Il s'agit de montrer, qu'étant donnés α et β réels, on peut trouver $a \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t$, $\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t = a \sin(\omega t + \varphi)$

soit $\forall t$ $\quad \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t = a \cos\varphi \sin \omega t + a \sin\varphi \cos \omega t$

soit $\quad (\alpha - a \cos\varphi)s + (\beta - a \sin\varphi)c = 0$

soit

$$\begin{cases} \alpha - a \cos\varphi = 0 \\ \beta - a \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \text{(car } (s,c) \text{ est libre)}$$

- Si $\alpha = \beta = 0$ alors $a = 0$ et $\varphi = 0$ conviennent
- Si α ou β est non nul, posons $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

on a bien $a \in \mathbb{R}^+$
De plus : $a \neq 0$
Soit φ un réel tel que $\cos\varphi = \frac{\alpha}{a}$ et $\sin\varphi = \frac{\beta}{a}$
(il en existe bien puisque $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = 1$)
Alors (a, φ) est une solution

c.q.f.d

Remarque : étant donnés α et β, il existe plusieurs solutions (a, φ)
(φ est définie à $2k\pi$ près pour a non nul)

⑤ donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$

<u>$\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont (s, c) est une base.</u>

Entre autres résultats :

- la somme de deux fonctions sinusoïdales est une fonction sinusoïdale.
- les coordonnées de $f_{a,\varphi}$ dans (s, c) sont :

$$(a\cos\varphi\ ,\ a\sin\varphi)$$

II DÉRIVATION ET INTÉGRATION

① Dérivation des fonctions sinusoïdales

Posons $f_{a,\varphi}(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$

Alors
$$f'_{a,\varphi}(t) = a\omega\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= a\omega\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

donc $f'_{a,\varphi} = f_{a',\varphi'}$ avec $a' = a\omega$
et $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$

On peut donc considérer l'application suivante D:

$$D : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$f \longrightarrow f'$$

D est un endomorphisme de $\mathcal{S}$ (déf 5)

② Intégration

$$\int_0^{\tau} a \sin(\omega t + \varphi)\, dt = -\frac{a}{\omega} \cos(\omega\tau + \varphi)$$

$$= \frac{a}{\omega} \sin\left(\omega\tau + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

On peut donc considérer l'application I :

$$I : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$f_{a,\varphi} \longrightarrow \int_0^{\tau} f_{a,\varphi}(t)\, dt = f_{\frac{a}{\omega}, \varphi - \frac{\pi}{2}}$$

I est également un endomorphisme de $\mathcal{S}$: c'est l'endomorphisme réciproque de D.

III UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES

$\mathcal{S}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes.

① Isomorphisme "canonique" de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{C}$

Soit $\ell : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$

pour $a \neq 0$: $f_{a,\varphi} \longrightarrow [a, \varphi]$: nombre complexe de module a, d'argument φ

pour $a = 0$: $f_{0,\varphi} \longmapsto 0$

<u>ℓ est un isomorphisme d'espace vectoriel</u> (déf 6)

Rappelons tout d'abord que $\mathbb{C}$, muni de l'addition des complexes et de la multiplication des complexes par les réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et appliquons le th 1 (ch V) en prenant (s, c) comme base de $\mathcal{S}$ et $(1, j)$ comme base de $\mathbb{C}$

Les coordonnées de $f_{a,\varphi}$ dans (s, c) sont

$$(a \cos\varphi,\ a \sin\varphi)$$

les coordonnées de $[a, \varphi]$ dans $(1, j)$ sont.

$$(a \cos\varphi,\ a \sin\varphi)$$

car $[a, \varphi] = a\cos\varphi + ja\sin\varphi$

donc ℓ est un isomorphisme.

Conséquence :

A toute fonction sinusoïdale, on associe un nombre complexe et réciproquement.

En particulier : la somme de deux fonctions sinusoïdales correspond à la somme des complexes associés. Des calculs sur des fonctions sinusoïdales peuvent donc être ramenés à des calculs sur des nombres (complexes), il suffit, en fin de calcul, de revenir aux fonctions par l'intermédiaire de ℓ^{-1}

Si z est le complexe associé à la fonction sinusoïdale f, l'amplitude de f est $|z|$ (module de z) et la "phase initiale est $\arg z$ (argument de z)

② Dérivation

Que devient le complexe associé à la dérivée d'une fonction sinusoïdale ?

Soit $z = [a, \varphi]$ le complexe associé à $f_{a,\varphi}$:
$$t \longmapsto a\sin(\omega t + \varphi)$$

Comme $f'_{a,\varphi}(t) = a\omega\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$, le complexe associé à $f'_{a,\varphi}$ est $z' = [a\omega, \varphi + \frac{\pi}{2}] = \omega j z$

Ceci peut se traduire par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "\text{iso. canon.}"] \arrow[d, "\text{dérivation}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\text{mult. par } \omega j"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, "\text{iso. canon.}"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Autrement dit : lorsqu'on remplace les fonctions sinusoïdales par les complexes associés, l'opération de dérivation se traduit par la multiplication par ωj.

③ Intégration

Soit $z = [a, \varphi]$. Le complexe associé à $\int_0^t f_{a,\varphi}(u)\,du$ est $Z = [\frac{a}{\omega}, \varphi - \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{j\omega} z$

Conclusion :

$$\begin{cases} \text{Pour la dérivation : multiplication par } j\omega \\ \text{Pour l'intégration : division par } j\omega. \end{cases}$$

(4) Exemple d'utilisation de cet isomorphisme

(voir également le document élaboré par le groupe "phénomènes périodiques".

Trouvez la valeur maximale M de la fonction f définie par :

$$f(t) = \int_0^t 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}x - \frac{\pi}{3}\right)dx + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{d}{dt}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Les fonctions qui interviennent sont sinusoïdales, de même pulsation $\omega = \frac{2\pi}{5}$

Transformons l'égalité fonctionnelle précédente en une égalité entre nombres complexes, grâce à l'isomorphisme ℓ entre $\mathcal{S}$ et $\mathbb{C}$ (en posant $z = [a, \varphi] = \ell(f)$)

$$z = \frac{1}{j\omega}\left[2, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right] - j\omega\left[1, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{\omega}, -\frac{\pi}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right] + \left[\omega, -\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{\omega} + \omega, -\frac{\pi}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{\omega} + \omega\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + j\left(\left(\frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{2}\right)(-\sqrt{3}) + \frac{1}{4}\right)$$

Or la valeur maximale de f est $|z|$

Donc $M^2 = \left(\frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{2}\right)(-\sqrt{3}) + \frac{1}{4}\right)^2$

$$= 4\left(\frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Application numérique $M \simeq 2,9$

<u>Remarque</u> : résolution graphique (correspond à la construction de Fresnel)

Dessinons, dans le plan complexe, les complexes

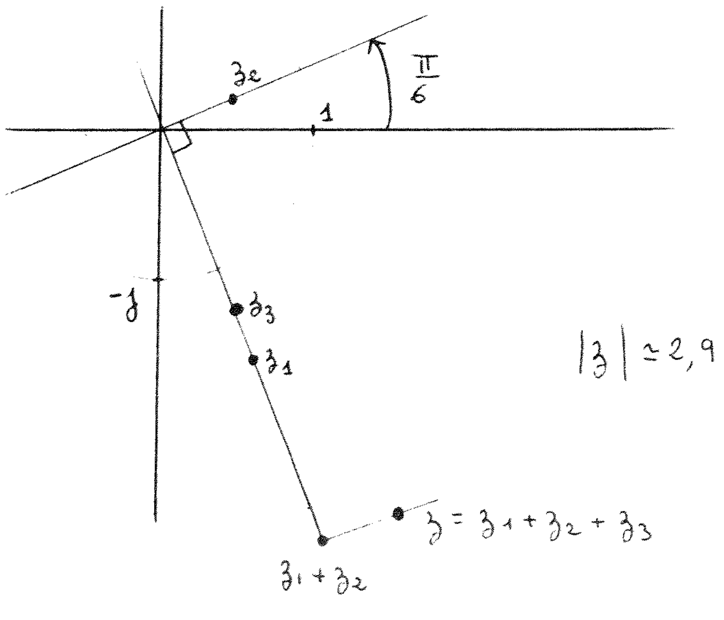
$$z_1 = \frac{1}{j\omega}\left[2, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$z_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$z_3 = -j\omega\left[1, \frac{\pi}{6}\right]$$

puis faisons la somme et mesurons $|z|$.

$\omega \simeq 1,3$; $\frac{2}{\omega} \simeq 1,6$.



IV CONSTRUCTION DE FRESNEL

$\mathcal{S}$ est isomorphe à $\mathcal{V}_2$, ensemble des vecteurs géométriques du plan, espace vectoriel euclidien de dimension 2.

Je présente ici la construction de Fresnel directement à partir des fonctions sinusoïdales. Elle peut aussi être envisagée tout simplement comme le dessin des relations sur les complexes associés par ℓ, dessin dans le plan complexe.

① <u>Isomorphisme canonique de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{V}_2$</u>

Appliquons le th 1 (ch V) en prenant (s, c) comme base de $\mathcal{S}$ et deux vecteurs unitaires orthogonaux comme base de $\mathcal{V}_2$ $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit ℓ' : $\mathcal{S} \longmapsto \mathcal{V}_2$

$$f_{a,\varphi} \longmapsto a \cos\varphi \, \vec{\imath} + a \sin\varphi \, \vec{\jmath}$$

Sur les coordonnées dans les bases choisies, ℓ' est l'application identique ; ℓ' est donc un isomorphisme d'espace vectoriel.

<u>Conséquence</u> :

A toute fonction sinusoïdale, on associe un vecteur géométrique du plan. En particulier, la somme de deux fonctions sinusoïdales correspond à la somme des vecteurs associés. Des calculs sur des fonctions sinusoïdales peuvent donc être ramenés à des constructions sur des vecteurs, il suffit, en fin de construction, de revenir aux fonctions par l'intermédiaire de ℓ'^{-1}

Si $\vec{U}$ est le vecteur associé à la fonction sinusoïdale f, alors l'amplitude de f est $\|\vec{U}\|$ et la "phase initiale" est $\varphi = \text{angle}\,(\vec{\imath}, \vec{U})$

② <u>Dérivation</u>

Soit $\vec{U}$ le vecteur associé à $f : t \to a \sin(\omega t + \varphi)$

$$f'(t) = a\omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

le vecteur associé à f' est donc $S(\vec{U})$ où S est la similitude vectorielle de rapport ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

③ Intégration

Soit $\vec{U}$ le vecteur associé à $f : t \rightarrow a \sin(\omega t + \varphi)$

On a $\int_0^t f(u)\, du = \frac{a}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

Le vecteur associé à $t \longrightarrow \int_0^t f(u)\,du$ est donc $S^{-1}(\vec{U})$

où S^{-1} est la similitude de rapport $\frac{1}{\omega}$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

④ Exemple

Reprenons celui du III ④

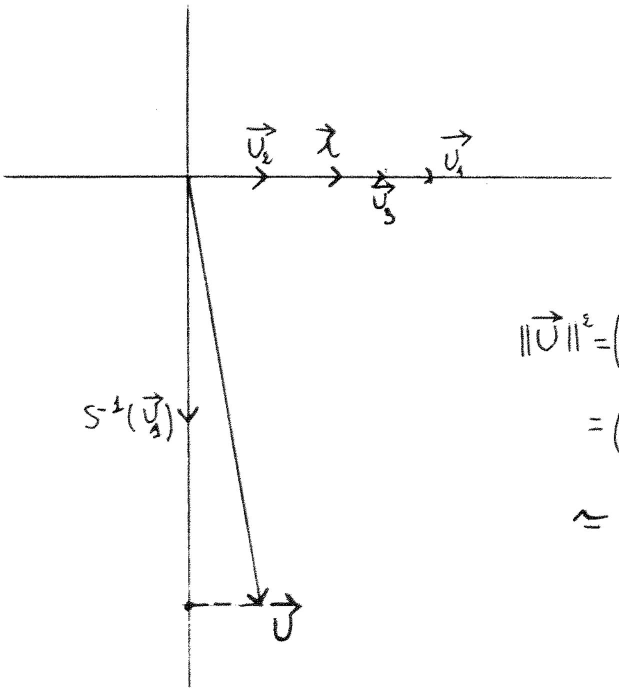
- On dessine dans un repère orthonormé les vecteurs $\vec{U_1}\left[2, \frac{\pi}{6}\right]$, $\vec{U_2}\left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$, $\vec{U_3}\left[1, \frac{\pi}{6}\right]$

- On dessine ensuite $S^{-1}(\vec{U_1})$ et $S(\vec{U_3})$ où S est la similitude de rapport $\omega = \frac{2\pi}{5}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- On construit $\vec{U} = S^{-1}(\vec{U_1}) + \vec{U_2} + S(\vec{U_3})$ et on cherche $\|\vec{U}\|$ (par calcul ou par mesure)

Comme on ne cherche que la norme du vecteur $\vec{U}$ (ici), on peut faire subir à tous les vecteurs de départ une rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$

D'où le dessin.



$$\|\vec{U}\|^2 = \left(\|\vec{U_1}\| + \|\vec{U_3}\|\right)^2 + \|\vec{U_2}\|^2$$
$$= \left(\frac{2}{\omega} + \omega\right)^2 + \frac{1}{4}$$
$$\simeq 2{,}9$$

V COMPLÉMENTS MATHÉMATIQUES

Définitions 1

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$

Soient f et g des élement de $\mathcal{F}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

On définit

* $f+g$ par $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$
* λf par $(\lambda . f)(t) = \lambda . f(t)$

Résultat

$(\mathcal{F}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Définition 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient u et v des vecteurs de E.

* (u, v) est un système libre signifie : si, pour des réels α et β on a $\alpha . u + \beta . v = 0$ alors nécessairement $\alpha = \beta = 0$

Résultat :

Deux vecteurs géométriques non nuls forment un système libre si et seulement si ils ont des directions différentes.

Définition 3

Soit E un espace vectoriel. Soient u et v des vecteurs de E.

* la partie engendrée par (u, v) est l'ensemble des vecteurs de la forme $\alpha . u + \beta . v$, où α et β sont des réels.
* (u, v) est une base de E si (u, v) est un système libre et si la partie engendrée par (u, v) est E

Résultat :

Une partie engendrée est un sous-espace vectoriel.

Définition 4

Si (u, v) est une base de E, alors tout vecteur U de E s'écrit de manière unique sous la forme $U = \alpha . u + \beta . v$ où α et β sont des réels, appelés les coordonnées de U dans la base (u, v)

Définition 5

Soit E un espace vectoriel.
Un endomorphisme f de E est une application linéaire de E dans E, c'est à dire.

$$\forall u \in E, \forall v \in E \; : \; f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$\text{et } \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \; : \; f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

Définition 6

Un isomorphisme est une application linéaire bijective d'un espace vectoriel E sur un espace vectoriel F : il permet en quelque sorte, et au regard des opérations concernées, d'identifier les éléments de E et ceux de F. On dit que E et F sont isomorphes.

Théorème 1

Soit (i, j) une base d'espace vectoriel E de dimension 2
Soit (I, J) " " " F " "
Soit $f : E \longrightarrow F$ définie par :
l'image par f du vecteur U de E, de coordonnées (α, β) dans la base (i, j) est le vecteur $f(U)$ de coordonnées (α, β) dans la base (I, J). $f(\alpha i + \beta j) = \alpha I + \beta J$
f est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation
Construction de Fresnel

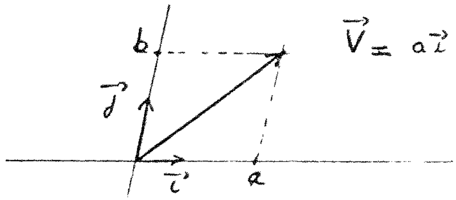
I Représentation vectorielle d'une fonction sinusoïdale

① Rappel sur les vecteurs géométriques du plan :

a.) Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs géométriques du plan et soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base

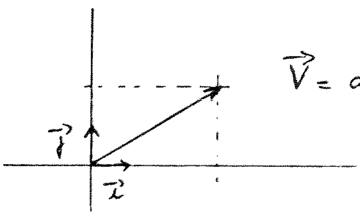
Tout vecteur $\vec{V}$ se décompose dans cette base : $\vec{V} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

a et b s'appellent les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$



$\vec{V} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

b.) Cas d'une base orthonormée



$\vec{V} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

Supposons le plan orienté par la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et soit $\theta = \text{angle}(\vec{\imath}, \vec{V})$

Alors $a = \|\vec{V}\| \cos\theta$

et $b = \|\vec{V}\| \sin\theta$

② Représentation vectorielle d'une fonction sinusoïdale

Soit $y = f(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$ avec $Y \in \mathbb{R}^+$

On a $y = Y\cos\varphi \sin\omega t + Y\sin\varphi \cos\omega t$

$= A\sin\omega t + B\cos\omega t$ en posant $A = Y\cos\varphi$ et $B = Y\sin\varphi$

On représente la fonction sinusoïdale f par le vecteur $\vec{V}$ dont les coordonnées dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $\begin{cases} Y\cos\varphi \\ Y\sin\varphi \end{cases}$

On a donc $\|\vec{V}\| = Y$ et $\text{angle}(\vec{\imath}, \vec{V}) = \varphi$

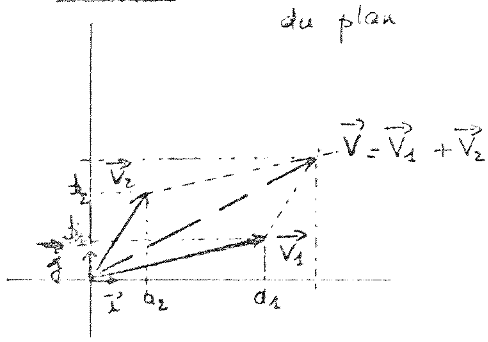
On démontre d'ailleurs en mathématiques que A et B sont effectivement les coordonnées de f dans une base de l'espace vectoriel des fonctions sinusoïdales

Remarque :

Réciproquement, au vecteur non nul $\vec{W}$ on associe la fonction sinusoïdale g défini par $g(t) = \|\vec{W}\| \sin(\omega t + \varphi)$ et où φ est l'angle $(\vec{\imath}, \vec{W})$

II Somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω

① Rappel : Coordonnées de la somme de deux vecteurs géométriques du plan



$$\vec{V_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$$
$$\vec{V_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$$

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = (a_1+a_2)\,\vec{i} + (b_1+b_2)\,\vec{j}$$

(a_1+a_2) et (b_1+b_2) sont les coordonnées de $(\vec{V_1}+\vec{V_2})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

② Somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω

$$y_1 = f_1(t) = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$$
$$y_2 = f_2(t) = Y_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t$$

$$y = y_1 + y_2 = (f_1 + f_2)(t) = \ldots\ldots = (A_1+A_2)\sin \omega t + (B_1+B_2)\cos \omega t$$

f_1 est représenté par le vecteur $\vec{V_1}\left|\begin{array}{l} A_1 \\ B_1 \end{array}\right.$

f_2 est représenté par le vecteur $\vec{V_2}\left|\begin{array}{l} A_2 \\ B_2 \end{array}\right.$

f_1+f_2 est représenté par le vecteur $\vec{V}\left|\begin{array}{l} A_1+A_2 \\ B_1+B_2 \end{array}\right.$; $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

On a "donc" $y = Y \sin(\omega t + \varphi)$ avec $\begin{cases} Y = \|\vec{V}\| & (1) \\ \varphi = \text{angle}(\vec{i},\vec{V}) & (2) \end{cases}$

On possède ainsi une détermination graphique de Y et de φ (et même une indication simple sur la manière de les calculer)

Conclusion : La somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est une fonction sinusoïdale de pulsation ω dont l'amplitude et la phase sont données par (1) et (2)

III Vérification expérimentale

(document ci-joint P2/7, 8, 9)

IV Exercices

A.) Somme de deux courants sinusoïdaux de même pulsation

Soient 2 courants sinusoïdaux

$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$ $\qquad I_{m1} = 4$ mA $\qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$

$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$ $\qquad I_{m2} = 6$ mA $\qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$

1.) méthode trigonométrique

On pose $i_1 + i_2 = i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

$$i = i_1 + i_2 = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

On utilise la relation $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$$i = i_1 + i_2 = I_{m1}(\sin \omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1) + I_{m2}(\sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2)$$

$$i = (I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi_2)\sin\omega t + (I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2)\cos\omega t \quad (1)$$

Par ailleurs $i = (I_m \cos\varphi)\sin\omega t + (I_m \sin\varphi)\cos\omega t \quad (2)$

Donc

$$I_m\cos\varphi = I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi_2 \quad (3)$$

$$I_m\sin\varphi = I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2 \quad (4)$$

On élève au carré (3) et (4) et on fait la somme

$$\begin{aligned} I_m^2 &= (I_{m1}\cos\varphi_1)^2 + (I_{m2}\cos\varphi_2)^2 + 2 I_{m1} I_{m2}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \\ &+ (I_{m1}\sin\varphi_1)^2 + (I_{m2}\sin\varphi_2)^2 + 2 I_{m1} I_{m2}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &= I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2 I_{m1}\cdot I_{m2}\underbrace{(\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \end{aligned}$$

$$I_m^2 = I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2 I_{m1}\cdot I_{m2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

En faisant le rapport $\frac{(3)}{(4)}$: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2}{I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi_2}$

Application numérique :

$$I_m^2 = 16 + 36 + 48\cos\frac{\pi}{6} = 52 + 48\frac{\sqrt{3}}{2} = 93{,}6$$

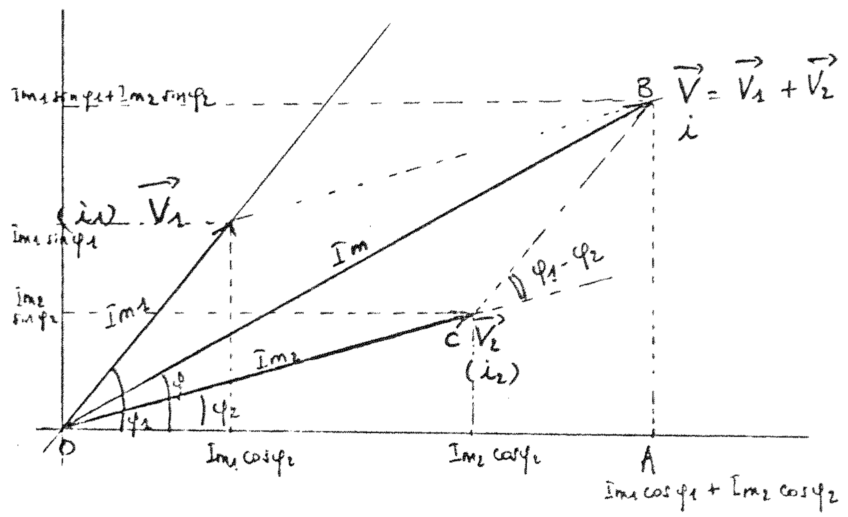
$$I_m = 9{,}68 \text{ mA}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\sin\pi/3 + 6\sin\pi/6}{4\cos\pi/3 + 6\cos\pi/6} = \frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\cdot\frac{1}{2}}{4\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{6{,}47}{7{,}2} = 0{,}898$$

$$\varphi = 0{,}73 \text{ rad} \qquad \varphi = 42°$$

2.) Redécouverte des formules par la construction de Fresnel



Dans le triangle OCB :

$$Im^2 = Im_1^2 + Im_2^2 - 2\, Im_1 . Im_2 \cos \pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$= Im_1^2 + Im_2^2 + 2\, Im_1 \cdot Im_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

d'autre part

$$tg\, \varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{Im_1 \sin \varphi_1 + Im_2 \sin \varphi_2}{Im_1 \cos \varphi_1 + Im_2 \cos \varphi_2}$$

Remarque :
Pour trouver l'amplitude Im on peut aussi se servir du théorème de Pythagore :

$$Im^2 = OA^2 + AB^2$$

Application numérique

- En appliquant les relations ci-dessus on retrouve les résultats du paragraphe 1)
- En faisant : $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

$$\vec{V_1} \left| \begin{array}{l} \|\vec{V_1}\| \cos \varphi_1 = Im_1 \cos \varphi_1 = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \\ \|\vec{V_1}\| \sin \varphi_1 = Im_1 \sin \varphi_1 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$\vec{V_2} \left| \begin{array}{l} \|\vec{V_2}\| \cos \varphi_2 = Im_2 \cos \varphi_2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ \|\vec{V_2}\| \sin \varphi_2 = Im_2 \sin \varphi_2 = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \end{array} \right.$$

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} 2 + 3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 3 \end{array} \right.$$

$$Im^2 = \|V^2\| = (2 + 3\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + 3)^2 = 52 + 24\sqrt{3} = 93{,}6$$

$$Im \simeq 9{,}67 \text{ mA}$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{3} + 2}{\|\vec{V}\|} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{Im} \simeq 0{,}565 \qquad \varphi = 41{,}4° \qquad \varphi = 0{,}74 \text{ rad}$$

3.) Méthode graphique

On mesure et on trouve $Im = 9{,}7$ mA
$\varphi = 42°$

B) Etude d'un circuit RLC

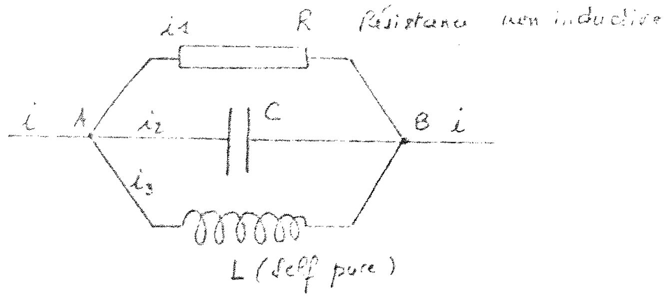
Entre 2 points A et B on monte en dérivation : une résistance R, une capacité C, une self pure L et on établit entre A et B une tension alternative sinusoïdale de la forme $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$ où U désigne la tension efficace (celle donnée par un voltmètre) et ω la pulsation ($= 2\pi f$)

On demande de calculer les intensités efficaces I_1, I_2, I_3, de donner les expressions des courants instantanés i_1, i_2, i_3, d'en déduire i et I du circuit principal et l'impédance Z des trois conducteurs montés en dérivation.

Application numérique $U = 60$ V $\quad R = 30\ \Omega \quad L = 0{,}04$ H (coefficient de self-induction de la bobine)

$C = 50\ \mu F$ (capacité du condensateur)

$\omega = 500$



Pour chaque portion de circuit on a, d'après la loi d'Ohm la relation $U = ZI$

a.) dans le cas de la résistance R, le courant i_1 est en phase avec la tension u et l'impédance Z_1 est égale à la résistance R

b.) le condensateur a une impédance $Z_2 = \frac{1}{C\omega}$ et le courant i_2 est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à u

c.) la self pure (de résistance supposée nulle ou négligeable) a pour impédance $Z_3 = L\omega$ et le courant i_3 est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à u (déphasage $-\frac{\pi}{2}$)

Calculons d'abord les intensités efficaces

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = UC\omega = 60 . 50 . 10^{-6} . 500 = 1{,}5A$$

$$I_3 = \frac{U}{Z_3} = \frac{U}{L\omega} = \frac{60}{0{,}04 \times 500} = \frac{60}{20} = 3A$$

Telles sont les intensités qu'indiqueraient des ampèremètres placés dans chaque portion du circuit

Exprimons les valeurs instantanées i_1, i_2, i_3

$$i_1 = I_1\sqrt{2} \sin \omega t = 2\sqrt{2} \sin 500t$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}5\sqrt{2} \cos 500t$$

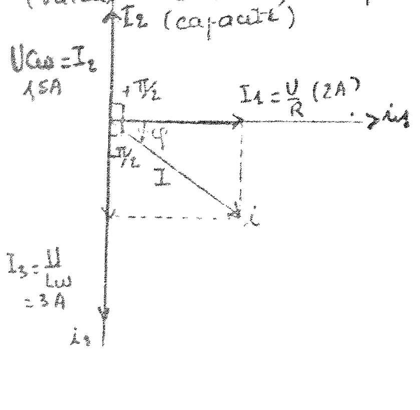
$$i_3 = I_3\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -3\sqrt{2} \cos 500t$$

Quant à i, il a pour expression :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = U\sqrt{2}\left[\frac{1}{R} \sin \omega t + C\omega\left(\sin \omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Cette expression est de la forme $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$

C'est évidemment la construction de Fresnel qui conduit au résultat (valeurs de I et de φ) le plus rapidement.



On lit sur la figure

$$I^2 = U^2\left[\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2\right]$$

soit $I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$

comme $I = \frac{U}{Z}$

P2/3

c'est que $Z = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{900} + \dfrac{1}{1600}}} = 24\,\Omega$

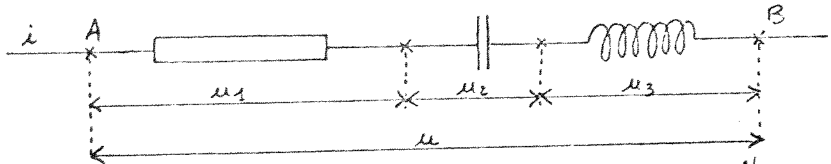
Quant au déphasage entre i et u, il est donné par

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{UC\omega - \dfrac{U}{L\omega}}{\dfrac{U}{R}} = R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 30\left(\frac{1}{40} - \frac{1}{20}\right) = -0{,}75 \Longrightarrow \varphi = -37° \text{ environ}$$

<u>Remarque I</u> Si au contraire les trois impédances $Z_1 = R$, $Z_2 = \dfrac{1}{C\omega}$ et $Z_3 = L\omega$ avaient été placées en série entre A et B. On aurait trouvé $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$

En effet on aurait ajouté non plus les intensités $i_1 + i_2 + i_3 = i$ mais les tensions $u_1 + u_2 + u_3 = u$



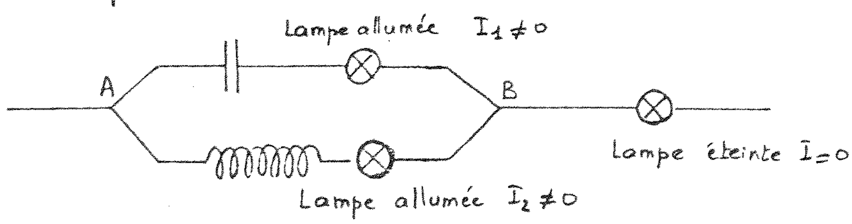
<u>Remarque II</u> Dans un cas comme dans l'autre, la résonance s'obtient lorsque $C\omega = \dfrac{1}{L\omega}$ c'est à dire quand $LC\omega^2 = 1$ (formule de Thomson)

Alors $Z = R$

Mais dans le cas d'un montage en dérivation Z est maximal et I minimal tandis que dans le montage en série Z est minimal et I maximal

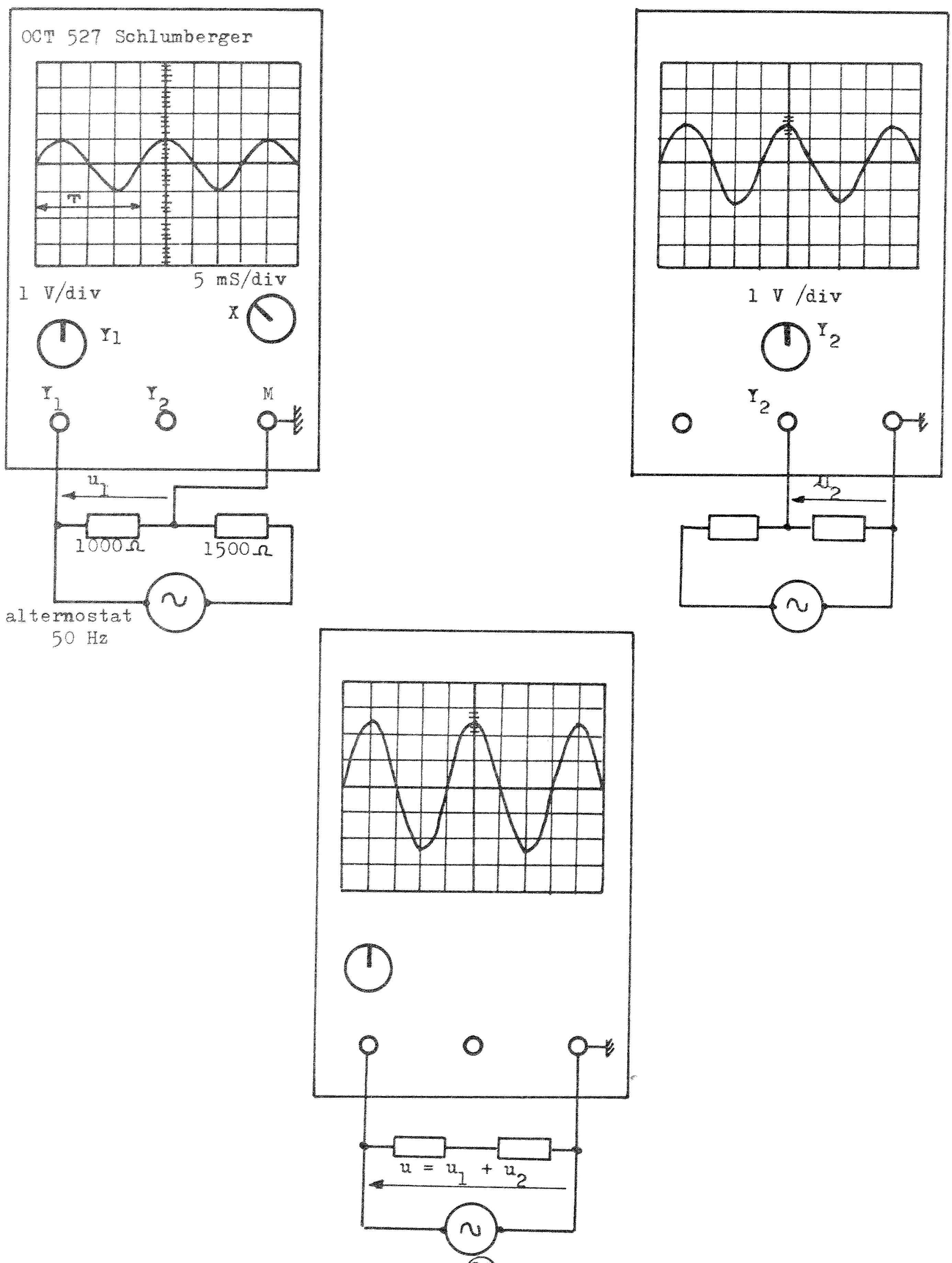
<u>Remarque III</u> Dans le cas très théorique où l'on place entre A et B un condensateur et une self pure, tels que $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$, le courant principal est nul, alors que $I_1 = I_2 \neq 0$

le condensateur se décharge dans la self qui par suite du courant de self-induction recharge le condensateur qui ... etc...

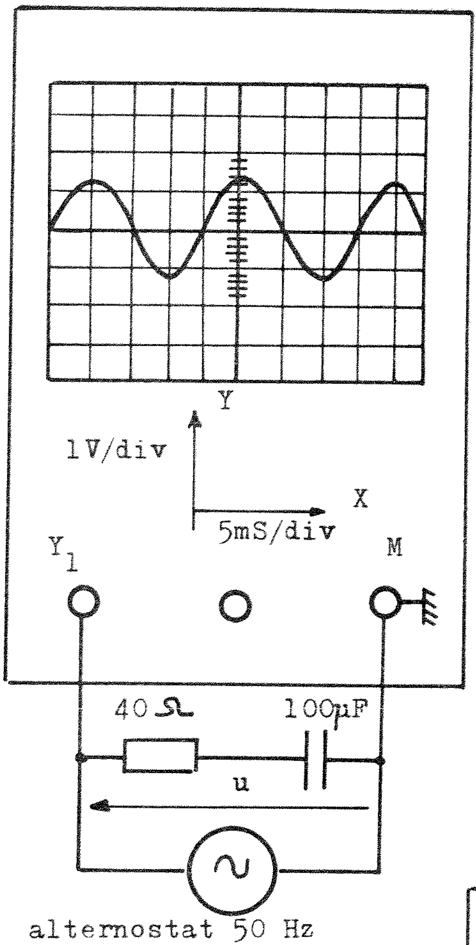


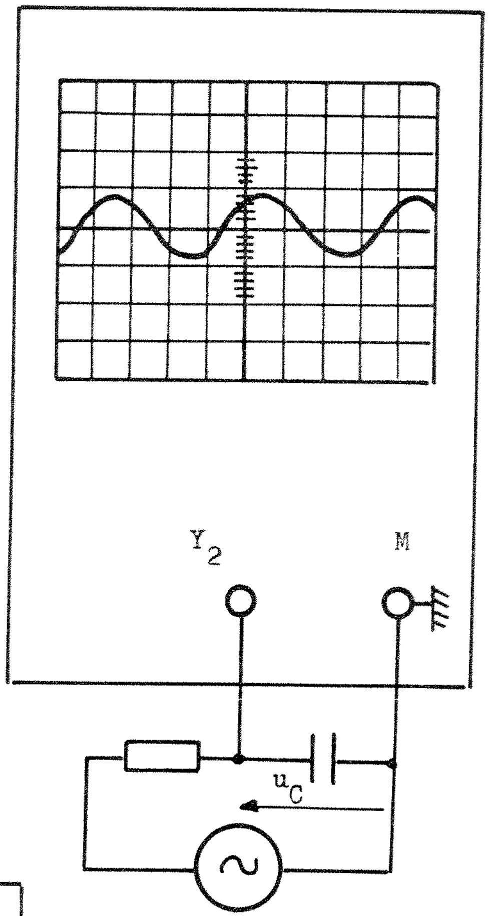
circuit dit "oscillant"

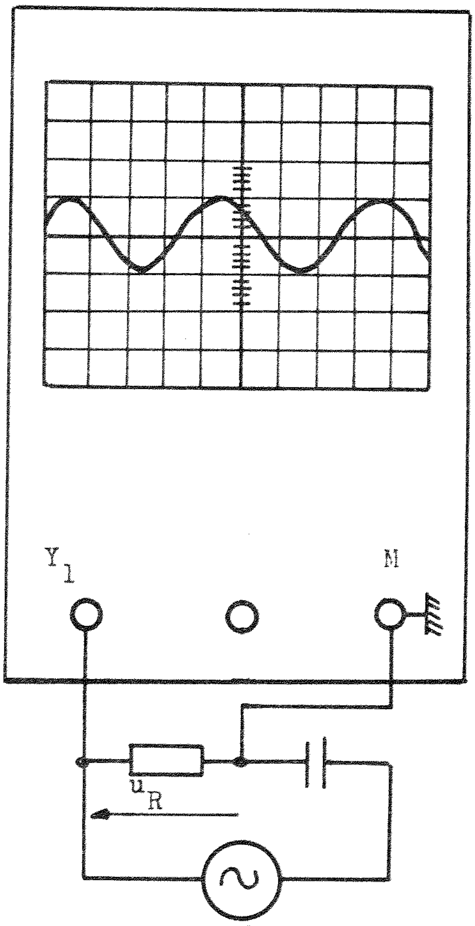
1°) Cas de deux tensions en phase :



2°) Cas de deux tensions déphasées :







Représentation simultanée des trois tensions :

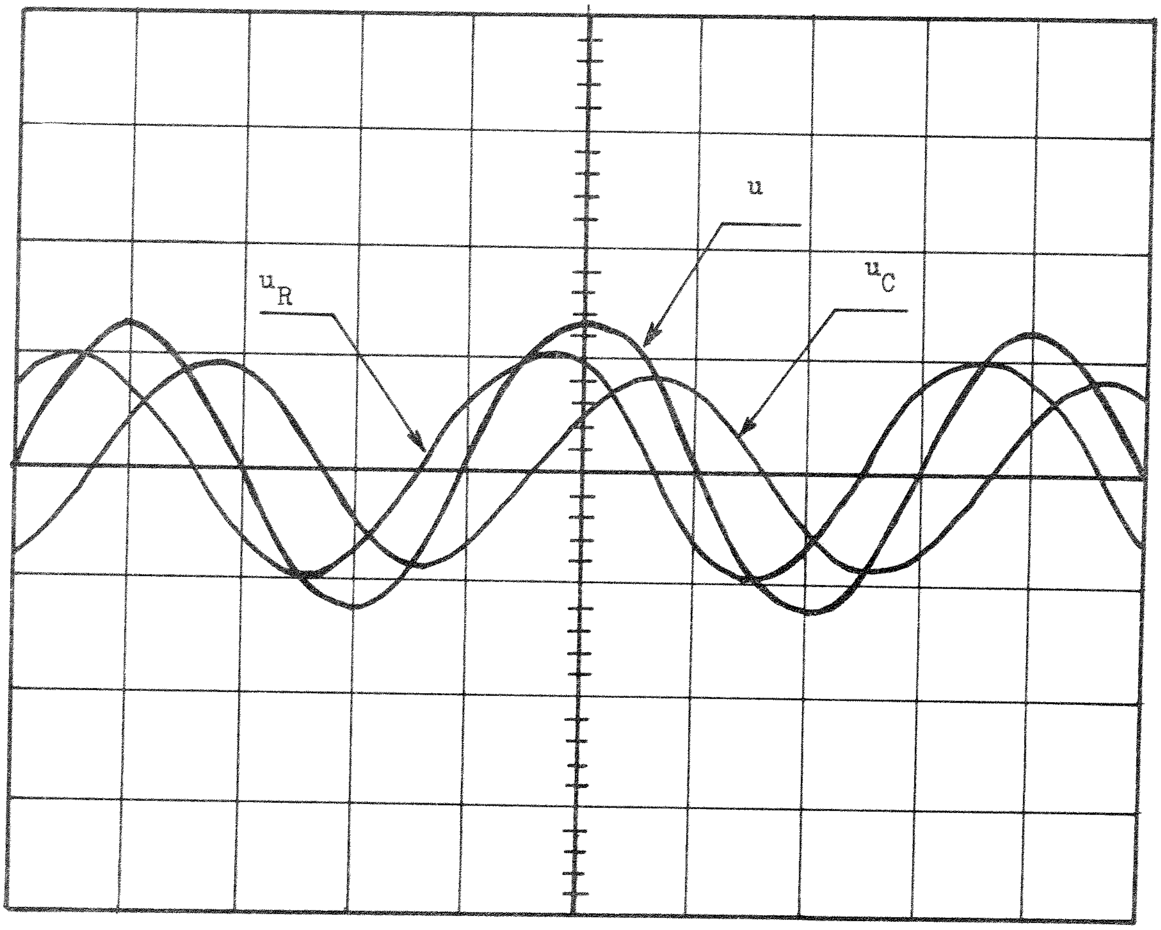
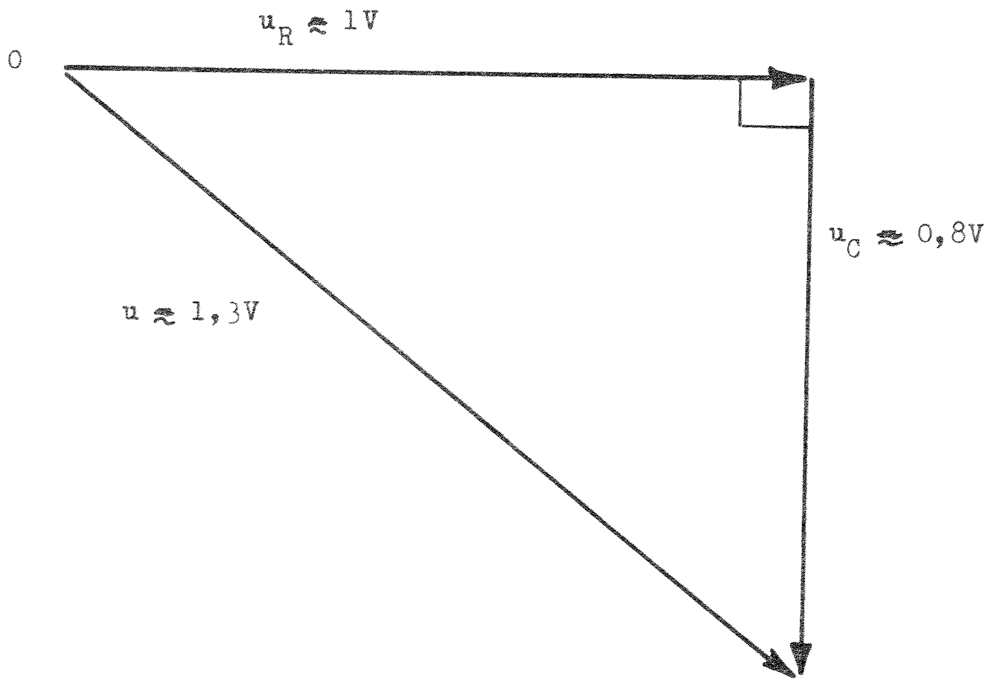


Diagramme de Fresnel :



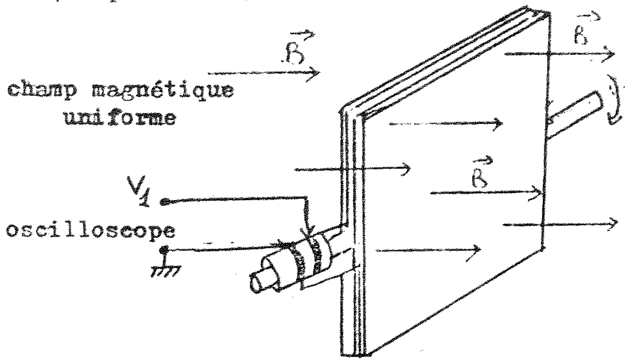
Document P_3

LE COURANT ALTERNATIF SINUSOIDAL

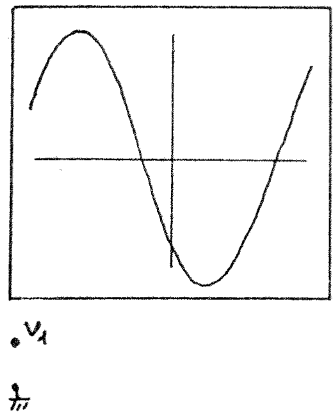
UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES

I- PRODUCTION D'UNE TENSION SINUSOIDALE

1) Expérience .



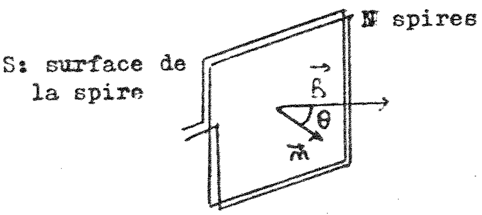
cadre tournant autour d'un axe horizontal à une vitesse constante ω .
On observe à l'oscilloscope :



On pourrait superposer à la courbe obtenue une sinusoïde tracée point par point sur un papier calque.

2) Interprétation .

a) Flux d'induction à travers le cadre .



$$\Phi = N\, S\, \vec{B}.\vec{n} = N\, S\, B \cos\theta$$

avec $\theta = \omega t + \varphi$

φ : angle $(\vec{n}, \vec{B})$ à l'instant $t = 0$

b) Calcul de la f.e.m. d'induction .

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\,(NSB\cos\theta)}{dt} = -NSB\,\frac{d(\cos\theta)}{dt} = -NSB\,\frac{d(\cos(\omega t + \varphi))}{dt}$$

$$= \omega NSB \sin(\omega t + \varphi) = Em \sin(\omega t + \varphi)$$

L'oscilloscope ayant une résistance interne très grande devant celle du cadre on visualisera $u = e$

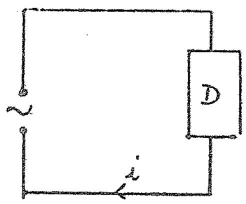
3) Définitions

- amplitude : Em
- pulsation : ω
- fréquence : $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- période : $T = \frac{1}{f}$
- alternance : positive : durée pendant laquelle u sera comptée positive
  négative : " " " " " négative .

Il y a donc deux alternances pendant une période.

II- INTENSITE DU COURANT SINUSOIDAL

1) Interprétation électronique.



Les électrons, indépendamment de leur agitation thermique, possèdent un mouvement d'ensemble
tantôt dans un sens (première alternance)
tantôt dans l'autre (autre alternance)
Ces vibrations prennent naissance à la source et se propagent avec une célérité voisine de celle de la lumière dans le fil.

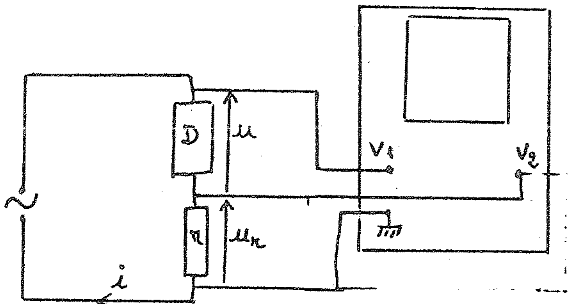
Calculons la longueur d'onde de ces vibrations pour $f = 50$ Hz

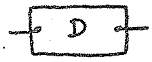
$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{50} = 6 \times 10^6$ m = 6000 km . Donc dans un circuit de longueur habituelle l'intensité est la même en tous les points au même instant .

(remarque : ceci n'est pas valable en haute fréquence)

Conséquence : les lois du courant continu seront applicables à chaque instant aux courants basse fréquence .

2) Visualisation d'une intensité à l'oscilloscope .





dipôle pouvant contenir :
- résistances
- bobines sans fer
- condensateurs .

La tension aux bornes du circuit est placée entre V_1 et la masse ,
" " " de r est placée entre V_2 et la masse .
r est une résistance suffisamment faible pour ne pas modifier l'intensité ;
or $u_r = r\,i$
donc i est une fonction sinusoïdale du temps.

III- ISOMORPHISME ENTRE L'ENSEMBLE DES FONCTIONS SINUSOIDALES de même pulsation ET L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES : voir document P1

notations utilisées ici :

intensité instantanée : i ; intensité maximum : I_m ; intensité complexe : $\underline{I} = [I_m, \varphi]$
ddp. instantanée : u ; ddp maximum : U_m ; ddp complexe : $\underline{U} = [U_m, \varphi']$

<u>remarque</u> : avec les notations du document P1 (III 1) on a :

$$\underline{I} = \ell(i) \quad \text{et} \quad \underline{U} = \ell(u)$$

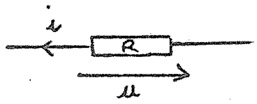
IV- NOTION D'IMPEDANCE COMPLEXE

Cherchons s'il existe une relation entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$ de la forme $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$

$\underline{Z}$ sera appelé impédance complexe.

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \quad \begin{cases} \text{module} & U_m = Z\, I_m \\ \text{argument} & \arg \underline{U_m} = \arg \underline{Z} + \arg \underline{I} \\ & \varphi' = \arg \underline{Z} + \varphi \end{cases}$$

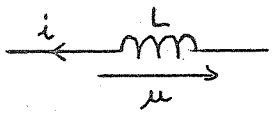
1) Impédance complexe d'une résistance pure.



$$u = R\,i \quad \text{donc} \quad \left.\begin{matrix} \underline{U} = R\,\underline{I} \\ \text{or} \quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \end{matrix}\right\} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z} = R$$

$$\underline{Z} = [R, 0] \quad \text{d'où} \quad \left\{\boxed{\begin{matrix} \text{module} & U_m = R\, I_m \\ \text{argument} & \varphi' = \varphi \end{matrix}}\right.$$

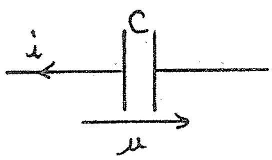
2) Impédance complexe d'une inductance pure.



$$u = L\frac{di}{dt} \quad \text{donc} \quad \left.\begin{matrix} \underline{U} = L\, j\omega\, \underline{I} \\ \text{or} \quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \end{matrix}\right\} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z} = jL\omega$$

$$\underline{Z} = \left[L\omega, +\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{d'où} \quad \left\{\boxed{\begin{matrix} \text{module} & U_m = L\omega\, I_m \\ \text{argument} & \varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} \end{matrix}}\right.$$

3) Impédance complexe d'une capacité pure.

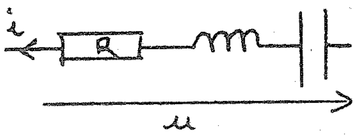


$$dq = i\,dt \quad \text{or} \quad q = C\,u \quad \text{d'où} \quad u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

$$\text{donc} \quad \left.\begin{matrix} \underline{U} = \frac{1}{C}\frac{1}{j\omega}\underline{I} \\ \text{or} \quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \end{matrix}\right\} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z} = \left[\frac{1}{C\omega}, -\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{d'où} \quad \left\{\boxed{\begin{matrix} \text{module} & U_m = \frac{1}{C\omega} I_m \\ \text{argument} & \varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2} \end{matrix}}\right.$$

4) Circuit R, L, C en série.



$$u = R\,i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

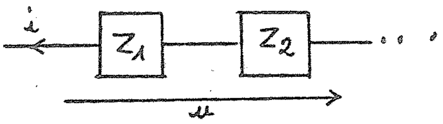
$$\left.\begin{matrix} \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \\ \underline{U} = R\,\underline{I} + Lj\omega\,\underline{I} + \frac{1}{Cj\omega}\underline{I} \end{matrix}\right\} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\underline{Z} = \left[\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \Phi\right] \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg}\Phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\text{d'où} \quad \left\{\boxed{\begin{matrix} \text{module} & U_m = Z\, I_m \\ \text{argument} & \varphi' = \varphi + \Phi \end{matrix}}\right.$$

5) Association d'impédances

a) en série



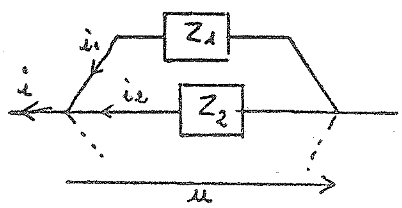
$$u = u_1 + u_2 + \cdots$$

donc $\underline{U} = \underline{Z_1}\,\underline{I} + \underline{Z_2}\,\underline{I} + \cdots$

or $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$

d'où $\boxed{\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \cdots}$

b) en parallèle



$$i = i_1 + i_2 + \cdots$$

donc $\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \cdots$

or $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = \underline{Z_1}\,\underline{I_1} = \underline{Z_2}\,\underline{I_2} = \cdots$

d'où $\boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}}$

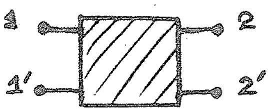
QUADRIPOLES

le signe ■→ renvoie à un document plus complet sur les quadripôles, à paraître fin 78.

I) DEFINITION

1°) quadripôles généralisés

c'est une portion de circuit électrique comportant quatre pôles.

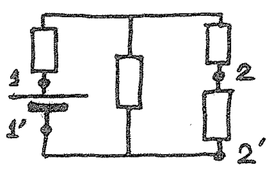


2°) quadripôles (au sens restreint, ou diport)

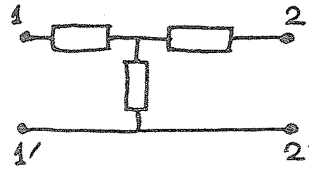
C'est un quadripôle généralisé tel que le courant arrivant en 1 est égal au courant partant de 1 et tel que le courant arrivant en 2 est égal au courant partant de 2'; autrement dit: on se permet de brancher un dipôle en (1,1') et un dipôle en (2,2').

exemple:

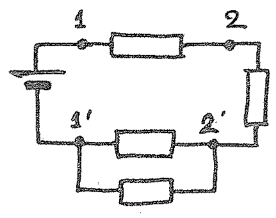
a)



$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1' & 2'\end{pmatrix}$ est un quadripôle que l'on peut encore représenter comme ceci:



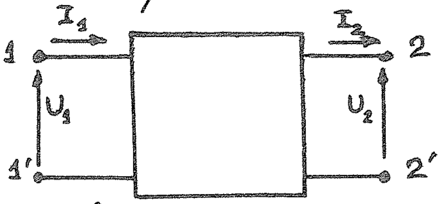
b)



$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1' & 2'\end{pmatrix}$, dans ce montage, n'est pas un quadripôle au sens restreint, mais un quadripôle généralisé.

3°) choix des axes pour les mesures algébriques des intensités et tensions.

Nous adopterons ici les conventions suivantes:



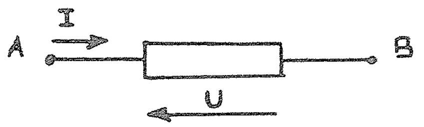
$U_1 = V_1 - V_{1'}$

$U_2 = V_2 - V_{2'}$

Les flèches sous I_1 et I_2 ne désignent pas les sens des courants, mais les "conventions" choisies pour les mesures algébriques des intensités. Ainsi, si le sens conventionnel du courant qui circule est celui de la flèche, alors la mesure algébrique I_1 de son intensité est positive (négative dans l'autre cas)

D'autres choix sont possibles (et utilisés dans les livres): par exemple, l'autre sens pour I_2. Chaque choix est mieux adapté à certains problèmes. Le noter sera commode pour les associations de quadripôles en cascade. L'autre choix indiqué est plus commode pour les questions de réciprocité et de symétrie.

4°) écriture algébrique de la loi d'ohm



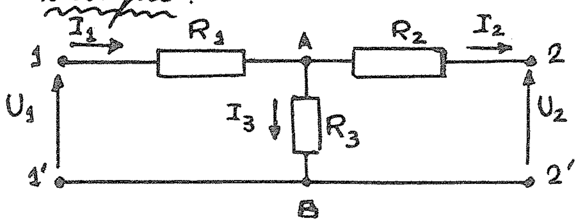
Prenons des axes de sens opposés pour l'intensité et la tension.
Alors $U = RI - E$ est valable quelque soit le sens du courant

($U = V_A - V_B$; $E > 0$ pour un générateur
$E < 0$ pour un récepteur)

5°) quadripôle linéaire

Si les relations qui lient les grandeurs U_1, U_2, I_1, I_2 sont linéaires, on dit que le quadripôle est linéaire. C'est généralement le cas lorsque tous les "composants" qui interviennent sont "linéaires".

exemple :



On établit facilement (⊠→) que $\begin{cases} U_1 = (R_1+R_3)I_1 - R_3 I_2 \\ U_2 = R_3 I_1 - (R_2+R_3) I_2 \end{cases}$

L'application qui à $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ associe $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ est linéaire. Ce quadripôle est donc un quadripôle linéaire. Nous retrouverons cette application grâce au calcul matriciel en IV 1°)

6°) quadripôles équivalents

Soit Q un quadripôle. Nous avons vu (I 2°)) qu'on ne s'autorise à lui brancher de dipôles qu'aux bornes (1,1') d'une part et (2,2') d'autre part. Soit D_e un dipôle branché aux bornes d'entrée (1,1') et soit D_s un dipôle branché aux bornes de sortie (2,2'). Alors les quatres grandeurs U_1, U_2, I_1, I_2 sont déterminées, ce qu'on peut noter :

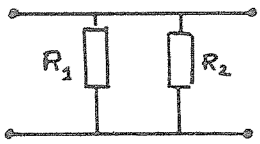
$(U_1, U_2, I_1, I_2) = f(Q, D_e, D_s)$.

Nous dirons que deux quadripôles Q et Q' sont équivalents si :

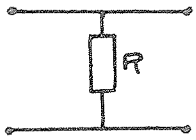
$\forall D_e, \forall D_s, \quad f(Q, D_e, D_s) = f(Q', D_e, D_s)$

Autrement dit, deux quadripôles sont dits équivalents s'ils donnent les mêmes valeurs aux grandeurs caractéristiques U_1, U_2, I_1, I_2 dès qu'on leur branche les mêmes dipôles à l'entrée et les mêmes dipôles à la sortie.

exemple (simple) :



est équivalent à



avec $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

II) MATRICE D'UN QUADRIPOLE LINEAIRE

1°) Exemple

Reprenons le quadripôle de I) 5°)

Nous avons vu que
$$\left.\begin{aligned} U_1 &= (R_1+R_3) I_1 - R_3 I_2 \\ \text{et } U_2 &= R_3 I_1 - (R_2+R_3) I_2 \end{aligned}\right\} (\mathrm{I})$$

Ces relations peuvent s'écrivent matriciellement : $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ R_3 & -(R_2+R_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

La matrice $\begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ R_3 & -(R_2+R_3) \end{bmatrix}$ qui permet de calculer les tensions connaissant les intensités s'appelle la matrice impédance du quadripôle (voir II 2°)). Mais on peut également prendre comme variables les caractéristiques d'entrée U_1 et I_1 et exprimer les caractéristiques de sortie en fonction de celles-ci. Il suffit pour cela de résoudre les relations (I) en prenant U_2 et I_2 comme inconnues :

$$\begin{cases} R_3 I_2 = -U_1 + (R_1+R_3) I_1 \\ U_2 + (R_2+R_3) I_2 = R_3 I_1 \end{cases}$$

donc $I_2 = -\frac{1}{R_3} U_1 + \frac{R_1+R_3}{R_3} I_1$

$$\text{et } U_2 = -\left[\frac{R_2+R_3}{R_3} U_1 + \frac{(R_2+R_3)(R_1+R_3)}{R_3} I_1\right] + \cancel{\frac{R_1+R_3}{R_3}} R_3 I_1$$

$$= + \frac{R_2+R_3}{R_3} U_1 - \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} I_1$$

On obtient donc $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{R_2+R_3}{R_3} & -\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_1+R_3}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$

On obtient encore une matrice associée au quadripôle (matrice de chaîne)
On peut choisir ainsi six couples de "variables" et obtenir en général six matrices différentes.

2°) définitions

a) matrice de chaîne

Supposons que pour un quadripôle donné on puisse établir les formules donnant (U_2, I_2) en fonction de (U_1, I_1). La matrice A associée s'appelle matrice de chaîne du quadripôle. $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$

(voir utilisation de ces matrices en IV)

b) matrices impédance et admittance

Supposons que, pour un quadripôle donné, on puisse établir les formules donnant (U_1, U_2) en fonction de (I_1, I_2). La matrice Z associée s'appelle matrice impédance. $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

Les coefficients de la matrice Z sont homogènes à des impédances
Ils s'interprètent physiquement et peuvent se mesurer directement en réalisant certains montages (et V) En posant
$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$, on obtient $U = ZI$ qui rappelle fortement la loi d'ohm.
Si Z est inversible on obtient (I_1, I_2) en fonction de (U_1, U_2)
La matrice $Y = Z^{-1}$ s'appelle matrice admittance

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

c) matrices hybrides

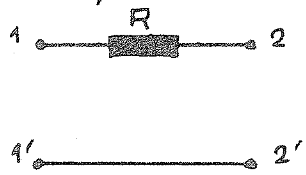
Dans certains types de problèmes (transistors...) il peut être intéressant d'exprimer (I_1, U_2) en fonction de (I_2, U_1). Les matrices que l'on obtient ainsi s'appellent matrices hybrides (H et F)

d) remarques

α) le choix de la matrice associée au quadripôle (chaîne, impédance, ou hybride) dépend, comme le choix des conventions d'orientation pour I et U, des problèmes que l'on désire étudier.

β) tout quadripôle ne possède pas toutes ces matrices A, Z, Y, H, F.

exemple :



On a : $U_2 = U_1 - RI_1$

et $I_2 = I_1$

La matrice de chaine est donc $A = \begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Mais ce quadripôle ne possède pas de matrice impédance (I_1 et I_2 ne sont pas indépendants : $I_1 = I_2$)

γ) connaissant l'une des matrices, on peut déterminer les autres : (qui existent) il suffit de résoudre les équations associées (comme il a été fait II 1°) par exemple)

Nous avons vu que $Y = Z^{-1}$

autre exemple : posons $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ et $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$

on a : $Z_{11} = -\dfrac{A_{22}}{A_{21}} \quad Z_{12} = \dfrac{1}{A_{21}} \quad Z_{21} = \dfrac{-\det A}{A_{21}} \quad Z_{22} = \dfrac{A_{11}}{A_{21}}$

et aussi : $\det Z = -\dfrac{A_{12}}{A_{21}}$

δ) quadripôles équivalents (voir définition en I) 6))

On peut établir (un peu de calcul) que deux quadripôles qui possèdent leurs matrices d'impédance sont équivalents si leurs matrices impédances sont égales. Les matrices des quadripôles caractérisent donc les classes de quadripôles équivalents.

III) CLASSIFICATION DES QUADRIPOLES

1°) nous avons déjà vu : . quadripôles généralisés - quadripôles
. quadripôles linéaires - non linéaires

2°) actif - passif

quadripôle actif : contient des sources d'énergie
passif : sans source d'énergie

remarque :

* généralisation de passif : un circuit est dit passif s'il n'existe pas de conditions de fonctionnement pour lesquelles la puissance totale reçue soit négative (ex : gyrateur à effet Hall)
* on distingue également les quadripôles actifs autonomes (sources d'énergie indépendantes) des non-autonomes

3°) récipoque - non réciproque

Soit Q un quadripôle. On ferme la sortie et on place un générateur G (supposé sans résistance interne) à l'entrée. On obtient un courant de sortie I_2. On ferme ensuite l'entrée et on place le même générateur G à la sortie. On obtient un courant d'entrée I'_1. Le quadripôle Q est dit réciproque si $I_2 = I'_1$

Condition de réciprocité (un peu de calcul)

- à l'aide de la matrice de chaîne A : $\det A = 1$
- à l'aide la la matrice impédance Z : $Z_{12} = -Z_{21}$
- (ou encore $H_{12} = H_{21}$, ou encore $F_{12} = F_{21}$)

exemple : II 1°) $Z_{12} = -Z_{21} = -R_3$

4°) symétrique - non symétrique

Un quadripôle est dit symétrique s'il est équivalent à son quadripôle inversé obtenu en échangeant les rôles des bornes d'entrée et de sortie. (c'est le cas des quadripôles de construction symétrique ; ex : I 5°) avec $R_1 = R_2$)

Condition de symétrie

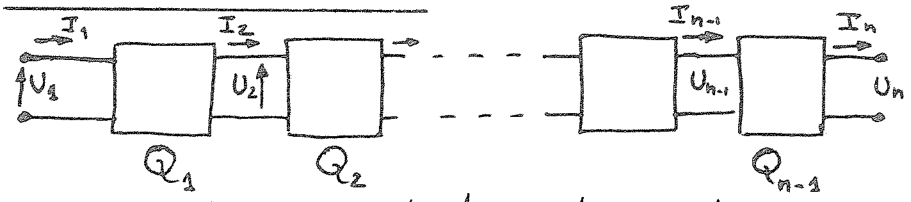
- $A_{11} = A_{22}$ et $\det A = 1$
- $Z_{11} = -Z_{22}$ et $Z_{12} = -Z_{21}$

5°) remarque

- une association en cascade (voir IV) de quadripôles réciproques est un quadripôles réciproques (évident avec la caractérisation : $\det A = 1$) mais ce n'est pas le cas pour des quadripôles symétriques.
- en général les quadripôles passifs sont réciproques et les quadripôles actifs, non réciproques. (quelques exceptions)

IV) UTILISATION DES MATRICES DE CHAINE : (→)

1°) association en cascade



Soit A_i la matrice de chaîne du quadripôle Q_i

On a :
$$\begin{bmatrix} U_n \\ I_n \end{bmatrix} = A_{n-1} \begin{bmatrix} U_{n-1} \\ I_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{n-1} \\ I_{n-1} \end{bmatrix} = A_{n-2} \begin{bmatrix} U_{n-2} \\ I_{n-2} \end{bmatrix}$$

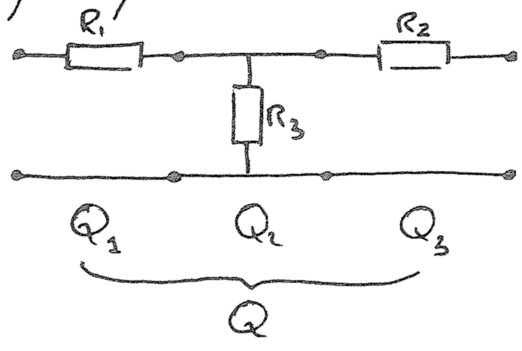
. . . .

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Donc
$$\begin{bmatrix} U_n \\ I_n \end{bmatrix} = A_{n-1} \times A_{n-2} \times \dots \times A_2 \times A_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

La matrice de chaîne du quadripôle obtenu en associant en cascade les quadripôles $Q_1, Q_2, \dots Q_{n-1}$ est donc $A_{n-1} \times A_{n-2} \times \dots \times A_1$

exemple : retrouvons la matrice de chaîne du quadripôle de I 5°) qui peut être considéré comme l'association en cascade de trois quadripôles élémentaires :



On établit facilement que
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & 1 \end{bmatrix}$$
et
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
On a : $A = A_3 A_2 A_1$

$$A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -\frac{1}{R_3} & +\frac{R_1+R_3}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$A = A_3 (A_2 A_1) = \cancel{\begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_1+R_3}{R_3} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_1+R_3}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_3} & -\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_1+R_3}{R_3} \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que $\det A = 1$ (le quadripôle est réciproque : il n'est constitué que de résistances pures)

2°) cas particuliers : association en cascade de n quadripôles identiques : $A' = A^n$. On débouche ici sur le problème du calcul de la puissance $n^{ième}$ d'une matrice (valeurs propres, vecteurs propres...)

V) ETUDES EXPERIMENTALES

1°) vérification de la linéarité d'un quadripôle.

On branche deux dipôles et on effectue les mesures de U_1, U_2, I_1, I_2

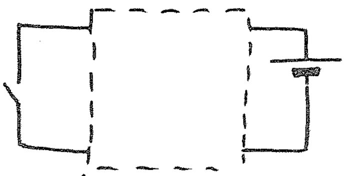
On vérifie graphiquement la linéarité et on détermine les coefficients.

2°) détermination des coefficients de la matrice impédance (par exemple)

elle repose sur l'interprétation physique des coefficients ou sur la remarque suivante :

Si $I_1 = 0$ alors $\begin{cases} U_1 = Z_{12}\, I_2 \\ U_2 = Z_{22}\, I_2 \end{cases}$ donc $Z_{12} = \dfrac{U_1}{I_2}$ et $Z_{22} = \dfrac{U_2}{I_2}$

On réalise donc le montage suivant :



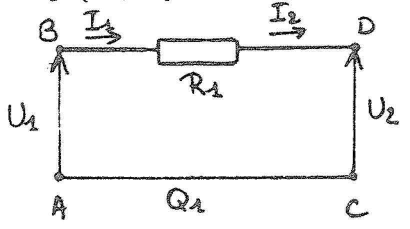
On mesure U_1, U_2, I_2 et on calcule Z_{12} et Z_{22}

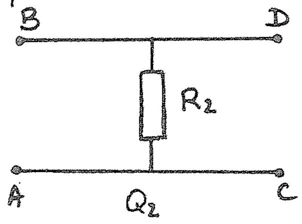
(pour les coefficients Z_{12} et Z_{11}, ouvrir la sortie)

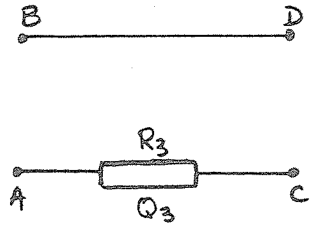
VI REMARQUES

- les matrices des quadripôles sont utilisables en alternatif en prenant les nombres complexes
- toute une gamme de problèmes revient à chercher les quadripôles les plus simples dont les matrices ont des coefficients donnés, imposés par le but recherché.

On considère les trois quadripôles élémentaires suivants :



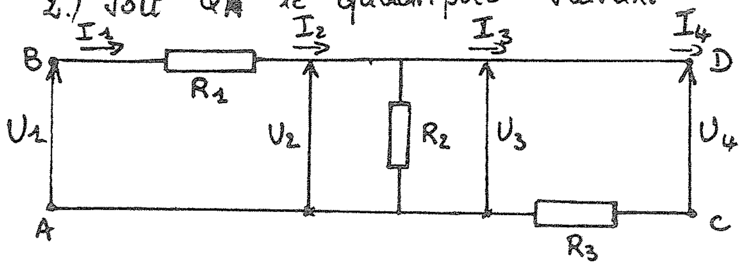




I 1.) Pour chacun d'entre eux :

- Etablir les formules donnant (U_2, I_2) en fonction de (U_1, I_1)
- montrer que l'application $(U_1, I_1) \longmapsto (U_2, I_2)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
- donner la matrice associée à cet endomorphisme de $\mathbb{R}^2$: elle s'appelle : la matrice de chaîne associée au quadripôle : (On notera ces matrices Q_1 ; Q_2 ; Q_3)

2.) Soit Q_A le quadripôle suivant



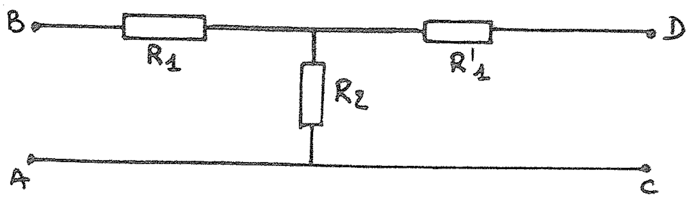
On a par exemple

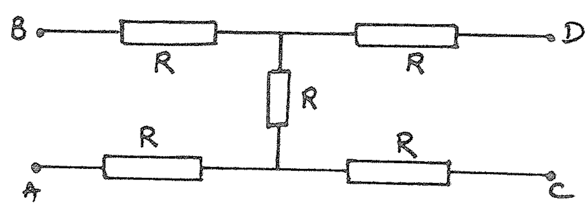
$$\begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = Q_2 \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

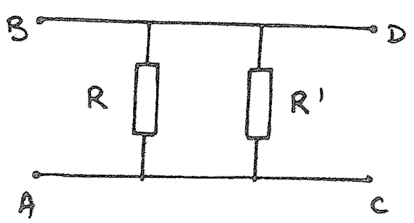
Soit Q_A la matrice de chaîne associée au quadripôle Q_A. Etablir que $Q_A = Q_3 \times Q_2 \times Q_1$

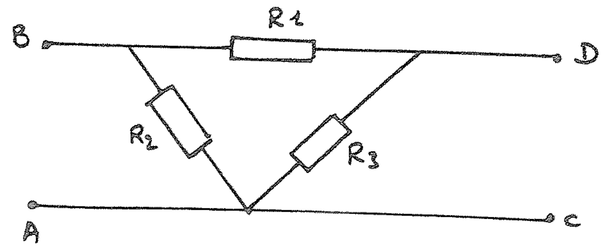
Calculer Q_A en fonction de R_1, R_2 et R_3

3.) Voici d'autres quadripôles. Calculer leur matrice de chaîne

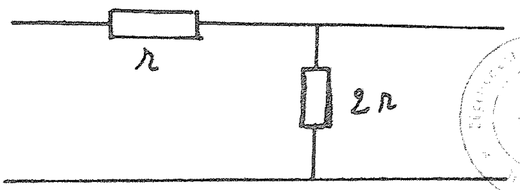








4.) Soit Q le quadripôle suivant :



Montrer que sa matrice de chaîne est $Q = \begin{bmatrix} 1 & -r \\ -\frac{1}{2r} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Sachant que $U_1 = 22\,V$, calculer r pour que $I_2 = \frac{I_1}{2} = 0{,}05\,A$

II 1.) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{bmatrix} 1 & -r \\ -\frac{1}{2r} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (où r est un paramètre réel non nul)

Chercher un vecteur non nul $u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ tel que $f(u_1) = \frac{1}{2} u_1$

Chercher un vecteur non nul $u_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ tel que $f(u_2) = 2 u_2$

Existe-t-il un vecteur non nul $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tel que $f(u) = u$?

Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$

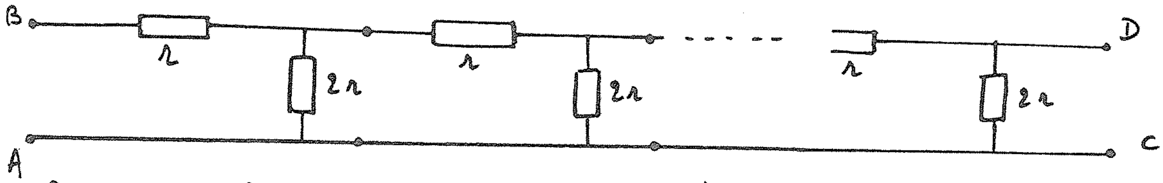
Chercher la matrice B de f dans la base (u_1, u_2) et la matrice de passage P telle que $B = P^{-1} A P$

Montrer que $A = P.B.P^{-1}$ et que $A^n = P.B^n P^{-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Calculer B^n puis A^n en fonction de r.

2.) On reprend le quadripôle Q de la question I 4.)

On considère le quadripôle Q' obtenu en reliant en cascade cinq quadripôles Q où r vaut $32\,\Omega$



Quelle est la matrice de chaîne Q' ?

Montrer que $Q' \simeq \begin{bmatrix} \frac{32}{3} & -682 \\ -\frac{1}{3} & 21 \end{bmatrix}$

Sachant que, aux deux bornes d'entrée A et B on relie un générateur de f.e.m 20 V et de résistance interne $\rho = 9\,\Omega$, sachant que, aux deux bornes de sortie C et D on branche une résistance de $R = 100\,\Omega$, calculer la valeur du courant d'entrée I_1 puis du courant de sortie I_2.

Que pensez-vous du signe et de l'ordre de grandeur de I_2 ?

III 1.) Reprenons le quadripôle Q de la question I 4.)

chercher les formules donnant (U_1, U_2) en fonction de (I_1, I_2)

Montrer que ces formules correspondent à une application linéaire dont on cherchera la matrice (dans la base canonique); cette matrice s'appelle matrice impédance du quadripôle. Quelle est la matrice qui donne (I_1, I_2) en fonction de (U_1, U_2) ?

2.) Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes. On rappelle que $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

a.) Quelle est sa dimension

b.) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ Posons $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$

A quelle condition sur les coefficients de M, peut-on calculer (U_1, U_2) en fonction de (I_1, I_2) ? Soit $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}$ pour lesquelles ceci est possible. Est-ce que $\mathcal{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$?

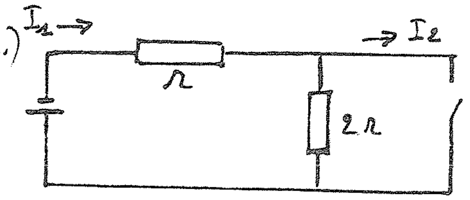
c.) Soit $M \in \mathcal{M}_1$. Posons $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Soit $N = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ la matrice qui donne (U_1, U_2) en fonction de (I_1, I_2).

Montrer que :
- $b = -c \iff \det N = 1$
- $\det M = 1 \iff \beta = -\gamma$
- $a = d \iff \alpha = -\delta$

IV Reprenons le quadripôle de I 4.)

Voici une autre méthode pour avoir sa matrice impédance $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

a.)



Branchons aux bornes d'entrée un générateur de f. e. m e et de résistance interne négligeable.
Ouvrons le circuit de sortie (donc $I_2 = 0$)
Montrer que $I_1 = \dfrac{e}{3r}$. En déduire α et γ.

b.) On ouvre le circuit d'entrée et on branche à la sortie un générateur de f. e. m et ~~de~~ résistance négligeable. Montrer qu'alors $I_2 = -\dfrac{e}{2r}$

En déduire les coefficients β et δ

Vérifier les résultats III 1.)