

\mathcal{Q} l'ensemble des rotations vectorielles planes. Notons que \mathcal{Q} muni de la loi de composition des applications \circ est un groupe commutatif et que la matrice d'une application f de \mathcal{Q} dans une base orthonormée est de type (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

ROTATIONS VECTORIELLES

La matrice de la rotation vectorielle f rapportée à la base orthonormée $B (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant égale à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, les coefficients a et b dépendent à priori de l'application f et de la base B c'est pourquoi nous noterons la matrice M de f dans la base B :

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a(f, B) & -b(f, B) \\ b(f, B) & a(f, B) \end{pmatrix} \quad (C)$$

Cette notation peut, à priori, paraître lourde mais elle a, entre autres avantages, celui de bien mettre en relief les paramètres dont sont susceptibles de dépendre a et b .

Théorème préliminaire :

Etant donné deux vecteurs unitaires \vec{x} et \vec{y} il existe une rotation φ et une seule telle que $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$. Les démonstrations de ce théorème peuvent être laissées au soin du maître ou de ses élèves. Notons que comme dans bien d'autres questions de mathématiques la démonstration la plus simple n'est pas toujours la plus naturelle donc celle qui sera à priori proposée par les élèves.

Une méthode consiste à rapporter le plan à une base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2) à désigner par $\begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs \vec{x} et \vec{y} dans cette base et à rechercher l'existence d'un couple (a, b) vérifiant

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1 \text{ sachant que } \|\vec{x}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ et que } \|\vec{y}\|^2 = u^2 + v^2 = 1.$$

On est amené à résoudre le système $\begin{cases} \alpha a - \beta b = u \\ \beta a + \alpha b = v \end{cases}$ qui admet une

solution et une seule.

$a = \alpha u + \beta v$, $b = \alpha v - \beta u$. Cette solution vérifie $a^2 + b^2 = 1$ en effet :

$$a^2 + b^2 = (\alpha u + \beta v)^2 + (\alpha v - \beta u)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(u^2 + v^2) = 1 \cdot 1 = 1$$

(on retrouve ici l'identité de Lagrange ce qui n'est pas étonnant. Cette identité exprimant analytiquement que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, il est parfaitement naturel de la retrouver dans une étude de la trigonométrie) d'où l'existence d'une rotation unique φ telle que $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$.

Une autre méthode, plus simple, consiste à utiliser la conséquence (B) de l'étude du produit scalaire. De (B) on déduit qu'il existe une base orthonormée (\vec{x}, \vec{x}') dont le premier vecteur est \vec{x} . Les nombres (a, b) sont alors les coordonnées de \vec{y} dans la base (\vec{x}, \vec{x}') . a et b sont bien déterminés et comme \vec{y} est unitaire $\|\vec{y}\|^2 = a^2 + b^2 = 1$.

Expressions des nombres $a(f, B)$ et $b(f, B)$ à l'aide du produit scalaire.

Dans l'écriture (c) de $M(f, B)$, les nombres $\begin{pmatrix} a(f, B) \\ b(f, B) \end{pmatrix}$ sont les coordonnées dans la base $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ des vecteurs $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$. On a donc en appliquant la conséquence (A) de l'étude du produit scalaire : $a(f, B) = \vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_1)$

$$b(f, B) = \vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_1).$$

Théorème 1 : $a(f, B)$ ne dépend pas de la base B choisie.

Démonstration : Soit $B'(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ une autre base orthonormée. La matrice de l'application f dans la base orthonormée B' est

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} a(f, B') & b(f, B') \\ b(f, B') & a(f, B') \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a(f, B') = \vec{e}'_1 \cdot f(\vec{e}'_1) ;$$

$$b(f, B') = \vec{e}'_2 \cdot f(\vec{e}'_1)$$

\vec{e}'_1 et \vec{e}'_2 étant des vecteurs de module 1 il existe une rotation vectorielle φ et une seule telle que $\vec{e}'_1 = \varphi(\vec{e}_1)$ et :

$$a(f, B') = \vec{e}'_1 \cdot f(\vec{e}'_1) = \varphi(\vec{e}_1) \cdot f[\varphi(\vec{e}_1)] = \varphi(\vec{e}_1) \cdot (f \circ \varphi)(\vec{e}_1)$$

or \circ étant commutative dans \mathcal{R}

$$a(f, B') = \varphi(\vec{e}_1) \cdot (f \cdot \varphi)(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_1) \cdot (\varphi \cdot f)(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_1) \cdot \varphi[f(\vec{e}_1)]$$

Or φ étant une rotation vectorielle, concerne le produit scalaire et : $\varphi(\vec{e}_1) \cdot \varphi[f(\vec{e}_1)] = \vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_1)$ d'où $a(f, B') = a(f, B)$. Ce qui montre bien que $a(f, B)$ ne dépend pas de la base orthonormée B choisie.

La relation $a^2 + b^2 = 1$ permet d'établir immédiatement que $|b(f, B)|$ ne dépend pas de B donc que si $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $B'(e'_1, e'_2)$ sont deux bases orthonormées alors $b(f, B) = \pm b(f, B')$. Il est possible de préciser ce résultat en considérant la rotation unique φ telle que $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}'_1$, \vec{e}_2 étant unitaire et orthogonal à \vec{e}_1 , $\varphi(\vec{e}_2)$ est unitaire et orthogonal à $\varphi(\vec{e}_1)$ c'est à dire à \vec{e}'_1 . (ce qui est une conséquence immédiate du fait que φ conserve le produit scalaire).

Or (conséquence (B) de l'étude du produit scalaire) il existe deux vecteurs unitaires et deux seulement orthogonaux à un vecteur unitaire donné et ces deux vecteurs sont opposés, par conséquent ou bien $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}'_2$ ou bien $\varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}'_2$

$$\text{Si } \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}'_2$$

$$b(f, B') = \vec{e}'_2 \cdot f(\vec{e}'_1) = \varphi(\vec{e}_2) \cdot f[\varphi(\vec{e}_1)] = \varphi(\vec{e}_2) \cdot \varphi[f(\vec{e}_1)] = \vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_1) = b(f, B)$$

$$\text{Si } \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}'_2 \text{ alors } b(f, B') = (-\vec{e}'_2) \cdot f(\vec{e}'_1) = -b(f, B).$$

d'où : Théorème 2 :

$b(f, B') = \mathcal{E}(B, B') b(f, B)$ $\mathcal{E}(B, B')$, qui dépend du choix des bases orthonormées B et B' , étant égal à ± 1 avec $\mathcal{E}(B, B') = +1$ si et seulement s'il existe une rotation φ telle que $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}'_1$ et $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}'_2$.
