A PROPOS DE LA COUVERTURE

Exercice idiot : Démontrez que l'opération définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par : Pour tout a, b, a' et b' dans $\mathbb{Z}$:

$$(a,b) * (a',b') = (a+a', (-1)^{a'} b + b')$$

munit l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'une structure de groupe.

Exercice intelligent : La page de couverture représente une étude d'un remplissage périodique d'un plan avec des oiseaux, étude réalisée en 1955 par M.C. Escher et qui a été utilisée pour la décoration de l'Ecole Nouvelle de Jeunes Filles à La Haye en 1959.

On demande d'étudier le groupe des isométries de cette figure supposée étendue au plan tout entier.

Indication sur la solution : Soit t la translation élémentaire horizontale vers la droite, t' la translation élémentaire vers le haut, σ la symétrie droite par rapport à un axe vertical bien choisi passant à peu près au milieu d'un bec ; alors $s = \sigma \circ t'^{1/2}$ fait partie du groupe des isométries et il est clair que s et t engendre ce groupe. Mais on a : $s \circ t = t^{-1} \circ s$ et donc une isométrie quelconque peut toujours s'écrire :

$$i = s^a \circ t^b \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ quelconque dans } \mathbb{Z}.$$

Alors il est clair que l'on a :

$$i \circ i' = (s^a \circ t^b) \circ (s^{a'} \circ t^{b'}) = s^{a+a'} \circ t^{(-1)^{a'} b + b'}$$