Aspects mathématiques de la relativité

Dans l'Ouvert numéro 4, M. de Cointet, dans un article sur les lignes trigonométriques hyperboliques, nous a montré comment celles-ci intervennaient à partir de matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ qui jouissent de propriétés analogues aux matrices de rotation du plan vectoriel euclidien.

Cet article m'a fait me souvenir d'un cours que j'avais traité en fin d'année avec des terminales E. Ce cours avait pour but de montrer comment on retrouve la loi de composition relativiste des vitesses colinéaires à partir de la donnée d'une forme bilinéaire symétrique (l'analogue du produit scalaire).

Il me faut avouer que ce cours n'a pas du tout été compris par les élèves, non pour des raisons mathématiques, mais pour des raisons "philosophiques" ; ils n'ont pas accepté le fait que la vitesse de la lumière dans le vide (c) sit une vitesse limite.

Il faut remarquer que le physicien suit une démarche inverse et que c'est à partir de la constatation de l'invariance de c et de la notion de groupe des vitesses qu'il arrive à l'invariant qu'est la forme bilinéaire symétrique.

On considère un espace vectoriel V rapporté à une base $(i\ ,\ j\ )$. Soit x la première coordomée et t la seconde (ceci afin de ne pas troubler le lecteur). On donne dans V la forme bilinéaire symétrique f définie par : $f(v,v') = -xx' + c^2tt'$. Soit φ la forme quadratique associée.

<u>Définitions :</u> On dit que v est ailleur si $\varphi(v) < 0$

On dit que v est accessible si $\varphi(v) \geqslant 0$; dans ce dernier cas, on dit que v est futur si t est positif et est passé si t est négatif. $\sqrt{\varphi(v)}$ est alors appelé la pseudo-norme de v .

I- RECHERCHE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONSERVANT φ

Soit $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ la matrice d'une telle application linéaire dans la base $(\ i\ ,\ j\ )$. Si le vecteur de coordonnées (x,t) est transformé en le vecteur (x',t') on doit alors avoir :

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 &= c^2t'^2 - x'^2 \\ &= c^2(\beta x + \delta t)^2 - (\alpha x + \gamma t)^2 \\ &= (c^2\delta^2 - \gamma^2)t^2 - (\alpha^2 - c^2\beta^2)x^2 + 2(c^2\beta\delta - \alpha\gamma)xt \end{aligned}$$

ce qui conduit au système :

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = c^2.\delta^2 - \gamma^2 \\ 1 = \alpha^2 - c^2.\beta^2 \\ 0 = c^2\beta\delta - \alpha\gamma \end{array}\right\}$$

qui une fois résolu donne les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & \varepsilon bc \\ b/c & \varepsilon a \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad \text{et} \quad a^2 - b^2 = 1$$

Une telle matrice est dite pseudo-orthogonale (On considère en général le cas $c=1$ ce qui montre l'analogie avec une matrice d'isométrie dans un espace vectoriel euclidien de dimension deux).

Il est clair que par définition l'ensemble de ces matrices est stable pour la multiplication, que l'inverse existe (puisque le déterminant vaut ε). Or l'inverse est : $\begin{pmatrix} a & -bc \\ -\varepsilon b/c & \varepsilon a \end{pmatrix}$

qui est une matrice pseudo-orthogonale. Nous avons donc un groupe dit <u>groupe pseudo-orthogonal</u>. Il est facile de vérifier que l'ensemble des matrices pour lesquelles <u>$\varepsilon = +1$</u> est un sous-groupe dit <u>groupe de Lorentz</u> (ou groupe des pseudo-rotations). On peut remarquer que ce sous-groupe conserve l'orientation de l'espace.

II- <u>ETUDE DU GROUPE DE LORENTZ (PSEUDO-ROTATIONS)</u>

Toujours dans la base (i , j) une matrice de pseudo-rotation a la forme : $\begin{pmatrix} a & bc \\ b/c & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 - b^2 = 1$

Un vecteur de coordonnées (x,t) est transformé en un vecteur de coordonnées (x',t') par les formules : $\left\{\begin{array}{l} x' = ax + bct \\ t' = (b/c)x + at \end{array}\right.$

et en particulier :

$$(x'/t') = \frac{a(x/t) + bc}{(b/c)(x/t) + a}$$

ce qui montre que $(x'/t') = u'$ s'exprime directement en fonction de a , b et $(x/t) = u$. Or il est clair que u et u' doivent être considérées comme des vitesses dans l'espace physique.

Soit alors v un vecteur accessible et considérons la pseudo-rotation qui amène la base (i , j) sur la base (I , J) où J est colinéaire à v , de même sens que v et de pseudo-norme c , la même que celle de j . On a alors avec les notations précédentes :

$$J = \frac{x\,c}{\sqrt{-x^2 + c^2t^2}}\,i + \frac{t\,c}{\sqrt{-x^2 + c^2t^2}}\,j$$

soit : $$J = \frac{u\,c}{\sqrt{c^2 - u^2}}\,i + \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}\,j$$

Ce qui permet d'écrire pour la matrice de pseudo-rotation :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{uc}{\sqrt{c^2 - u^2}} \\ \\ \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b.c \\ \\ b/c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne : $$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}} \\ b &= \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}} \end{aligned} \right.$$

On voit donc qu'une matrice du groupe de Lorentz s'exprime simplement en fonction de $u = x/t$:

$$M(u) = \frac{1}{1-(u/c)^2}\begin{pmatrix} 1 & u \\ \\ u/c^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Il est impossible d'amener par pseudo-rotation i sur v car v est accessible et i ne l'est pas, or les pseudo-rotations conservent l'accessibilité.

III- OU L' ON RETROUVE LA COMPOSITION DES VITESSES

L'ensemble des matrices de la forme $M(u)$ forment un groupe ; par conséquent : $M(u).M(u') = M(u")$ avec $u" = u * u'$. L'application qui a toute matrice $M(u)$ associe le nombre u est donc un isomorphisme de groupe. Cherchons la forme algébrique de la loi $*$.

$$M(u)\cdot M(u') = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u' \\ u'/c^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[1-(u/c)^2\right]\left[1-(u'/c)^2\right]}} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{uu'}{c^2} & u+u' \\ \dfrac{u+u'}{c^2} & 1 + \dfrac{uu'}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{uu'}{c^2}}{\sqrt{\left[1-(u/c)^2\right]\left[1-(u'/c)^2\right]}} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u+u'}{1+\dfrac{uu'}{c^2}} \\ \\ \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{u+u'}{1+\dfrac{uu'}{c^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que : $\dfrac{1+\frac{uu'}{c^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2\right]}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u+u'}{1+\frac{uu'}{c^2}}\right)^2}}$

et par conséquent :

$$M(u).M(u') = M(u") \quad \text{avec} \quad \boxed{u" = \frac{u+u'}{1+\frac{uu'}{c^2}}}$$

Qui n'est autre que la loi relativiste de composition des vitesses. Cette dernière formule peut aussi s'écrire sous la forme plus symétrique et plus agréable :

$$\frac{c+u"}{c-u"} = \frac{c+u'}{c-u'} \cdot \frac{c+u}{c-u}$$

L'étude de la transformation de Lorentz permet de montrer et d'expliquer les phénomènes de dilatation du temps et de contraction des longueurs. Pour cela on considère deux points M_1 et M_2 qui ont soit leur première coordonnée égale, soit leur deuxième et on compare la différence des deux autres dans un repère et dans un autre.

Le secteur public d'éducation ne s'est pas uniquement développé pour satisfaire les besoins en main-d'oeuvre qualifiée des détenteurs de capitaux, mais pour répondre au besoin de "socialiser les enfants pour qu'ils acceptent un système économique inéquitable". La preuve en est que dans les pays où il est possible de contrôler la masse par d'autres moyens que l'école (Eglise, autres institutions communautaires hiérarchisées) les propriétaires capitalistes vont sous-investir dans l'enseignement primaire relativement aux autres niveaux d'enseignement ; mais avec le développement de l'industrialisation et de l'urbanisation L'église et la communauté ont perdu de leur pouvoir de contrôle ; c'est l'école qui les a remplacées en tant qu'instrument de maintien de la structure sociale de production de l'économie capitaliste. Tout se passe comme si l'école a pu remplir un double rôle : fournir les économies capitalistes en personnel qualifié et légitimer la structure par classe de la société.

J. Hallak (à qui profite l'école ?)