Divertissements mathématiques

SOLUTIONS DES DIVERTISSEMENTS DE L' OUVERT N° 7

Problèmes élémentaires :

I - On se convaincra sans difficulté que le résultat vaut 1 .

II - Ce problème est simple en ce sens qu'il n'y a que du calcul. On remarque que :

$$\frac{140}{99} < \frac{99}{70} \qquad \text{et que :} \qquad \frac{99}{70} - \frac{140}{99} = \frac{1}{6930}$$

Or une table numérique nous donne facilement : $\sqrt{2} \simeq 1,41421...$ et donc :

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}$$

Pour chercher le plus proche des deux nombres, on peut soit extraire la racine de 2, mais alors il faut calculer au moins 11 décimales à 2 , soit, comme nous le faisons ici, comparer par des moyens algébriques :

$$\sqrt{2} - \frac{140}{99} \qquad \text{et} \qquad \frac{99}{70} - \sqrt{2}$$

c'est-à-dire : $\quad 2\sqrt{2} \quad$ et $\quad \dfrac{140}{99} + \dfrac{99}{70} = \dfrac{19601}{6930}$

Les deux membres étant positifs, on paut comparer leur carré, soit :

$$8 \qquad \text{et} \qquad \frac{384\,199\,201}{48\,024\,900} = 8 + \frac{1}{48\,024\,900}$$

ce qui permet de conclure que <u>140/99 est plus proche de 2 que 99/70</u>

En ce qui concerne $\frac{1}{2}\left(\frac{140}{99} + \frac{70}{99}\right)$, on voit que ce nombre est vraiment très proche de $\sqrt{2}$. Les calculs précédents permettant d'affirmer que leurs carrés diffèrent de $(192\,099\,600)^{-1}$ donc pour les nombres eux-mêmes d'environ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ fois ce nombre, c'est-à-dire, grosso modo que :

<u>$\frac{1}{2}\left(\frac{140}{99} + \frac{99}{70}\right)$ diffère de $\sqrt{2}$ de moins de 2.10^{-9}</u>

Problème pour physicien :

Ayant à calculer l'aire d'une surface fermée de révolution, on a intérêt à utiliser le théorème de Guldin :

$$S = 2.\pi.r.L$$

Où S est l'aire cherchée, L la longueur donnée de la méridienne (ou plus exactement leur mesure), enfin r est la distance à l'axe du centre de gravité de la méridienne. Laissons un fil parfaitement souple prendre sa position d'équilibre dans un champ uniforme de pesanteur. La forme prise par le fil sera une chaînette, et le centre de gravité sera naturellement le plus bas possible. La longueur de la méridienne étant donné, le centre de gravité ne pourra s'éloigner de l'axe de révolution que si l'on rapproche les pôles. La limite est atteinte pour un disque plat de rayon $L/2$. S vaut alors $(\pi \cdot L^2)/2$.

Problème de vache :

Un membre de phrase a été oublié dans la rédaction de l'énnoncé de ce problème, en rendant la résolution sans intérêt et difficile. A l'avant dernière ligne il fallait compléter "...où elle aurait atteint l'extrêmité du pont, laissant 25 cm de son arrière train sur le pont."

Nous donnons ci-dessous le corrigé du problème ainsi complété :

Soit x la longueur du pont en mètres ; la vache se tient alors à $x/2 - 5$ d'une extrémité et à $x/2 + 5$ de l'autre. Le train est à $2x$ de l'extrêmité du pont la plus proche.

La vache peut parcourir $x/2 - 5$ dans un sens ou $x/2 + 5 - 1/4$ dans l'autre dans le temps ou le train fera $2x - 1$ ou $3x - 1/4$. En faisant la somme des trajets parcouru dans chaque cas on voit que la vache peut faire $x - 1/4$ pendant que le train fait $(x - 1/4).5$; la vache est donc cinq fois moins rapide que le train . Sa vitesse est par conséquent de 18 Km/h.

Pour avoir la longueur du pont, étudions ce qui se passe dans le cas favorable pour la vache. Elle parcourt $x/2 - 5$ pendant que le train fait $2x - 1$. Etant donné le rapport des vitesses, on a :

$$2x - 1 = 5 . (x/2 - 5)$$

ce qui donne au pont une longueur de 48 m.

AUTRES PROBLEMES ET DIVERTISSEMENTS

Il existe à l'heure actuelle sur le marché de nombreuses calculatrices de poche dites scientifiques. Elles permettent en effet, outre les quatre opérations, de calculer les valeurs d'un certain nombre de fonctions classiques : logarithmique, exponentielle, trigonométrique (directe et inverse), racine, puissance, inverse ....

Il est intéressant de se poser un problème numérique en s'interdisant l'accès de certaines touches. Le choix des touches dépend de la machine utilisée ;

Je donne ici quelques exemples de génération d'entiers naturels (ou de très bonnes approximations de ceux-ci) sur une Hewlett-Packard 35 en m'interdisant les touches numériques et les touches correspondantes aux quatre opérations.

1 obtenu à partir de o par $/e^x/$

2 obtenu par $/e^x/e^X/e^x/e^x/e^x/\log/\log/$

4 peut être obtenu de deux façons que je laisse le soin de trouver au lecteur.

Voici quelques autres entiers faciles à trouver :

3 , 5 , 6 , 8 , 9 , 10 , 15 , 20 , 25 , 27 , 30 , 45 , 50 , 60 , 90 , 100 .

Existe-t-il une soltuion pour engendrer 7 ? (réponse inconnue de l'auteur).

On remarquera qu'il se peut, qu'en raison des approximations de calcul de la machine 4 soit par exemple obtenu sous la forme 3, 999 999 999 ou 4, 000 000 001 On admettra ces résultats comme correct.

A défaut d'une bibliographie détaillée nous croyons utile de donner un court lexique de deux mots souvent employés dans les jugements sur les ouvrages :

CLAIR, avec une nuance de satisfaction : se dit d'un mémoire court de préférence réduit à un groupe de formules ou mieux une formule unique rigoureusement inintelligible par elle-même. Par extension la clarté concerne des exposés très condensés dont les finesses sont hautement appréciées des spécialistes qui connaissent déjà la question à fond.

COMPLIQUE, associé à une nuance péjorative de confusion : se dit d'un long exposé dont les développements sont directement intelligibles au commun des mortels.

J. TEXEREAU

La construction du télescope d'amateur

(société astronomique de France).