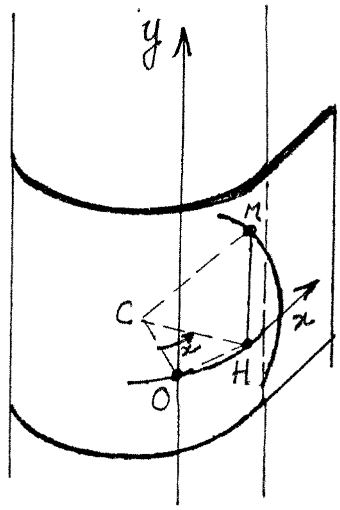
Divertissements mathématiques

COMMENT OBTENIR UN OVALE ?

Si vous avez assisté à une certaine émission de Gérard Majax, vous connaissez le truc :

Vous roulez un papier autour d'une bouteille, sur ce papier vous tracez un "cercle" avec un compas, vous déroulez et vous avez un bel ovale.

Diable, s'agirait-il d'une autre façon de tracer les ellipses ? Voyons de plus près... Il s'agit en somme de l'intersection d'une sphère avec un cylindre, cette sphère ayant son centre sur le cylindre.



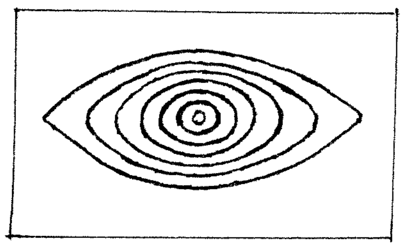
Prenons le rayon du cylindre pour unité ; appellons R celui de la sphère. ($0 \leq R \leq 2$)

Soit M un point quelconque de la courbe repéré par ses coordonnées (x,y) . A noter que x avant déroulement est la mesure d'un angle.

Avec les notations utilisées sur la figure

on a : $$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

soit : $$\boxed{\left(2 \sin\frac{x}{2} \right)^2 + y^2 = R^2}$$

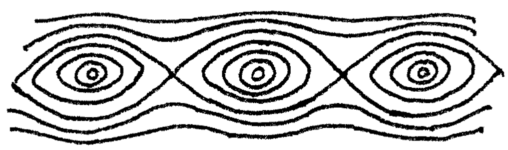


Ce n'est pas l'équation d'une ellipse. Cependant, si R est petit, x l'est également. Par suite $2 \sin \frac{x}{2} \simeq x$ et l'on trouve :

$$x^2 + y^2 \simeq R^2$$

Approximativement un cercle : C'est rassurant ! Mais une surprise nous attend lorsque $R = 2$. L'équation s'écrit alors : $y^2 = 4 - 4\sin^2 \frac{x}{2} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

L'ovale est devenu pointu ! Rigolo, non ? Ca me rappelle même une vieille connaissance d'autrefois : M. Viviani et sa fenêtre.



Jean-Marie BECKER

GÉNÉRATION D' ENTIERS NATURELS

Dans le numéro 8 de l'Ouvert vous posez la question "est-il possible de générer 7 en n'utilisant que les touches fonctionnelles d'une calculatrice de poche?"

Voici une solution :

<u>Principe</u> : $128 = 2^7 = e^{7\ln 2}$; $(128)^{1/\ln 2} = e^7$; $\ln e^7 = 7$

Voici la réalisation sur une calculatrice : On génère 2 , puis 256, puis 128, puis 7.

Touche	lecture	explication
10^x	1	
10^x	10	
x^2	100	on génère 2
log	2	
ln	0, 6931471	
1/x	1, 442695	je mets $\frac{1}{\ln 2}$ en mémoire
Mémoire 1		
1/x	0, 6931471	je reviens à 2
exp	2	
x^2	4	
x^2	16	
x^2	256	on généré 256 qui est mis en mémoire.
Mémoire 2		
....	2	je reviens à 2 par $\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }$
y^x	o, 6931471	
Mémoire 2	256	
=	1, 1579208 10^{77}	je calcule 2^{256} car e256 dépasse les capacités.
$\sqrt{\ }$	3, 4023236 10^{32}	
y^x	88, 722839	je calcule $(e^{128\ \ln 2})^{1/\ln 2}$ soit e^{128}
Mémoire 1	1, 442695	
=	3, 8877034	
ln	128	
y^x	4, 3520302	
Mémoire 1	1, 442695	$128^{1/\ln 2} = e^7$
=	1096, 6331	
ln	7	

Théoriquement il est possible de générer tout entier à l'aide des fonctions exp et x^2 et de deurs inverses. Si on génère $2^n = e^{n\text{Log}2}$ on peut trouver

$(2^n)^{1/\ln 2} = e^n$ d'où n . Le problème revient à générer 2^n pour tout n . Il est facile de générer 2^N où N est une puissance de 2. En prenant $\exp(2^N)$ puis la racine carrée, on trouve $\exp(2^{N-1})$, d'où par une récurrence descendante on peut montrer qu'on peut trouver tout entier de l'intervalle $[1 , N]$.

Cette méthode est difficilement applicable en principe car on dépasse très vite les capacités des calculatrices.

Bernard BROMBECK

LE JEU DE LA VIE

Un professeur du C.E.S. Gambetta de Riedisheim (dont le nom n'a pu être déchiffrer) nous signale avoir trouvé dans le numéro d'Avril 1976 de la "Recherche" un jeu très bizarre imaginé par un américain : Conway.

Le jeu de la vie se joue sur un réseau plan de carrés. chaque carré a huit voisins. Les régles sont les suivantes :

- Des ions sont placés de façon quelconque
- Tout pion qui a 2 ou 3 pions dans son voisinage reste en vie
- Tout pion qui a 4 pions ou plus dans son voisinage est retiré du jeu
- Tout pion qui a 0 ou 1 pion dans son voisinage meurt d'isolement
- Toute case qui avoisine trois case contenant des pions produit un pion.

Ce problème est très riche en possibilités. Le poser dans nos classes serait intéressant dans la mesure où les élèves n'hésitent pas à affronter des situations touffues.