Un livre : Histoire comparée des numérations écrites ; (par Geneviève Guitel)

Dès que les hommes ont su écrire, ils ont cherché à écrire les nombres, et de là à créer un système de numération. Pour que ce système de numération réussisse il fallait qu'il permette d'effectuer simplement et rapidement les opérations nécessaires à la vie économique de l'époque. D'autre part, les nombres ont permis de mesurer entre autre le temps et c'est souvent par ce biais que les différentes civilisations ont été amenées à représenter les grands nombres. Cette recherche a souvent débouché sur des impasses qui ont condamné le système utilisé ; le hasard, ailleurs, a permis d'excellentes trouvailles.

Dans une thése monumentale, oeuvre de toute une vie, Geneviève Guitel a réussi non seulement à décrire plus de vingt-cinq système de numération mais aussi à montrer que tous ces systèmes peuvent se classer en trois grands types qui chacun se subdivisent en deux ou trois sous-systèmes. Le mérite de l'auteur, c'est d'avoir construit ce classement à partir de quelques numérations connues et d'une réflexion théorique.

Considérons le polynôme ordonné :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_i x^i + \dots\dots\dots + a_o$$

Un tel polynôme peut-être considéré comme l'écriture d'un entier N dans la base x, à condition que les a_i vérifient :

$$0 \leq a_i < x$$

Pour écrire N plusieurs solutions s'offrent à nous :

I) Chaque x^i est représenté par un symbole qui est répété autant de fois que nécessaire, c'est-à-dire a_i fois. L'ordre des caractères est alors, en théorie, arbitraire. L'exemple classique est le système romain dans sa première acceptation :

M C C C X X X X I I

(Comme d'autres systèmes, il y a ici introduction de chiffres supplémentaires - diviseurs de la base - pour abréger l'écriture).

II) Chaque x^i est représenté par un symbole, ainsi que chaque a_i . L'exemple classique est la numération parlée qui est malheureusement entachée de nombreuses irrégularités dans la plus part des langues :

On devrait dire : un mille neuf cent sept dix sept

on dira : mille neuf cent septante sept

ou encore : mille neuf cent soixante dix sept.

Les chinois avec leur écriture idéographique ont généralisé ce système. Dans le tableau ci-dessous, la lecture se faisant de haut en bas, on lit dans la première colonne à gauche les dix premiers nombres. La deuxième colonne donne les nombres 100 , 1 000 , 10^4 et 10^8 successivement. Dans les trois autres colonnes, on lit respectivement : 3 468 ; 15 702 ; 860 531 ; ce dernier nombre est écrit $((8x10)+6)x10^4 + (5x100) + (3x10) + 1$.

一二三四五六七八九十	百千萬億	三千四百六十八	一萬五千七百二	八十六萬五百三十一

Dans ce sytème les chiffres sont partiellement libres ; il faut toujours regrouper les a_i avec les x^i correspondants.

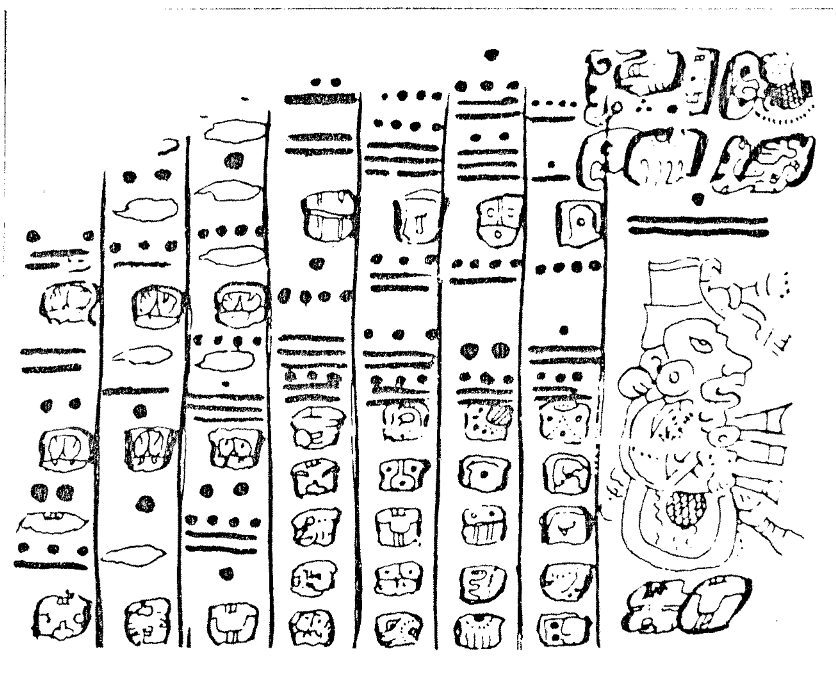
III) Dans ce dernier type de représentation, seuls les a_i admettent un symbole. Il y a donc x-1 symboles et les x^i sont représentés par la position des a_i . Il est alors nécessaire d'introduire un $x^{ième}$ chiffre (0) pour symboliser une case vide. C'est l'exemple donné par notre système de numération. Mais les mayas, les babyloniens, ... l'ont aussi utilisé avec des variantes.

Cette simplicité théorique cache un foisonnement de cas particuliers qui s'interpénètrent les uns les autres, masquant parfois la réalité du système. Car dans les premières civilisations, tous les systèmes de numération ont pour but de noter des nombres concrets, c'est-à-dire des nombres dont l'ordre de grandeur est connu. Il n'est donc pas toujours gênant d'utiliser le même symbolisme pour écrire 5 et 50 000 par exemple. D'autre part l'usage du système de numération n'est pas le même suivant la nature de ce que l'on mesure ; voir chez les romains l'écriture des sommes d'argent : HS III XII DC

qui veut dire 312 600 sesterces

N'est-on pas là à la limite d'une numération de position ?

Le calendrier a eu également une très forte influence sur la façon de compter et si la numération de base 60 a imposé une année de 360 jours chez les babyloniens, c'est l'année de 360 (+5) jours qui a imposé chez les mayas et les aztèques une irrégularité de taille dans l'écriture des nombres. En effet, ces deux peuples qui possédaient une numération orale très régulière de base 20 , ont introduit dans la numération écrite de position lea quantité 360 à la place de 400 (soit 20^2).



Dans la reproduction ci-contre, on lira les nombres de haut en bas. Les ovales correspondent à zéro, un point représente un et une barre cinq. (un chiffre est donc un assemblage de barres et de points à concurrence de 19, (20 - 1). Dans la 3º colonne à partir de la gauche (en bas) on lit le nombre : $2 \times 360 + 14 \times 20 + 1 = 1\,001$

Dans le tableau ci-dessous on a l'addition des nombres suivants : 131 040 + 15 600 + 3 900 + 780 = 151 320; En se souvenant que la troisième tranche représente seulement 360 , on pourrait transcrire ces nombres sous la forme :

18 . 04 . 00 . 00 +

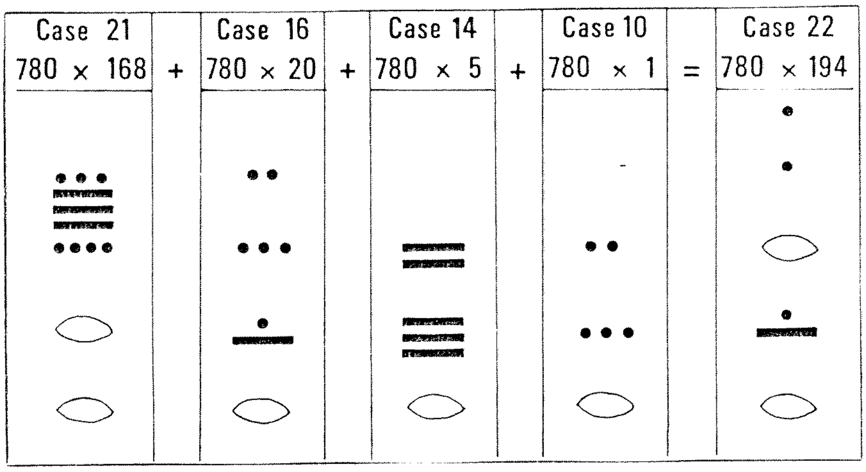
02 . 03 . 06 . 00 +

[redacted] 10 . 15 . 00 +

02 . 03 . 00 =

01 . 01 . 00 . 06 . 00

Ces deux exemples sont extraits du codex de Dresde.



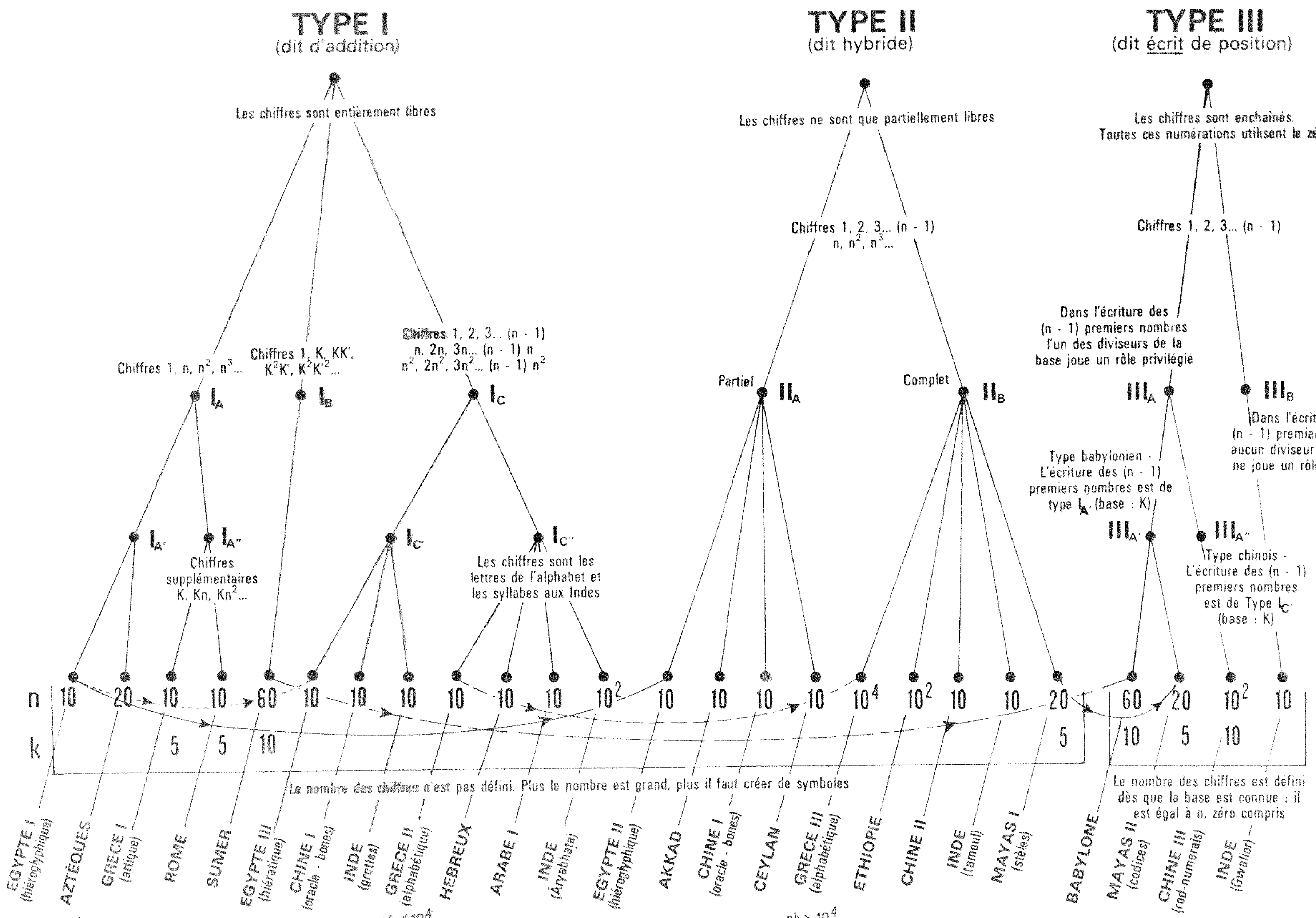
A partir de l'histoire des numérations, ce livre débouche sur bien d' autres sujets en rapport avec le calcul. L'auteur sait nous faire partager ses découvertes, sa progression, ses éspérances, ses erreurs. On y aborde :

- Les fractions egyptiennes : qui n'ont que des numérateurs égaux à 1 ; tout nombre fractionnaire inférieur à l'unité devant être décomposé en somme de fractions distinctes, ce qui amenait les égyptiens à faire des décompositions très compliqués. On lira avec intérêt l'étude théorique consacrée à ce sujet.
- Les lignes trigonométriques : que l'on peut faire remonter au cinquième ou sixième siècle de notre ère. Elles apparaissent sous forme d'une table de différence de nombres proportionnels aux sinus. Le coefficient de proportionnalité est 3438, c'est à-dire, à l'unité près, le nombre de minutes contenues dans un demi-cercle et divisé par pi. Les sinus sont donnés de 3º 45' en 3º 45' (ce qui prouve que la table a été obtenue à partir de l'hexagone inscrit en doublant quatre fois le nombre des côtés).
- Les équations diophantiennes : avec les calendriers religieux et civils mayas qui ont conduit les prêtres à de prodigieux calculs.
- Le système binaire : utilisé par les peseurs d'or africains. C'est le système qui permet de minimiser une boîte de poids, de même que le sytème ternaire en utilisant les deux côtés d'une balance. Cela fait comprendre le rôle important de 2 , 3 et 2x3 = 6 dans les numérations.
- Le calendrier :
- Les abaques et les bouliers : les méthodes de calcul sur ces instruments dans les différents pays et leurs rôles dans l'évolution de la numération.

....

On regrette que G. Guitel ne nous ait pas décrit d'avantage les diverses numérations parlée, ce qui nous aurait fait découvrir bien d'autres bases (2, 5, ...) ; qu'elle n'ait pas pu nous décrire le système des quipu incas, ... Mais le livre est déjà épais (850 pages, 73 tableaux, 50 planches .... et 190 F. ! édité chez Flammarion)? et nous ne pouvons qu'espérer qu'elle ou un successeur nous fournisse un jour quelques compléments à cet ouvrage appelé à faire date dans l'histoire des mathématiques. Elle même suggère de nombreux développements comme sur le calendrier ou sur les systèmes de poids et mesure, ...

La critique est aisée,... Puis-je cependant m'en permettre deux : La première à trait au tableau de classification de la page suivante. Quoi que l'auteur en dise, la distinction entre les cas I_B et $I_{A''}$ ne me semble pas nécessaire puisque ces deux cas sont mathématiquement isomorphes et qu'il ne différent que par le



LÉGENDE

n : est la base de la numération

K : est un diviseur privilégié de la base ; il peut jouer le rôle de base auxiliaire. On pose n = KK'

▶ : les flèches indiquent qu'une numération est passée d'un type à un autre type. On constate qu'il s'agit toujours d'une évolution à sens unique : les formes les plus primitives réussissent ainsi à atteindre les formes de grande qualité intellectuelle

TABLEAU 2

Classification hiérarchisée des numérations écrites

processus historique de formation, or tout un chapitre de l'ouvrage est consacré aux passages possibles d'un type à un autre, c'est donc à ce niveau qu'il eut fallu situer la distinction. La deuxième critique a trait au problème des ligatures qui apparaissent dans l'écriture des nombres chez les égyptiens et dans la première numération arabe. A mon avis les ligatures ne doivent pas gêner un arabisant qui analyse naturellement une ligature en ses composantes de même qu'un français reconnaît toutes les lettres aussi bien dans l'écriture de "longtemps" que dans celle de " longtemps". ". Bien que ce problème soit délicat, il ne mérite pas qu'on s'y attarde autant qu'elle le fait.

En conclusion, nous avons là un livre très lisible, dès la classe de seconde ou même avant, un livre passionnant que l'on lit quelquefois comme un roman policier, impatient de savoir comment telle civilisation saura résoudre les problèmes qu'elle se pose ! Un livre dont je ne saurait trop recommander la lecture à tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques et qui devrait, malgré son prix, apparaître rapidement dans les centres de documentation des lycées.

Une réforme de l'enseignement n'a de chances de modifier l'école que si les hommes - au-delà des textes rigoureux et ambitieux qui constituent leur feuille de route - sont aptes à maîtriser la réalité qu'ils ont en charge. Malheureusement, la formation des maîtres est toujours... la prochaine réforme. On aurait pu imaginer de commencer par là, mais cela aurait été une révolution trop profonde dans les moeurs de l'enseignement français, où la tradition veut que l'on se soucie d'abord de mettre au point de beaux textes et, sur le papier, de belles institutions.

Bruno Frappat
Le Monde du 8 janvier 77
L'école et l'égalité.

L'ouvert : Responsable de la publication :
Jean Lefort, 22 rue A. Schweitzer , Wintzenheim, 68000 COLMAR
Impression et secrétariat :
I.R.E.M. de Strasbourg , rue du Gl. Zimmer , Strasbourg.