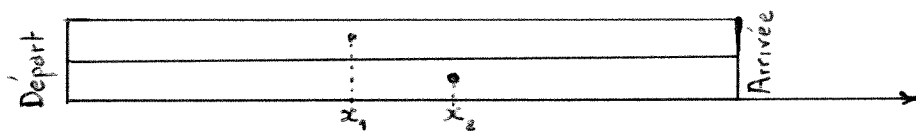


L'espace et ses transformations

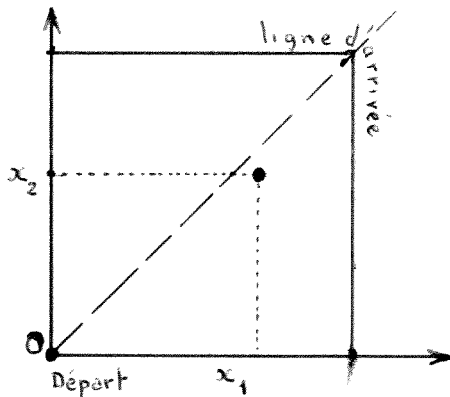
L'essentiel de cet exposé consiste à donner quelques exemples d'espaces vectoriels non géométriques.

A PROPOS DE LA REPRESENTATION

Considérons à titre d'exemple deux coureurs (1) et (2). On peut imaginer que ces deux coureurs sont sur deux couloirs d'une piste. On aurait alors la représentation suivante :

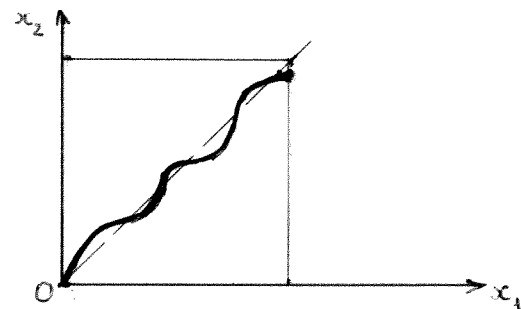
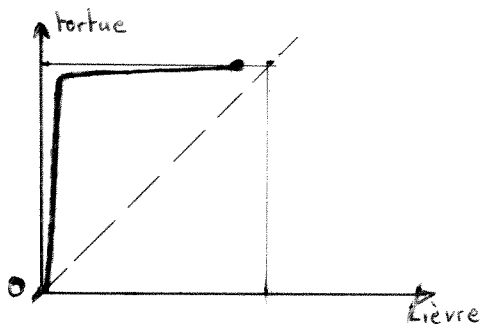


l'état de la course à un moment donné peut être caractérisé par un couple, élément de \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) . On peut aussi imaginer la représentation ci-après, plus traditionnelle, où le couple (x_1, x_2) est symbolisé par un point dans un repère orthonormé :



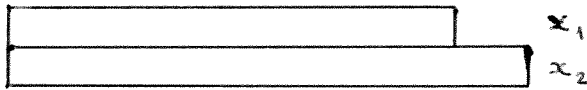
L'avantage de cette deuxième représentation est d'être dynamique en ce sens qu'elle permet d'appréhender l'évolution de la course dans sa totalité depuis le départ en 0 jusqu'à l'arrivée qui a la forme indiquée ci-contre. Les points de la diagonale caractérisent les instants où les deux coureurs sont exaequo. On peut ainsi faire imaginer et commenter

beaucoup de courses. Par exemple, la célèbre course du lièvre et de la tortue qui aura l'allure ci-dessous. Le 'point anguleux' correspondant en gros au moment où le lièvre se rend compte que les choses vont mal pour lui ! Quelle aubaine pour un com-



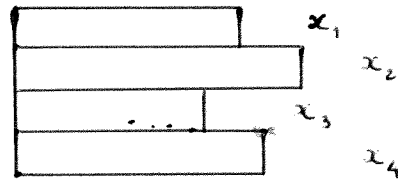
mentateur sportif que la deuxième course représentée ci-dessus.

Si maintenant nous revenons à la représentation plus statique donnée au début, elle est en général schématisée par :



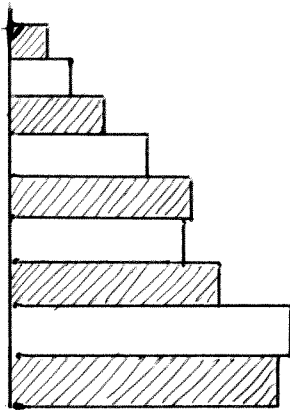
ce qui présente l'avantage de pouvoir se généraliser à une dimension quelconque.

Pour quatre coureurs on aurait le dessin ci-contre schématisant ainsi un point de \mathbb{R}^4 . Cette représentation est classique comme en témoigne l'utili-



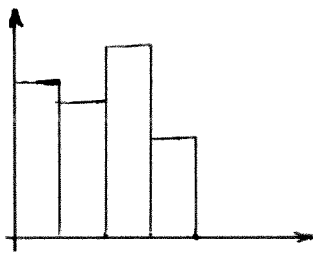
lisation des pyramides des âges. Un autre avantage, c'est de permettre de déboucher

sur des espaces vectoriels de dimensions infinies. Plus qu'un long discours, l'écriture suivante montre le passage de proche en proche par ce qu'on pourrait appeler un "glissement didactique" :

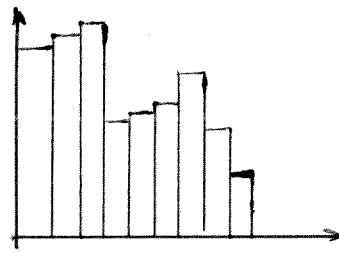


x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\dots
$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	\dots
$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	\dots
$f(x)$	$f(y)$	$f(z)$	\dots	\dots	\dots

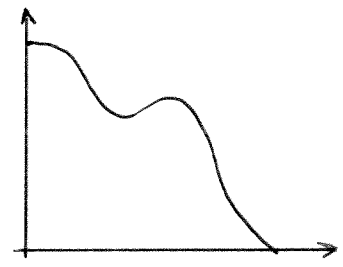
et au niveau des dessins, on est passé :



de \mathbb{R}^4



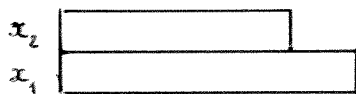
à \mathbb{R}^n



puis à \mathcal{C}

A PROPOS DES TRANSFORMATIONS

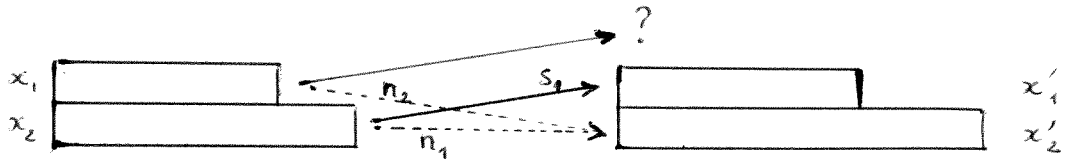
- (1) Reprenons l'exemple de la pyramide des âges mais dans un cas très simplifié, supposons qu'il n'y ait que deux classes : les jeunes et les vieux (ou les moins jeunes !) et pour être optimiste répartissons les deux classes en deux demi-siècles : 0 - 50 et 50 - 100 ans. Cherchons à représenter l'évolution de 50 en 50 ans ; initialement nous avons



et 50 ans plus tard

La période d'étude est donc, environ, une demi-vie. Etudions comment on obtient x'_1 et x'_2 à partir de x_1 et de x_2 .

x_1 donne x'_2 avec un certain pourcentage s_1 (taux de survie) ; x_2 lui ne donne rien (mortalité égale à 100 %). Quant à x'_1 il est engendré par x_1 et x_2



avec les taux de natalité respectifs n_1 et n_2 . Ces résultats peuvent s'interpréter matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

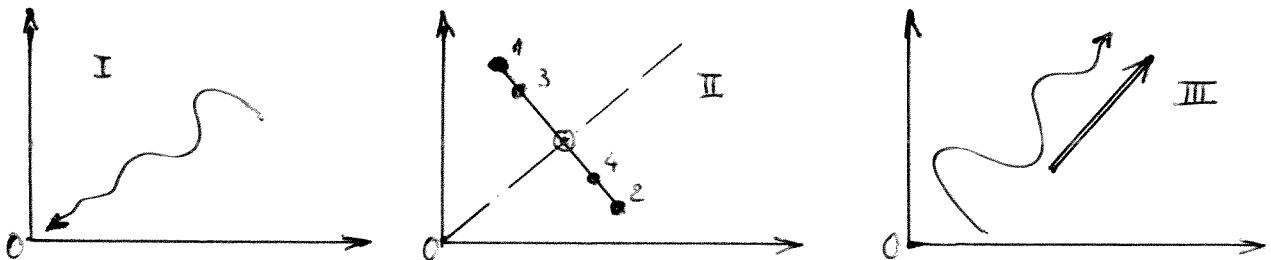
Soit :

$$\begin{cases} x'_1 = n_1 x_1 + n_2 x_2 \\ x'_2 = s_1 x_1 \end{cases}$$

Il est toujours intéressant, dès qu'on a ce genre d'étude, de disposer de données numériques pour voir ce qui se passe quand on itère le processus. Considérons à ce propos les trois exemples suivants :

$$\text{I} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{II} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{III} = \begin{pmatrix} 1,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

et reprenons ici l'idée de la représentation dynamique. En étudiant l'évolution sur quatre ou cinq périodes, on trouve l'allure des courbes suivantes :



toutes les trajectoires se terminent en 0.

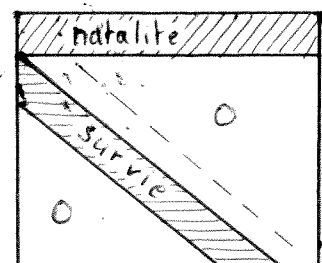
on tend vers un point situé sur la diagonale en oscillant de part et d'autre.

On s'éloigne indéfiniment dans une direction commune à toutes les trajectoires.

Aussi bien la représentation matricielle que la représentation statique initiale ne posent de difficultés quand on augmente le nombre de classe. Par exemple pour trois classe d'âge on aurait :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Et d'une façon générale, la matrice à l'allure :



(2) Prenons un deuxième exemple où on étudie le taux de répartition de la richesse dans la population en fonction du temps. On s'intéresse une fois encore à deux classes : les pauvres et les riches. Comme on le verra dans les quelques cas étudiés, il se pose un problème de définition du pauvre (et par conséquent du riche). Ce problème de mathématisation ne fera pas l'objet de notre propos.

En utilisant des notations naturelles : P , R , P' , R' il vient :

$$\begin{pmatrix} P' \\ R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 & 0,1 \\ 0,2 & 1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ R \end{pmatrix}$$

les nombres 1,3 et 1,2 représentent une sorte de natalité : taux de reproduction de la classe sociale ; au contraire, les nombres 0,1 et 0,2 sont des taux de transfert de classe.

La société idéale devrait avoir un tableau de la forme :

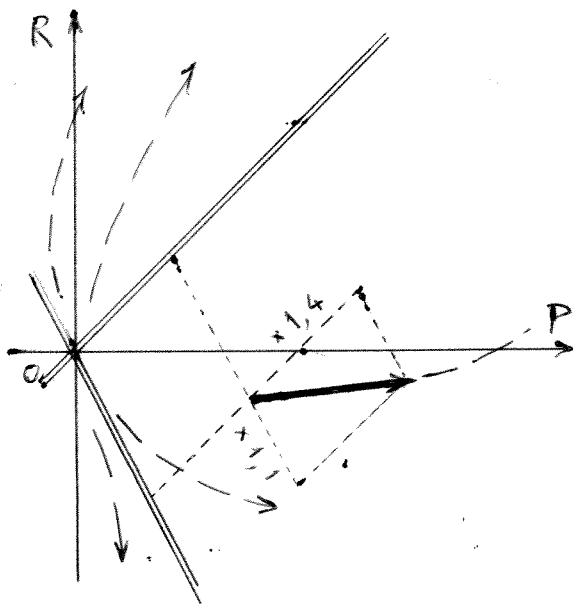
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ N & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } N \text{ très grand.}$$

Dans une société libérale il faudrait toujours avoir :

$$\begin{pmatrix} a & y \\ x & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } x \text{ beaucoup plus grand que } y .$$

dans ce cas là, au bout d'un certain temps il y aurait disparition complète de la classe des pauvres (!?).

En reprenant l'exemple numérique ci-dessus, on voit que P/R tend vers 1 au fur et à mesure des "générations". Plus exactement, si on fait P = R alors P' = R' = 1,4 P = 1,4 R . On a donc dans la direction (1;1) une progression géométrique de raison 1,4 .

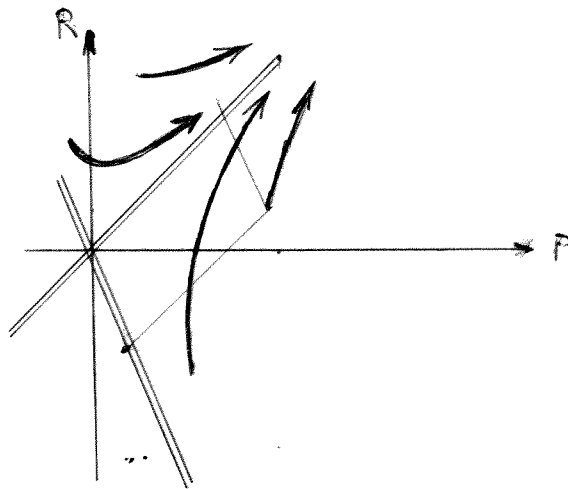


Imaginons maintenant que l'on sorte du premier quadrant en se mettant au point (1;-1). On aboutit alors au point (1,2;-1). De même en partant de (1;-2) on aboutit à (1,1;-2,2). Dans ce cas là encore, la direction est conservée et sur cette direction, on est multiplié par 1,1 . En décomposant maintenant un vecteur sur ces deux directions privilégiées (1;1) et (1;-2) on peut étudier l'allure des trajectoires comme ci-contre. On trouve des branches paraboliques.

Prenons un deuxième exemple numérique donné par le tableau :

$$\begin{pmatrix} 1,6 & 0,4 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$$

On vérifiera que les deux directions propres (directions privilégiées qui sont conservées par la transformation) sont $(1 ; 1)$ où l'on est multiplié par 2 et $(1 ; -2)$ où l'on est multiplié par 0,8 . Les trajectoires présentent cette fois ci des asymptotes. La société est un peu plus libérale !

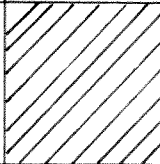
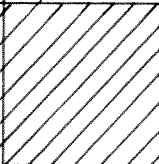
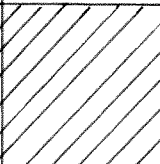
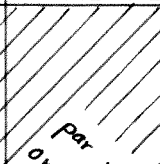
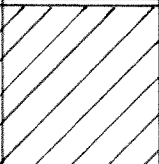
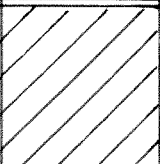
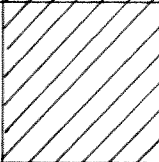
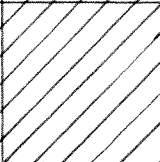
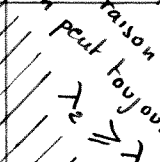
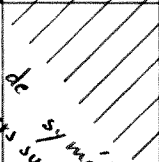
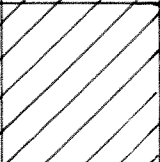
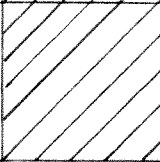
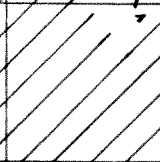
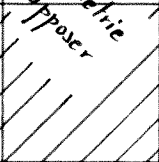
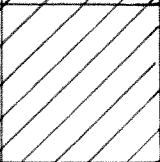
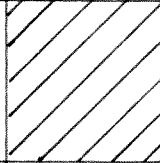
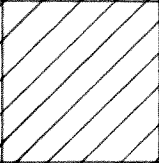
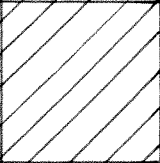
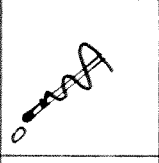
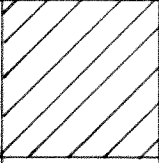
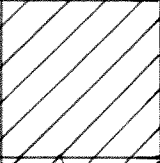
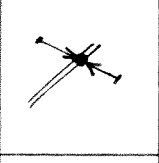
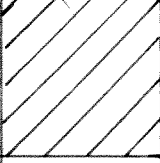
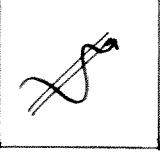
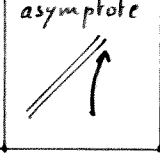
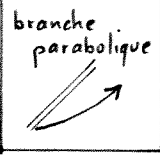


(3) On démontre que dans le cas général on trouve souvent deux directions privilégiées appelées directions propres sur lesquelles on est multiplié par des nombres λ_1 ou λ_2 (appelés valeurs propres). Ce qui importera pour l'étude des trajectoires, c'est la position respective de λ_1 et λ_2 par rapport à 1 . Celle qui comptera le plus étant bien entendu la plus forte.

Revenons aux exemples sur les taux de natalité :

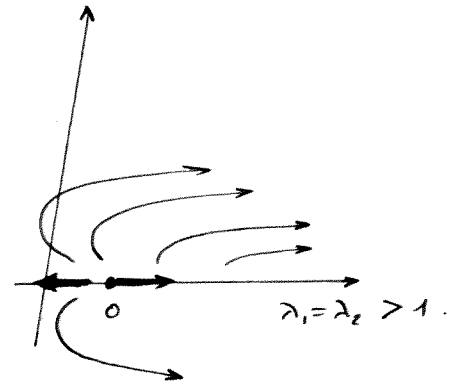
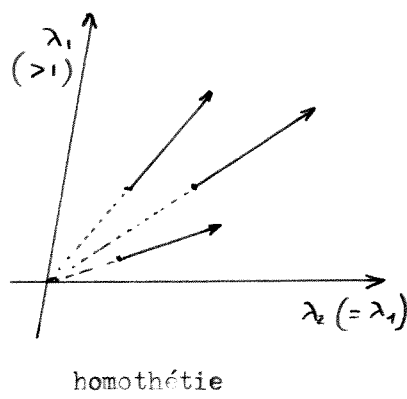
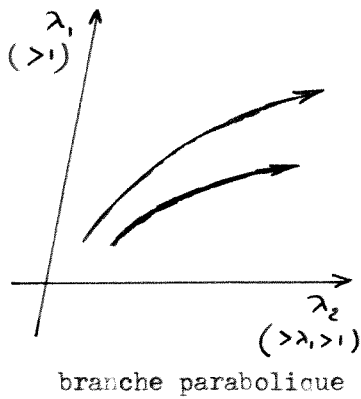
exemples	I		II		III	
directions propres	$(4, -3)$	$(1, 1)$	$(1, -2)$	$(5, 2)$	$(1, -5)$	$(5, 1)$
valeurs propres	-0,4	0,9	-0,2	1	-0,05	1,25
trajectoires						

Sans tenir compte d'une éventuelle interprétation en terme de population généralisons à ce qui se passe dans le plan tout entier. On peut établir le tableau suivant où quelques cas on été étudiés ci-dessus.

$\lambda_2 \backslash \lambda_1$	$\bullet < -1$	-1	$-1 < \bullet < 0$	0	$0 < \bullet < 1$	1	$1 < \bullet$
$\bullet < -1$	x						
-1		symétrie / origine					
$-1 < \bullet < 0$			x				
0				soit $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ soit $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$			
$0 < \bullet < 1$					x		
1						soit $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ soit $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$1 < \bullet$					asymptote 	affinité	branche parabolique 

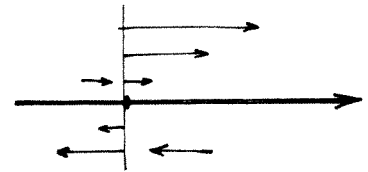
Il semble a priori qu'il y ait 28 cas à étudier ; mais il faut remarquer que sur la diagonale on peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$ dans quatre autres cas (marqués d'une croix) que ceux indiqués (-1 , 0 et 1). Ces quatre cas conduisent à des homothéties. On a donc 32 transformations normales à deux directions privilégiées dites transformations hyperboliques.

Il faut ajouter pour toutes les cases du tableau situées sur la diagonale les cas où il n'y a qu'une seule direction propre. Cela ne peut se produire que si $\lambda_1 = \lambda_2$. On a alors 7 transformations spéciales dites paraboliques. Par exemple dans la case en bas à droite du tableau il y a trois cas possibles :



ces trois figures ont été faites, rapportées aux directions propres.

De la même façon, la case correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ peut donner soit l'identité, soit la transformation symbolisée par le dessin ci-contre.



A ces 39 transformations, il faut ajouter celles qui ne possèdent pas de directions privilégiées. On les appelle elliptiques et elles sont au nombre de trois : Les rotations et les similitudes de rapport plus petit ou plus grand que 1. Les trajectoires ont les allures suivantes :



Il y a donc en tout 42 transformations. Cependant on peut inverser le sens des flèches ce qui revient à échanger le rôle du passé avec celui de l'avenir. Cela n'est possible que si les valeurs propres (les λ) sont tous les deux différents de 0. Alors il suffit de les remplacer par leurs inverses. On pourra chercher dans le tableau donné plus haut les cases que l'on peut ainsi apparier.

Deledicq
université de Paris VII