Amitié

La légende raconte qu'un jour se noua le dialogue suivant entre un disciple initié (*) et Pythagore :

- Maître ! Qu'est-ce que l'amitié ?
- L'amitié, c'est la relation qu'il y a entre les nombres 220 et 284 .
- ....! Mais qu'ont donc de si particulier ces deux nombres ?
- Si tu fais la somme des parties aliquotes (les diviseurs différents du nombre) de 220 alors tu obtiens 284 ; de même si tu fais la somme des parties aliquotes de 284, tu obtiens 220. Ainsi chacun des deux nombres a tout donné à l'autre pour se retrouver en lui. C'est cela l'amitié.

Cette leçon de morale de la part des pythagoriciens ne doit pas nous étonner, eux qui étaient avant tout des philosophes et qui n'étudiaient les nombres (et la géométrie) que pour en rechercher l'aspect mystique.

Etudions d'un peu plus près les nombres 220 et 284. Quand Pythagore parle de parties aliquotes, il faut comprendre les diviseurs sauf le nombre lui-même ; ainsi :

220 a pour parties aliquotes 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 11 , 20 , 22 , 44 , 55 , 110

et $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

de 284 a pour parties aliquotes 1 , 2 , 4 , 71 , 142

et $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

Appelons "amis" ou "amiables" deux tels nombres. On ne connait pas beaucoup de chose sur les nombres "amis". Le couple suivant est (10 744 , 10 856) , le suivant a été découvert par Fermat (toujours lui !) en 1636 et c'est (17 296 , 18416).

Par contre, on connait beaucoup plus de résultats sur les nombres, que l'on devrait qualifié d'"égocentristes" par opposition au précédents et que l'on qualifie de "parfaits", (le langage mathématique réserve, comme ça, des surprises), et qui sont tels qu'ils sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes.

Par exemples : $6 = 1 + 2 + 3$

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

. . . .

(*) Chez les pytagoriciens, il y avait deux classes de disciples : les "auditeurs", astreints au silence et les "initiés". Mais tous observaient une discipline très stricte (jeûnes, chasteté,...) qui s'apparentait à maintes pratiques religieuses.

Si on ne connaît pas tous les nombres parfaits, on peut en construire beaucoup. En effet, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors :

$$p = (2^n - 1).2^{n-1} \quad \text{est un nombre parfait.}$$

Car il est alors clair que les seuls diviseurs de p (distincts de p) sont, par ordre croissant :

$$1 , 2 , 2^2 , 2^3 , \dots , 2^{n-1} , (2^n - 1) , (2^n - 1).2 , (2^n - 1).2^2 , \dots , (2^n - 1).2^{n-2}$$

or : $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

et : $(2^n - 1) + (2^n - 1).2 + \dots + (2^n - 1).2^{n-2} = (2^n - 1)(2^{n-1} - 1)$

D'où le résultat.

Tout le problème revient à chercher les nombres premiers de la forme $2^n - 1$. (nombres de Mersenne). Les premières valeurs de n qui conviennent sont : 2 , 3 , 5 , 7 13 , ... qui correspondent aux nombres parfaits : 6 , 28 , 496 , 8128 , 33550336 , ...

On démontre, réciproquement que tous les nombres parfaits pairs sont de la forme ci-dessus. On ne sait rien sur les nombres parfaits impairs, même pas s'il en existe !

Jean Lefort

"L'OUVERT" : responsable de la publication : Jean Lefort
22 rue du Dr A. Schweitzer
WINTZENHEIM -- 68000 COLMAR

impression et secrétariat : I.R.E.M. de Strasbourg
10 rue du Gl Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX