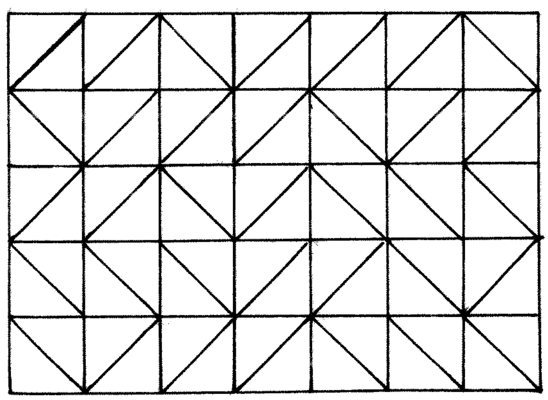
A propos de la couverture

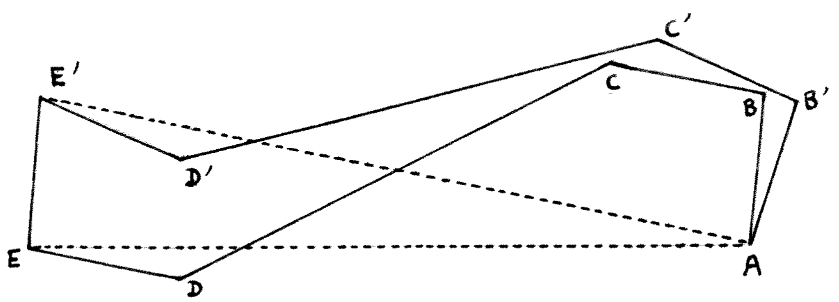
Le pavage du plan n'est pas un problème récent, et le touriste qui visite l'Alhambra à Grenade s'en convainct aisément. Le lecteur, dont les finances seraient mises à mal par un tel déplacement, peut se contenter de contempler les pages de "LE Monde de M.C. Escher" (aux éditions du chêne) qu'il trouvera à la bibliothèque de l'I.R.E.M..

Paver le plan consiste à le recouvrir tout entier, sans superposition ni vide à l'aide d'un même motif répété infiniment. On obtient ainsi un pavage régulier. En général on impose de plus que le pavage soit périodique, c'est-à-dire que l'ensemble des isométries qui font passer d'un pavé à un autre forme un groupe. On démontre que cela n'a lieu que pour 17 groupes, les motifs pouvant cependant être variés à l'infini.

Il est très facile de construire un pavage régulier non périodique, (celui qui pense en ce moment au dessin de couverture aura deux heures de colle !). Imaginons un damier surlequel on a tracé de façon aléatoire une diagonale pour chacun des carrés élémentaires (on aurait pu tout aussi bien prendre une médiane ...), nous voilà en présence d'un pavage régulier non périodique du plan par des triangles rectangles isocèles.



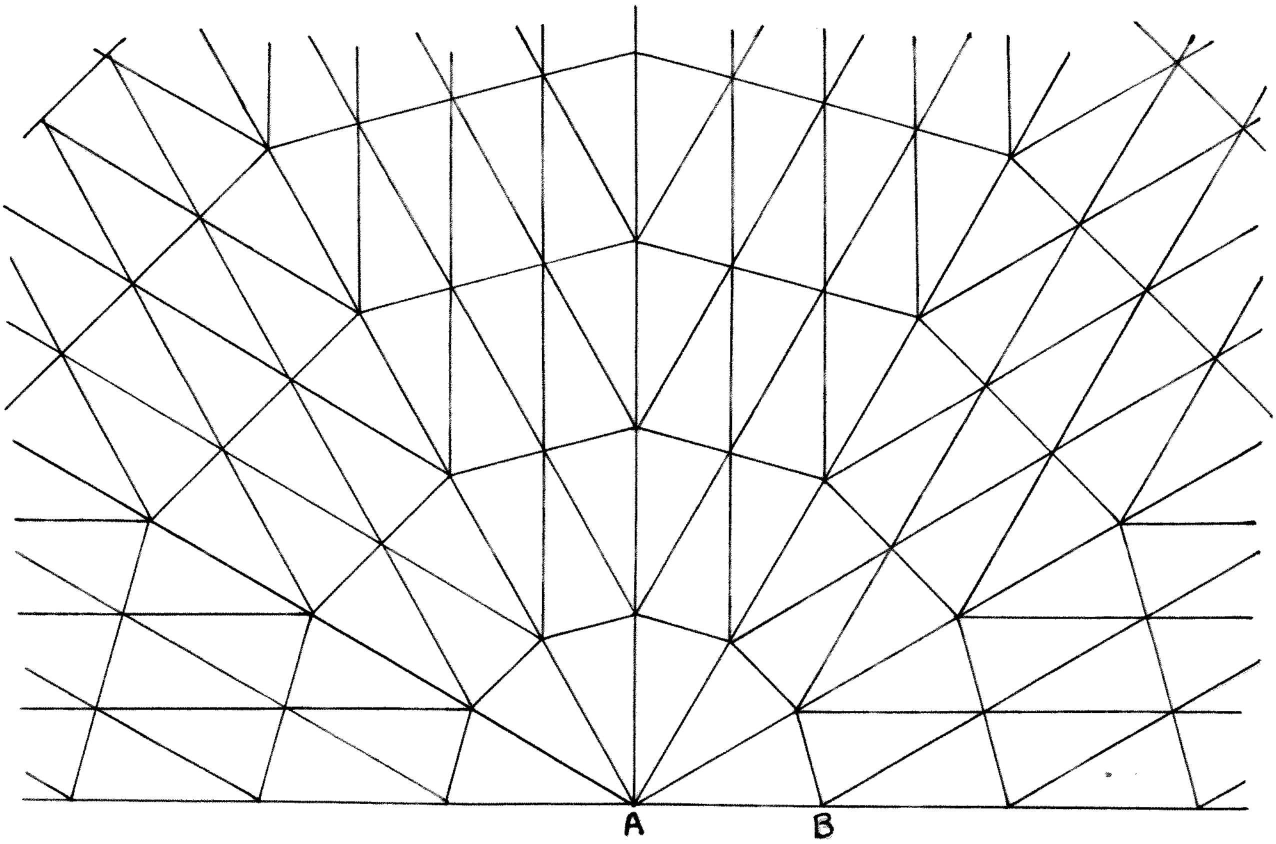
Si toutefois on estime peu intéressant ce genre de pavage, on pourra peut-être avoir plus de considération pour le dessin de couverture du à Vorderberg. Ce pavage est obtenu à l'aide d'un pavé polygonale à 9 côtés, pavé reproduit ci-dessous :



Les lignes ABCDE et AB'C'D'E' se déduisent l'une de l'autre par une rotation de $\pi / 15$. De plus, les segments AB, BC, DE et EE' sont isométriques et si on les prend pour unité alors la distance AE vaut $1/2\sin\frac{\pi}{30}$. Par ailleurs on a les égalités suivantes entre les angles :

$$\widehat{BAE} = \widehat{AB'C'} = \widehat{DEE'} = \frac{8\pi}{15} \qquad \widehat{EE'D'} = \frac{6\pi}{15} \qquad \widehat{CDE} = \widehat{BCD}$$

Ces données permettent de reconstruire la figure mais non de comprendre sa composition. Pour cela, nous envisagerons un dessin beaucoup plus simple obtenu à partir de dodécagônes concentriques.



Mieux qu'un long discours, la contemplation de la figure ci-dessus, représentant l'amorce du pavage d'un demi-plan, explique la méthode de construction. Pour paver le plan en entier, on peut bien sûr compléter par symétrie mais rien n'interdit de glisser les deux demi-plans l'un contre l'autre et d'amener A en coïncidence avec B. On obtiendra alors l'allure de spirale du dessin de couverture. Dans le cas de ce dernier il a été fait appel, non à un dodécagone, mais à un 30-gone. Toute la difficulté consiste ensuite à modifier le triangle isocèle de base pour que le pavage régulier subsiste. Ceci est l'oeuvre de l'artiste et Escher est là pour nous montrer que ce n'est pas le plus facile (voir, par exemple, sa célèbre frise des cavaliers).

Jean Lefort