

# Géométrie et statique

Tiens ! Si j'allais voir comment mes collègues de mécanique utilisent les vecteurs et la géométrie pour résoudre leurs problèmes de statique...

Et me voici plongé dans un cours de statique du solide : j'y retrouve l'histoire du torseur nul, mais oh surprise, j'y découvre une méthode graphique de résolution, justifiée par des considérations mécaniques. Je dégage l'aspect uniquement géométrique de cette méthode graphique et me voici devant de surprenants résultats géométriques que je m'efforce de démontrer ... géométriquement ... bien qu'ils le soient déjà mécaniquement ! Cela n'a pas toujours été tout seul, et bien souvent, je me suis aidé des considérations mécaniques pour deviner les démonstrations. Voici quelques uns de ces résultats : soit des théorèmes issus directement de la méthode graphique, soit quelques prolongements ou lemmes préliminaires de ces théorèmes.

La méthode graphique utilisée par nos collègues s'appelle : LA METHODE DU FUNICULAIRE.

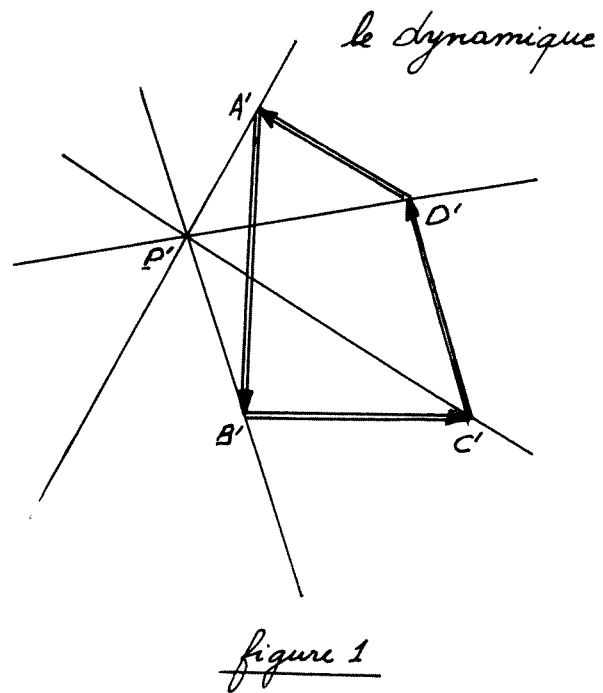
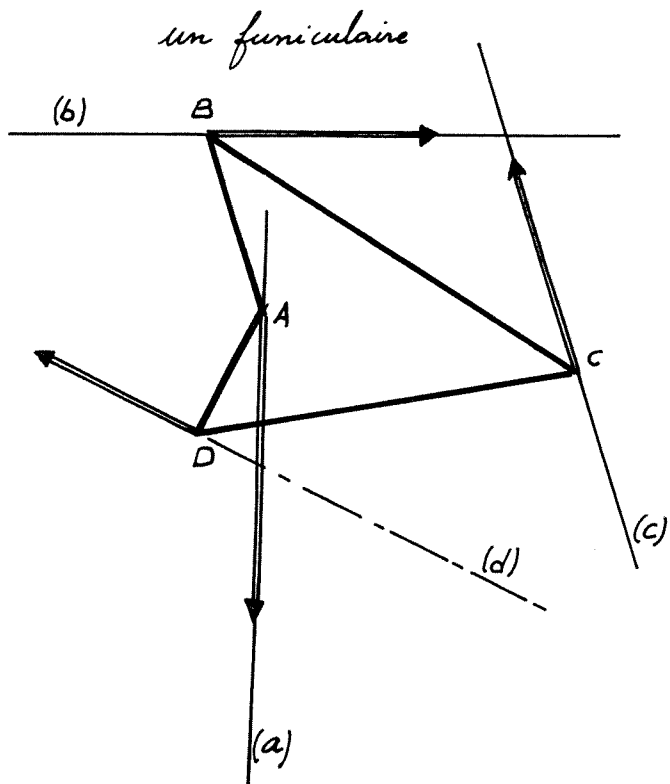
## I. LA METHODE DU FUNICULAIRE

Je l'expose ici dans le cas de quatre forces, mais elle est valable pour bien plus.

Soit donc un solide  $S$  à quatre forces dont je connais trois d'entre elles et je cherche la quatrième pour que  $S$  soit en équilibre.

Les forces connues sont données par leurs droites d'action et leurs vecteurs-forces (de même direction que la droite d'action) et je cherche la droite d'action et le vecteur-force de la quatrième force.

Pour le vecteur-force, pas de grand problème puisqu'on sait que la somme de tous les vecteurs-forces doit être nulle. Il suffit de construire la somme des trois premiers vecteurs et on aura le quatrième : c'est ce qu'on appelle construire le dynamique des forces (ou le polygone). Mais pour la droite d'action ? Voici comment on procède par la méthode du funiculaire (du latin funiculus : petite corde) : voir figure 1.



données :

- force  $\mathcal{F}_A$  : droite d'action : a ; vecteur-force  $\vec{F}_A$   
 force  $\mathcal{F}_B$  : droite d'action : b ; vecteur-force  $\vec{F}_B$   
 force  $\mathcal{F}_C$  : droite d'action : c ; vecteur-force  $\vec{F}_C$ .

Problème :

Trouver  $\mathcal{F}_D$  de droite d'action d et de vecteur-force  $\vec{F}_D$  tel que un solide, soumis aux forces extérieures  $\mathcal{F}_A$ ,  $\mathcal{F}_B$ ,  $\mathcal{F}_C$  et  $\mathcal{F}_D$  soit en équilibre.

Résolution graphique :

1° On construit le dynamique :  $A'B'C'D'$  tel que

$$\vec{F}_A = \vec{A'B'} ; \vec{F}_B = \vec{B'C'} ; \vec{F}_C = \vec{C'D'}$$

On en déduit  $\vec{F}_D$  :  $\vec{F}_D = \vec{D'A'}$ .

On en déduit également la direction de la droite d'action d : c'est celle de  $\vec{F}_D$ .

2° On construit le funiculaire :

a) On choisit un pôle,  $P'$  près du dynamique et on trace les droites  $(P'A')$ ,  $(P'B')$ ,  $(P'C')$ ,  $(P'D')$ .

b) On choisit un noeud du funiculaire : A sur a et on construit le funiculaire ABCD de la manière suivante :

on dessine la parallèle à  $(P'B')$  passant par A ; elle coupe b en B

on dessine la parallèle à  $(P'C')$  passant par B ; elle coupe c en C

on dessine la parallèle à  $(P'D')$  passant par C

on dessine la parallèle à  $(P'A')$  passant par A.

Ces deux dernières droites se coupent en D.

c) d, droite d'action de  $\mathcal{F}_D$  est alors la droite passant par D, de vecteur directeur  $\vec{F}_D$ .

Justification mécanique :

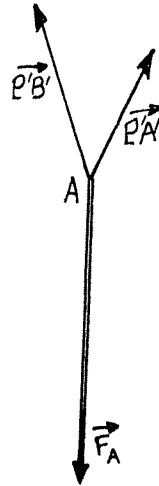
Considérons les barres  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$  rigides et articulées simplement en A, B, C et D.

\* Considérons le noeud A soumis aux trois forces extérieures appliquées en A :  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{B'P'}$ ,  $\vec{P'A'}$ .

Le noeud A est en équilibre

$$\text{puisque } \vec{P'A'} + \vec{F}_A + \vec{B'P'} = \vec{0}$$

$$\vec{P'A'} + \vec{A'B'} + \vec{B'P'} = \vec{0}$$



Procédons de manière analogue aux noeuds B, C et D.

Forces extérieures appliquées en B :  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{C'P'}$  et  $\vec{P'B'}$   
 en C :  $\vec{F}_C$ ,  $\vec{D'P'}$  et  $\vec{P'C'}$   
 en D :  $\vec{F}_D$ ,  $\vec{A'P'}$  et  $\vec{P'D'}$ .

\* Considérons maintenant la barre  $[AB]$  : elle est soumise aux deux seules forces extérieures :  $\vec{P'B'}$  =  $-\vec{B'P'}$  appliquée en A  
 $\vec{B'P'}$  =  $-\vec{P'B'}$  appliquée en B.

Elle est donc également en équilibre.

Procédons de manière analogue pour les barres  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$ .

Finalement chaque noeud et chaque barre est en équilibre : le système des barres articulées est donc en équilibre. Or l'ensemble des forces extérieures appliquées à ce système est :  $\mathcal{F}_A$ ,  $\mathcal{F}_B$ ,  $\mathcal{F}_C$ ,  $\mathcal{F}_D$ . Ce qui prouve que  $\mathcal{F}_D$  "équilibre" bien les trois forces  $\mathcal{F}_A$ ,  $\mathcal{F}_B$ ,  $\mathcal{F}_C$ .

Remarque cruciale :

Nous avons effectué deux choix pour construire notre funiculaire :

le pôle P' : point quelconque

le noeud A : point de la droite a.

Que se passe-t-il si nous changeons de pôle ? de premier noeud A ? Nous obtiendrons encore la solution  $\mathcal{F}_D$ . Ce qui prouve que l'ensemble des points D obtenu en changeant P' et A se trouve sur une droite, la droite d. En traduisant cette propriété en langage géométrique nous obtenons le théorème du funiculaire (voir ci-dessous).

La surprise continue :

Poursuivant ma lecture du cours de statique graphique j'y trouve le résultat suivant : les côtés homologues de deux funiculaires associés à la même situation de départ, se coupent en des points alignés (sur une droite appelée la droite des pivots).

Voici encore une source de théorème géométrique et cette fois-ci je suis vraiment poussé à en chercher une démonstration puisqu'aucune justification mécanique n'est fournie (voir figure 2).

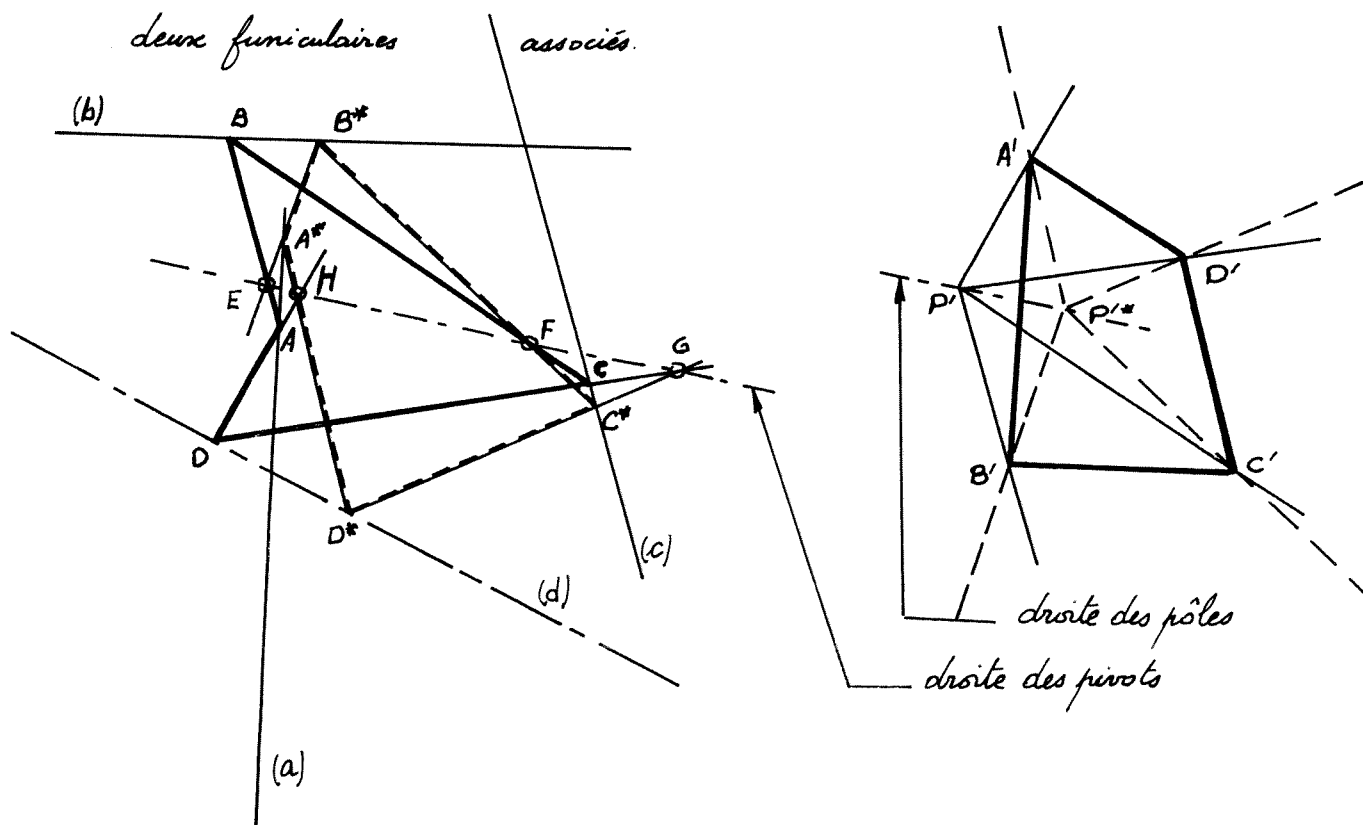


figure 2

II. LE THEOREME DU FUNICULAIRE A TROIS BARRES

① A la recherche du théorème et de son énoncé.

Appliquons la méthode du funiculaire dans le cas de trois forces dont deux sont connues (bien que nous connaissions le résultat : les trois forces doivent être concourrantes ; ceci détermine donc un point de support de la force inconnue).

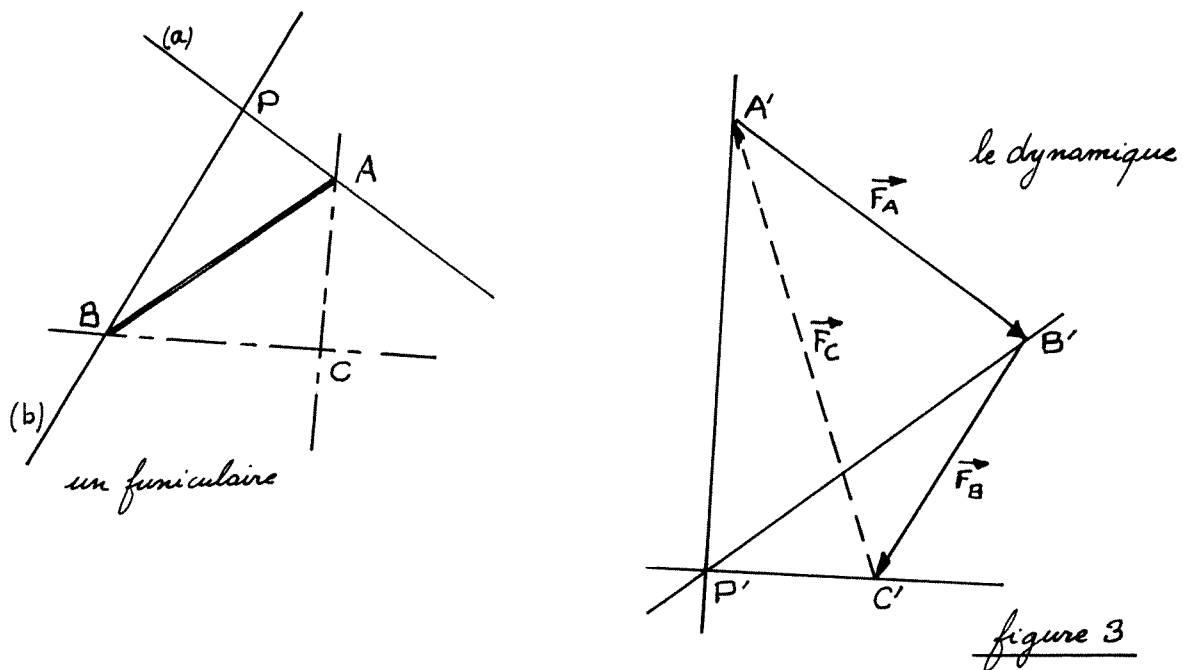
données :

- $\mathcal{F}_A$  de droite d'action a, de vecteur-force  $\vec{F}_A$
- $\mathcal{F}_B$  de droite d'action b, de vecteur-force  $\vec{F}_B$ .

problème :

Chercher  $\mathcal{F}_C$ .

résolution graphique : voir figure 3.



1° On construit  $A'B'C'$  tel que  $\vec{F}_A = \vec{A'B'}$  ;  $\vec{F}_B = \vec{B'C'}$ .

2° On choisit un point  $P'$  et on dessine les droites  $(P'A')$ ,  $(P'B')$ ,  $(P'C')$ .

3° On choisit un point  $A$  de  $(a)$  et on construit le funiculaire  
 .  $B$  sur  $(b)$  tel que  $(AB) \parallel (P'B')$   
 .  $C$  tel que  $(BC) \parallel (P'C')$  et  $(CA) \parallel (P'A')$ .

Résultat . On peut prendre pour  $\mathcal{F}_C$  la force appliquée en  $C$ , de vecteur-force  $\vec{F}_C = \vec{C'A'}$ .

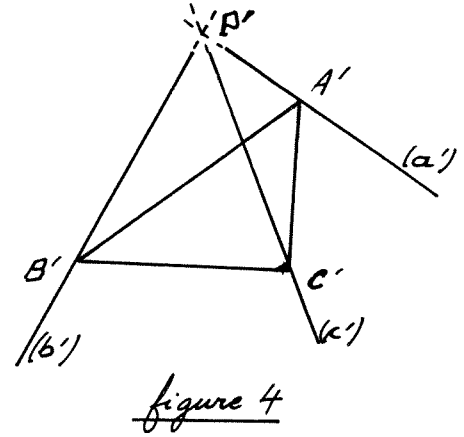
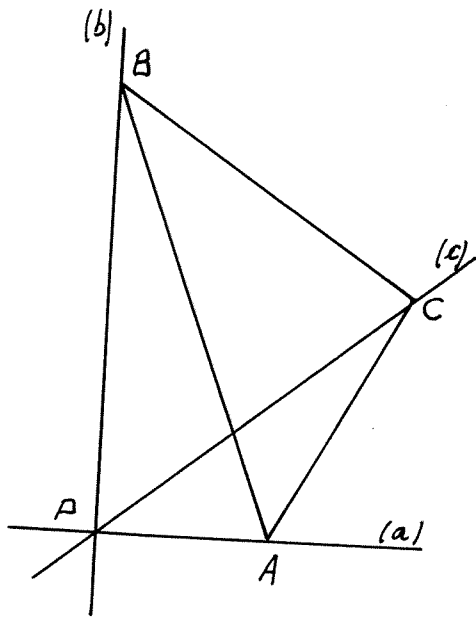
Supplément : 1° la droite  $(c)$  passant par  $C$ , de vecteur-directeur  $\vec{F}_C$ , passe par le point  $P$ , intersection des droites  $(a)$  et  $(b)$ .

2° l'ensemble des points  $C$  obtenu en prenant  $P'$  quelconque et  $A$  sur  $(a)$  est sur la droite  $(c)$ .

3° Soit  $(ABC)$  et  $(A^*B^*C^*)$  deux funiculaires liés aux choix  $(P', A)$  et  $(P^*, A^*)$  ; soit  $E, F, G$  les points d'intersection des côtés homologues des deux triangles  $(ABC)$  et  $(A^*B^*C^*)$  :  $E, F, G$  sont sur une même droite, parallèle à  $(P'P^*)$ .

② Théorème du funiculaire à 3 barres : voir figure 4. (Papus)

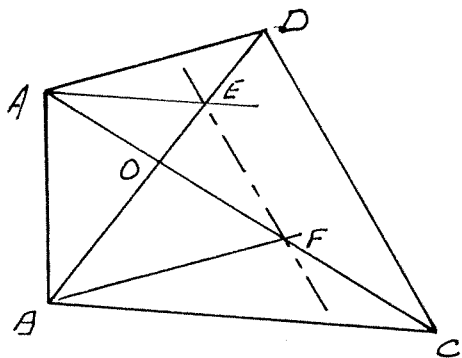
[c'est le supplément 1° présenté avec un changement de notation (pour rendre la suite plus agréable) et en mettant à droite ce qui était à gauche ...]



- Soit  $ABC$  un triangle. Soient  $a, b, c$ , trois droites concourantes en  $P$  telles que  $A \in a, B \in b, C \in c$ .
- Soit  $A'B'C'$  un triangle tel que  $(A'B') \parallel (c), (B'C') \parallel (a), (C'A') \parallel (b)$ .
- Soit  $a'$  la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A'$
- Soit  $b'$  la parallèle à  $(CA)$  passant par  $B'$
- Soit  $c'$  la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C'$ .
- Résultat : les trois droites  $(a'), (b'), (c')$  sont concourantes (en  $P'$ ).

③ Démonstration du théorème : c'est une conséquence du lemme suivant.

1° Enoncé du lemme (fondamental)



- Un quadrilatère  $ABCD$
- $E$  : point d'intersection de la diagonale  $(BD)$   
avec la parallèle au côté  $(BC)$  passant par  $A$
- $F$  : ...
- Résultat :  $(EF) \parallel (CD)$ .

2° Démonstration du lemme

Soit  $O = (AC) \cap (BD)$

Soit  $h_1$  l'homothétie de centre  $O$  telle que  $h_1(C) = A$ . On a donc  $h_1(B) = E$ .

Soit  $h_2$  l'homothétie de centre  $O$  telle que  $h_2(D) = B$ . On a donc  $h_2(A) = F$ .

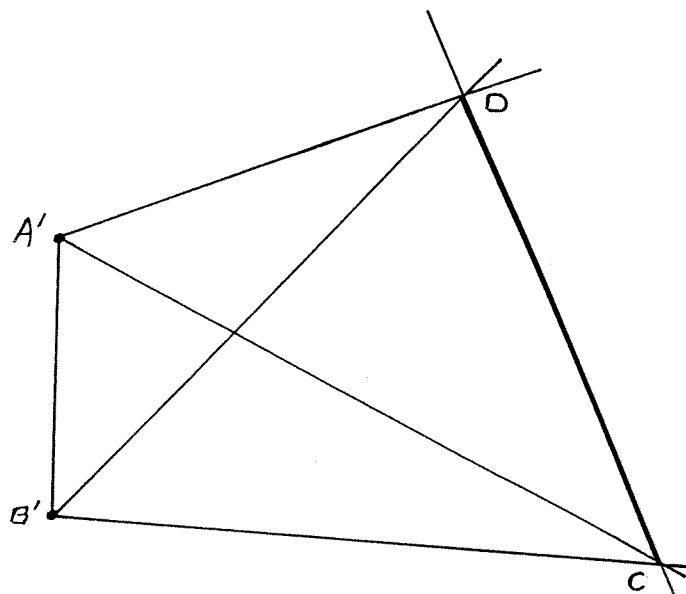
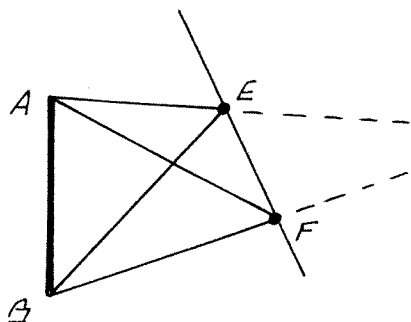
Posons  $h = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ . Alors  $h(C) = F$  et  $h(D) = E$ . Donc  $(CD) \parallel (EF)$ .  
 (Remarque : et si  $(BD) \parallel (AC)$  ? ou  $(BD) \parallel (BC)$  ? ...)

### 3° Eclatement du lemme

Il consiste à séparer la figure du lemme en deux morceaux, tout en conservant le parallélisme :

d'une part : AEFB

d'autre part : ADCB que l'on agrandit. Cela donne le lemme suivant :



hypothèse :  $(AB) \parallel (A'B')$  ;  $(AF) \parallel (A'C)$  ;  $(BE) \parallel (B'D)$  ;  $(AE) \parallel (B'C)$  et  
 $(BF) \parallel (A'D')$ .

conclusion :  $(EF) \parallel (DC)$ .

démonstration : par une translation ou une homothétie qui transforme  $(A', B')$  en  
 $(A, B)$ , la figure de droite vient se recoller à la figure de gauche  
 pour former celle du lemme.

Moyen visuel de reconnaissance de forme ... ou autre énoncé du lemme (éclaté)

|| Si deux quadrilatères ont trois de leurs côtés homologues parallèles, et  
 || si chacune de leurs diagonales est parallèle à la diagonale non homologue  
 || de l'autre quadrilatère, alors leurs quatrièmes côtés homologues sont parallèles.

### 4° Démonstration du théorème du funiculaire à 3 barres.

Voir figure 4.

Posons  $P' = (a') \cap (b')$

et démontrons que  $P' \in (C')$  en démontrant  $(P'C') \parallel (AB)$ .

Considérons les deux quadrilatères : APCB

et C'B'A'P'.

Ils ont trois côtés homologues parallèles :  $(AP) \parallel (C'B')$  ;  $(PC) \parallel (B'A')$  et  $(CB) \parallel (A'P')$ .

La diagonale  $(AC)$  est parallèle à la diagonale non homologue  $(B'P')$

La diagonale  $(PB)$  est parallèle à la diagonale non homologue  $(C'A')$ .

D'après le lemme éclaté, les quatrièmes côtés homologues sont parallèles (c.q.f.d.)

4° Où l'on trouve à nouveau le théorème de Désargues

Exploitions le supplément n° 3 de II (1) en construisant deux funiculaires associés à la même situation de départ. Cela donne l'énoncé géométrique suivant (voir figure 5) :

(a) (b) (c) trois droites concourrantes en P

$(A'B'C')$  un triangle dont les côtés sont parallèles à (c), (a) et (b).

A tout point de P' on associe le triangle ABC dont les sommets sont sur

(a) (b) (c) et dont les côtés sont parallèles à  $(P'C')$ ,  $(P'A')$  et  $(P'B')$ .

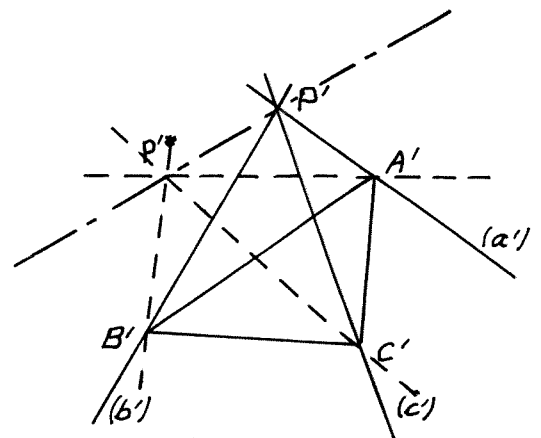
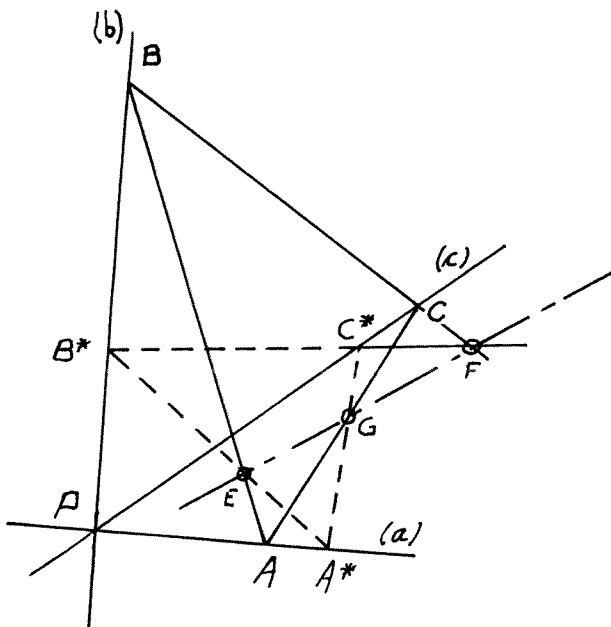


figure 5

Résultat : Soit  $(ABC)$  le triangle associé à  $P'^*$

Soit  $(A^*B^*C^*)$  le triangle associé à  $P^*$ .

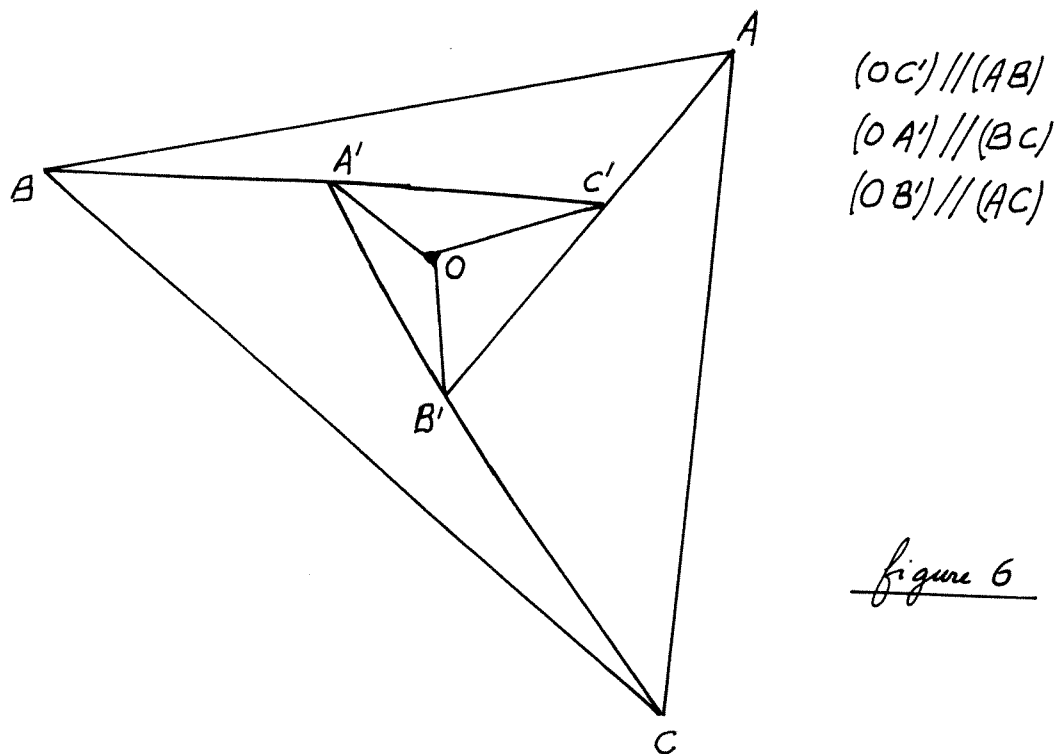
Les côtés homologues des triangles  $(ABC)$  et  $(A^*B^*C^*)$  se coupent en trois points alignés sur une droite parallèle à  $(P'P^*)$ .

Remarque : Les deux triangles  $ABC$  et  $A^*B^*C^*$  vérifient : les droites qui joignent les sommets homologues sont concourrantes. Le théorème de Desargues affirme que les côtés homologues se coupent en des points alignés. C'est la première partie de notre résultat.



Mais nous obtenons en plus une interprétation de la direction de la droite des points alignés : c'est la droite des pôles ( $P'P'^*$ ) (et ceci nous permettra de démontrer facilement une "généralisation" du théorème de Desargues).

Démonstration du théorème de Desargues complété : voir figure 5.



Considérons les quadrilatères  $EB^*BF$   
et  $P'^*C'A'P'$ .

Ils ont trois côtés homologues parallèles :  $(EB^*) \parallel (P'^*C')$  ;  $(B^*B) \parallel (C'A')$  ;  
 $(BF) \parallel (A'P')$ .

La diagonale  $(EB)$  est parallèle à l'autre diagonale  $(C'P')$ .

La diagonale  $(B^*F)$  est parallèle à l'autre diagonale  $(P'^*A')$ .

Donc, d'après le lemme éclaté :  $(EF) \parallel (P'P'^*)$ .

On démontrerait de manière analogue que  $(FG) \parallel (P'P'^*)$ .

D'où :  $(E, F, G)$  sont sur une même droite parallèle à  $(P'P'^*)$ .

### III. LE THEOREME DU FUNICULAIRE A n BARRES ( $n \geq 4$ )

Voir figure 2.

Moyennant un énoncé correct, il s'agit de démontrer que les points  $EFGH\dots$  sont alignés et que la droite  $(DD^*)$  est parallèle à  $(A'D')$ .

1° En considérant les quadrilatères  $EBB^*F$  et  $P'B'C'P'^*$  on démontre que  $(EF) \parallel P'P'^*$  ... d'où le résultat :  $EFG \dots$  sur une droite parallèle à la droite des pôles  $P'P'^*$ .

2° En considérant les quadrilatères DHGD\* et A'P'P'D' on démontre que (DD\*) // (A'D'). (Toujours avec le lemme éclaté.)

Remarque : 1° constitue une sorte de généralisation du théorème de Desargues.

#### IV. PROLONGEMENT AU THEOREME DU FUNICULAIRE A 3 BARRES

Reprenons la figure 4.

données : . Un triangle (ABC) dont les sommets sont sur trois droites

. concourrantes (a), (b), (c) (en P)

. un triangle (A'B'C') dont les côtés sont parallèles aux droites a, b, c.

((B'C') // (a) ; (C'A') // (b) et (A'B') // (c)).

théorème : 1° L'application affine g qui transforme (ABC) en (A'B'C') transforme la droite (a) en (a') : parallèle à (BC) passant par A'.

conséquence : les droites (a'), (b'), (c') sont concourrantes en P' = g(P) ((b') : parallèle à (AC) passant par B', (c') : parallèle à (AB) passant par C').

2° L'application affine  $g \circ g = g^2$  est une homothétie.

remarque : La partie 1° de ce théorème "contient" le théorème du funiculaire à 3 barres.

La partie 2° de ce théorème donne une illustration d'une transformation géométrique dont le carré est une homothétie. (Quelles sont donc toutes les transformations géométriques dont le carré est une homothétie donnée ?)

#### Démonstration du théorème

Les données du problème permettent d'affirmer l'existence de trois réels

$\alpha, \beta, \gamma$ , tels que  $\alpha \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{B'C'}$ ;  $\beta \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{C'A'}$  et  $\gamma \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{A'B'}$ .

Donc  $\alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{0}$ .

→ P est donc barycentre des points (A, B, C) affectés des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$

(tiens ! voici une méthode pour "mesurer" les coordonnées barycentriques d'un point dans un repère affine du plan).

→ P' est donc barycentre des points (A', B', C') affectés des coefficients ( $\alpha, \beta, \gamma$ )

d'où (en prenant "l'origine" en A') :  $(\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{A'P'} = \beta \overrightarrow{A'B'} + \gamma \overrightarrow{A'C'}$ .

Or  $\overrightarrow{A'B'} = \gamma \overrightarrow{PC}$  et  $\overrightarrow{A'C'} = \beta \overrightarrow{BP}$

d'où :  $(\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{A'P'} = \beta \gamma \overrightarrow{PC} + \gamma \beta \overrightarrow{BP}$   
 $= \beta \gamma \overrightarrow{BC}$ .

Ce qui prouve que (A'P') est parallèle à (BC) : (a') est la parallèle à (BC) passant par A'. c.q.f.d. pour 1°.

La démonstration de la partie 2° du théorème est laissée au lecteur ...

(le rapport de l'homothétie dont il est question est  $-\frac{\alpha\beta\delta}{\alpha+\beta+\delta}$ )

#### V. QUELQUES QUESTIONS :

- \* A quelles conditions deux triangles peuvent-ils être complétés en un funiculaire et son dynamique ?
- \* Quatre points peuvent-ils être les articulations d'un funiculaire ?
- \* Quatre droites peuvent-elles être les barres d'un funiculaire ?
- \* Peut-on toujours "inscrire" un triangle A'B'C' donné dans un triangle ABC donné ? (c'est-à-dire : construire un triangle A''B''C'' homothétique à A'B'C' tel que A'' ∈ (BC), B'' ∈ (CA) et C'' ∈ (BA))
- \* La figure 6 est impossible !

Etienne Meyer  
(LETP de Guebwiller)

Inutile de vous dire que je partage dans tout ceci les idées de "BOURBAKI". De façon plus détaillée voici mes points de vue. Puisqu'il s'agit d'esthétique, nous dirons qu'il y a des mathématiques nobles et des mathématiques serviles. Comment classer ? Il n'y a pas de vote. Les mathématiques, c'est une question d'aristocratie. Les bonnes mathématiques sont faites par très peu de gens (150 au 20e siècle au plus). Il y a une poignée de "leaders". Les bonnes orientations sont celles données par ces gens là : exemples : Riemann, Elie Cartan, Siegel ; au total 7 à 8 au 18e siècle ; 30 au 19e siècle ; 1 par an au 20e siècle. Une théorie noble est une théorie considérée comme bonne par ces mathématiciens ; l'opinion des autres est sans importance.

Que doivent faire les autres ? Ils doivent suivre, essayer d'avancer dans les voies nouvelles défrichées par les "génies". Il faut avoir une certaine humilité devant eux ; c'est la caractéristique essentielle d'un homme de science. Les génies sont en avance sur leur époque. Ceux qui suivent ont un rôle nullement négligeable : ils jouent le rôle de caisses de résonance. Les "suiveurs" doivent essayer d'expliquer, de vulgariser ce que les leaders n'ont pas pris la peine de développer. Ce métier de suiveur n'a rien de déshonorant. On a mis 100 ans pour pénétrer la pensée de Riemann et ceci a fortement fait avancer la connaissance mathématique. En même temps on a enrichi cette pensée et on lui a donné des bases solides.

Extrait du résumé d'une conférence prononcée par  
M. Dieudonné le 23-5-73 à Bordeaux sur l'orientation  
générale des mathématiques en 1973.  
in : Mathématiques, mathématiciens et société par  
P. Samuel (Publication mathématique d'Orsay).