

# La sphère chevelue

Considérons la sphère unité  $S$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire, relativement à un repère orthonormé, l'ensemble des points

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

On appelle champ de vecteur tangent à  $S$  toute application de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ , qui à chaque point  $M \in S$  fait correspondre un vecteur  $\vec{V}$  tangent à  $S$  en  $M$ , soit :

$$S \rightarrow (x, y, z) \mapsto \vec{V} = (u, v, w) \text{ avec } xu + yv + zw = 0$$

les notions de champ de vecteur continu, différentiable, sont intuitives.

Voici un célèbre théorème dû à H. Poincaré et Brouwer. Tout champ de vecteurs continu, tangent à  $S$ , s'annule en au moins un point.

Si l'on pense à  $S$  comme couverte d'une fine pellicule fluide, animée d'un mouvement permanent, la vitesse de la "molécule" passant à chaque instant au point  $M$  étant  $\vec{V}(M)$ , le théorème précédent signifie qu'il y a toujours, quelque part sur  $S$ , une "molécule" qui reste immobile (ceci quel que soit le mouvement envisagé).

Une autre façon de voir le problème est d'imaginer une sphère couverte de "cheveux" (d'où le titre de l'article) ; initialement la sphère est "hirsute" c'est-à-dire qu'en chaque point, le cheveu est normal à la sphère ; on essaye de "peigner" la sphère c'est-à-dire de disposer ces cheveux tangentiuellement. Le théorème précédent signifie que cette opération est impossible, sauf si l'on abandonne la continuité du peignage en certains points (au voisinage desquels le peignage pourra avoir l'allure d'un tourbillon par exemple).

Ce théorème est, historiquement, un des premiers résultats marquants de ce qu'on appelle la "théorie qualitative des équations différentielles", dont Poincaré est en fait le fondateur.

On connaît de nombreuses démonstrations de ce théorème, qui ressortissent toutes de la "topologie algébrique" (théorie dont Poincaré est également le fondateur).

John Milnor (un très fameux mathématicien américain, titulaire de la médaille Fields) provoqua une belle surprise en 1978 en proposant une nouvelle démonstration de ce théorème [1] ; cette preuve est entièrement différente de celles déjà connues ; elle est de plus parfaitement "diabolique". Exposons la sans plus attendre.

## 1. La démonstration de Milnor

On va démontrer en fait un résultat apparemment un peu moins fort :

Tout champ de vecteurs différentiable \*, tangent à  $S$ , s'annule en au moins un point.

La démonstration se fait par l'absurde :

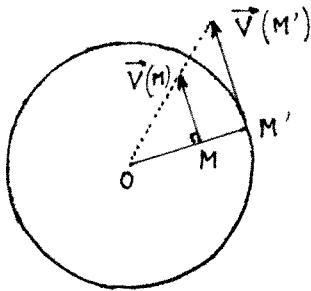
(\* ) voir page 15

1) Supposons que  $\vec{V}(M)$  soit un champ tangent à  $S$ , différentiable, avec  $\vec{V}(M) \neq 0$  quel que soit  $M \in S$ . Le champ  $M \mapsto \frac{\vec{V}(M)}{|\vec{V}(M)|}$  est alors de longueur 1 en tout point

( $|\vec{V}(M)| = \text{longueur de } \vec{V}(M)$ ), et tout aussi différentiable.

Ceci nous permet de supposer, dans la suite :  $|\vec{V}(M)| = 1$  pour tout  $M$ .

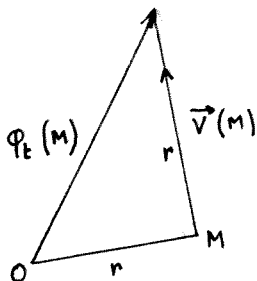
2) Prolongeons l'application  $\vec{V}$  à  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  en posant  $\vec{V}(M) = \lambda \vec{V}(M')$  où  $\lambda = \frac{OM}{OM'}$  et  $\vec{OM}' = \frac{OM}{OM}$ .



On dit qu'on a prolongé  $\vec{V}$  par "homothéties".

Le champ ainsi prolongé a la propriété suivante : soit  $S_r$  la sphère de rayon  $r$  (et toujours de centre  $O$ ) ; le long de  $S_r$ ,  $\vec{V}$  est tangent à  $S_r$ , et il y est de longueur constante égale à  $r$ .

3)



Soit  $t$  un nombre réel positif. Considérons l'application

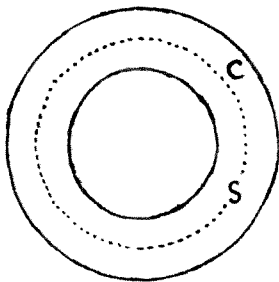
$$\Psi_t : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}.$$

$$\Psi_t(M) = \vec{OM} + t \vec{V}(M).$$

Remarquons que si  $OM = r$ , alors  $|\Psi_t(M)| = \sqrt{1+t^2} \cdot r$  (théorème de Pythagore). Nous traduirons ceci en disant que  $\Psi_t$  envoie la sphère de rayon  $r$  dans la sphère de rayon  $\sqrt{1+t^2} \cdot r$ .

Notez enfin que  $\Psi_0$  est l'application identique.

4) Je vous demande maintenant de vous concentrer sur une couronne  $C \subset \mathbb{R}^3$ , constituée des sphères concentriques à  $S$ , de rayon  $r$  compris entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{2}$ .



Essayez d'imaginer le transformé de  $C$  par  $\Psi_t$  (on posera  $C_t = \Psi_t(C)$ )

Pour  $t = 0$ , évidemment  $C_0 = C$  ( $\Psi_0$  est l'application identique).

Maintenant pour  $t \neq 0$ , mais assez petit, la transformation  $\Psi_t$  est très voisine de  $\Psi_0 = \text{identité}$  ; ceci permet de voir que  $\Psi_t$  transforme bijectivement chaque sphère  $S_r$

( $\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}$ ) en la sphère de rayon  $r \sqrt{1+t^2}$ , compte-tenu de la remarque faite en 3) ; la couronne  $C$  est donc transformée en la couronne  $C_t = \sqrt{1+t^2} \cdot C$  homothétique de  $C$  (mais  $\Psi_t : C \rightarrow C_t$  n'a aucune raison d'être elle-même une homothétie). Je viens en fait d'escamoter un raisonnement d'analyse qui suppose quelque familiarité avec la compacité, la connexité, et le théorème des fonctions implicites (ce qui fait quand même beaucoup !).

5) La fin arrive :

Nous allons nous intéresser maintenant à la fonction de  $t : t \mapsto \text{Volume de } C_t$  (pour  $t$  voisin de 0).

a) d'après le paragraphe précédent, comme  $C_t$  se déduit de  $C$  par une homothétie de rapport  $\sqrt{1+t^2}$ , son volume est le produit de celui de  $C$  par le cube du rapport d'homothétie (nous sommes dans  $\mathbb{R}^3$ ); donc :

$$\text{Vol}(C_t) = (1+t^2)^{3/2} \text{Vol}(C)$$

b) Mais nous avons une autre façon d'estimer le volume de  $C_t$ , en utilisant le théorème du changement de variables dans les intégrales triples; en posant :

$$\varphi_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = x + tu \\ Y = y + tv \\ Z = z + tw \end{cases}$$

on peut écrire :

$$\text{Vol } C_t = \int_{C_t} dX \cdot dY \cdot dZ = \int_{C_t} \text{Jac } \varphi_t \cdot dx \, dy \, dz \quad (1)$$

$$\text{où Jac } \varphi_t = \begin{vmatrix} 1+t \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & t \frac{\partial u}{\partial z} \\ t \frac{\partial v}{\partial x} & 1+t \frac{\partial v}{\partial y} & t \frac{\partial v}{\partial z} \\ t \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+t \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{est le déterminant jacobien de } \varphi_t$$

(voir au paragraphe suivant un bref commentaire intuitif sur cette formule).

Mais il est clair que  $\text{Jac } \varphi_t$  est de la forme :

$$\text{Jac } \varphi_t = \alpha(x,y,z) + t \beta(x,y,z) + t^2 \gamma(x,y,z) + t^3 \delta(x,y,z)$$

c'est-à-dire un polynôme en  $t$ , de degré 3.

Si on calcule l'intégrale (1), on obtient :

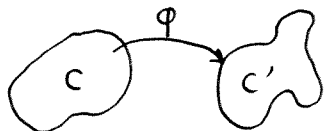
$$\text{Vol } C_t = a + bt + ct^2 + dt^3$$

où  $a, b, c, d$ , sont des constantes, intégrales de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sur  $C$ .

Si vous comparez les expressions encadrées de  $\text{Vol}(C_t)$ , vous voyez la contradiction : la fonction  $(1+t^2)^{3/2}$  ne peut être un polynôme en  $t$  ! C.Q.F.D. !!!

### Commentaire sur la formule du changement de variables.

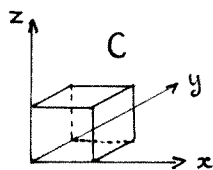
Soit  $\varphi : C \rightarrow C'$  une transformation bijective différentiable d'un domaine compact  $C$  de  $\mathbb{R}^3$  sur un autre domaine  $C'$ .



Cherchons à montrer que

$$(1) \quad \text{Vol}(C') = \int_C \text{Jac}(\varphi)$$

Supposons d'abord que  $C$  soit un très petit cube.



Considérons la transformation linéaire  $D \varphi(A)$  ( $A$  étant par exemple un sommet de notre cube) définie par la matrice des dérivées partielles de  $\varphi$  en  $A$ .

L'application  $D \varphi(A)$  transforme  $C$  en un parallélépipède de volume  $\equiv \det D \varphi(A) = \text{Jac } \varphi(A) \text{Vol}(C)$ , par définition du déterminant.

En utilisant la définition de la dérivée de  $\Psi$  en  $A$ , on voit facilement que  $\frac{\text{Vol}(C')}{\text{Vol}(C)} \rightarrow \text{Jac } \Psi(A)$  quand  $\text{Vol}(C) \rightarrow 0$ .

On en déduit la formule (1), pour un domaine  $C$  quelconque (compact) en le pavant par des cubes de plus en plus petits, et en appliquant à chacun d'eux la remarque précédente.

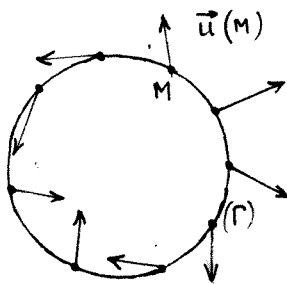
#### 4. Commentaires sur le théorème de Poincaré

Comme je l'ai dit plus haut, ce théorème a reçu de très nombreuses démonstrations ; un célèbre mathématicien a même pu donner un cours d'introduction à la topologie algébrique consistant essentiellement en l'exposé de ces multiples preuves (belle manifestation de pédagogie par l'exemple) : elles permettaient de faire le tour de la plupart des idées essentielles de la théorie.

Je vais donner succinctement le principe d'une autre démonstration de théorème de Poincaré ; elle m'a été communiquée par C. Godbillon.

##### 4.1. Nombre de rotation

Soit  $\vec{u}(M)$  un champ de vecteurs continu dans le plan euclidien, c'est donc une application qui à tout point  $M$  du plan associe un vecteur  $\vec{u}(M)$  du plan.

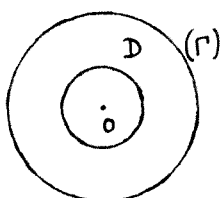


Soit  $\Gamma$  une courbe fermée du plan (par exemple, un cercle) ; on appelle nombre de rotation  $N(\vec{u}, \Gamma)$  de  $\vec{u}$  le long de  $\Gamma$  la variation angulaire totale de  $\vec{u}$  lorsque le point d'application  $M$  décrit  $\Gamma$  une fois. Dans l'exemple évoqué sur la figure ci-contre, ce nombre serait 2 : le vecteur  $\vec{u}$  fait 2 tours complets lorsque  $M$  décrit  $\Gamma$ . Ce nombre est, par définition, un entier relatif ; il n'est défini que si  $\vec{u}(M)$  est non

nul en tout point de  $\Gamma$ . Si l'on "déforme continûment" une courbe  $\Gamma$ , sans passer par un zéro de  $\vec{u}$ , le nombre de rotation ne peut changer : en effet, il est clairement fonction continue de  $\Gamma$ , et donc constant puisqu'à valeurs entières.

Lemme 1. Soit  $\vec{u}$  un champ de vecteurs dans le plan, non nul en tout point d'un disque  $D$ . Alors le nombre de rotation de  $\vec{u}$  le long du cercle  $\Gamma$  bord de  $D$  est nul.

Démonstration.



D'après la remarque précédente,  $N(\vec{u}, \Gamma) = N(\vec{u}, \Gamma_r)$  où  $\Gamma_r$  est le cercle de centre  $O$  ( $O =$  centre de  $D$ ) et de rayon  $r <$  rayon de  $D$ .

Pour  $r$  très petit,  $\vec{u}$  est presque constant sur le disque de centre  $O$  et de rayon  $r$  ; son nombre de rotation est donc nul sur  $\Gamma_r$ .

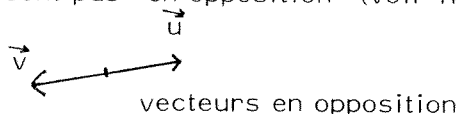
Maintenant, soit  $\Gamma$  une courbe fermée fixe. Si l'on déforme continûment un champ de vecteurs  $\vec{u}$ , de façon qu'il ne s'annule jamais sur  $\Gamma$ , le nombre  $N(\vec{u}, \Gamma)$  reste fixe pendant la déformation (même argument qu'auparavant).

Ceci est la clef du

Lemme 2. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux champs de vecteurs, et  $\Gamma$  une courbe fermée. Supposons que

a)  $\vec{u}(M)$  et  $\vec{v}(M) \neq 0$  en tout point de  $\Gamma$

b) pour tout  $M \in \Gamma$ ,  $\vec{u}(M)$  et  $\vec{v}(M)$  ne sont pas "en opposition" (voir figure)



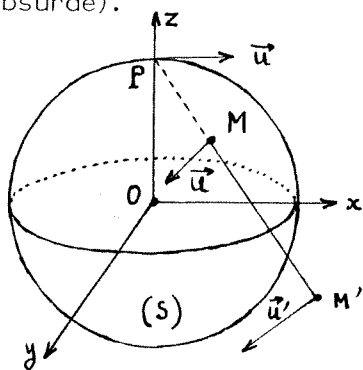
Alors  $N(\vec{u}, \Gamma) = N(\vec{v}, \Gamma)$ .

Démonstration

Soit, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $\vec{u}_t = (1 - t)\vec{u} + t\vec{v}$ ; ce champ dépend continûment du paramètre  $t$ , et, d'après les hypothèses faites, il ne s'annule jamais sur  $\Gamma$ . Comme  $\vec{u}_0 = \vec{u}$  et  $\vec{u}_1 = \vec{v}$ , le résultat est établi.

4.2. Application à la démonstration du théorème de Poincaré

Cette démonstration sera directe (au contraire de celle de Milnor, qui se faisait par l'absurde).



Soit un champ de vecteurs quelconque tangent à  $S$ ; on ne restreint pas la généralité de l'étude en supposant qu'au pôle  $P(0,0,1)$  de la sphère,  $\vec{u}(P) = (1,0,0)$ . On considère la projection stéréographique de  $S$  sur le plan "équatorial"  $xOy$ , avec  $P$  comme point de vue (voir figure); le champ  $\vec{u}$  se projette en un champ  $\vec{u}'$  défini dans tout le plan. Soit un cercle de très grand rayon de ce plan, centré en  $O$ ; il est clair que  $\vec{u}'$  est non nul en chaque point de  $\Gamma$ .

Lemme 3. Si  $\Gamma$  est assez grand,  $N(\vec{u}', \Gamma) = 2$ .

D'après le lemme 1,  $\vec{u}'$  s'annule forcément dans le disque limité par  $\Gamma$ ; donc  $\vec{u}$  s'annule sur  $S$ . Ceci achève la démonstration du théorème.

Démonstration du lemme 3

a) Considérons d'abord le champ de vecteurs particulier

$$\vec{u}_0 = (1 - x^2, -xy, -xz)$$

il est bien tangent à la sphère, car :

$$\vec{OM} \cdot \vec{u}_0 = x(1 - x^2) - xy^2 - xz^2 = x(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$$

sur  $S$ . Au pôle  $P(0,0,1)$  sa valeur est

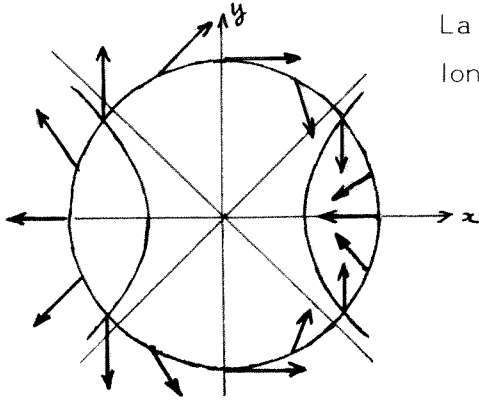
$$\vec{u}_0(P) = (1, 0, 0).$$

Un petit calcul facile montre que sa projection stéréographique est le champ :

$$\vec{u}'_0 = \left[ \frac{1}{2}(1 - x^2 + y^2), -xy \right]$$

(ce champ s'annule aux points  $(1,0)$  et  $(-1,0)$ )

Calculons le nombre de rotation de  $\vec{u}'_0$  le long d'un cercle  $\Gamma$  de rayon  $R > 1$ .



La figure ci-contre montre le comportement de  $\vec{u}'_0$  le long de  $\Gamma$ . Il est clair que

$$N(\vec{u}'_0, \Gamma) = 2.$$

b) Revenons à notre champ quelconque  $\vec{u}$  de départ ; comme  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_0$  ont même valeur en  $P$ , ils restent voisins dans un voisinage de  $P$ . Ils ne peuvent donc être en opposition dans ce voisinage.

Le lemme 2 assure donc que si  $\Gamma$  est de rayon assez grand, les nombres de rotation de  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'_0$  le long de  $\Gamma$  seront les mêmes ; ceci achève la démonstration.

- [1] Référence : J. MILNOR. Analytic proofs of the "Hairy Ball Theorem and the Brouwer fixed point theorem" – American math. Monthly, Vol. 85, 7(1978) – pp. 521–524.

J. MARTINET

(\*) La restriction n'est qu'apparente ; rappelez-vous que toute fonction continue peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une fonction différentiable. Ainsi, si  $S$  admettait un champ continu sans zéro, elle admettrait aussi un champ différentiable sans zéro.