

$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$ est irrationnel

Depuis Euler qui avait calculé les valeurs de $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, bien des gens se sont attaqués, sans succès, au problème du calcul de la somme des puissances impaires des entiers $\left(\zeta(2k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} \right)$, et ce n'est pas sans scepticisme que les spécialistes accueillirent les rumeurs selon lesquelles R. Apéry avait démontré l'irrationalité de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, d'autant plus que la personnalité originale de R. Apéry laissait à penser à un canular. Cette appréhension sembla fondée aux participants des journées arithmétiques de Luminy quant Apéry présenta sa démonstration en écrivant au tableau une suite infinie de termes tous infinis. C'était provoquer délibérément le chahut de l'assistance en reprenant une écriture très prisée d'Euler mais qu'aucun mathématicien actuel, même le moins rigoureux ne peut accepter. Et pourtant !... Il avait trouvé l'essentiel de la démonstration qui fut mise en forme par d'autres comme Cohen, Van der Poorten ...

M. Mignotte présente ici, après un rappel sur la fonction ζ et sur les techniques relatives à l'irrationalité, les principales étapes conduisant au résultat sur $\zeta(3)$.

L'OUVERT

I. Quelques formules sur la fonction ζ de Riemann

Pour $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

D'où, en particulier,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

D'autre part, la définition précédente de ζ est valable pour s complexe vérifiant $\text{Re}(s) > 1$. En comparant la série définissant ζ avec l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s}$ on voit que la fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est prolongeable en une fonction holomorphe pour $\text{Re}(s) > 0$.

Riemann a démontré la célèbre équation fonctionnelle de ζ que l'on peut exprimer ainsi :

la fonction

$$\zeta(s) = \frac{s(1-s)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s)$$

est une fonction entière invariante par la transformation $s \mapsto 1-s$, Γ désignant la fonction d'Euler (prolongeant la notion de factorielle : $\Gamma(n) = (n-1)!$).

On définit les nombres de Bernouilli par la formule

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!},$$

ainsi

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & , & & B_1 &= -1/2 \\ B_2 &= 1/6 & , & & B_3 &= 0 \\ B_4 &= -1/30 & , & & B_5 &= 0 \dots \end{aligned}$$

On démontre que ζ vérifie, pour $n \gg 0$,

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \quad (=0 \text{ si } n = -2, -4, -6, \dots)$$

Grâce à l'équation fonctionnelle, on en déduit

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2 \cdot (2n)!},$$

ainsi

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \dots,$$

ce qui montre que $\zeta(2), \zeta(4) \dots$ sont des nombres transcendants.

Malheureusement cette technique ne fournit aucune information sur les valeurs de ζ aux entiers positifs impairs : pour étudier $\zeta(2n+1)$ on aboutit à $\zeta(-2n) = 0$ tandis que $\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ a un pôle pour $x = -2n$.

Remarques

1. En plus des zéros "triviaux" $-2, -4, \dots$ on sait que la fonction ζ possède une infinité de zéros dans la bande $0 < \text{Re}(s) < 1$. L'hypothèse de Riemann, non démontrée à ce jour, affirme que ces zéros sont sur la droite $\text{Re}(s) = 1/2$.

2. Si on note d_n le p.p.c.m. des entiers $1, 2, \dots, n$ le fait que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\text{Re}(s) = 1$ permet de démontrer l'estimation

$$\text{Log } d_n \sim n.$$

11. Remarques générales sur l'irrationalité

Pour démontrer l'irrationalité d'un nombre, il faut en trouver une "bonne" définition.

Par exemple, si on pose

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

on ne sait pas utiliser directement cette formule pour démontrer l'irrationalité de e .

Autre exemple, on ignore si la constante d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

est irrationnelle ou non.

Le résultat très simple suivant caractérise les nombres rationnels

CRITERE DE RATIONALITE : soit ξ un nombre réel, on a

$$\xi \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ tel que } p/q \neq \xi \text{ implique } \left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q}.$$

c ne dépend que de ξ

Preuve :

\Rightarrow Si $\xi = a/b$ et $p/q \neq \xi$, on a

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1/b}{q}.$$

\Leftarrow Lorsque ξ est irrationnel on sait même (par la théorie des fractions continues ou grâce au principe des tiroirs de Dirichlet) qu'il existe une infinité de rationnels p/q tels que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Appliquons ce résultat au nombre e . On connaît la formule

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots;$$

elle conduit à l'estimation

$$0 < \left| e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!},$$

où le nombre entre parenthèses est un rationnel qui admet $n!$ comme dénominateur et dont le numérateur sera noté a_n . On a donc

$$0 < \left| e - \frac{a_n}{n!} \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!},$$

ce qui permet d'appliquer le critère et donc de prouver l'irrationalité de e .

Sachant qu'un nombre ξ est irrationnel il est très intéressant de déterminer une fonction f telle que pour tout rationnel p/q on ait

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > f(q),$$

une telle fonction est appelée une mesure d'irrationalité, elle vérifie nécessairement $f(q) \ll q^{-2}$.

Considérons à nouveau le nombre e , et un rationnel p/q quelconque, $q > 0$. Pour tout entier n , avec les notations ci-dessus, on a

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| \geq \left| \frac{a_n}{n!} - \frac{p}{q} \right| - \left| e - \frac{a_n}{n!} \right| > \left| \frac{a_n}{n!} - \frac{p}{q} \right| - \frac{1}{n \cdot n!},$$

si $a_n/n! \neq p/q$ ceci implique

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q \cdot n!} - \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Prenons $n = q + 1$ ou $q + 2$, afin que la condition $a_n/n! \neq p/q$ soit réalisée, on obtient :

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \frac{2}{(q+1)^2 \cdot (q+2)!}.$$

Cette estimation est très médiocre ! On sait que e possède le développement en fraction continue suivant

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots],$$

ce qui signifie que

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

et on en déduit (exercice de calcul assez pénible) qu'il existe une constante positive c telle que

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > c \frac{\text{Log Log } q}{q^2 \text{ Log } q},$$

résultat optimal en ce sens que cette inégalité est fautive pour $c < 1/2$.

En conclusion, pour obtenir une bonne mesure d'irrationalité il faut posséder une "très bonne" formule définissant le nombre considéré.

Par exemple, on ne connaît pas la meilleure mesure d'irrationalité de π .

III. La démonstration d'Apéry

En juin 1978, au cours des Journées Arithmétiques qui se déroulaient à Luminy,

R. Apéry donna des éléments de preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Le principe de cette preuve réside dans la formule

$$\zeta(3) = \frac{6}{5 - \frac{1^6}{117 - \frac{2^6}{535 - \frac{3^6}{\dots}}}} = \frac{6}{34n^3 - 51n^2 + 27n - 5 - \left(\frac{n^6}{\dots}\right)}$$

Voici quelles étaient les étapes indiquées, dont une preuve a été écrite par H. Cohen, Van der Poorten et D. Zagier.

1er pas :

Si

$$a_n = \sum_0^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

et

$$b_n = \sum_0^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{nk}, \text{ où } c_{nk} = \sum_1^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}}$$

alors les suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation

$$n^3 u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} + (n-1)^3 u_{n-2} = 0.$$

2em pas :

Contrairement au précédent, celui-ci est très facile. Pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$\left| \zeta(3) - c_{n,k} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

On en déduit que

$$\zeta(3) = \lim b_n / a_n,$$

ainsi que la fraction continue ci-dessus et la formule

$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} (c_{n,n} - c_{n-1,n-1}) = \frac{5}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

3em pas :

Si d_n désigne le p.p.c.m. des entiers $1, \dots, n$ alors les nombres $2d_n^3 b_n$ et a_n sont entiers.

La démonstration, assez facile, utilise le fait connu que $\binom{r}{s}$ divise d_r .

4^{em} pas :

Conclusion.

On vérifie par récurrence que l'on a

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{6}{n^3 a_n a_{n-1}}.$$

D'où

$$0 < \zeta(3) - \frac{b_n}{a_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 a_k a_{k-1}} < \frac{c'}{a_n^2}.$$

On démontre aussi l'estimation

$$a_n \sim c \frac{\alpha^n}{n^{3/2}}, \text{ où } \alpha = (1 + \sqrt{2})^4 \text{ (donc } \alpha > e^3).$$

Posons $p_n = 2d_n^3 b_n$, $q_n = 2d_n^3 a_n$, alors, d'après le 3^e pas, p_n et q_n sont des entiers. Des estimations ci-dessus et de

$$\text{Log } d_n \sim n,$$

On déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que l'on ait

$$0 < \left| \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{C(\varepsilon)}{q_n^{r-\varepsilon}},$$

où

$$r = \frac{2 \text{Log } \alpha}{3 + \text{Log } \alpha} > 1 \quad (\text{car } \alpha > e^3).$$

En choisissant ε tel que $r - \varepsilon > 1$ le critère montre que $\zeta(3)$ est irrationnel.

On peut même déduire de la formule précédente une bonne mesure d'irrationalité de $\zeta(3)$. Pour ce faire, on utilise le lemme suivant dont la démonstration est élémentaire.

Lemme 1 : Si un nombre ζ admet une infinité d'approximations rationnelles distinctes p_n/q_n qui vérifient

$$\left| \zeta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^\theta} \quad \text{avec } \theta > 1, q_n > 0,$$

$$q_{n+1} < c_1 q_n, c_1 \text{ constante,}$$

alors pour tout rationnel p/q on a

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_2}{q^{\frac{\theta}{\theta-1}}}$$

pour une certaine constante positive c_2 .

Ici on obtient

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_2}{q^{13,42}} .$$

Remarque : Pour $\zeta(2)$, Apéry a obtenu la formule

$$\zeta(2) = \frac{5}{3 + \frac{1^4}{25 + \frac{2^4}{69 + \dots + \frac{n^4}{11n^2 + 11n + 3 + \dots}}}}$$

qui permet de démontrer l'irrationalité de $\zeta(2)$ (et donc de π^2) ainsi que la mesure

$$\left| \zeta(2) - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_3}{q^{11,86}} \quad (c_3 \text{ constante}).$$

Auparavant, le meilleur résultat connu était (voir [M])

$$\left| \pi^2 - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_4}{q^{18}} .$$

Pour π on sait seulement que l'on a

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_5}{q^{20}} .$$

IV. La preuve de Beukers

Elle repose sur le résultat élémentaire suivant

Lemme 2 : Soient $r \geq s \geq 0$ des entiers. On considère les intégrales

$$I_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy, \quad J_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\text{Log}(xy)}{1-xy} x^r y^s dx dy.$$

Alors, si $r > s$ on a

$$a) d_r^2 I_{r,s} \in \mathbb{Z}, \quad (\text{où } d_r = \text{p.p.c.m.}(1, 2, \dots, r))$$

$$b) d_r^3 J_{r,s} \in \mathbb{Z},$$

tandis que

$$c) I_{r,r} = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \dots - \frac{1}{r^2} ,$$

$$d) J_{r,r} = 2 \left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \dots - \frac{1}{r^3} \right) .$$

Démonstration

Pour $\sigma \geq 0$, en développant $(1-xy)^{-1}$ en série on obtient la formule

$$(1) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)}$$

Pour $r > s$ cette dernière expression vaut

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1} \right) = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+1+\sigma} + \dots + \frac{1}{r+\sigma} \right).$$

En faisant $\sigma = 0$ on obtient l'assertion a).

En dérivant par rapport à σ , pour $\sigma = 0$ on trouve

$$-J_{r,s} = \frac{-1}{r-s} \left(\frac{1}{(s+1)^2} + \dots + \frac{1}{r^2} \right),$$

d'où la propriété b).

Pour obtenir c) on fait $r = s$ et $\sigma = 0$ dans (1).

Lorsque $r = s$, en dérivant (1) par rapport à σ et en prenant $\sigma = 0$ on obtient d).

Démontrons d'abord l'irrationalité de $\zeta(2)$.

Théorème 1 : $\zeta(2)$ est irrationnel

Démonstration :

Considérons la quantité

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx dy,$$

où $P_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(x^n (1-x)^n \right)$ est le polynôme de Legendre (qui est à coefficients entiers). Grâce au lemme 2 on montre que I_n est de la forme

$$I_n = (A_n + B_n \zeta(2)) d_n^{-2}, \quad A_n \text{ et } B_n \in \mathbb{Z}.$$

En intégrant par parties relativement à x , on obtient l'expression

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n (1-y)^n x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy.$$

On vérifie assez facilement la majoration

$$0 \leq \frac{y(1-y) \cdot x(1-x)}{1-xy} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5 \quad \text{pour } 0 \leq x, y \leq 1.$$

Ceci conduit à l'estimation

$$0 < |I_n| \leq \beta^n \zeta(2), \quad \text{où } \beta = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5.$$

Ainsi, on a

$$0 < |A_n + B_n \zeta(2)| < (d_n^2 \beta)^n \zeta(2),$$

et comme $\beta e^2 < 1$ et $\text{Log } d_n \sim n$, on conclut, grâce au critère, que $\zeta(2)$ est irrationnel.

Nous arrivons au terme de notre route.

Théorème 2 : $\zeta(3)$ est irrationnel

Démonstration :

Considérons cette fois l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\text{Log } xy}{1-xy} P_n(x) P_n(y) dx dy.$$

Le lemme 2 permet de démontrer que J_n est de la forme

$$J_n = (A'_n + B'_n \zeta(3)) d_n^{-3}, \text{ avec } A'_n, B'_n \text{ entiers.}$$

On vérifie aisément la relation

$$-\frac{\text{Log } xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz,$$

qui permet d'écrire

$$J_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x) P_n(y)}{1-(1-xy)z} dx dy dz.$$

En intégrant n fois par parties relativement à x , il vient

$$J_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n (1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz.$$

Posons

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w} \quad \text{et} \quad dz = \frac{-xydw}{(1-(1-xy)w)^2}$$

alors J_n s'écrit

$$J_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^n (1-w)^n \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w} dx dy dw.$$

Intégrons maintenant n fois par parties par rapport à la variable y , on obtient

$$J_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n w^n (1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} dx dy dw.$$

On vérifie que

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq (\sqrt{2}-1)^4 \text{ pour } 0 \leq x, y, w \leq 1.$$

D'où l'encadrement

$$0 < |J_n| < \alpha^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dw}{1-(1-xy)w} = \alpha^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\text{Log } xy}{1-xy} dx dy = 2 \alpha^n \zeta(3),$$

où $\alpha = (\sqrt{2}-1)^4$.

Par conséquent, on a

$$0 < |(A'_n + B'_n \zeta(3))| < (d_n^3 \alpha)^n \cdot 2 \zeta(3).$$

Comme $\alpha < e^{-3}$, le critère s'applique encore et on constate que $\zeta(3)$ est irrationnel.

Références

R. APÉRY.-

Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Journées Arithmétiques de Luminy, Astérisque 61 (1979), p. 11-13.

F. BEUKERS.-

A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, J. London Math. Soc.

H. COHEN.-

Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apéry), Séminaire de Théorie des Nombres, Grenoble, oct. 1978.

M. MIGNOTTE.-

Approximations rationnelles de $\bar{\pi}$ et quelques autres nombres, Journées arithmétiques de Grenoble, Bull. Soc. Math. de France, mémoire 37 1974, p. 121-132.

R. Van der POORTEN.-

A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$.

M. MIGNOTTE