

# Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques.

J. DIEUDONNE

Je voudrais brosser quelques traits généraux de l'évolution des mathématiques et surtout dissiper des idées inexactes.

Tout d'abord rappeler qu'au moins 80 % des mathématiques datent de moins de 150 ans aussi bien en ce qui concerne les résultats que les techniques et que les idées. A l'appui de ce que j'avance on peut lire dans le livre "Panorama des Mathématiques Pures" que j'ai publié chez Gauthier-Vil. que j'y ai classé les mathématiques en 26 rubriques dont 20 sont bourbachiques et 6 non bourbachiques. Parmi ces 26 rubriques il y en a :

UNE : L'analyse classique dont la moitié de ce qu'elle recouvre était connue avant 1840

NEUF : qui n'existaient pas avant 1895 : à savoir :

- la topologie générale
- la topologie algébrique
- les espaces vectoriels topologiques
- la théorie spectrale
- l'algèbre de Von Neumann
- la théorie ergodique
- l'analyse harmonique non commutative
- les catégories
- l'algèbre homologique

Toutes ces rubriques débordent d'activité à l'heure actuelle

QUATRE : remontent à 1870 :

- la théorie des ensembles (1872)
- les groupes de Lie (1873)
- les formes modulaires et automorphes
- les fonctions de plusieurs variables complexes.

enfin il en reste

DOUZE dont seules des bribes étaient connues avant 1830.

- l'algèbre
- la logique mathématique
- la théorie des nombres (seul 20 % étaient connus avant 1840)

- l'algèbre commutative
- la géométrie algébrique
- la théorie des groupes (Cauchy 1815 - Galois 1830)
- l'intégration
- l'analyse harmonique (où il n'y avait rien en dehors de Fourier)
- les équations différentielles
- les équations aux dérivées partielles
- la géométrie différentielle
- les probabilités (en fait elles sont postérieures à 1830)

Cela donne bien une idée du développement des mathématiques actuelles. Mais ce qui est intéressant c'est de connaître les raisons de l'accélération du progrès des mathématiques.

Que s'est-il passé depuis 200 ans pour que l'on assiste à cette explosion d'idées ? Car avant c'était la préhistoire ! Il faut faire justice d'une théorie idiote et monstrueuse : qui veut que ce soit la société ambiante qui impose complètement le développement. Cela est faux bien qu'elle ait eu une influence. Il s'agit tout au plus d'une chiquenaude ; les mathématiques ayant leur vie propre. Par exemple, bien des problèmes de physique (équations aux dérivées partielles ) ont ainsi hérité de méthodes venues de l'expérience physique comme le principe des extremaux ou la notion d'énergie. Mais, et cela est le plus courant, de nombreux problèmes sont purement mathématiques et se sont développés indépendamment. C'est pourquoi on peut affirmer que le progrès mathématique est le plus souvent d'origine interne, même si l'idée initiale est parfois tirée d'un problème concret.

Exemples :

- 1° Le problème de la duplication du cube dont la légende raconte qu'il a été posé par Apollon à propos d'un autel cubique qui lui était dédié et dont le volume devait être doublé pour qu'il accepte d'éloigner la peste de la ville. On ignore souvent que ce problème a eu pour conséquence le développement de la théorie des coniques pour construire par intersection  $\sqrt[3]{2}$ .
- 2° L'apparition des complexes est dûe à la recherche de la résolution des équations du 3e et 4e degré et à l'époque les Italiens ne comprenaient pas du tout ce qu'ils faisaient. La découverte était un peu dûe au hasard.
- 3° Plus près de nous la découverte de l'irrationalité de  $\zeta(3)$  par Apéry est un heureux hasard et Apéry lui-même n'a pas très bien compris pourquoi sa démonstration "marche". Actuellement de nombreux chercheurs se penchent sur ses travaux pour essayer de comprendre et peut être que cela prendra des siècles pour que quelqu'un arrive à trouver ce qui se passe.

Ce hiatus entre les premiers résultats et la compréhension globale est phénomène courant en mathématique.

En voici quelques exemples :

- 1) Les premiers résultats sur les équations algébriques mis en forme par Euler ont conduit Galois aux deux structures de groupe et de corps qui étaient sous-jacentes.
  - 2) Les équations aux dérivées partielles posées à l'occasion d'étude de problèmes physiques ont donné naissance aux espaces topologiques, aux espaces normés puis à la théorie spectrale des opérateurs qui a elle-même une application directe à la physique quantique.
  - 3) L'étude de la Géométrie différentielle a conduit aux espaces fibrés, à la notion de connexion puis aux faisceaux et feuilletages.
- .....

On voit ainsi apparaître de grandes structures dont la principale vertu est de se répandre et d'envahir les mathématiques. Elles amènent l'unité en ce sens qu'elles se retrouvent dans tout compartimentage qu'on voudra mettre dans les mathématiques. Voyons l'exemple de la géométrie algébrique dont les prémisses remontent à Descartes avec l'introduction des "repères cartésiens". La Géométrie subit alors pendant le 18e siècle l'influence de l'analyse. Puis avec Riemann et Dedekind des problèmes de théorie des nombres apparaissent en Géométrie (et réciproquement). A la fin du 19e siècle, des liens étroits se nouent avec la topologie algébrique (en particulier à travers la notion de cycle). Aujourd'hui on peut affirmer que toutes les notions ont une application en géométrie algébrique et que par contre coup, la géométrie algébrique a englobé avec les idées de Grothendieck toute l'algèbre commutative et engendre actuellement l'algèbre homologique. On en arrive à considérer les nombres entiers comme des fonctions sur un espace topologique. Ce qui, pour un mathématicien de mon âge est surprenant.

Par ailleurs, en migrant hors de leur domaine de naissance, les structures entraînent avec elles leurs intuitions. Il y a donc un transfert des méthodes qui fait que maintenant l'intuition géométrique (par exemple) a envahi toutes les mathématiques.

On dit que dans un bon roman, les personnages acquièrent une vie propre. Il en va de même des structures qui prennent un aspect protéiforme, une vie propre. En résumé ce sont les inventions des structures (et aujourd'hui des foncteurs) qui font avancer le progrès mathématique. Et soyons certains qu'il en reste à découvrir.

- 1) On fait du calcul différentiel sans notion de limite, c'est le calcul différentiel abstrait qu'on effectue même sur des corps de caractéristique non nulle !
- 2) On a pensé pendant longtemps que les structures algébriques devaient s'appuyer sur la notion d'ensemble. Eh bien, on fait des structures algébriques sur des catégories.
- 3) La théorie de Kan qui, sur des objets simpliciaux mime la topologie algébrique.

A ce propos, il est nécessaire de faire quelques rappels :

- 1° La découverte des structures est contemporaine de l'adoption du langage ensembliste. Maintenant, on dispose des foncteurs, à condition de ne pas en abuser !
  - 2° La mise en évidence d'une structure s'accompagne de l'augmentation de la précision du langage. C'est un fait bien connu qu'à la lecture d'un texte du 19e siècle il est rarement possible de savoir de quoi parle l'auteur : quel type de fonction ? Quel type de nombre ? ...
  - 3° Les anciens manipulaient des objets naturels ou diverses structures sont mélangées ce qui ne facilite pas leur mise en évidence. Il a fallu attendre Cantor pour que sur la droite réelle soient distingués le cardinal, la structure de groupe, de corps, l'ordre, l'espace topologique, l'espace mesuré...
- Je me souviens de ma propre surprise quand j'ai vu qu'il y avait plusieurs topologies, plusieurs mesures sur  $\mathbb{R}$ . Certains de mes maîtres ne l'ont jamais admis ! Ce changement de point de vue a été difficilement accepté par les contemporains de Cantor qui a été en butte à de nombreuses attaques. Changer de façon de voir est fatigant d'où la tendance au conservatisme, tendance qui fait subir ses ravages essentiellement dans l'enseignement, mais parfois aussi chez de très grands mathématiciens surtout s'ils vieillissent. C'est ainsi que l'on a vu des mathématiciens manifester leur répugnance devant la notion de nombre p-adique, devant les distributions, que l'on continue à enseigner l'intégrale de Riemann en vertu d'un attachement sentimental à des notions qui ont fait leur temps, qu'il a fallu 80 ans pour que les idées de Grassman et Peano en géométrie, balaient les coordonnées et matrices constamment utilisées.

La maturation s'accompagne parfois de tâtonnements et d'incertitudes mais ce n'est certainement pas la démarche habituelle de l'ensemble des mathématiques contrairement à ce que pensent et veulent faire croire certains philosophes. Ce n'est le plus souvent le cas que dans les branches en formations comme par exemple la formule d'Euler finalement correctement démontrée par Poincaré - (exemple choisi par Dakatos dans son livre "Proofs and refutations"). Par contre, il n'y a jamais eu de tâtonnement en théorie des nombres.

Les philosophes aiment aussi à gloser sur les crises dans l'évolution des mathématiques. Il ne peut y avoir crise que s'il y a changement du mode de pensée comme par exemple en physique l'introduction de la relativité. Il n'y a jamais eu de telle chose en mathématique sauf peut être (mais nous manquons de renseignements) lors de la découverte des irrationnels par les Grecs. Par contre il y a eu et il y aura toujours remise en ordre dans des méthodes peu précises. En ce sens il y a une crise des fondements vers 1895 quand on a voulu étendre les règles usuelles de maniements des ensembles finis aux ensembles infinis sans chercher à préciser ce que l'on faisait. Grâce aux axiomes de Z.F. (Zermelo- Fraenkel) on a pu préciser les propriétés des ensembles infinis et le langage y afférant. Mais actuellement presque tous les mathématiciens font comme si les axiomes ZF n'existaient pas, car ils en respectent inconsciemment les règles comme le faisaient les mathématiciens avant leur introduction. Personne ne commence un mémoire par une profession de foi : "Je travaille dans le système ZF". Les antinomies ont été créées de toute pièce par les philosophes pour embêter les gens car aucun mathématicien ne croit sérieusement à la possible contradiction des mathématiques et en dehors de ceux qui se spécialisent en théorie des ensembles ou en logique (et qui restent très marginaux) on ne parle pas de philosophie en mathématique. Si les découvertes des logiciens postérieures à 1925 venaient à disparaître, aucun mathématicien ne s'en apercevrait \*.

J'affirme même qu'il n'y a pas de crise de fondement et même qu'il n'y en a jamais eu, même entre 1895 et 1930. Cela n'est qu'une invention des philosophes, la meilleure preuve en est que leurs critiques n'a nullement entamé le progrès mathématique de l'époque qui reste une période des plus fécondes dans toutes les branches des mathématiques.

D'après les notes de  
E. Chaney et J. Lefort

\* Elles ont cependant pour effet positif de rendre les mathématiciens plus modestes : Hilbert croyait qu'on pouvait montrer la non-contradiction des maths, mais Gödel et Cohen ont montré que c'était grotesque.